Efectos Regularizantes en Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas

Trabajo Fin de Grado

Autor:

Antonio Jesús Martínez Aparicio

Tutores:

José Carmona Tapia

Pedro Jesús Martínez Aparicio

Grado en Matemáticas

Mayo, 2021

Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

Elliptic partial differential equations are used to model phenomena that do not depend on time. In physics, these equations appear in fields as diverse as electrostatics or fluid dynamics.

As is usually the case with partial differential equations, there is, in general, no explicit formula for solving this type of equation. Moreover, it is possible that some equations do not have a solution or, if they do, the solution is not unique or has bad properties.

That is why, in this work, we will see under what conditions some elliptic equations have a solution and in which cases this solution is unique. We will also study some theorems that guarantee good properties of the solution, such as its boundedness or its non-negativity.

In particular, we will focus on some of the elliptic problems studied by Arcoya and Boccardo in [1] and [2] and we will even dare to generalize some of their results.

Among all of them, the most general problem we will study will be

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^N$, $M(x)$ is a bounded elliptic matrix, $a(x) \in L^1(\Omega)$ with $a(x) \geq 0$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous and $f(x,s)$ is continuous in s. We will be able to prove the existence of a unique weak solution and a strong maximum principle by imposing, among other conditions, that there exists a continuous and positive $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(x,s)| \leq a(x)h(s) \text{ a.e. in } \Omega \times \mathbb{R}.$$

As we will see, the concept of weak solution is directly related to Sobolev spaces and, therefore, these spaces will be a cornerstone in our study.

Resumen en español

Las ecuaciones en derivadas parciales elípticas sirven para modelar fenómenos que no dependen del tiempo. En Física, estas ecuaciones aparecen en campos tan diversos como la electrostática o la dinámica de fluidos.

Como suele ocurrir con la gran mayoría de ecuaciones en derivadas parciales, no existe, en general, una fórmula explícita para resolver este tipo de ecuaciones. Es más, es posible que algunas ecuaciones no tengan solución o que, en caso de tenerla, dicha solución no sea única o tenga malas propiedades.

Es por ello que, en este trabajo, nos dedicaremos a ver bajo qué condiciones algunas ecuaciones elípticas tienen solución y en qué casos dicha solución es única. También estudiaremos algunos teoremas que nos garanticen buenas propiedades de la solución, como su acotación o su no negatividad.

En concreto, nos centraremos en algunos de los problemas elípticos estudiados por Arcoya y Boccardo en [1] y [2] e, incluso, nos atreveremos a generalizar algunos de sus resultados.

De entre todos, el problema más general que estudiaremos será

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $M(x)$ es una matriz elíptica acotada, $0 \leq a(x) \in L^1(\Omega)$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x,s)$ es continua en s. Seremos capaces de probar la existencia de una única solución débil y un principio del máximo fuerte imponiendo, entre otras condiciones, que exista $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y positiva tal que

$$|f(x,s)| \leq a(x)h(s) \text{ c.t.p. en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Como veremos, el concepto de solución débil está relacionado de forma directa con los espacios de Sobolev y, por ello, estos espacios serán un pilar fundamental en todo nuestro estudio.

Introducción

En 2015, David Arcoya y Lucio Boccardo publicaron el artículo [1]. En él, probaron la existencia y unicidad de solución de varios problemas de Dirichlet. Más tarde, en 2020, retomaron el estudio de algunos de estos problemas y fueron capaces de demostrar varios principios del máximo en el artículo [2].

El problema más sencillo que se estudia en estos artículos es

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)u = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $M(x)$ es una matriz elíptica acotada.

Gracias al Teorema de Lax-Milgram 3.1, la existencia de solución débil del problema (1) queda garantizada cuando $0 \le a(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ para $p \in [2, \infty]$. En el artículo [1], Arcoya y Boccardo consiguen ir más allá y son capaces de generalizar estas condiciones a cambio de establecer una novedosa interacción entre $a(x)$ y $f(x)$. En concreto, son capaces de probar que si

$$|f(x)| < Qa(x) \text{ c.t.p. en } \Omega \text{ para algún Q>0},$$

entonces basta con que $a(x), f(x) \in L^1(\Omega)$ para que exista una única solución débil de (1) que, además, será acotada.

Pero la cosa no acaba aquí. En el artículo [2] logran probar un principio del máximo fuerte, es decir, logran dar condiciones sobre $a(x)$ y $f(x)$ bajo las cuales la solución del problema es estrictamente positiva. En particular, demuestran que si $0 \le a(x) \in L^1(\Omega)$ no es idénticamente nula y $f(x) = Qa(x)$ para algún $Q > 0$, entonces la única solución del problema (1), además de ser acotada, es estrictamente positiva.

En este trabajo generalizamos ambos resultados. Uno de los problemas que estudiaremos será

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $M(x)$ es una matriz elíptica acotada y $f(x,s)$ es continua en s.

Con el objetivo probar la existencia de solución débil del problema (2) impondremos, siguiendo las ideas de [1], que $0 \le a(x) \in L^1(\Omega)$ y que exista $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y positiva tal que

$$|f(x,s)| \le a(x)h(s) \text{ c.t.p. en } \Omega \times \mathbb{R}.$$

Aun así, estas condiciones no son suficientes para probar la existencia de solución. Como veremos en este trabajo, para demostrarlo será necesario exigir a h alguna condición más.

Del mismo modo, seguiremos las ideas de [2] para probar un principio del máximo fuerte. Probaremos que si $0 \le a(x) \in L^1(\Omega)$ no es idénticamente nula y $f(x,s) = a(x)h(s)$ para alguna $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo, entre otras cosas, que es continua y positiva, entonces el problema (2) tiene una única solución que, además, es acotada y estrictamente positiva.

Como podremos imaginar, probar todo esto requiere de un marco teórico adecuado. Es por ello que dedicaremos los tres primeros capítulos a preparar este marco y, en el último capítulo, demostraremos los dos teoremas aquí mencionados. De forma más detallada, el contenido de cada capítulo puede resumirse del siguiente modo:

- En el Capítulo 1 definiremos los espacios $L^p(\Omega)$ y veremos algunas de sus propiedades más interesantes. Además, estudiaremos varios teoremas relacionados con la convergencia de sucesiones en estos espacios.
- En el Capítulo 2 nos centraremos en los espacios de Sobolev. Veremos una versión de la regla de la cadena en estos espacios, así como también veremos algunos teoremas clásicos como, por ejemplo, el Teorema de Rellich-Kondrachov 2.3 o la desigualdad de Poincaré 2.4. Por último, probaremos algunos resultados de convergencia de sucesiones en estos espacios.
- En el Capítulo 3 nos dedicaremos al estudio del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

  donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado y $M(x)$ es una matriz elíptica acotada. Comenzaremos el capítulo demostrando un teorema de existencia y unicidad de solución débil para este problema. Después, probaremos dos principios del máximo: uno débil y otro fuerte. Por último, veremos algunas condiciones bajo las cuales la solución de este problema está acotada.
- En el Capítulo 4 estudiaremos una versión más general del problema (2). Como ya hemos comentado anteriormente, lo que haremos será demostrar un teorema de existencia de solución débil y un principio del máximo fuerte, entre otros.

1 Espacios $L^p(\Omega)$

1.1 Definición

Comenzaremos definiendo los espacios que dan nombre a este capítulo. En dichas definiciones y durante el resto del capítulo consideraremos que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.1. *Dado $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de funciones integrables $L^p(\Omega)$ como*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}.$$

En el caso en el que $p = \infty$, se define el espacio de funciones esencialmente acotadas $L^\infty(\Omega)$ como

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega \}.$$

En estos espacios identificaremos aquellas funciones que sean iguales c.t.p. en Ω, por lo que los elementos de estos espacios serán realmente clases de equivalencia. Aun así, permitiendo un abuso de notación, cuando indiquemos $f \in L^p(\Omega)$ o $f \in L^\infty(\Omega)$ lo que estaremos haciendo será tomar una función f y no una clase de equivalencia.

A estos conjuntos podemos dotarlos de la estructura propia de un espacio vectorial definiendo las operaciones suma y producto externo como es habitual. No obstante, esta estructura no es suficiente, pues necesitamos dotarlos de una norma. Si $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; \forall f \in L^p(\Omega)$$

y, si $p = \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f| := \text{ínf}\{C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}, \; \forall f \in L^\infty(\Omega),$$

donde “ess sup” hace referencia a supremo esencial.

Puede demostrarse que, efectivamente, estas aplicaciones que acabamos de definir son normas. Es más, se puede probar que para $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach. Estas demostraciones pueden consultarse en [4, Teorema 4.7, Teorema 4.8].

De entre todos estos espacios, el caso $p = 2$ es especial, pues en $L^2(\Omega)$ podemos definir el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg, \; \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

La norma que induce este producto escalar coincide con la norma que ya habíamos definido en $L^2(\Omega)$. Como consecuencia, el espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Algo más que podemos hacer es estudiar, entre otras propiedades, su reflexividad y su separabilidad. La siguiente proposición recoge estos aspectos.

Proposición 1.1. *Los espacios $L^p(\Omega)$ son reflexivos si, y solo si, $1 < p < \infty$. Por otro lado, tales espacios son separables si, y solo si, $1 \leq p < \infty$.*

Sobre estos espacios podríamos seguir estudiando otras propiedades como, por ejemplo, ver a qué son isomorfos sus espacios duales. Algo más que podríamos hacer es demostrar algunos teoremas de representación para dichos espacios duales. En cambio, no profundizaremos en estos aspectos, pues no son el objetivo de este trabajo. Para saber más sobre estos hechos o para consultar la demostración de la proposición anterior remítase a [4, Sección 4.3].

A continuación, enunciaremos una desigualdad cuyo uso será recurrente a lo largo de este texto: la desigualdad de Hölder. De nuevo, no demostraremos este resultado. Su prueba puede consultarse en [4, Teorema 4.6].

Para simplificar su enunciado es necesario hacer una definición previa.

Definición 1.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y adoptemos el convenio de que $\frac{1}{\infty}$ es 0. Se define el exponente conjugado de p, notado por p', como*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Hecho esto, estamos ya en condiciones de enunciar la desigualdad mencionada.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Sea $f \in L^p(\Omega)$ y sea $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Finalizamos la sección indicando cuáles son las relaciones de inclusión existentes entre estos espacios. Como veremos, para que dichas relaciones puedan darse es necesario imponer que Ω tenga medida finita.

Proposición 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto de medida finita y sean $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces existe una constante $C \geq 0$ dependiendo únicamente de p, q y Ω tal que*

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q, \ \forall f \in L^q(\Omega).$$

Como consecuencia, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Demostración:

El caso en el que $q = \infty$ es inmediato, pues

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega \|f\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\text{meas}(\Omega)\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty, \ \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

Veamos el caso en el que $1 \leq q < \infty$. Dado $f \in L^q(\Omega)$, teniendo en cuenta que $p < q$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder 1.1 a las funciones $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ y $1 \in L^{\left(\frac{q}{p}\right)'}(\Omega)$ para obtener que

$$\int_\Omega |f|^p \leq \left(\text{meas}(\Omega)\right)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

La demostración concluye elevando esta expresión a $\frac{1}{p}$.

■

Comentario 1.1. Esta proposición nos proporciona mucho más que una simple inclusión entre conjuntos. Más adelante, en la Sección 2.4, veremos que lo que acabamos de probar es que $L^q(\Omega)$ es una inyección continua en $L^p(\Omega)$, notado por $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

1.2 Teoremas de convergencia

En gran parte de este texto trabajaremos con sucesiones que están en los espacios $L^p(\Omega)$. Por ello, es necesario conocer algunos resultados que nos den información sobre la convergencia de estas sucesiones.

Comenzamos enunciando dos teoremas clásicos.

Teorema 1.2 (**de la convergencia monótona**). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de $L^1(\Omega)$ verificando que*

(a) $f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n \le f_{n+1} \le \cdots$ c.t.p. *en* Ω,

(b) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.

Entonces $\{f_n(x)\}$ converge c.t.p. *en Ω a un límite finito, que denotamos por $f(x)$. Además, esta función f pertenece a $L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.*

Teorema 1.3 (**de la convergencia dominada**). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ verificando que*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p. *en* Ω,

(b) existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \le g(x)$ c.t.p. *en Ω para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Tanto estos dos teoremas como el siguiente están relacionados con la convergencia c.t.p. en Ω. Recordemos que una sucesión de funciones es convergente c.t.p. en Ω si converge puntualmente en todo Ω salvo, quizás, en algún conjunto de medida nula.

La demostración del teorema que aparece a continuación está tomada de [4, Teorema 4.9].

Teorema 1.4. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de $L^p(\Omega)$ y sea $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Existe una parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ de $\{f_n\}$ y una función $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

(a) $f_{\sigma(n)}(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p. *en* Ω.

(b) $|f_{\sigma(n)}(x)| \le h(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c.t.p. *en* Ω.

<u>Demostración:</u>

Veamos primero el caso en el que $p = \infty$. Como $\|f_n - f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f_n - f| \to 0$, existe un conjunto $E \subset \Omega$ de medida nula tal que $\sup_{\Omega\setminus E} |f_n - f| \to 0$. De aquí es fácil deducir que $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ para cada $x \in \Omega\setminus E$, es decir,

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Por otra parte, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)| - |f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{\Omega\setminus E} |f_n - f| < 1, \ \forall n > n_0, \ \forall x \in \Omega\setminus E.$$

Si definimos $h(x) = \max\{|f_1(x)|, \ldots, |f_{n_0}(x)|, 1 + |f(x)|\}$ en Ω, de las hipótesis deducimos que $h \in L^\infty(\Omega)$ y, por cómo está definida h, se cumplirá que $|f_n(x)| \le h(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega\setminus E$, es decir,

$$|f_n(x)| \le h(x), \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Veamos ahora el caso en el que $1 \leq p < \infty$. En primer lugar, observemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Por ello, es posible construir una parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ de $\{f_n\}$ tal que

$$\|f_{\sigma(n+1)} - f_{\sigma(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta sucesión se construye tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2}$, $\forall m, n \geq n_1$ y definiendo $\sigma(1) = n_1$; después tomando $n_2 > n_1$ tal que $\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^2}$, $\forall m, n \geq n_2$ y definiendo $\sigma(2) = n_2$; etc.

Hecho esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{\sigma(k+1)}(x) - f_{\sigma(k)}(x)|, \ \forall x \in \Omega.$$

Se cumple así que

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como la sucesión $\{g_n^p\}$ está en $L^1(\Omega)$ y verifica las hipótesis del Teorema de la convergencia monótona 1.2, podemos aplicar este resultado para afirmar que $\{g_n^p(x)\}$ converge a una función $g^p(x)$ c.t.p. en Ω con $g^p \in L^1(\Omega)$. Observemos que, como las funciones $s \mapsto \sqrt[p]{s}$ y $s \mapsto s^p$ son continuas, esto es equivalente a decir que $g_n(x) \to g(x)$ c.t.p. en Ω con $g \in L^p(\Omega)$. Así, existe un conjunto $E \subset \Omega$ de medida nula tal que $g_n(x) \to g(x)$ para cada $x \in \Omega \backslash E$.

