UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Memoria de tesis doctoral para la obtención de título de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Almería.

Doctorado en Matemáticas

Los métodos numéricos y su enseñanza: estudio de casos en la universidad ecuatoriana

(The numerical methods and their teaching: case study in the Ecuadorian university)

Maritza Alexandra Pinta

Director: Dr. Juan José Moreno Balcázar

Universidad de Almería

Codirectora: Dra. Ana Belén Montoro Medina

Universidad de Granada

Marzo 2020

Con amor a Dios,

energía divina presente en todo lo creado,

y a mi familia,

la bendición más grande que me ha sido dada.

Agradecimientos

“El agradecimiento es la memoria del corazón” Lao Tsé

Por ello, de mi corazón nace un profundo agradecimiento a Dios por permitirme culminar el presente trabajo doctoral y por haber puesto en mi camino a personas maravillosas que me han ayudado. Entre las cuales, debo mencionar en primer lugar al Dr. Juan José Moreno Balcázar, quien me dio la oportunidad de trabajar junto a él la presente investigación y con mucha paciencia y dedicación me ha guiado durante estos años en la realización de la misma. De igual manera a la Dra. Ana Belén Montoro Medina, que con sus valiosos aportes, comentarios y reflexiones ha hecho posible esta memoria doctoral. Gracias Ana y JuanJo por todo.

Un especial agradecimiento a la memoria del Dr. Francisco Gil Cuadra que, con el profesionalismo y optimismo que lo caracterizaba, me condujo durante los tres primeros años de este importante trabajo. Gracias Paco.

También mi agradecimiento al Dr. Blas Torrecillas Jover, Coordinador del Programa de Doctorado de Matemáticas y a todo el personal de la Universidad de Almería que año a año, durante mis estancias doctorales, me han recibido con los brazos abiertos y me han hecho sentir como en casa.

Así mismo, quiero expresar mi sincero agradecimiento a las autoridades de mi querida Universidad Técnica de Machala, en la persona de su Rector, el Dr. César Quezada Abad, por el apoyo económico recibido para la realización de mi formación doctoral. Tengan por seguro que pondré todo el conocimiento adquirido al servicio de la comunidad universitaria.

No podía dejar de agradecer también la colaboración de los doce profesores participantes de esta investigación, quienes amablemente me abrieron las puertas de sus aulas. Así como a mis amigos y a mis compañeros doctorandos.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a las dos personas más importantes de mi vida, mi esposo Eguipto y mi hijo Juan José, quienes me han apoyado incondicionalmente en la consecución de este sueño. Gracias por su amor y comprensión.

Maritza

RESUMEN

Este trabajo surge de la necesidad de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en las carreras de ingeniería en la universidad ecuatoriana, donde los Métodos Numéricos es una asignatura importante dado su papel preponderante en la resolución de problemas inherentes a la profesión que no pueden resolverse mediante métodos analíticos. Por lo tanto, el objetivo principal es explorar aspectos importantes de los profesores de métodos numéricos, como sus concepciones y creencias sobre la naturaleza de la asignatura y su enseñanza y aprendizaje, y su conocimiento del contenido de los Métodos Numéricos.

Con este fin, este informe de investigación se ha organizado en dos partes. En la primera parte presentamos el enfoque de esta investigación, que hemos dividido en tres capítulos. El capítulo 1 corresponde a referencias teóricas relacionadas con los métodos numéricos y el capítulo 2 a investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El capítulo 3 establece los objetivos generales y específicos de esta investigación y la metodología utilizada para lograrlos.

La segunda parte, relacionada con los resultados obtenidos y las principales conclusiones, se divide en tres capítulos. El capítulo 4 describe los resultados relacionados con la descripción de las concepciones y creencias de los doce profesores que participan en la investigación sobre métodos numéricos, su enseñanza y aprendizaje y el papel de la tecnología, así como la coherencia entre estas creencias y su práctica docente. El capítulo 5 muestra resultados que se refieren al conocimiento de los docentes sobre conceptos clave de integración numérica y al análisis del Conocimiento de los Temas de integración numérica manifestado en sus clases por uno de los profesores que participan en este estudio. Finalmente, el último capítulo de este informe muestra las principales conclusiones extraídas en función de los objetivos establecidos, las limitaciones de nuestra investigación y las líneas abiertas para futuras investigaciones.

SUMMARY

This work stems from the need to improve teaching and learning processes in engineering careers at the Ecuadorian university, where Numerical Methods is an important subject given its preponderant role in solving problems inherent to the profession that cannot be solved by analytical methods. Therefore, the main objective is to explore important aspects of teachers of numerical methods, such as their conceptions and beliefs about the nature of the subject and its teaching and learning, and their knowledge of the content of Numerical Methods.