Además, por cómo se han definido las funciones g_n, tenemos que

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{\sigma(k+1)}(x) - f_{\sigma(k)}(x)|, \ \forall x \in \Omega \backslash E.$$

De esta forma, para $m \geq n \geq 2$ y para $x \in \Omega \backslash E$ se cumple que

$$|f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(n)}(x)| \leq |f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(m-1)}(x)| + \cdots + |f_{\sigma(n+1)}(x) - f_{\sigma(n)}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Observemos que el término de la derecha de esta desigualdad tiende a 0. Por lo tanto, fijado $x \in \Omega \backslash E$, la sucesión $\{f_{\sigma(n)}(x)\}$ es de Cauchy y, en consecuencia, tendrá límite. Si definimos

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} f_{\sigma(n)}(x), \ \forall x \in \Omega \backslash E,$$

podemos decir que $f_{\sigma(n)}(x) \to f^*(x)$ c.t.p. en Ω. Notemos que, en principio, f^* no tiene por qué ser igual que f. Siguiendo el mismo procedimiento que en la desigualdad anterior, deducimos que para cada $m \geq n \geq 1$ y c.t.p. en Ω se cumple que

$$|f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(n)}(x)| \leq |f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(m-1)}(x)| + \cdots + |f_{\sigma(n+1)}(x) - f_{\sigma(n)}(x)| \leq g(x).$$

Tomando límites cuando $m \to \infty$, tenemos que

$$|f^*(x) - f_{\sigma(n)}(x)| \leq g(x), \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{1.1}$$

Como $f_{\sigma(1)}$ y g están en $L^p(\Omega)$, usando la desigualdad triangular inversa se prueba que $f^* \in L^p(\Omega)$. Como $|f_{\sigma(n)}(x) - f^*(x)|^p \to 0$ c.t.p. en Ω y $|f_{\sigma(n)}(x) - f^*(x)|^p \leq g^p(x)$ c.t.p.

en Ω con $g^p \in L^1(\Omega)$, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 a la sucesión $\{|f_{\sigma(n)} - f^*|^p\}$ de $L^1(\Omega)$ para deducir que $\|f_{\sigma(n)} - f^*\|_p \to 0$.

Ahora bien, como por hipótesis sabemos que $\|f_n - f\|_p \to 0$, gracias a la unicidad del límite ya sí que podemos afirmar que $f^* = f$ c.t.p. en Ω. Por lo tanto, $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$ c.t.p. en Ω. Finalmente, por (1.1) concluimos que

$$|f_{\sigma(n)}(x)| \leq g(x) + |f(x)| \in L^p(\Omega),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{c.t.p. en } \Omega.$$

■

Continuamos esta sección con una proposición válida para cualquier espacio normado reflexivo y relacionada con la convergencia débil. Recordemos que una sucesión $\{x_n\}$ de un espacio normado X es débilmente convergente si existe $x \in X$ tal que $\tau(x_n) \to \tau(x)$ para cada $\tau \in X'$, donde X' denota el dual topológico de X.

Proposición 1.3. *Toda sucesión acotada en un espacio normado reflexivo X admite una parcial débilmente convergente.*

Demostración:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X.

En primer lugar, supongamos que X es separable. Como X es reflexivo y separable, entonces X' es separable. Por ello, existe una sucesión $\{\tau_n\}$ que, vista como conjunto, es densa en X'. Observemos que, como $\{x_n\}$ está acotada, las sucesiones $\{\tau_m(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también están acotadas para cada $m \in \mathbb{N}$.

A continuación, definiremos infinitas parciales de $\{x_n\}$ de forma recursiva.

- Como $\{\tau_1(x_n)\}$ es acotada, por el Teorema de Bolzano-Weiertrass existe una parcial $\{x_{\sigma_1(n)}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\{\tau_1(x_{\sigma_1(n)})\}$ es convergente.
- Supongamos que para algún $k_0 \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leq k \leq k_0$ hemos definido la parcial $\{x_{\sigma_k(n)}\}$ de $\{x_{\sigma_{k-1}(n)}\}$ de forma que $\{\tau_c(x_{\sigma_k(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $c \leq k$.
- Como $\{\tau_{k_0+1}(x_{\sigma_{k_0}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, por el Teorema de Bolzano-Weiertrass existe una parcial $\{x_{\sigma_{k_0+1}(n)}\}$ de $\{x_{\sigma_{k_0}(n)}\}$ tal que $\{\tau_{k_0+1}(x_{\sigma_{k_0+1}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Como $\{x_{\sigma_{k_0+1}(n)}\}$ es una parcial de $\{x_{\sigma_{k_0}(n)}\}$, entonces $\{\tau_c(x_{\sigma_{k_0+1}(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para cada $c \leq k_0 + 1$.

Una vez definidas estas sucesiones, utilizamos el método de la diagonal de Cantor para definir

$$\sigma(n) = \sigma_n(n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Obtenemos así que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$. Además, dado $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=k}^{\infty}$ es una parcial de $\{x_{\sigma_k(n)}\}_{n=k}^{\infty}$, por lo que $\{\tau_k(x_{\sigma(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Una vez construida la parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$, nuestro objetivo será probar que dicha parcial converge débilmente.

Veamos primero que dado $\tau \in X'$, la sucesión $\{\tau(x_{\sigma(n)})\}$ converge. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_{\sigma(n)}\}$ es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$\|x_{\sigma(n)}\| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como el conjunto $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X', existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\tau - \tau_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Como además la sucesión $\{\tau_k(x_{\sigma(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, también es de Cauchy. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|\tau_k(x_{\sigma(m)}) - \tau_k(x_{\sigma(n)})| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall m, n \geq n_0.$$

Teniendo todas estas desigualdades en cuenta, obtenemos que

$$\begin{aligned}|\tau(x_{\sigma(m)}) - \tau(x_{\sigma(n)})| &\leq |\tau(x_{\sigma(m)}) - \tau_k(x_{\sigma(m)})| + |\tau_k(x_{\sigma(m)}) - \tau_k(x_{\sigma(n)})| + |\tau_k(x_{\sigma(n)}) - \tau(x_{\sigma(n)})| \\ &\leq \|\tau - \tau_k\| \|x_{\sigma(m)}\| + |\tau_k(x_{\sigma(m)}) - \tau_k(x_{\sigma(n)})| + \|\tau - \tau_k\| \|x_{\sigma(n)}\| \\ &< \varepsilon, \ \forall m, n \geq n_0.\end{aligned}$$

Deducimos así que $\{\tau(x_{\sigma(n)})\}$ es de Cauchy y, como $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es completo, $\{\tau(x_{\sigma(n)})\}$ converge.

Veamos ahora que existe el límite débil de $\{x_{\sigma(n)}\}$. Consideremos el funcional lineal $\ell\colon X' \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $\ell(\tau) = \lim_{n\to\infty} \tau(x_{\sigma(n)})$. Observemos que, por lo que acabamos de probar, este funcional está bien definido y, además, es continuo, pues como para cada $\tau \in X'$ se cumple que

$$|\tau(x_{\sigma(n)})| \leq \|\tau\| \|x_{\sigma(n)}\| \leq M\|\tau\|, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces
$$|\ell(\tau)| = \left|\lim_{n\to\infty} \tau(x_{\sigma(n)})\right| = \lim_{n\to\infty} |\tau(x_{\sigma(n)})| \leq M\|\tau\|, \ \forall \tau \in X'.$$

Por lo tanto, $\ell \in X''$. Como X es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $\ell(\tau) = \tau(x)$ para cada $\tau \in X'$. Por la forma en la que se ha definido ℓ, esto último nos permite afirmar que x es el límite débil de $\{x_{\sigma(n)}\}$ y, así, esta sucesión es convergente débil, como queríamos probar.

Supongamos ahora que X no es separable. Sea Y el cierre del subespacio generado por el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, sea $Y = \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Como X es reflexivo e Y es un subespacio cerrado de X, deducimos que Y también es reflexivo. Además, Y es separable, pues el conjunto formado por las combinaciones lineales finitas de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$ (o su análogo en $\mathbb{C}$) es denso en Y.

De esta forma, si tenemos en cuenta las propiedades que satisface Y y que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de Y, podemos aplicar lo ya probado en esta demostración para afirmar que existe una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$ y un elemento $x \in Y$ tales que $\phi(x_{\sigma(n)}) \to \phi(x)$ para cada $\phi \in Y'$.

Ahora bien, dado $\tau \in X'$, tenemos que $\tau|_Y \in Y'$ y así

$$\tau(x_{\sigma(n)}) = \tau|_Y(x_{\sigma(n)}) \to \tau|_Y(x) = \tau(x).$$

Por tanto, x es el límite débil de $\{x_{\sigma(n)}\}$. En definitiva, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$ convergente débil, como queríamos probar.

■

Para finalizar esta sección, demostraremos un lema válido para espacios métricos. Su importancia radica en que, a veces, necesitamos que toda la sucesión converja. En cambio, algunos resultados como, por ejemplo, el Teorema 1.4 o la Proposición 1.3, toman sucesiones parciales para obtener mejores propiedades. Este lema permitirá extender, bajo ciertas condiciones, la convergencia de dichas parciales a la convergencia de la sucesión completa.

Lema 1.1. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de* X *tal que de cada parcial suya se puede extraer una parcial convergente a algún* $x \in X$ *fijo. Entonces* $x_n \to x$.

Demostración:

Probaremos este lema por contrarrecíproco. Supongamos que $\{x_n\}$ no converge a x. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, x) \geq \varepsilon_0$. En consecuencia, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon_0\}$ es infinito. Por lo tanto, podemos considerar $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow A$ estrictamente creciente. Como $d(x_{\sigma(n)}, x) \geq \varepsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos afirmar que la parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$ no admite ninguna parcial convergente a x, tal y como queríamos probar.

■

Espacios de Sobolev 2

2.1 Definición

De nuevo, durante todo el capítulo consideraremos que Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y que $p \in [1,\infty]$, a no ser que se indique lo contrario. Además, notaremos por $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ al conjunto de las funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω con soporte compacto contenido en Ω. Recordemos que el soporte de una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquiera se define como

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Dicho esto, comencemos el capítulo definiendo los espacios de Sobolev.

Definición 2.1. *Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists g_1,\ldots,g_N \in L^p(\Omega) \text{ tales que} \\ \displaystyle\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi,\ \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega),\ \forall i = 1,\ldots,N \end{array} \right\}.$$

Al igual que ocurría con los espacios $L^p(\Omega)$, los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ son clases de equivalencia en las que las funciones iguales c.t.p. en Ω están identificadas. Aun así, cuando tomemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$, consideraremos a u como función y no como clase de equivalencia.

Dado $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $i \in \{1,\ldots,N\}$, a la función g_i la llamaremos *derivada débil o generalizada de u respecto a x_i* y notaremos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i.$$

Puede probarse que esta definición tiene sentido, es decir, que las funciones g_i son únicas c.t.p. en Ω. Su demostración puede encontrarse en [4, Corolario 4.24].

La importancia de estos conjuntos radica en que, bajo ciertas condiciones, generalizan al conjunto $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Teniendo en cuenta el Teorema de la divergencia, es claro que si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ y ${\partial u}/{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para todo $i = 1,\ldots,N$ (donde ${\partial u}/{\partial x_i}$ indica la derivada usual de u), entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Además, la derivada débil de u coincide con su derivada usual, por lo que la notación que hemos establecido es consistente. En el caso en el que Ω sea acotado tendremos una relación más clara aun, pues de lo anterior podemos deducir que $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ para cada p.

Por otra parte, en cada uno de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ podemos definir una norma a partir de las normas ya definidas en los espacios $L^p(\Omega)$. Para $1 \leq p < \infty$, definimos la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

y, para $p = \infty$, definimos la norma

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty, \ \forall u \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

De nuevo, el caso $p = 2$ es especial, pues en él podemos definir el siguiente producto escalar a partir del producto escalar de $L^2(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}, \ \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Observemos que la norma inducida por este producto escalar coincide con la norma que ya habíamos definido en $W^{1,2}(\Omega)$.

Terminamos esta sección enunciando una proposición que recoge las principales propiedades de estos espacios. Aunque no haremos su demostración, cabe decir que ésta se basa en las propiedades que ya conocemos de los espacios $L^p(\Omega)$. La prueba de este resultado puede consultarse en [4, Proposición 9.1].

Proposición 2.1. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \le p \le \infty$. En consecuencia, $W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Además, $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \le p < \infty$.*

2.2 El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Ya hemos visto antes que si Ω es acotado, entonces $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Cuando Ω sea un abierto cualquiera de $\mathbb{R}^N$ no tendremos esa inclusión, pero sí que tendremos que $\mathcal{C}_c^1(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, pues toda función de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ es acotada en un compacto y, además, sus derivadas también son acotadas en dicho compacto. Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 2.2. *Sea $1 \le p < \infty$. Se define el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ como el cierre de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, esto es*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(\Omega)$, es inmediato obtener el siguiente corolario a partir de la Proposición 2.1.

Corolario 2.1.1. *El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \le p < \infty$ con la norma heredada de $W^{1,p}(\Omega)$. En consecuencia, $W_0^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de $W^{1,2}(\Omega)$. Además, el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \le p < \infty$.*

De manera intuitiva, las funciones de este conjunto son aquellas que se anulan en la frontera de Ω y están en $W^{1,p}(\Omega)$. Es difícil formalizar esto, pues recordemos que los elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ son clases de equivalencia en las que las funciones iguales c.t.p. en Ω están identificadas y, en consecuencia, el valor que tomen estas funciones en conjuntos de medida nula, como en muchos casos lo es $\partial\Omega$, no importa. Además, estas clases de equivalencia no tienen por qué tener ni siquiera un representante continuo.

A pesar de todos estos inconvenientes, existen varios resultados que tratan de formalizar esta interpretación. Uno de ellos afirma que, bajo ciertas condiciones de regularidad del dominio, una función $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ cumple que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si, y solo si, $u = 0$ en $\partial\Omega$. La demostración de este hecho puede consultarse en [4, Teorema 9.17].

Finalizamos la sección demostrando un teorema de densidad que nos será útil más adelante.

Teorema 2.1. *El conjunto $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, es decir,*

$$\overline{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)} = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración:

Probaremos esta igualdad por doble inclusión. Por una parte, es obvio que

$$\overline{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega),$$

puesto que $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ y, por definición, $W_0^{1,p}(\Omega)$ es cerrado.

Por otra parte, sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por la forma en la que se ha definido el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $\varphi_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$u \in \overline{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}$$

y, por lo tanto, podemos afirmar que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq \overline{W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)}.$$

■

2.3 Regla de la cadena

En esta sección nos limitaremos a enunciar dos proposiciones que nos darán información sobre algunas de las propiedades que tiene la composición de una función real con una función de un espacio de Sobolev. Estos enunciados están tomados de [6, Proposición A.2.4] y de [6, Teorema A.3.5]. Sus demostraciones, que requieren de algunos teoremas de densidad y de algún tipo de convergencia que no veremos en este trabajo, pueden consultarse en [5, Sección 7.4].

Proposición 2.2. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Consideremos el conjunto $A = \{s \in \mathbb{R} : \exists f'(s)\}$ y la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(s) = \begin{cases} f'(s) & si\ s \in A, \\ 0 & si\ s \in \mathbb{R}\backslash A. \end{cases}$$

Si $f \circ u \in L^p(\Omega)$, entonces $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_i}(x) = g(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \text{ c.t.p. } en\ \Omega$$

para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Comentario 2.1. Al ser f una función de Lipschitz, f también es una función absolutamente continua y, por lo tanto, existe la derivada de f en casi todos los puntos de $\mathbb{R}$. En consecuencia, $\mathbb{R}\backslash A$ tiene medida nula.

Comentario 2.2. Una condición suficiente para que f sea lipschitziana es que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con derivada acotada. Para probarlo, basta aplicar el Teorema del valor medio.

Comentario 2.3. Algunas condiciones suficientes para que $f \circ u \in L^p(\Omega)$ son que $f(0) = 0$ o que Ω sea acotado. Para probar estas condiciones, basta tener en cuenta que por ser f lipschitziana existe $M > 0$ tal que $|f(s) - f(0)| \leq M|s|$ para cada $s \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.3. *Si $1 \leq p < \infty$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz con $f(0) = 0$, entonces $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Para finalizar esta sección, veremos qué consecuencias tienen estos resultados sobre dos funciones concretas. La elección de estas funciones se debe a que en los siguientes capítulos recurriremos en más de una ocasión a ellas y, por tanto, nos conviene conocer algunas de sus propiedades.

La primera de las funciones se trata de la función parte negativa, $f_- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f_-(s) = s^- := \begin{cases} s & \text{si } s < 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

Como f_- es una función de Lipschitz y $f_-(0) = 0$, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$, la función

$$(f_- \circ u)(x) := u^-(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) < 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

verifica que $f_- \circ u := u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Además,

$$\nabla u^-(x) := \begin{cases} \nabla u(x) & \text{si } u(x) < 0, \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0, \end{cases} \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

La segunda de las funciones a la que nos referíamos se trata, en realidad, de una familia de funciones. Dado $k \geq 0$, definimos la función $G_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$G_k(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } |s| \leq k, \\ s - k, & \text{si } s > k, \\ s + k, & \text{si } s < -k. \end{cases} \tag{2.2}$$

Como G_k es una función de Lipschitz, ya que

$$\begin{cases} |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = 0 \leq |s_1 - s_2| & \text{si } |s_1|, |s_2| \leq k, \\ |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = |s_1 - s_2| & \text{si } s_1, s_2 > k, \\ |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = |s_1 - s_2| & \text{si } s_1, s_2 < -k, \\ |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = s_1 - k \leq s_1 - s_2 = |s_1 - s_2| & \text{si } s_1 > k, |s_2| \leq k, \\ |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = s_1 - s_2 - 2k \leq s_1 - s_2 = |s_1 - s_2| & \text{si } s_1 > k, s_2 < -k, \\ |G_k(s_1) - G_k(s_2)| = -s_2 - k \leq s_1 - s_2 = |s_1 - s_2| & \text{si } |s_1| \leq k, s_2 < -k, \end{cases}$$

y $G_k(0) = 0$, dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ tenemos que $G_k \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Además,

$$\nabla G_k(u) = \begin{cases} \nabla u & \text{si } |u| > k, \\ 0 & \text{si } |u| \leq k, \end{cases} \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

2.4 Embebimientos de Sobolev

Cuando hablamos de embebimientos de Sobolev nos referimos a una serie de relaciones de inclusión entre espacios de Sobolev y espacios $L^p(\Omega)$ que verifican algunas propiedades topológicas.

Antes de enunciar dichos embebimientos, necesitamos definir dos de las propiedades que puede tener un operador entre espacios normados.

Definición 2.3. *Sean X e Y dos espacios normados. Un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ lineal es continuo si existe $C > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Si T es continuo, se define su norma como

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Comentario 2.4. Esta definición de continuidad es equivalente a la definición clásica cuando el operador es lineal. Recordemos que si un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ entre espacios normados es continuo y $\{x_n\}$ es una sucesión de X tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$, entonces $Tx_n \to Tx$.

Definición 2.4. *Sean X e Y dos espacios normados. Un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ es compacto si la imagen de cualquier conjunto acotado de X es un conjunto precompacto de Y, esto es, un conjunto con cierre compacto de Y.*

Comentario 2.5. Si un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ entre espacios normados es compacto y $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de X, entonces la sucesión $\{Tx_n\}$ admite una parcial convergente en Y.

Comentario 2.6. En operadores lineales, la condición de ser compacto es más fuerte que la de ser continuo. Para probar esto, basta considerar un operador lineal $T\colon X \longrightarrow Y$ compacto y tener en cuenta que, por ser T compacto, la imagen del conjunto acotado $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto precompacto y, por ello, acotado. Por lo lo tanto, $\|T\|$ es finita y, en consecuencia, T es continuo.

A continuación, introduciremos dos condiciones que se le pueden pedir a una inclusión entre espacios normados. Ambas están relacionadas con los conceptos que acabamos de definir.

Definición 2.5. *Sean A y X dos espacios normados. Diremos que A es una inyección continua en X, denotado por $A \hookrightarrow X$, si $A \subset X$ y si la inclusión $i\colon A \longrightarrow X$ es continua, esto es, si existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_X \leq C\|x\|_A, \ \forall x \in A.$$

Definición 2.6. *Sean A y X dos espacios normados. Diremos que A es una inyección compacta en X, denotado por $A \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow X$, si $A \subset X$ y si la inclusión $i\colon A \longrightarrow X$ es compacta.*

Una vez hechas estas definiciones, podemos enunciar ya los embebimientos de Sobolev.

Teorema 2.2 (**de inmersión**). *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Se tienen las siguientes inyecciones continuas:*

$$\begin{aligned} &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, p^\star], \quad \text{donde } \tfrac{1}{p^\star} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{N}, && \text{si } p < N, \\ &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[, && \text{si } p = N, \\ &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), && \text{si } p > N. \end{aligned}$$

Teorema 2.3 (**Rellich-Kondrachov**). *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Se tienen las siguientes inyecciones compactas:*

$$\begin{aligned} &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^\star[, \quad \text{donde } \tfrac{1}{p^\star} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{N}, && \text{si } p < N, \\ &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[, && \text{si } p = N, \\ &W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega}), && \text{si } p > N. \end{aligned}$$

En particular, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega)$ para todo p (y para todo N).

Comentario 2.7. Ambos teoremas siguen siendo ciertos si sustituimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $W^{1,p}(\Omega)$ y establecemos ciertas condiciones de regularidad sobre el dominio; en concreto, que Ω sea de clase $\mathcal{C}^1$ (definido en [4, Sección 9.2]). De hecho, los teoremas aquí enunciados son un simple corolario de los teoremas para los espacios $W^{1,p}(\Omega)$. Todas estas demostraciones pueden consultarse en [4, Sección 9.3] y pueden ampliarse en [7, Capítulo 4].

El siguiente resultado que enunciaremos refina, en cierto modo, algunos aspectos del Teorema 2.2. Para conocer el argumento de su prueba remítase de nuevo a [4, Capítulo 9: Remark 20].

Teorema 2.4 (**Desigualdad de Poincaré**). *Sea $p \in [1, +\infty[$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante S (dependiendo únicamente de Ω y p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq S \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde

$$\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De este teorema se deduce que, cuando Ω es acotado, la expresión $\|\nabla \cdot \|_{(L^p(\Omega))^N}$ constituye una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Es por ello que, cuando Ω sea acotado, la norma que consideraremos en $W_0^{1,p}(\Omega)$ será $\|\nabla \cdot \|_{(L^p(\Omega))^N}$. En tal caso, notaremos

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observemos que, en el caso $p = 2$, esta norma está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{(L^2(\Omega))^N} := \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}, \; \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Finalizamos la sección enunciando un resultado que se deduce inmediatamente del Teorema 2.4.

Corolario 2.4.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, sea* $p \in [1,+\infty[$ *y sea* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Si* $\nabla u = 0$ c.t.p. *en* Ω, *entonces* $u = 0$ c.t.p. *en* Ω.

2.5 Teoremas de convergencia

En esta sección probaremos dos resultados relacionados con la convergencia en los espacios de Sobolev. Como veremos, ambos se apoyan en lo ya probado en la Sección 1.2.

El primero de ellos relaciona la convergencia débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$ con la convergencia fuerte en los espacios $L^p(\Omega)$.

Proposición 2.4. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, sea* $1 \le p < \infty$ *y sea* $\{u_n\}$ *una sucesión de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *en* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Entonces* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega)$.

Demostración:

Para probar la convergencia fuerte de toda la sucesión en $L^p(\Omega)$ vamos a tratar de aplicar el Lema 1.1. Por ello, tomaremos una parcial cualquiera de $\{u_n\}$ y veremos que dicha parcial admite una parcial convergente a u en $L^p(\Omega)$.

Por lo tanto, sea $\{u_{\sigma_1(n)}\}$ una parcial cualquiera de $\{u_n\}$. Como la sucesión $\{u_{\sigma_1(n)}\}$ converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov 2.3, tenemos que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow L^p(\Omega)$ y, por ser esto un embebimiento compacto, existe una parcial $\{u_{\sigma_2(n)}\}$ de $\{u_{\sigma_1(n)}\}$ tal que $u_{\sigma_2(n)} \to w$ en $L^p(\Omega)$ para algún $w \in L^p(\Omega)$.

Nos queda ver que $w = u$. Primero, notemos que, como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le C\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A partir de esta desigualdad podemos deducir la inclusión $L^p(\Omega)' \subset W_0^{1,p}(\Omega)'$. En efecto, dado $\tau \in L^p(\Omega)'$ se cumple que

$$|\tau(v)| \le \|\tau\|_{L^p(\Omega)'}\|v\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\tau\|_{L^p(\Omega)'}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y, en consecuencia, $\tau \in W_0^{1,p}(\Omega)'$.

Gracias a esta inclusión, podemos afirmar que la convergencia débil de una sucesión en $W_0^{1,p}(\Omega)$ implica su convergencia débil en $L^p(\Omega)$ al mismo límite. De esta forma, como por hipótesis $u_{\sigma_2(n)} \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_{\sigma_2(n)} \rightharpoonup u$ en $L^p(\Omega)$ y, por ello, $w = u$. Así, ya podemos concluir que $u_{\sigma_2(n)} \to u$ en $L^p(\Omega)$.

Por lo tanto, queda probado que toda parcial de $\{u_n\}$ admite una parcial convergente a u en $L^p(\Omega)$. Por el Lema 1.1, $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, como queríamos probar.

$\blacksquare$

Ahora, si tenemos en cuenta que para $1 < p < \infty$ el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, de la Proposición 1.3, de la Proposición 2.4 y del Teorema 1.4 podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto abierto y acotado, sea* $1 < p < \infty$ *y sea* $\{u_n\}$ *una sucesión acotada en* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Entonces existe una parcial* $\{u_{\sigma(n)}\}$ *y existe* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* *(a)* $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ *en* $W_0^{1,p}(\Omega)$,

(b) $u_{\sigma(n)} \to u$ c.t.p. *en* Ω.

Además, existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|u_{\sigma(n)}(x)| \leq h(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c.t.p. *en* Ω.

Como vemos, este corolario engloba muchos de los resultados de convergencia vistos hasta ahora. Es por ello que, en los siguientes capítulos, este resultado será fundamental.

Estudio de un problema lineal básico 3

3.1 Planteamiento del problema

En lo que resta de trabajo, consideraremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado.

En este capítulo, nos dedicaremos al estudio del problema lineal

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $M\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ es una matriz medible y acotada tal que

$$\alpha|\xi|^2 \le M(x)\xi\xi, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

$$|M(x)| \le \beta \tag{3.3}$$

con $\alpha, \beta > 0$ y x en c.t.p. de Ω. Ya veremos más adelante qué condiciones imponemos sobre f.

A la primera de las condiciones impuesta sobre $M(x)$ se la conoce como condición de elipticidad. Durante todo el trabajo nos permitiremos un abuso de notación y denotaremos por $M(x)\xi_1\xi_2$ al producto $\xi_2^T M(x)\xi_1$, donde ξ_1 y ξ_2 son vectores columna de $\mathbb{R}^N$.

A la segunda de las condiciones, como cabe esperar, se la conoce como condición de acotación. Con $|M(x)|$ denotamos a la norma de Frobenius de $M(x)$, que simplemente es la raíz cuadrada de la suma de todas sus componentes al cuadrado. En consecuencia, tendremos que

$$|M(x)\xi_1\xi_2| := |\xi_2^T M(x)\xi_1| \le |\xi_2||M(x)\xi_1| \le |M(x)||\xi_1||\xi_2| \le \beta|\xi_1||\xi_2|, \ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N.$$

Como vemos, estamos notando de la misma forma al valor absoluto, a la norma euclídea en $\mathbb{R}^N$ y a la norma de Frobenius. Esta notación se mantendrá durante todo el trabajo, pues aunque pueda resultar un poco confusa en ningún momento deja lugar a dudas.

Antes de seguir avanzando, cabe decir que la restricción "$u = 0$ en $\partial\Omega$" recibe el nombre de *condición de frontera de tipo Dirichlet*. Por otro lado, observemos que si consideramos a $M(x)$ como la matriz identidad, el operador $\mathrm{div}(M(x)\nabla u)$ es, en realidad, el operador laplaciano usual.