To this end, this research report has been organized in two parts. In the first part we present the approach of this research, which we have divided into three chapters. Chapter 1 corresponds to theoretical references related to numerical methods and Chapter 2 to research on the professional knowledge of the mathematics teacher. Chapter 3 sets out the general and specific objectives of this research and the methodology used to achieve it.

The second part, related to the results obtained and main conclusions, is divided into three chapters. Chapter 4 describes the results related to the description of the conceptions and beliefs of the twelve professors participating in the research on numerical methods, their teaching and learning and the role of technology, as well as the coherence between these beliefs and their teaching practice. Chapter 5 shows results referring to teachers' knowledge about key concepts of numerical integration and the analysis of the Knowledge of Topics of numerical integration manifested in their classes by one of the professors participating in this study. Finally, the last chapter of this report shows the main conclusions drawn based on the objectives set, the limitations of our research, and the lines open to future research.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

La universidad ecuatoriana se encuentra en un permanente proceso de mejora tendiente a solventar las deficiencias evidenciadas en las evaluaciones realizadas por el Gobierno ecuatoriano en la última década y a cumplir con los estándares de calidad exigidos por el mismo. Estas evaluaciones se iniciaron en el año 2008 cuando el Consejo Nacional de Evaluación y Acreditación (CONEA) evaluó a 68 universidades y escuelas politécnicas del Ecuador, clasificándolas en las categorías A, B, C, D y E. Posteriormente, el CONEA fue reemplazado por el Consejo de Evaluación, Acreditación y Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior (CEAACES), que en el año 2012 ordenó la suspensión definitiva de algunas universidades de la categoría E y en el año 2013 clasificó a las universidades restantes en las categorías A, B, C y D, en base a los criterios: academia, eficiencia académica, investigación, organización e infraestructura (Espinoza, 2016); quedando para el final de este proceso, en el año 2016, eliminada la categoría D.

Al ser la academia y la investigación criterios importantes de evaluación, la universidad ecuatoriana está impulsando el desarrollo de investigaciones que contribuyan, entre otros aspectos, al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las diferentes carreras ofertadas; entre las cuales, las ingenierías se encuentran entre las de mayor demanda. Y es precisamente en las ingenierías donde las matemáticas, concretamente los métodos numéricos, juegan un papel preponderante en la solución de problemas inherentes a la profesión que no pueden ser resueltos por métodos analíticos; notándose, de acuerdo a la revisión de la literatura, ausencia de investigaciones que aborden de manera específica la enseñanza de los métodos numéricos. Además, estudios previos han determinado en la universidad ecuatoriana una práctica docente tradicionalista y tecnocrática, el uso de la motivación exógena y de estímulos tendientes a lograr la pasividad y receptividad del estudiante, la repetición de textos y pensamientos descubiertos en otros países y la carencia de constructores de ciencia y tecnología sobre la realidad ecuatoriana (CONESUP, 2010). Todos estos aspectos, unidos al hecho de que en Ecuador la mayoría de los profesores universitarios de métodos numéricos, y de matemáticas en general, no cuentan con formación matemática por falta de la respectiva oferta académica, propiciaron el interés por realizar la presente investigación. Este trabajo está encaminado a explorar aspectos importantes de los profesores de métodos numéricos, como son sus concepciones y creencias sobre la naturaleza de la materia y su enseñanza y aprendizaje, y su conocimiento del contenido de Métodos Numéricos.

Para ello, la presente memoria de investigación se ha organizado en dos partes. En la primera parte se presenta el planteamiento de esta investigación, que hemos dividido en tres capítulos. Los dos primeros se corresponden con el marco conceptual de la investigación, formado por referentes teóricos relativos a los métodos numéricos (Capítulo 1) y a la investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Capítulo 2).

Más concretamente, el Capítulo 1 comienza con una breve exposición de lo que se entiende por métodos numéricos y su evolución histórica. Por otra parte, dado que una parte de esta investigación se centró en el análisis del conocimiento del profesor manifestado en sus clases, este capítulo aborda los referentes teóricos de integración numérica propios de cursos de Métodos Numéricos en carreras de ingeniería, y que, por tanto, tendrían cabida en las clases analizadas. Es decir, aunque la aplicación de métodos numéricos a integrales dobles y triples es de gran utilidad en ingeniería, solo se han abordado los métodos numéricos más utilizados para integrar una función en un intervalo de la recta real extendida, incluyendo de esta manera la integración impropia de primera especie. Todo ello se recoge de forma esquemática en lo que hemos denominado Contenido de Integración Numérica (CIN).

En el Capítulo 2, tras una breve exposición de los principales modelos de conocimiento del profesor que inspiraron el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), se detallan dos de sus componentes, que suponen el eje central de nuestra investigación. En este sentido, se dedica un apartado a la descripción de una propuesta de Conocimiento de los Temas de integración numérica deseable para cursos generalistas de ingeniería y otro a las concepciones y creencias del profesor.