Dicho esto, analicemos el concepto de solución del problema (3.1). En general, se entiende por solución de (3.1) a una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que verifica las condiciones del problema. El principal inconveniente de esta definición es que pedir que u esté en $C^2(\Omega)$ es una condición muy restrictiva. Con el objetivo de debilitar esta condición, multiplicamos la ecuación $-\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = f(x)$ a ambos lados por una función cualquiera de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ e integramos sobre Ω, obteniendo así que

$$\int_\Omega -\mathrm{div}(M(x)\nabla u)\varphi = \int_\Omega f(x)\varphi, \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega).$$

Si tenemos en cuenta que $\operatorname{div}(\varphi M(x)\nabla u) = \operatorname{div}(M(x)\nabla u)\varphi + M(x)\nabla u\nabla\varphi$, el Teorema de la divergencia y que las φ se anulan en la frontera de Ω, lo anterior nos queda como

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f(x)\varphi,\ \forall\varphi\in\mathcal{C}_c^1(\Omega).$$

Ahora bien, como el conjunto $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,2}(\Omega)$, es posible deducir que la igualdad anterior se sigue satisfaciendo para cada $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$. En este tipo de problemas, estas funciones reciben el nombre de *funciones test*.

Por otra parte, para que la primera integral tenga sentido basta con que existan las derivadas débiles de u y estén en $L^2(\Omega)$ o, lo que es lo mismo, basta que $u\in W^{1,2}(\Omega)$. Además, para tener en cuenta la condición "$u = 0$ en $\partial\Omega$", exigiremos que $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$, pues recordemos que las funciones de este espacio son, de forma intuitiva, aquellas que están en $W^{1,2}(\Omega)$ y valen 0 en la frontera.

Es así como surge el siguiente concepto de solución.

Definición 3.1. *Una solución débil del problema* (3.1) *es una función* $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ *que verifica*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f(x)\varphi,\ \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.4}$$

En general, en este y en otros problemas elípticos, una solución débil no va a ser una solución clásica ni va a gozar de buenas propiedades. Es por ello que, si es posible probar la existencia de solución débil, es conveniente estudiar la regularidad de dicha solución o ver bajo qué condiciones sobre M, f o similares las propiedades de la solución mejoran. A esta parte del estudio del problema se la conoce como regularización.

Por lo tanto, nuestro primer objetivo será probar la existencia (y unicidad) de solución débil para el problema (3.1) y, tras esto, estudiaremos algunos teoremas de regularización.

3.2 Existencia y unicidad de solución débil

La prueba que haremos estará basada en el Teorema de Lax-Milgram. Para poder entender su enunciado, es necesario hacer una definición previa.

Definición 3.2. *Sea X un espacio normado. Una forma bilineal $a\colon X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ se dice*

(a) continua si existe $C>0$ tal que

$$|a(u,v)|\le C\|u\|\|v\|,\ \forall u,v\in X,$$

(b) coercitiva si existe $k>0$ tal que

$$a(v,v)\ge k\|v\|^2,\ \forall v\in X.$$

Tras esto, pasemos a enunciar el Teorema de Lax-Milgram. Su demostración utiliza únicamente herramientas del Análisis Funcional y puede consultarse en [8, Sección 6.2.1]. Una demostración alternativa y con consecuencias más potentes puede encontrarse en [4, Corolario 5.8].

Teorema 3.1 (**Lax-Milgram**). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $a\colon H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coercitiva. Dado $\tau \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,\varphi) = \tau(\varphi), \ \forall \varphi \in H.$$

Tras enunciar este teorema, estamos en condiciones de demostrar un resultado de existencia y unicidad para el problema (3.1).

Teorema 3.2. *Supongamos que $M(x)$ verfica (3.2) y (3.3) y que $f \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única solución débil del problema (3.1).*

<u>Demostración:</u>

Sea $a\colon W_0^{1,2}(\Omega)\times W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$a(v,\varphi) = \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi, \ \forall v,\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En primer lugar, observemos que a es continua, pues usando (3.3) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $(L^2(\Omega))^N$ deducimos que

$$\begin{aligned}|a(v,\varphi)| &\le \left|\int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi\right| \le \left(\int_\Omega |M(x)\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \beta\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall v,\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).\end{aligned}$$

Además, a es coercitiva, pues usando (3.2) tenemos que

$$a(v,v) = \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla v \ge \alpha\int_\Omega |\nabla v|^2 = \alpha\|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Por otra parte, sea $\tau\colon W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\tau(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Este funcional es continuo, pues aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$ y la desigualdad de Poincaré 2.4 obtenemos que

$$|\tau(\varphi)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi\right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le S\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

donde S es la constante dada por la desigualdad de Poincaré.

Por el Teorema de Lax-Milgram 3.1, existe una única $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$a(u,\varphi) = \tau(\varphi), \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

o, equivalentemente, tal que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f(x)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

como queríamos probar.

■

Comentario 3.1. Como consecuencia de la Proposición 1.2, este teorema también sigue siendo cierto para $f \in L^p(\Omega)$ con $2 \le p \le \infty$.

3.3 Principios del máximo

Cuando hablamos de principios del máximo nos referimos a aquellos resultados que, bajo ciertas condiciones, nos dan información sobre el signo de las soluciones débiles de un problema determinado. En concreto, los principios del máximo débil nos garantizan la no negatividad de la solución, mientras que los principios del máximo fuerte nos garantizan que dicha solución sea positiva.

Los principios del máximo que veremos para el problema (3.1) no se restringen solamente a sus soluciones, sino que también engloban sus super-soluciones. A continuación, definimos qué entendemos por una super-solución de la ecuación que define el problema (3.1).

Definición 3.3. *Consideremos la ecuación*

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f(x) \text{ en } \Omega. \tag{3.5}$$

Diremos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ es una super-solución de esta ecuación si

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi \geq \int_\Omega f(x)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ tal que } \varphi \geq 0. \tag{3.6}$$

Observemos que toda solución del problema (3.1) es, en particular, una super-solución de la ecuación que define. Tras introducir este concepto, estamos en condiciones de probar un principio del máximo débil.

Teorema 3.3 (Principio del máximo débil). *Supongamos que $M(x)$ verifica (3.2) y (3.3) y que $f(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω. Si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ es una super-solución de la ecuación (3.5), entonces*

$$u(x) \geq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

En consecuencia, si además $f \in L^2(\Omega)$, el problema (3.1) tiene una única solución y dicha solución es no negativa.

Demostración:

Comencemos probando la primera parte del teorema. Consideremos como función test en (3.6) la función $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definida en (2.1). Teniendo en cuenta que $u^-(x) \leq 0$ en Ω, nos queda que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla u^- \leq \int_\Omega f(x)u^-.$$

Usando (3.2), que $f(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω y que $u^-(x) \leq 0$ en Ω, obtenemos que

$$\alpha \|u^-\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla u^-|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u^- \nabla u^- = \int_\Omega M(x)\nabla u \nabla u^- = \int_\Omega f(x)u^- \leq 0.$$

De aquí deducimos que $\|u^-\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0$ y, en consecuencia, $u^-(x) = 0$ c.t.p. en Ω. De esta forma, concluimos que

$$u(x) \geq 0 \text{ c.t.p. en } \Omega,$$

como queríamos probar.

La segunda parte del teorema se deduce inmediatamente del Teorema 3.2 y de lo que acabamos de demostrar.

■

El camino que tenemos que recorrer para probar nuestro principio del máximo fuerte es un poco más largo. En primer lugar, definiremos el concepto de ínfimo esencial que, como podemos imaginar, es análogo al concepto de supremo esencial que utilizamos para definir la norma de $L^\infty(\Omega)$.

Definición 3.4. *Dada una función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se define el ínfimo esencial de f en $A \subseteq \Omega$ como*

$$\operatorname*{ess\,inf}_A f = \sup\{C \in \mathbb{R} : f(x) \geq C \text{ c.t.p. } en\ A\}.$$

Tras hacer esta definición, enunciaremos una desigualdad que será clave en la siguiente demostración. Su prueba, que es larga y tediosa, puede consultarse en [5, Teorema 8.18].

Teorema 3.4 (**Desigualdad débil de Harnack**). *Supongamos que $M(x)$ satisface (3.2) y (3.3). Sea $u \in W^{1,2}(\Omega)$ una super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$. Si u es no negativa en alguna bola $B_{4R}(y) \subset \Omega$ y $1 \leq p < \frac{N}{N-2}$, entonces*

$$R^{-N/p} \|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{B_R(y)} u$$

donde C depende solamente de N, p, α y β.

El teorema que probaremos a continuación será el que dé pie a nuestro principio del máximo fuerte.

Teorema 3.5. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, además de ser abierto y acotado, es conexo. Supongamos también que $M(x)$ satisface (3.2) y (3.3) y que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ es una super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$. Si existe una bola B con $\overline{B} \subset \Omega$ tal que*

$$\operatorname*{ess\,inf}_B u = \operatorname*{ess\,inf}_\Omega u$$

entonces u es constante c.t.p. *en Ω.*

<u>Demostración:</u>

El esquema que seguiremos en esta prueba es el siguiente:

(1) Probamos que u es constante c.t.p. en B.

(2) Probamos que si B' una bola tal que $\overline{B'} \subset \Omega$ y tal que $B \cap B' \neq \emptyset$, entonces u es constante c.t.p. en B'.

(3) Definimos $\mathcal{B} = \{B_r(x) : \overline{B_r(x)} \subset \Omega$ con $x \in \Omega$ y $r > 0\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos V_n de forma recursiva como

$$\begin{cases} V_1 = B, \\ V_n = \left\{\bigcup \tilde{B} : \tilde{B} \in \mathcal{B} \wedge \tilde{B} \cap V_{n-1} \neq \emptyset\right\}, \ \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Tras esto, probamos que u es constante c.t.p. en V_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

(4) Probamos que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ y, así, podemos demostrar que u es constante c.t.p. en Ω.

Comenzamos probando el punto (1). Antes de eso, observemos que podemos escribir $B = B_R(y)$ para algún $R > 0$ y algún $y \in \Omega$ y que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Además, para simplificar las expresiones notaremos

$$m = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u.$$

Ahora sí, probemos que u es constante c.t.p. en B. Primero, notemos que la función $u - m \in W^{1,2}(\Omega)$ sigue siendo una super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$ y que, además, es no negativa. Por ello, podemos aplicar a esta función la desigualdad débil de Harnack 3.4 con $p = 1$ para afirmar que existe $C > 0$ tal que

$$R^{-N} \int_{B_{2R}(y)} (u - m) \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{B} (u - m) = C\left(\operatorname*{ess\,inf}_{B} u - m\right) = 0.$$

En consecuencia, $u \equiv m$ c.t.p. en $B_{2R}(y)$ y, en particular, $u \equiv m$ c.t.p. en B.

Probemos ahora el punto (2). Sea B' una bola satisfaciendo lo descrito en el punto (2). Primero, observemos que $u \equiv m$ c.t.p. en $B \cap B'$, pues $B \cap B' \neq \emptyset$ y $u \equiv m$ c.t.p. en B. Como $B \cap B'$ tiene medida positiva por ser abierto y m es el ínfimo de u en todo Ω, podemos decir que $\operatorname{ess\,inf}_{B'} u = m$.

De esta forma, tenemos que B' satisface las mismas condiciones que B y, por ello, podemos repetir el razonamiento que hemos hecho con B en el punto (1) para afirmar que $u \equiv m$ c.t.p. en B'.

Vayamos ahora con el punto (3). Veamos por inducción que $u \equiv m$ c.t.p. en los V_n definidos en el punto (3).

- El caso $n = 1$ lo hemos probado en el punto (1).
- Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ la función $u \equiv m$ c.t.p. en V_n.
- Para probar que $u \equiv m$ c.t.p. en V_{n+1} basta ver que para cada $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ con $\tilde{B} \cap V_n \neq \emptyset$ la función $u \equiv m$ c.t.p. en $\tilde{B}$. Para demostrar esto, repetimos el mismo razonamiento que en el punto (2) pero esta vez con V_n haciendo el papel de B y con estas $\tilde{B}$ haciendo el papel de B'. De esta forma, queda probado que $u \equiv m$ c.t.p. en cada $\tilde{B}$ y, en consecuencia, que $u \equiv m$ c.t.p. en V_{n+1}.

Por último, vayamos con el punto (4). Por la forma en la que se ha definido $\mathcal{B}$, tenemos que $\Omega = \bigcup_{\tilde{B}\in\mathcal{B}} \tilde{B}$. Por lo tanto, para probar que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ basta probar que cada $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ está contenida en algún V_n. Veamos que esto último es cierto.

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una bola de $\mathcal{B}$ que no está contenida en ningún V_n. De esta forma, el conjunto $\mathcal{R} = \{\tilde{B} \in \mathcal{B} : \tilde{B} \not\subset V_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es no vacío y, por ello, el conjunto $W = \bigcup_{\tilde{B}\in\mathcal{R}} \tilde{B}$ es no vacío. Si definimos $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, tenemos que V y W son dos abiertos no vacíos y disjuntos cuya unión es Ω. Llegamos así a una contradicción, pues Ω es conexo.

Por lo tanto, queda probado que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Como $u \equiv m$ c.t.p. en V_n para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $u \equiv m$ c.t.p. en Ω, como queríamos probar.

■

A partir de este teorema podemos deducir nuestro principio del máximo fuerte.

Corolario 3.5.1 (Principio del máximo fuerte). *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, además de ser abierto y acotado, es conexo. Supongamos también que $M(x)$ satisface (3.2) y (3.3) y que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ es una super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$. Entonces, o bien $u \equiv 0$* c.t.p. *en Ω, o bien*

$$u(x) > 0 \text{ c.t.p. } en\ \Omega.$$

Demostración:

En primer lugar, observemos que gracias al Principio del máximo débil 3.3 cualquier super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$ es no negativa c.t.p. en Ω.

Tras hacer esta observación, comencemos con la demostración. Supongamos que $u \equiv 0$ en algún conjunto $A \subset \Omega$ de medida positiva (negación de $u(x) > 0$ c.t.p. en Ω) y veamos que $u \equiv 0$ c.t.p. en Ω.

Veamos primero que existe $A_0 \subseteq A$ de medida positiva tal que $\overline{A_0} \subset \Omega$. Si $\overline{A} \subset \Omega$, tomamos $A_0 = A$. En caso contrario, definimos los conjuntos abiertos

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap \Omega_k$ tiene medida positiva. Entonces, los conjuntos de la sucesión decreciente $\{A \cap (\mathbb{R}^N \backslash \Omega_n)\}$ tienen la misma medida que A y, en consecuencia, la medida de su límite, que es $A \cap (\mathbb{R}^N \backslash \Omega) = \emptyset$, es igual a la de A, lo cual es absurdo. Por ello, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap \Omega_k$ tiene medida positiva y podemos tomar $A_0 = A \cap \Omega_k$, pues $\overline{A_0} = \overline{A} \cap \overline{\Omega_k} \subset \Omega$.

En definitiva, tenemos que $u \equiv 0$ en A_0 y que $\overline{A_0} \subset \Omega$. Si consideramos

$$\mathcal{B} = \left\{ B_r(x) : \overline{B_r(x)} \subset \Omega \text{ con } x \in \overline{A_0} \text{ y } r > 0 \right\},$$

tenemos que $\mathcal{B}$ es un recubrimiento por abiertos de $\overline{A_0}$ y, como $\overline{A_0}$ es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ que recubre a $\overline{A_0}$. De esta forma, $\{A_0 \cap B : B \in \mathcal{B}'\}$ es una partición finita de A_0 y, por lo tanto, existe $B \in \mathcal{B}'$ tal que $A_0 \cap B$ tiene medida positiva. Deducimos así que

$$0 \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,inf}_{B} u = 0$$

y, como $\overline{B} \subset \Omega$, por el Teorema 3.5 concluimos que $u \equiv 0$ c.t.p. en Ω.

■

3.4 Mayoraciones en $L^\infty(\Omega)$

En esta sección obtendremos condiciones suficientes bajo las que la solución del problema (3.1) está acotada. Las demostraciones de estos resultados se hacen siguiendo una estrategia conocida como método de Stampacchia, realizada por primera vez en el artículo [3] del propio Guido Stampacchia.

Antes de demostrar estos teoremas, necesitamos un lema previo. Su demostración original puede consultarse en [3, Teorema 4.1].

Lema 3.1. *Sea $k_0 \geq 0$ y sea $\phi \colon [k_0, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+$ una función decreciente verificando*

$$\phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^a} \phi(k)^b, \ \forall h > k \geq k_0, \tag{3.7}$$

siendo a, b y C constantes positivas. Si $b > 1$, entonces

$$\phi(k_0 + d) = 0$$

con $d^a = C\phi(k_0)^{b-1} 2^{ab/(b-1)}$.

Demostración:

Sea $d > 0$ como en el enunciado, esto es, verificando $d^a = C\phi(k_0)^{b-1} 2^{ab/(b-1)}$. Sea $k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\{k_n\}$ es una sucesión creciente convergente a $k_0 + d$ que además cumple que $k_n > k_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Considerando $h = k_{n+1}$ y $k = k_n$ en la desigualdad (3.7) y teniendo en cuenta que $k_{n+1} - k_n = \frac{d}{2^{n+1}}$, obtenemos que

$$\phi(k_{n+1}) \leq \frac{C 2^{a(n+1)}}{d^a} \phi(k_n)^b, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Ahora, probemos por inducción que

$$\phi(k_n) \leq \frac{\phi(k_0)}{2^{\mu n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

donde $\mu = \frac{a}{b-1}$ (notemos que $b \neq 1$).

Para $n = 0$ es trivial. Supuesto cierto para algún $n \in \mathbb{N}$, veamos que también es cierto para $n + 1$. Para ello, basta tener en cuenta la desigualdad (3.8), la hipótesis de inducción y la definición de d. Obtenemos así que

$$\phi(k_{n+1}) \leq \frac{C 2^{a(n+1)}}{d^a} \phi(k_n)^b \leq \frac{C 2^{a(n+1)}}{d^a} \frac{\phi(k_0)^b}{2^{b\mu n}} = \frac{1}{2^{b\mu}} \frac{2^{a(n+1)}}{2^{b\mu n}} \phi(k_0) = \frac{2^{a(n+1)}}{2^{b\mu(n+1)}} \phi(k_0) = \frac{\phi(k_0)}{2^{\mu(n+1)}}.$$

De esta manera, la desigualdad (3.9) queda probada. Si además tenemos en cuenta que ϕ es decreciente y que $k_n \leq k_0 + d$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de esta desigualdad deducimos que

$$\phi(k_0 + d) \leq \frac{\phi(k_0)}{2^{\mu n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que, como $b > 1$, entonces $\mu = \frac{a}{b-1} > 0$. En consecuencia, si tomamos límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en la desigualdad de arriba, obtenemos que $\phi(k_0 + d) = 0$, como queríamos probar.

■

En las siguientes demostraciones haremos uso de la función característica. Recordemos que dado $A \subset \Omega$, la función característica en A, $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se definía como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega \backslash A. \end{cases}$$

A continuación, demostraremos dos teoremas. El primero de ellos será válido para $N \geq 3$ y, el segundo, para $N = 1$ y $N = 2$.

Teorema 3.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con $N \geq 3$. Supongamos que $M(x)$ satisface (3.2) y (3.3) y que $f \in L^q(\Omega)$ con $\frac{N}{2} < q < \infty$. Si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ verifica que*

$$\int_\Omega M(x) \nabla u \nabla \varphi \leq \int_\Omega f(x) \varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ con

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d,$$

donde d depende únicamente de Ω, de f y de q.

Demostración:

Dado $k \geq 0$ arbitrario, consideremos la función $G_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definida en (2.2) como función test. Si además tenemos en cuenta la condición de elipticidad (3.2) de $M(x)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \int_\Omega M(x)\nabla G_k(u)\nabla G_k(u)\\ &= \int_\Omega M(x)\nabla u \nabla G_k(u) \leq \int_\Omega f G_k(u) = \int_\Omega f \chi_{\{|u|>k\}} G_k(u).\end{aligned}$$

Ahora bien, observemos que, como $q \geq \frac{N}{2} > \frac{2N}{N+2} = (2^\star)'$, por la Proposición 1.2 tenemos que $f \in L^{(2^\star)'}(\Omega)$. Además, como $G_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y $N > 2$, por la primera parte del Teorema de inmersión 2.2 podemos decir que $G_k(u) \in L^{2^\star}(\Omega)$. Por tanto, podemos aplicar la desigualdad de Hölder 1.1 para deducir que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \int_\Omega f \chi_{\{|u|>k\}} G_k(u)\\ &\leq \left\| f \chi_{\{|u|>k\}} \right\|_{(2^\star)'} \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} = \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \left[\int_\Omega f^{(2^\star)'} \chi_{\{|u|>k\}} \right]^{\frac{1}{(2^\star)'}}.\end{aligned}$$

Como $f^{(2^\star)'} \in L^{\frac{q}{(2^\star)'}}(\Omega)$ y $\chi_{\{|u|>k\}} \in L^\infty(\Omega)$, podemos aplicar de nuevo la desigualdad de Hölder 1.1 con $p = \frac{q}{(2^\star)'} > 1$ para afirmar que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \left[\int_\Omega f^{(2^\star)'} \chi_{\{|u|>k\}} \right]^{\frac{1}{(2^\star)'}}\\ &\leq \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \left[\left(\int_\Omega f^q \right)^{\frac{(2^\star)'}{q}} \left(\operatorname{meas}\{|u|>k\} \right)^{1-\frac{(2^\star)'}{q}} \right]^{\frac{1}{(2^\star)'}}\\ &= \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \left\| f \right\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u|>k\} \right)^{\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $N > 2$, podemos volver a aplicar la primera parte del Teorema de inmersión 2.2 para afirmar que existe $S > 0$ dependiendo únicamente de Ω tal que

$$S \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star}^2 \leq \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2.$$

Juntando esta desigualdad con la primera parte de la anterior, obtenemos que

$$\alpha S \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star}^2 \leq \left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \left\| f \right\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u|>k\} \right)^{\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}}$$

o, equivalentemente, que

$$\left\| G_k(u) \right\|_{2^\star} \leq \frac{1}{\alpha S} \left\| f \right\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u|>k\} \right)^{\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}}.$$

Observemos ahora que si $h > k > 0$, entonces $\{|u| > h\} \subset \{|u| > k\}$ y así

$$|G_k(u)| = |u| - k > h - k, \ \forall x \in \{|u| > h\}.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\begin{aligned}(h-k)(\text{meas}\{|u|>h\})^{\frac{1}{2^\star}} &= \left(\int_{\{|u|>h\}} (h-k)^{2^\star}\right)^{\frac{1}{2^\star}} \leq \left(\int_{\{|u|>h\}} |G_k(u)|^{2^\star}\right)^{\frac{1}{2^\star}} \\ &\leq \left(\int_{\{|u|>k\}} |G_k(u)|^{2^\star}\right)^{\frac{1}{2^\star}} = \left\|G_k(u)\right\|_{2^\star} \\ &\leq \frac{1}{\alpha S}\left\|f\right\|_q \left(\text{meas}\{|u|>k\}\right)^{\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

es decir, que

$$\text{meas}\{|u|>h\} \leq \frac{\|f\|_q^{2^\star}}{(\alpha S)^{2^\star}(h-k)^{2^\star}}\left(\text{meas}\{|u|>k\}\right)^{2^\star\left(\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Gracias a esta desigualdad, para poder aplicar el Lema 3.1 a la función decreciente $\phi\colon [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida como $\phi(h) = \text{meas}\{|u|>h\}$, $\forall h \in [0,+\infty[$ solo nos queda probar que $b := 2^\star\left(\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}\right) > 1$. En efecto,

$$2^\star\left(\frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{q}\right) > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{(2^\star)'}-\frac{1}{2^\star} > \frac{1}{q} \Longleftrightarrow \frac{N+2}{2N}-\frac{N-2}{2N} > \frac{1}{q} \Longleftrightarrow q > \frac{N}{2},$$

lo cual es cierto.

Así, aplicando el Lema 3.1 a la función ϕ obtenemos que $\phi(d) = \text{meas}\{|u|>d\} = 0$ con d dependiendo únicamente de Ω, f y q. En consecuencia, podemos concluir que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d.$$

■

Comentario 3.2. Este teorema sigue siendo válido si $q=\infty$. Su demostración es muy similar a la que acabamos de hacer.

Comentario 3.3. Este resultado es algo más general que el teorema original de Stampacchia ([3, Teorema 4.1]), pues en dicho teorema la condición es $q>N$.

La demostración del segundo de los teoremas será muy parecida a la del primero. La principal diferencia la encontraremos al aplicar el Teorema de inmersión 2.2.

Teorema 3.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con $N=1$ o $N=2$. Supongamos que $M(x)$ satisface (3.2) y (3.3) y que $f \in L^q(\Omega)$ con $1<q<\infty$. Si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ verifica que*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla\varphi \leq \int_\Omega f(x)\varphi,\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ con

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d,$$

donde d depende únicamente de Ω, de f y de q.

Demostración:

Las demostraciones del caso $N = 1$ y $N = 2$ son muy similares. La única diferencia la encontramos a la hora de aplicar el Teorema de inmersión 2.2. Por ello, probaremos únicamente el caso $N = 2$.

Por lo tanto, supongamos que $N = 2$. Sea γ un número real positivo tal que

$$\gamma > \frac{2q}{q-1}.$$

Al igual que en la prueba anterior, si para $k \geq 0$ arbitrario consideramos la función $G_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definida en (2.2) como función test y tenemos en cuenta la condición de elipticidad (3.2) de $M(x)$, de la desigualdad del enunciado deducimos que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \int_\Omega M(x)\nabla G_k(u)\nabla G_k(u)\\ &= \int_\Omega M(x)\nabla u \nabla G_k(u) \leq \int_\Omega f\, G_k(u) = \int_\Omega f\,\chi_{\{|u|>k\}} G_k(u). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora bien, observemos que $\gamma' < q$, pues

$$\gamma' < q \Longleftrightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{\gamma'} \Longleftrightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{\gamma} < 1 \Longleftrightarrow \gamma > \frac{q}{q-1},$$

lo cual es cierto porque

$$\gamma > \frac{2q}{q-1} > \frac{q}{q-1}.$$

Así, en virtud de la Proposición 1.2, $f \in L^{\gamma'}(\Omega)$. Además, como $G_k(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $N = 2$ y $\gamma > \frac{2q}{q-1} > 2$, por el segundo punto del Teorema de inmersión 2.2 podemos decir que $G_k(u) \in L^\gamma(\Omega)$. Por tanto, podemos aplicar la desigualdad de Hölder 1.1 en (3.10) para obtener que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \int_\Omega f\,\chi_{\{|u|>k\}} G_k(u)\\ &\leq \left\|f\,\chi_{\{|u|>k\}}\right\|_{\gamma'} \left\|G_k(u)\right\|_\gamma = \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \left[\int_\Omega f^{\gamma'} \chi_{\{|u|>k\}}\right]^{\frac{1}{\gamma'}}. \end{aligned}$$

Como $f^{\gamma'} \in L^{\frac{q}{\gamma'}}(\Omega)$ y $\chi_{\{|u|>k\}} \in L^\infty(\Omega)$, podemos aplicar de nuevo la desigualdad de Hölder 1.1 con $p = \frac{q}{\gamma'} > 1$ para afirmar que

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \left[\int_\Omega f^{\gamma'} \chi_{\{|u|>k\}}\right]^{\frac{1}{\gamma'}}\\ &\leq \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \left[\left(\int_\Omega f^q\right)^{\frac{\gamma'}{q}} \left(\text{meas}\{|u|>k\}\right)^{1-\frac{\gamma'}{q}}\right]^{\frac{1}{\gamma'}}\\ &= \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \left\|f\right\|_q \left(\text{meas}\{|u|>k\}\right)^{\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que $N = 2$ y $\gamma > \frac{2q}{q-1} > 2$, podemos volver a aplicar el segundo punto del Teorema de inmersión 2.2 para afirmar que existe $S > 0$ dependiendo únicamente de Ω y de γ tal que

$$S\left\|G_k(u)\right\|_\gamma^2 \le \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2.$$

Juntando esta desigualdad con la primera parte de la anterior, obtenemos que

$$\alpha S\left\|G_k(u)\right\|_\gamma^2 \le \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \left\|f\right\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u| > k\}\right)^{\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{q}}$$

o, equivalentemente, que

$$\left\|G_k(u)\right\|_\gamma \le \frac{1}{\alpha S}\left\|f\right\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u| > k\}\right)^{\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{q}}.$$

Observemos ahora que si $h > k > 0$, entonces $\{|u| > h\} \subset \{|u| > k\}$ y así

$$|G_k(u)| = |u| - k > h - k, \ \forall x \in \{|u| > h\}.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\begin{aligned}(h-k)(\operatorname{meas}\{|u|>h\})^{\frac{1}{\gamma}} &= \left(\int_{\{|u|>h\}} (h-k)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \le \left(\int_{\{|u|>h\}} |G_k(u)|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\le \left(\int_{\{|u|>k\}} |G_k(u)|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left\|G_k(u)\right\|_\gamma \\ &\le \frac{1}{\alpha S}\|f\|_q \left(\operatorname{meas}\{|u| > k\}\right)^{\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

es decir, que

$$\operatorname{meas}\{|u| > h\} \le \frac{\|f\|_q^\gamma}{(\alpha S)^\gamma (h-k)^\gamma}\left(\operatorname{meas}\{|u| > k\}\right)^{\gamma\left(\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Gracias a esta desigualdad, para poder aplicar el Lema 3.1 a la función decreciente $\phi\colon [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida como $\phi(h) = \operatorname{meas}\{|u| > h\}$, $\forall h \in [0,+\infty[$ solo nos queda probar que $b := \gamma\left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{q}\right) > 1$. En efecto,

$$\gamma\left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{q}\right) > 1 \iff \frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{q} > \frac{1}{\gamma} \iff 1 - \frac{1}{q} > \frac{2}{\gamma} \iff \gamma > \frac{2q}{q-1},$$

lo cual es cierto.