En el Capítulo 3 se plantean los objetivos generales y específicos de esta investigación y la metodología utilizada para su consecución.

La segunda parte, relativa a los resultados obtenidos y conclusiones de la investigación, se divide en tres capítulos. En el Capítulo 4 se describen los resultados relativos al primer objetivo general, es decir, la descripción de las concepciones y creencias de los doce profesores participantes en la investigación sobre los métodos numéricos, sobre su enseñanza y aprendizaje y el papel de la tecnología, así como la coherencia entre estas creencias y su práctica docente.

En el Capítulo 5 se muestran resultados referentes al conocimiento de los profesores sobre conceptos claves de integración numérica y el análisis del Conocimiento de los Temas de integración numérica manifestado en sus clases por uno de los profesores participantes en este estudio.

Finalmente, en el último capítulo de esta memoria, se exponen las principales conclusiones obtenidas en función de los objetivos planteados, así como las limitaciones de nuestra investigación y las líneas abiertas a futuras investigaciones.

Los resultados de esta tesis se recogen en las siguientes publicaciones:

Pinta, M., Moreno-Balcázar, J. J., Gil-Cuadra, F. y Montoro, A. (2018). Conceptions and beliefs of the professors of numerical methods in the engineering degrees at ecuadorian universities. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceeding*s *of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 42*, V5 (pp.136). Umea, Suecia.

Pinta, M., Montoro, A. y Moreno-Balcázar, J. J. (2019). Papel de software en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos en la universidad ecuatoriana. En F. Egea, J. Gázquez, M. Molero, M. Simón, A. Martos, A. Barragán, N. Oropesa y J. Soriano (Eds.), *Innovación Docente e Investigación en Ciencias, Ingeniería y Arquitectura* (pp. 309-320). Madrid, España: Dykinson, S.L.

Y en los siguientes manuscritos enviados:

Montoro, A., Moreno-Balcázar, J. J. y **Pinta, M.** (2019). Conocimiento del profesor al enseñar integración numérica: un estudio de caso. *Enviado.*

Montoro, A., Moreno-Balcázar, J. J. y **Pinta, M.** (2019). La enseñanza de los métodos numéricos en ingeniería: concepciones y creencias de profesores en la universidad ecuatoriana. *Enviado.*

PRIMERA PARTE:
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1. Métodos numéricos

1.1. Los métodos numéricos y su evolución

Los métodos numéricos son técnicas matemáticas que permiten expresar la solución de un problema en forma numérica (Oñate, 2008), es decir, son algoritmos que permiten obtener soluciones numéricas a problemas que la matemática analítica no puede dar solución. Para Delgado (2013), los métodos numéricos constituyen el desarrollo matemático de técnicas numéricas, mientras que el análisis numérico profundiza en los errores que tienen estas técnicas y trata de optimizarlas o desarrollar otras más precisas. Pero, la diferencia de estos conceptos no está clara, por lo que muchas veces la asignatura de métodos numéricos se la conoce también bajo el nombre de análisis numérico (Martínez-Finkelshtein, 2001). Por ello, en el presente trabajo se ha considerado indistintamente ambas denominaciones.

Podríamos decir que el origen de los métodos numéricos se remonta al 4000 a. C. con el uso de algoritmos numéricos elementales para aproximar raíces cuadradas por parte de las civilizaciones mesopotámicas. Siglos más tarde, en el famoso Papiro de Ahmes, escrito en Egipto en el siglo XVI a. C., encontramos cifras o signos especiales para representar dígitos y múltiplos de potencias de diez, fracciones unitarias y operaciones aritméticas. Además, aparece la solución de ecuaciones lineales por el procedimiento que hoy conocemos como regula falsi; método que también fue utilizado por los matemáticos chinos según textos antiguos como el Chui–chang suan–chu (Nueve Capítulos sobre las artes matemáticas) (Merzbach y Boyer, 2011).

Posteriormente, desde el 800 a.C. hasta el 600 d.C., la civilización helénica es la cuna de importantes matemáticos como Pitágoras, que 500 a. C. exponía su famosa consigna “todo es número” dando inicio a una concepción numérica del universo. Euclides, 300 a.C., enuncia un algoritmo para calcular el máximo común divisor y da a conocer los números perfectos (Stewart, 2008). En esta época, las leyes de la naturaleza se expresaban mediante expresiones polinómicas, por lo general utilizadas para resolver problemas de tipo geométrico como el determinar el valor aproximado del número π. De hecho, Arquímedes, contemporáneo de Euclides, aproximó el valor del número π a partir de la división de la circunferencia en polígonos, obtenidos duplicando sucesivamente el número de lados y dividiendo el perímetro de cada polígono por el radio del círculo. Esta idea fue retomada siglos después para construir métodos que resolvieran ecuaciones diferenciales que no tenían solución por métodos analíticos. Así, los matemáticos se dieron cuenta que dividiendo el dominio considerado en formas geométricas sencillas, de propiedades conocidas, se podían discretizar las ecuaciones diferenciales de un determinado problema, transformándolas en un sistema de ecuaciones algebraicas con un número finito de incógnitas (Oñate, 2000, 2008).