Así, aplicando el Lema 3.1 a la función ϕ obtenemos que $\phi(d) = \operatorname{meas}\{|u| > d\} = 0$ con d dependiendo únicamente de Ω, f y q. En consecuencia, podemos concluir que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le d.$$

■

Comentario 3.4. Este teorema sigue siendo cierto para $q = \infty$. Su demostración es muy similar a la que acabamos de hacer. La principal diferencia es que esta vez basta con tomar $\gamma > 2$.

Comentario 3.5. El teorema original de Stampacchia ([3, Teorema 4.1]) no considera el caso $N = 1$ ni el caso $N = 2$ por su trivialidad. Aun así, en este trabajo hemos decidido detallar su prueba.

4 Estudio de un problema no lineal

4.1 Estudios recientes

En este capítulo generalizaremos algunos de los resultados probados en [1] y en [2]. Por ello, comenzaremos exponiendo el problema que se estudia en esos artículos y enunciando dos de los teoremas que en ellos se prueban.

El problema que se estudia en ambos artículos es

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado. Sobre $M\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ volvemos a imponer que sea medible y que verifique las condiciones de elipticidad y acotación, esto es, que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi\xi, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

$$|M(x)| \leq \beta. \tag{4.3}$$

Sobre el término de orden cero $a(x)$ impondremos que

$$0 \leq a(x) \in L^1(\Omega). \tag{4.4}$$

Además, supondremos que existe $Q > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Qa(x) \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{4.5}$$

Sobre la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impondremos que sea continua. Además, deberá existir $k_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$g(s)s \geq 0, \ \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : |s| \geq k_0\} \tag{4.6}$$

y

$$|g(s)| \geq Q, \ \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : |s| \geq k_0\}. \tag{4.7}$$

Con todas estas hipótesis es posible probar la existencia de solución acotada.

Teorema 4.1. *Bajo las condiciones (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) existe al menos una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema (4.1).*

Con el objetivo de probar un principio del máximo fuerte, se sustituyen las hipótesis (4.6) y (4.7) por

$$g \text{ es impar y estrictamente creciente} \tag{4.8}$$

y

$$g_\infty := \lim_{s \to +\infty} g(s) > Q. \tag{4.9}$$

Observemos que (4.8) y (4.9) implican (4.6) y (4.7). Con estas nuevas hipótesis es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, además de ser abierto y acotado, es conexo. Supongamos también que la matriz $M(x)$ verifica (4.2) y (4.3), que $a(x) \in L^1(\Omega)$ con $a(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω y $a(x) \neq 0$ en algún conjunto de medida positiva y que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua satisfaciendo (4.8) y (4.9). Si $f(x) = Qa(x)$, entonces existe una única solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (4.1) y dicha solución satisface que*

$$u(x) > 0 \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

4.2 Generalización del Teorema 4.1 y del Teorema 4.2

En este capítulo nos dedicaremos al estudio del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado. Sobre $M\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ volvemos a imponer que sea medible y que verifique las condiciones de elipticidad (4.2) y de acotación (4.3).

Sobre $a(x)$ volvemos a suponer que

$$0 \le a(x) \in L^1(\Omega). \tag{4.11}$$

Sobre $f(x,s)$ impondremos que

$$f(x,s) \text{ sea continua en } s. \tag{4.12}$$

Además, supondremos que existe $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva y continua tal que

$$|f(x,s)| \le a(x)h(s) \text{ c.t.p. en } \Omega \times \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Sobre la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impondremos que sea continua. Además, deberá existir $k_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$g(s)s \ge 0, \ \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : |s| \ge k_0\} \tag{4.14}$$

y

$$\frac{|g(s)|}{h(s)} \ge 1, \ \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : |s| \ge k_0\}. \tag{4.15}$$

Por último, pediremos que exista $Q \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$h(s) \ge Q, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Observemos que el problema que vamos a estudiar engloba al problema enunciado en la sección anterior, pues si en este problema $f(x,s)$ depende solo de x, esto es, si $f(x,s) = f(x)$, entonces podemos considerar que $h(s)$ es constante y así la condición (4.13) se convierte en (4.5) y la condición (4.15) en (4.7).

Una vez planteado el problema, definimos el concepto de solución débil del problema (4.10) sin ninguna hipótesis sobre sus términos.

Definición 4.1. *Entenderemos por solución débil de* (4.10) *a una función $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} a(x)g(u), f(x,u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega a(x)g(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{4.17}$$

Como vemos, la definición de solución débil que acabamos de hacer difiere ligeramente de la que hicimos para el problema (3.1), pues aparecen restricciones del tipo $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ o $a(x)g(u) \in L^1(\Omega)$. Estas restricciones se imponen para que las integrales que aparecen en la definición siempre tengan sentido.

De todas formas, observemos que bajo (4.11) y (4.13) y bajo las hipótesis de continuidad impuestas sobre g y h las condiciones $a(x)g(u) \in L^1(\Omega)$ y $f(x,u) \in L^1(\Omega)$ siempre se cumplen cuando $u \in L^\infty(\Omega)$.

Nuestro primer objetivo será probar la existencia de solución débil del problema (4.10) al imponerle todas las condiciones expuestas en esta sección. Su demostración comienza considerando las soluciones de unos problemas aproximados. Es por ello que lo primero que haremos será estudiar la existencia de solución de dichos problemas.

4.2.1 Problemas aproximados

En este trabajo, cuando hablamos de problemas aproximados nos referimos a problemas de la forma (4.10) en los que se impone que algunos de sus coeficientes sean acotados. En esta subsección, estudiaremos dos problemas aproximados. Veremos que la existencia de solución del primero de ellos, que es menos general, se utiliza para probar la existencia de solución del segundo.

Antes de eso, lo que haremos será demostrar un lema de convergencia que utilizaremos de forma recurrente en lo que resta de trabajo.

Lema 4.1. *Supongamos que $M(x)$ satisface la condición de acotación (4.3). Si $\{u_n\}$ es una sucesión de $W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, entonces*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi,\ \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

<u>Demostración:</u>

Sea $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y sea $\tau_\varphi \colon W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido como

$$\tau_\varphi(v) = \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi,\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Claramente, τ_φ es lineal y, además, es continuo, pues usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $(L^2(\Omega))^N$ y la condición (4.3) deducimos que

$$\begin{aligned}|\tau_\varphi(v)| &\le \left|\int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi\right| \le \left(\int_\Omega |M(x)\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \beta\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tau_\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$. Si además tenemos en cuenta que $u_n \rightharpoonup u$, deducimos que $\tau_\varphi(u_n) \to \tau_\varphi(u)$, es decir,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi,$$

como queríamos probar.

■

Una vez enunciado este lema, centrémonos en el primero de los problemas aproximados. Para su estudio, será necesario conocer el Teorema del punto fijo de Schauder. Este teorema es, en realidad, una extensión del Teorema del punto fijo de Brouwer. Su demostración puede encontrarse en [5, Teorema 11.1].

Teorema 4.3 (**Schauder**). *Sea X un espacio de Banach y $G \subset X$ un conjunto cerrado, convexo y acotado. Si $T\colon G \longrightarrow X$ es un operador continuo y compacto tal que $T(G) \subset G$, entonces T tiene un punto fijo.*

En general, probar que un operador es compacto (véase la Definición 2.4) puede resultar tedioso. Cuando el espacio de partida es reflexivo la situación es bien distinta, pues es posible obtener el siguiente resultado como consecuencia inmediata de la Proposición 1.3.

Proposición 4.1. *Sean X e Y dos espacios normados y sea $T\colon X \longrightarrow Y$. Supongamos que X es reflexivo. Si para cada sucesión $\{x_n\}$ de X tal que $x_n \rightharpoonup x \in X$ se tiene que $Tx_n \to Tx$, entonces T es compacto.*

Comentario 4.1. Observemos que si un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ satisface que para cada sucesión $\{x_n\}$ de X tal que $x_n \rightharpoonup x \in X$ se tiene que $Tx_n \to Tx$, entonces dicho operador es continuo.

Una vez enunciados todos estos resultados, estamos en condiciones de probar la existencia de solución débil del primero de los problemas aproximados. En dicho problema, todos los coeficientes son acotados, por lo que podemos relajar las restricciones impuestas en la definición de solución débil (Definición 4.1).

Teorema 4.4. *Supongamos que la matriz $M(x)$ satisface (4.2) y (4.3), que $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, que $f(x,s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ es continua en s y que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada. Entonces existe al menos una solución débil del problema (4.10), esto es, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ verificando*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega a(x) g(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Demostración:

La idea de esta demostración es aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder 4.3 a un operador conveniente. Definiremos el operador $T\colon W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ de la siguiente forma. Dado $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, la función $f(x,u) - a(x)g(u) \in L^\infty(\Omega)$ y, por el Teorema 3.2, existe una única $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega M(x)\nabla v \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi - \int_\Omega a(x)g(u)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{4.18}$$

El hecho de que esta v exista y sea única nos permite definir correctamente el operador $T\colon W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ como

$$Tu = v, \ \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Observemos que si probamos que T tiene un punto fijo habremos probado la existencia de solución débil de este problema. Para poder aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder 4.3 necesitamos probar los siguientes dos puntos:

(1) T envía un conjunto cerrado, convexo y acotado en sí mismo.

(2) T es continuo y compacto.

Probaremos primero el punto (1). Para demostrar dicho punto bastará probar que T está acotado, es decir, que existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|Tu\| \le k$, $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pues de esa forma tendremos que $T\big(\overline{B}_k(0)\big) \subset \overline{B}_k(0)$.

Sea $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y sea $v = Tu$. Estas funciones verifican la relación (4.18). Si tomamos v como función test y aplicamos, entre otras cosas, la condición de elipticidad (4.2), la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$ y la desigualdad de Poincaré 2.4, nos queda que

$$\begin{aligned}
\alpha\|v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \alpha\int_\Omega |\nabla v|^2 \le \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla v &\le \left|\int_\Omega f(x,u)v\right| + \left|\int_\Omega a(x)g(u)v\right| \\
&\le \|f(x,u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|a(x)g(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le S\|f(x,u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + S\|a(x)g(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\
&\le S\big(\mathrm{meas}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}\|f(x,s)\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \\
&\qquad + S\big(\mathrm{meas}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}\|g(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde S es la constante dada por la desigualdad de Poincaré 2.4.

Así, si notamos

$$k = \frac{S}{\alpha}\big(\mathrm{meas}(\Omega)\big)^{\frac{1}{2}}\Big[\|f(x,s)\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} + \|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}\|g(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\Big], \tag{4.19}$$

tenemos que

$$\|Tu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le k,$$

como queríamos probar.

Veamos ahora el punto (2). Podemos utilizar el Comentario 4.1 para probar que T es continuo y, puesto que $W_0^{1,2}(\Omega)$ es reflexivo, podemos usar la Proposición 4.1 para demostrar que T es compacto. Por lo tanto, sea $\{u_n\}$ una sucesión de $W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Tenemos que probar que $Tu_n \to Tu$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Para simplificar las expresiones, notaremos $v_n = Tu_n$ y $v = Tu$.

Puesto que T es un operador acotado (en el sentido visto en el apartado anterior), tenemos que

$$\|v_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le k, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde k es la constante dada por (4.19).

Por lo tanto, $\{v_n\}$ es una sucesión acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Por el Corolario 2.4.1, esta sucesión tiene una parcial $\{v_{\sigma_1(n)}\}$ tal que $v_{\sigma_1(n)} \rightharpoonup w$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y $v_{\sigma_1(n)} \to w$ c.t.p. en Ω para algún $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y, además, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $|v_{\sigma_1(n)}(x)| \le h(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, c.t.p. en Ω.

Por otro lado, como $u_{\sigma_1(n)} \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$, entonces $u_{\sigma_1(n)}$ es acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y, por ello, podemos aplicar de nuevo el Corolario 2.4.1 para afirmar que esta sucesión tiene una parcial $\{u_{\sigma_2(n)}\}$ tal que $u_{\sigma_2(n)} \to u$ c.t.p. en Ω. Observemos que la sucesión $\{v_{\sigma_2(n)}\}$ sigue satisfaciendo lo mismo que $\{v_{\sigma_1(n)}\}$.

Lo primero que haremos será probar que $w = v$. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $Tu_{\sigma_2(n)} = v_{\sigma_2(n)}$, entonces

$$\int_\Omega M(x)\nabla v_{\sigma_2(n)}\nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u_{\sigma_2(n)})\varphi - \int_\Omega a(x)g(u_{\sigma_2(n)})\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Por una parte, gracias al Lema 4.1 podemos afirmar que

$$\int_\Omega M(x)\nabla v_{\sigma_2(n)}\nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla w\nabla\varphi,\ \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta que a, f y g son acotadas, que g es continua, que $f(x,s)$ es continua en s y que $u_{\sigma_2(n)} \to u$ c.t.p. en Ω, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 para afirmar que

$$\int_\Omega f(x,u_{\sigma_2(n)})\varphi - \int_\Omega a(x)g(u_{\sigma_2(n)})\varphi \to \int_\Omega f(x,u)\varphi - \int_\Omega a(x)g(u)\varphi,\ \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Por tanto,

$$\int_\Omega M(x)\nabla w\nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi - \int_\Omega a(x)g(u)\varphi,\ \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$$

y, en consecuencia, $w = Tu = v$.

Veamos ahora que $v_{\sigma_2(n)} \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Si tenemos en cuenta la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$ y la definición de los elementos de $\{v_{\sigma_2(n)}\}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_{\sigma_2(n)} - v\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \alpha\int_\Omega |\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v)|^2\\
&\leq \int_\Omega M(x)\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v)\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v)\\
&= \int_\Omega M(x)\nabla v_{\sigma_2(n)}\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v) - \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v)\\
&= \int_\Omega f(x,u_{\sigma_2(n)})(v_{\sigma_2(n)} - v) - \int_\Omega a(x)g(u_{\sigma_2(n)})(v_{\sigma_2(n)} - v) - \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla(v_{\sigma_2(n)} - v).
\end{aligned}$$

De las tres últimas integrales, las dos primeras tienden a 0 por el Teorema de la convergencia dominada 1.3 (donde es necesario usar que $|v_{\sigma_2(n)}(x)| \leq h(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, c.t.p. en Ω para verificar sus hipótesis) y la tercera integral tiende a 0 por el Lema 4.1. En consecuencia, $v_{\sigma_2(n)} \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Por último, nos queda probar que $v_n \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Observemos que, dada una parcial cualquiera de $\{v_n\}$, podemos seguir el razonamiento que acabamos de hacer para probar que dicha parcial admite una parcial convergente a v. Por el Lema 1.1, concluimos que $v_n \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Una vez probados los puntos (1) y (2), podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder 4.3 para afirmar que existe $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $Tu = u$, es decir, tal que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi - \int_\Omega a(x)g(u)\varphi,\ \forall\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

■

Tras probar la existencia de solución débil del primero de los problemas aproximados, estamos en condiciones de probar la existencia de solución débil del segundo. En este problema, la acotación de la solución y las hipótesis impuestas sobre los coeficientes nos vuelven a permitir relajar las restricciones impuestas en la definición de solución débil (Definición 4.1).

Teorema 4.5. *Supongamos que $M(x)$ verifica (4.2) y (4.3), que $0 \leq a(x) \in L^\infty(\Omega)$, que $f(x,s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ es continua en s y que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y satisface (4.14). Entonces existe al menos una solución débil acotada del problema (4.10), esto es, existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo la relación*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega a(x)g(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

<u>Demostración:</u>

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el problema aproximado

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)\dfrac{g(u)}{1+\frac{1}{n}|g(u)|} = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.20}$$

Observemos que la función $g_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(s) = \frac{g(s)}{1+\frac{1}{n}|g(s)|}, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

es continua (por ser composición de dos funciones continuas) y acotada, pues

$$|g_n(s)| \leq n, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, el problema (4.20) verifica las hipótesis del Teorema 4.4 y, en consecuencia, tiene al menos una solución débil. Sea $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ dicha solución. Por ser u_n solución débil de (4.20) se cumple que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla \varphi + \int_\Omega a(x)g_n(u_n)\varphi = \int_\Omega f(x,u_n)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{4.21}$$

Si tomamos la función $G_{k_0}(u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definida en (2.2) como función test, donde k_0 es el número real positivo dado por la condición (4.14), y tenemos en cuenta la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 &+ \int_\Omega a(x)g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) \\ &\leq \int_\Omega M(x)\nabla G_{k_0}(u_n)\nabla G_{k_0}(u_n) + \int_\Omega a(x)g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla G_{k_0}(u_n) + \int_\Omega a(x)g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) = \int_\Omega f(x,u_n)G_{k_0}(u_n). \end{aligned}$$

Notemos que $\int_\Omega a(x)g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) \geq 0$, pues $a(x) \geq 0$ y $g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) \geq 0$. En efecto, esto último es cierto, pues se cumple para cada uno de los siguientes casos:

- Si $|u_n| \leq k_0$, entonces $G_{k_0}(u_n) = 0$ y así $g_n(u_n)G_{k_0}(u_n) = 0$.
- Si $u_n > k_0$, entonces $G_{k_0}(u_n) > 0$ y, además, $g_n(u_n) > 0$, puesto que $g(u_n)u_n > 0$ por la condición (4.14). Así, $G_{k_0}(u_n)g_n(u_n) > 0$.
- Si $u_n < -k_0$, entonces $G_{k_0}(u_n) < 0$ y, además, $g_n(u_n) < 0$, puesto que $g(u_n)u_n > 0$ por la condición (4.14). Así, $G_{k_0}(u_n)g_n(u_n) > 0$.

En consecuencia, podemos afirmar que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 \leq \int_\Omega f(x,u_n) G_{k_0}(u_n).$$

Como además $f \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, tenemos que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 \leq \int_\Omega f(x,u_n) G_{k_0}(u_n) \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \int_\Omega \chi_{\{|u|>k\}} G_k(u).$$

Ahora bien, observemos que aunque no tenemos exactamente la misma desigualdad del enunciado de los Teoremas de Stampacchia 3.6 y 3.7, tenemos la desigualdad clave con la que comienzan sus demostraciones. Por lo tanto, a partir de aquí podemos copiar la demostración de los Teoremas de Stampacchia 3.6 y 3.7 para concluir que existe $C > 0$ independiente de n tal que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En definitiva, la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$. Veamos ahora que está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega)$ como función test en (4.21) y, teniendo en cuenta la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha \|u_n\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x) \nabla u_n \nabla u_n \\
&= \int_\Omega f(x,u_n) u_n - \int_\Omega a(x) \frac{g(u_n)}{1+\frac{1}{n}|g(u_n)|} u_n \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u_n)u_n| + \int_\Omega \left| a(x) \frac{g(u_n)}{1+\frac{1}{n}|g(u_n)|} u_n \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u_n)u_n| + \int_\Omega |a(x) g(u_n) u_n| \\
&\leq C\mathrm{meas}(\Omega) \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} + C\mathrm{meas}(\Omega)\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \max_{|s|\leq C} |g(s)|.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha tenido en cuenta que g es continua y que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. En virtud del Corolario 2.4.1, la sucesión $\{u_n\}$ admite una parcial, que seguiremos notando por $\{u_n\}$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y tal que $u_n \to u$ c.t.p. en Ω para alguna $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Además, como $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$, gracias a la convergencia c.t.p. de $\{u_n\}$ deducimos que $u \in L^\infty(\Omega)$ con $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

Probemos ahora que u es solución débil del problema del enunciado. Recordemos que las u_n son soluciones débiles de los problemas aproximados, es decir, verifican la relación (4.21). Veamos a qué converge cada una de las integrales de dicha relación.

- Gracias al Lema 4.1 podemos afirmar que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla \varphi \to \int_\Omega M(x) \nabla u \nabla \varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

- Sea $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Como g es continua y $u_n \to u$ c.t.p. en Ω, entonces $g(u_n) \to g(u)$ c.t.p. en Ω. Como además $\frac{1}{n}|g(u_n)| \to 0$ c.t.p. en Ω, deducimos que $g_n(u_n) \to g(u)$ c.t.p. en Ω. Así,
$$a(x)g_n(u_n)\varphi \to a(x)g(u)\varphi \text{ c.t.p. en } \Omega.$$
Por otra parte, si tenemos en cuenta que $|g_n(s)| \le |g(s)|$ para cada $s \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que
$$|a(x)g_n(u_n)\varphi| \le |a(x)g(u_n)\varphi| \le \max_{|s|\le C}|g(s)| \cdot \|a\|_{L^\infty(\Omega)}|\varphi| \text{ c.t.p. en } \Omega$$
con $\max_{|s|\le C}|g(s)| \cdot \|a\|_{L^\infty(\Omega)}|\varphi| \in L^1(\Omega)$. En consecuencia, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 para concluir que
$$\int_\Omega a(x)g_n(u_n)\varphi \to \int_\Omega a(x)g(u)\varphi.$$

- Sea $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Como $f(x,s)$ es continua en s y $u_n \to u$ c.t.p. en Ω, deducimos que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ c.t.p. en Ω. Así,
$$f(x,u_n)\varphi \to f(x,u)\varphi \text{ c.t.p. en } \Omega.$$
Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que
$$|f(x,u_n)\varphi| \le \|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}|\varphi| \text{ c.t.p. en } \Omega$$
con $\|f\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}|\varphi| \in L^1(\Omega)$. En consecuencia, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 para afirmar que
$$\int_\Omega f(x,u_n)\varphi \to \int_\Omega f(x,u)\varphi.$$

Por consiguiente, si tomamos límites cuando $n \to \infty$ en la igualdad que satisfacen las u_n obtenemos que
$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega a(x)g(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$
De esta forma, u es una solución débil acotada del problema del enunciado, como queríamos probar.

■

4.2.2 Existencia de solución

En esta subsección probaremos la existencia de solución débil del problema (4.10) al imponerle el resto de hipótesis planteadas al comienzo de la Sección 4.2. Para ello, nos basaremos en las ideas de [1, Teorema 2.4].

Teorema 4.6. *Supongamos que $M(x)$ verifica (4.2) y (4.3), que $a(x) \ge 0$ cumple (4.11), que $f(x,s)$ verifica (4.12) y (4.13) con h satisfaciendo (4.16) y que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y satisface (4.14) y (4.15). Entonces existe al menos una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema (4.10) verificando que*
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le k_0,$$
donde k_0 es el número real positivo dado por las condiciones (4.14) y (4.15).

Demostración:

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$f_n(x,s) = \frac{f(x,s)}{1+\frac{1}{n}|f(x,s)|}, \qquad a_n(x) = \frac{a(x)}{1+\frac{Q}{n}a(x)}.$$

Consideremos el problema aproximado

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a_n(x)g(u) = f_n(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.22}$$

Observemos que, como $|f_n(x,s)| \le n$ y $|a_n(x)| \le \frac{n}{Q}$, se cumple que $f_n(x,s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ y que $a_n(x) \in L^\infty(\Omega)$. Como el problema (4.22) verifica el resto de hipótesis del Teorema 4.5, podemos aplicar dicho teorema para garantizar la existencia de una solución débil $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema aproximado (4.22). Por ser solución, u_n satisface que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi + \int_\Omega a_n(x)g(u_n)\varphi = \int_\Omega f_n(x,u_n)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En particular, tendremos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi + \int_\Omega a_n(x)g(u_n)\varphi = \int_\Omega f_n(x,u_n)\varphi, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{4.23}$$

Ahora bien, entre $f_n(x,s)$ y $a_n(x)$ podemos establecer una relación parecida a la relación existente entre $f(x,s)$ y $a(x)$ dada por (4.13). En efecto, si tenemos en cuenta que la función $\psi\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(s) = \frac{s}{1+\frac{1}{n}s}, \ \forall s \in \mathbb{R}_0^+$$

es creciente, basta aplicar esta función en la desigualdad (4.13) y utilizar después (4.16) para obtener que

$$|f_n(x,s)| = \frac{|f(x,s)|}{1+\frac{1}{n}|f(x,s)|} \le \frac{a(x)h(s)}{1+\frac{1}{n}a(x)h(s)} \le \frac{a(x)}{1+\frac{Q}{n}a(x)}h(s) = a_n(x)h(s). \tag{4.24}$$

Dicho esto, veamos que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$. Consideremos la función G_{k_0} definida en (2.2), donde k_0 es el número real positivo dado por (4.14) y (4.15). Observemos que, como $u_n \in L^\infty(\Omega)$ y G_{k_0} es continua, $G_{k_0}(u_n) \in L^\infty(\Omega)$. Como además $G_{k_0}(u_n) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, podemos usar $G_{k_0}(u_n)$ como función test en (4.23). Si además utilizamos la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$ y la desigualdad (4.24), obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha\int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 + \int_\Omega a_n(x)g(u_n)G_{k_0}(u_n) &\le \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla G_{k_0}(u_n) + \int_\Omega a_n(x)g(u_n)G_{k_0}(u_n) \\ &= \int_\Omega f_n(x,u_n)G_{k_0}(u_n) \\ &\le \int_\Omega \big|f_n(x,u_n)\big|\big|G_{k_0}(u_n)\big| \\ &\le \int_\Omega a_n(x)h(u_n)\big|G_{k_0}(u_n)\big|. \end{aligned}$$

Gracias a la condición (4.14) tenemos que $g(s)G_{k_0}(s) \geq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$ y, así, $g(s)G_{k_0}(s) = |g(s)G_{k_0}(s)|$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Usando esto, de la desigualdad anterior deducimos que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 + \int_\Omega a_n(x)h(u_n)\left[\frac{|g(u_n)|}{h(u_n)} - 1\right]\left|G_{k_0}(u_n)\right| \leq 0.$$

Ahora bien, observemos que la segunda integral es no negativa, pues $a_n(x)$ y $h(s)$ son funciones no negativas y, si

$$\frac{|g(u_n)|}{h(u_n)} < 1,$$

por (4.15) tendríamos que $|u_n| < k_0$ y esto implicaría que

$$G_{k_0}(u_n) = 0,$$

por lo que dicha integral valdría 0. Como ambas integrales son no negativas y su suma es menor o igual que 0, deducimos que ambas integrales deben valer 0. En particular,

$$\alpha \|G_{k_0}(u_n)\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla G_{k_0}(u_n)|^2 = 0.$$

De esta forma, $G_{k_0}(u_n) = 0$ c.t.p. en Ω. Por la definición de G_{k_0}, deducimos que $|u_n| \leq k_0$ c.t.p. en Ω o, equivalentemente, que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k_0. \tag{4.25}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$. Veamos ahora que está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Para esta acotación seguiremos un procedimiento parecido al de la demostración del Teorema 4.5.

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $u_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ como función test en (4.23) y, teniendo en cuenta la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$, la relación existente entre $f(x,s)$, $a(x)$ y $h(s)$ dada por (4.13) y que $a(x) \in L^1(\Omega)$ por (4.11), podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\alpha \|u_n\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla u_n \\
&= \int_\Omega f_n(x,u_n)u_n - \int_\Omega a_n(x)g(u_n)u_n \\
&\leq \int_\Omega |f_n(x,u_n)u_n| + \int_\Omega |a_n(x)g(u_n)u_n| \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u_n)u_n| + \int_\Omega |a(x)g(u_n)u_n| \\
&\leq \int_\Omega |a(x)h(u_n)u_n| + \int_\Omega |a(x)g(u_n)u_n| \\
&\leq \|a\|_{L^1(\Omega)} \max_{|s|\leq k_0} |h(s)s| + \|a\|_{L^1(\Omega)} \max_{|s|\leq k_0} |g(s)s|.
\end{aligned}$$

En la última desigualdad se ha tenido en cuenta que $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k_0$ y que las funciones $s \longmapsto h(s)s$ y $s \longmapsto g(s)s$ son continuas.

Por lo tanto, la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Por el Corolario 2.4.1, $\{u_n\}$ tiene una parcial, que seguiremos notando por $\{u_n\}$, satisfaciendo que $u_n \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y que $u_n \to u$ c.t.p. en Ω para algún $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Gracias a la convergencia c.t.p. de $\{u_n\}$, de (4.25) deducimos que $u \in L^\infty(\Omega)$ con $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le k_0$.

Veamos ahora que u es solución del problema del enunciado. Recordemos que las u_n son soluciones débiles de los problemas aproximados, es decir, verifican la relación (4.23). Veamos a qué converge cada una de las integrales de dicha relación.

- Gracias al Lema 4.1 podemos afirmar que
$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi,\ \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

- Sea $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Como g es continua y $u_n \to u$ c.t.p. en Ω, deducimos que $g(u_n) \to g(u)$ c.t.p. en Ω. Además, $a_n(x) \to a(x)$ en Ω. Por lo tanto,
$$a_n(x)g(u_n)\varphi \to a(x)g(u)\varphi \text{ c.t.p. en } \Omega.$$
Por otra parte, si tenemos en cuenta que $|u_n| \le k_0$ c.t.p. en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$ y que g es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$|a_n(x)g(u_n)\varphi| \le |a(x)g(u_n)\varphi| \le \max_{|s|\le k_0}|g(s)|\cdot\|\varphi\|_\infty a(x) \text{ c.t.p. en } \Omega$$
con $\max_{|s|\le k_0}|g(s)|\cdot\|\varphi\|_\infty a(x) \in L^1(\Omega)$. En consecuencia, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 para concluir que
$$\int_\Omega a_n(x)g(u_n)\varphi \to \int_\Omega a(x)g(u)\varphi.$$

- Sea $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Como $f(x,s)$ es continua en s y $u_n \to u$ c.t.p. en Ω, deducimos que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ c.t.p. en Ω. Como además $\frac{1}{n}|f(x,u_n)| \to 0$ c.t.p. en Ω, podemos decir que $f_n(x,u_n) \to f(x,u)$ c.t.p. en Ω. Así,
$$f_n(x,u_n)\varphi \to f(x,u)\varphi \text{ c.t.p. en } \Omega.$$
Por otra parte, teniendo en cuenta la relación (4.13), que $|u_n| \le k_0$ c.t.p. en Ω para cada $n \in \mathbb{N}$ y que h es continua, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que
$$|f_n(x,u_n)\varphi| \le |f(x,u_n)\varphi| \le a(x)h(u_n)|\varphi| \le \max_{|s|\le k_0} h(s)\cdot\|\varphi\|_\infty a(x) \text{ c.t.p. en } \Omega$$
con $\max_{|s|\le k_0} h(s)\cdot\|\varphi\|_\infty a(x) \in L^1(\Omega)$. En consecuencia, podemos aplicar el Teorema de la convergencia dominada 1.3 para afirmar que
$$\int_\Omega f_n(x,u_n)\varphi \to \int_\Omega f(x,u)\varphi.$$

Por consiguiente, si tomamos límites cuando $n \to \infty$ en la relación (4.23) obtenemos que
$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi + \int_\Omega a(x)g(u)\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi,\ \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

Además, si tenemos en cuenta que $u \in L^\infty(\Omega)$, que g es continua, que $f(x,s)$ verifica la relación (4.13) con h continua y que $a(x) \in L^1(\Omega)$ por (4.11), inmediatamente podemos deducir que $a(x)g(u) \in L^1(\Omega)$ y que $f(x,u) \in L^1(\Omega)$.

En definitiva, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y satisface (4.17), como queríamos probar.

■

4.2.3 Un principio del máximo fuerte

En esta subsección seguiremos las ideas de [2] expuestas en la Sección 4.1. Con el objetivo de probar un principio del máximo fuerte, sustituiremos las hipótesis (4.14) y (4.15) por

$$\frac{g}{h} \text{ es impar y estrictamente creciente} \tag{4.26}$$

y

$$\left(\frac{g}{h}\right)_\infty := \lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{h(s)} > 1. \tag{4.27}$$

Observemos que (4.26) y (4.27) implican (4.14) y (4.15). La imposición de estas dos nuevas condiciones más restrictivas nos permitirá conocer y controlar mejor la cota en $L^\infty(\Omega)$ que aparecía en el Teorema 4.6, tal y como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 4.6.1. *Supongamos que $M(x)$ verifica (4.2) y (4.3), que $a(x) \geq 0$ cumple (4.11), que $f(x,s)$ verifica (4.12) y (4.13) con h satisfaciendo (4.16) y que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y satisface (4.26) y (4.27). Entonces existe al menos una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ del problema (4.10) verificando que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{g}{h}\right)^{-1}(1).$$

Demostración:

Observemos que la condición (4.26) y el hecho de que h sea positiva implican que $g(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. De esta forma, la condición (4.14) se cumple para $k_0 > 0$ arbitrario.

Por otra parte, gracias a la condición (4.26) podemos decir que g/h tiene inversa y que el dominio de dicha inversa será $]-(g/h)_\infty, (g/h)_\infty[$. Gracias a (4.27), tenemos que 1 pertenece a dicho dominio. Así, podemos considerar $k_0 = (g/h)^{-1}(1)$. En ese caso, tendremos que

$$\frac{|g(s)|}{h(s)} \geq 1, \ \forall s \in \{s \in \mathbb{R} : |s| \geq k_0\}$$

como consecuencia de (4.26). Por lo tanto, considerando dicho k_0 también se verifica (4.15).

Como para $k_0 = (g/h)^{-1}(1)$ se verifican tanto (4.14) como (4.15), podemos aplicar el Teorema 4.6 para concluir que existe una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (4.10) tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{g}{h}\right)^{-1}(1).$$

■

Tras afinar la cota de u en $L^\infty(\Omega)$ estamos en condiciones de probar el siguiente principio del máximo fuerte.

Teorema 4.7. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, además de ser abierto y acotado, es conexo. Supongamos también que $M(x)$ verifica (4.2) y (4.3), que $a(x) \in L^1(\Omega)$ con $a(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω y $a(x) \neq 0$ en algún conjunto de medida positiva, que $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas satisfaciendo (4.16), (4.26) y (4.27) y que $f(x,s) = a(x)h(s)$. Bajo estas condiciones existe al menos una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (4.10) satisfaciendo que*

$$u(x) > 0 \text{ c.t.p. } en\ \Omega.$$

Demostración:

En primer lugar, observemos que podemos aplicar el Corolario 4.6.1 para afirmar que existe una solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (4.10) tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{g}{h}\right)^{-1}(1).$$

Veamos ahora que $u > 0$ c.t.p. en Ω. Utilizando la cota que tenemos de u en $L^\infty(\Omega)$ y que por (4.26) la función g/h es estrictamente creciente, obtenemos que

$$a(x)g(u) = a(x)\frac{g(u)}{h(u)}h(u) \leq a(x)\frac{g}{h}\left(\left(\frac{g}{h}\right)^{-1}(1)\right)h(u) = a(x)h(u) = f(x,u) \text{ c.t.p. en } \Omega. \quad (4.28)$$

Por ser solución, u satisface que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega [f(x,u) - a(x)g(u)]\varphi,\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad (4.29)$$

y, gracias a la desigualdad (4.28), también satisface que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega [f(x,u) - a(x)g(u)]\varphi \geq 0,\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ con } \varphi \geq 0. \quad (4.30)$$

Ahora bien, por el Teorema de densidad 2.1 sabemos que $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,2}(\Omega)$. Por lo tanto, dado $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si definimos la parte positiva de una función w cualquiera como $w^+ := -(-w)^-$, donde w^- se define como en (2.1), obtenemos que $\{\varphi_n^+\}$ es una sucesión no negativa de $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que, por (4.30), cumple que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi_n^+ \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por la forma que tienen sus gradientes, es inmediato probar que $\varphi_n^+ \to v^+ = v$ en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y, por el Lema 4.1, deducimos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla v \geq 0.$$

Por la arbitrariedad de v, podemos decir que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla v \geq 0,\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ con } v \geq 0.$$

De esta forma, u es una super-solución de la ecuación (3.5) con $f \equiv 0$. Como Ω es conexo, podemos aplicar el Principio del máximo fuerte 3.5.1 para afirmar que, o bien $u \equiv 0$ c.t.p. en Ω, o bien $u > 0$ c.t.p. en Ω. Observemos que u no puede ser idénticamente nula c.t.p. en Ω, pues si lo fuese tendríamos en (4.29) que

$$\int_\Omega f(x,0)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

pero esto no puede ocurrir porque por hipótesis $f(x,0) = a(x)h(0) \neq 0$ en algún conjunto de medida positiva. Por lo tanto, queda probado que

$$u(x) > 0 \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

■

Comentario 4.2. Si sustituimos la hipótesis $f(x,s) = a(x)h(s)$ por $f(x,s) \geq 0$ c.t.p. en Ω seguimos teniendo la no negatividad de la solución. Su demostración es análoga a la del Teorema 3.3.

Finalizamos esta subsección exponiendo una familia de problemas a los que les podemos aplicar el Teorema 4.7 pero no el Teorema 4.2 probado en [2].

Ejemplo 4.1. Como las hipótesis sobre $M(x)$ y $a(x)$ son las mismas en el Teorema 4.2 y en el Teorema 4.7, consideraremos $M(x)$ y $a(x)$ genéricas satisfaciendo las condiciones impuestas en dichos teoremas. Para escoger la g y la h del Teorema 4.7, podemos fijar $\gamma > 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $Q > 0$ y tomar

$$g(s) = |s|^{\gamma-1}s, \ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad h(s) = \frac{1}{1+s^{2n}} + Q, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Estas funciones son continuas y satisfacen (4.16), (4.26) y (4.27). Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 4.7 para afirmar que existe al menos una solución débil acotada y estrictamente positiva del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)|u|^{\gamma-1}u = a(x)\left(\dfrac{1}{1+u^{2n}} + Q\right) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En cambio, el Teorema 4.2 no se puede aplicar. El motivo es que si escribimos este problema de la forma (4.1), la condición (4.8) no se satisface.

4.2.4 La cuestión de la unicidad

Si comparamos el Teorema 4.2 demostrado en [2] con el Teorema 4.7, podemos comprobar que el segundo teorema generaliza al primero en todos los aspectos salvo en la unicidad de solución. Para obtener un teorema que lo generalice completamente es necesario imponer dos condiciones más.

Teorema 4.8. *Si a las condiciones del Teorema 4.7 añadimos que g sea creciente y que h sea decreciente, entonces existe una única solución débil $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (4.10) y dicha solución satisface que*

$$u(x) > 0 \text{ c.t.p. } en\ \Omega.$$

Demostración:

Gracias al Teorema 4.7 lo único que nos queda por probar es la unicidad. Supongamos que $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ son dos soluciones de (4.10). Por ser soluciones, ambas funciones satisfacen la igualdad (4.17). Si en ambas igualdades consideramos como función test la función $(u_1 - u_2)^-$ definida como en (2.1) y las restamos, obtenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)^- + \int_\Omega a(x)[g(u_1)-g(u_2)](u_1-u_2)^- \\ = \int_\Omega a(x)[h(u_1)-h(u_2)](u_1-u_2)^-.$$

Ahora bien, notemos que $(u_1 - u_2)^-$ es distinta de 0 solamente cuando $u_1 < u_2$. Así, podemos afirmar que $[g(u_1)-g(u_2)](u_1-u_2)^- \geq 0$, pues $g(u_1) \leq g(u_2)$ cuando $u_1 \leq u_2$ por ser g creciente. Del mismo modo, podemos decir que $[h(u_1)-h(u_2)](u_1-u_2)^- \leq 0$, pues $h(u_1) \geq h(u_2)$ cuando $u_1 \leq u_2$ por ser h decreciente.

Gracias a la condición de elipticidad (4.2) de $M(x)$, a que $a(x) \geq 0$ c.t.p. en Ω y a todo lo que acabamos de deducir podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\alpha\|(u_1-u_2)^-\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \alpha\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)^-|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_1-u_2)^-\nabla(u_1-u_2)^- \\
&= \int_\Omega M(x)\nabla(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)^- \\
&\leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)^- + \int_\Omega a(x)[g(u_1)-g(u_2)](u_1-u_2)^- \\
&= \int_\Omega a(x)[h(u_1)-h(u_2)](u_1-u_2)^- \leq 0.
\end{aligned}$$

De esta forma, $\|(u_1-u_2)^-\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = 0$ y, por ello, $(u_1-u_2)^- = 0$ c.t.p. en Ω o, equivalentemente, $u_1 \geq u_2$ c.t.p. en Ω. Como el papel de u_1 y de u_2 es perfectamente intercambiable, podemos deducir de la misma forma que $u_2 \geq u_1$ c.t.p. en Ω. En definitiva, $u_1 = u_2$ c.t.p. en Ω y, como consecuencia, queda probada la unicidad de solución.

■

Las dos condiciones adicionales impuestas en este teorema hacen que, en la práctica, sea muy difícil encontrar funciones que satisfagan las hipótesis de este teorema y no las del Teorema 4.2. Durante la elaboración de este proyecto hemos tratado de relajar estas condiciones, pero todos nuestros esfuerzos han sido en vano. Esta es una de las cuestiones que queda en el aire y, por ello, será una de las líneas a seguir en mi iniciación como investigador.

Conclusión

En un principio, el objetivo de mi trabajo era bien distinto: demostrar los teoremas expuestos en la Sección 4.1 probados por Arcoya y Boccardo en [1] y [2]. Toda esta idea cambió cuando, con la ayuda de mis tutores, pude encontrar una pequeña generalización de esos teoremas.

Desde entonces, he podido experimentar de primera mano los problemas a los que día a día se enfrenta un investigador, que van desde volver a encontrar fallos en alguna de tus demostraciones hasta tratar de entender las pruebas de otros autores explicadas con los mínimos detalles.

Al contrario de lo que puede ocurrir con otros temas, en este trabajo estaba clara la meta pero no el camino. Por ello, he tenido que realizar todo un proceso de búsqueda inversa para intentar que este texto fuese lo más consistente posible. Una de las ventajas de haber hecho todo el trabajo "tirando hacia atrás del hilo" es que he podido tener un control mayor sobre los resultados que se utilizan en cada momento. Por ello, he procurado que todas las definiciones y resultados incluidos en el trabajo tengan alguna finalidad posterior.

En cuanto a los contenidos del trabajo, me gustaría comentar que en un inicio mi idea era incluir algún problema más de los que se estudian en [1] y [2], aunque debido a la limitación de páginas esto no ha sido posible. No obstante, el tiempo dedicado a estudiar esos problemas no ha sido en vano, pues mi objetivo a medio plazo es seguir con esta línea de investigación.

Esta experiencia ha sido plenamente enriquecedora, pues me ha permitido ampliar con creces los conocimientos adquiridos en algunas de las asignaturas del Grado. En concreto, los dos primeros capítulos podrían verse perfectamente como dos temas más en la asignatura *Análisis Funcional*. En cambio, los dos últimos capítulos son más difíciles de encasillar. Quizá, las asignaturas con un contenido más parecido sean *Ecuaciones Diferenciales II* y *Ecuaciones de la Física Matemática*.

Por último, me gustaría agradecer a mis tutores el trato recibido y su implicación en este proyecto. Ellos han conseguido volver a despertar en mí un interés por las matemáticas que hacía tiempo que había desaparecido.

Bibliografía

[1] D. Arcoya, L. Boccardo, *Regularizing effect of the interplay between coefficients in some elliptic equations*, Journal of Funtional Analysis, **268** (2015), 1153–1166.

[2] D. Arcoya, L. Boccardo, *Maximum principle thanks to interplay between coefficients in some Dirichlet problems*, Applied Mathematics Letters, **112** (2021), 1–9.

[3] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire Jean Leray, **3** (1963-1064), 1–77.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[6] A. Ambrosetti, D. Arcoya, *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*, Birkhäuser, 2011.

[7] R. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces (2ª edición)*, Academic Press, 2003.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations (2ª edición)*, American Mathematical Society, 2010.