Durante la edad media, del 476 d.C. a 1453, hubo pocos avances en las matemáticas, entre los que podemos citar los aportes de Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, que usó el método de transformación y resolución de ecuaciones llamado ahora algoritmo de Horner, que también fue utilizado por los chinos en el siglo XIV y por los árabes en el siglo XV (Merzbach y Boyer, 2011).

En el Renacimiento, entre los siglos XV y XVI, hay un despertar de la producción científica y en el campo de las matemáticas se producen avances significativos entre los que se destaca la aparición de las raíces imaginarias y de la notación exponencial en la obra de Chuquet de 1484; la solución de la ecuación cúbica por Fontana (Tartaglia) y de la ecuación cuártica por Ferrari; la creación de los logaritmos por Bürgi y Napier, y de la tabla de logaritmos vulgares por Briggs (Stewart, 2008).

Posteriormente, en el siglo XVII, tenemos como uno de los principales aportes el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz, lo cual permitió expresar las leyes de la naturaleza en forma matemática por medio de ecuaciones diferenciales. Además, Newton en 1687 propuso el método iterativo que lleva su nombre para calcular las soluciones de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, y las fórmulas de interpolación e integración numérica. Estas fórmulas de integración aproximada fueron completadas por su contemporáneo Cotes, dando lugar a las conocidas fórmulas de Newton-Cotes (Martínez-Finkelshtein, 2001).

En el siglo XVIII, basado en los trabajos de Newton, Raphson mejoró el método iterativo para el cálculo de raíces de ecuaciones. Stirling desarrolló el cálculo de diferencias finitas y con Maclaurin trabajaron en desarrollos en series. En este mismo siglo, Euler hizo grandes aportaciones al análisis numérico como la fórmula de Euler-Maclaurin para integración numérica, el método numérico que lleva su nombre para la integración numérica de ecuaciones diferenciales, y junto con Lagrange fueron actores destacados en la creación del cálculo variacional. Por su parte, Lagrange trabajó en el cálculo de las diferencias finitas y la interpolación, y creó su famoso polinomio interpolador (Goldstine, 1977, Martínez-Finkelshtein, 2001).

En el siglo XVIII y XIX hubo un desarrollo conjunto de las ciencias físicas y las matemáticas. Las cuestiones que se estudiaban eran, en muchas ocasiones, modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos cuya resolución requería cada vez más un gran número de cálculos; a mayor perfección del modelo le suele acompañar un número mayor de operaciones. Así pues, el Análisis Numérico empezó a configurarse como una rama de las Matemáticas con su propia entidad.

Por esta época, Laguerre, Legendre, Hermite y Chebyshev estudiaron los polinomios ortogonales de gran utilidad en las cuadraturas gaussianas. Este último desarrolló los polinomios de Chebyshev para estudiar la aproximación por mínimos cuadrados y aplicó sus resultados a la interpolación, cuadratura aproximada y otras áreas. Jacobi realizó algunas aportaciones como el método que lleva su nombre para la solución de sistemas de ecuaciones lineales (Burden y Faires, 2011).

En el siglo XIX, Gauss también estudió la interpolación, fue el primero en tratar la estabilidad numérica al discutir el problema de los errores de redondeo; e introdujo en 1815 las fórmulas de las cuadraturas que llevan su nombre, incluyendo tablas de los nodos y pesos de estas fórmulas con 16 cifras decimales significativas, demostrando su eficacia con un ejemplo numérico detallado (Sanz-Serna, 2019). Además, sus estudios en la mecánica celeste y la geodesia, basados en el principio de mínimos cuadrados, requirieron la solución manual de grandes sistemas de ecuaciones lineales, para lo que utilizó lo que hoy se conoce como métodos de eliminación de Gauss (Gautschi, 2012).

La gran cantidad de métodos numéricos que iban surgiendo necesitaban ser implementados en una *máquina de calcular*. Ya en el siglo XVII, Pascal y también Leibnitz inventaron máquinas para realizar operaciones aritméticas básicas. Quizás el primer gran proyecto fue debido al matemático inglés Charles Babbage quien intentó inventar una máquina que realizara todas las operaciones aritméticas y almacenara información. Ada Lovelace describió como programarla. Lovelace fue una adelantada a su tiempo, intuyó que los ordenadores podían ser usados para más cosas además de la computación numérica. Existe un lenguaje de programación denominado Ada en su honor. Este proyecto fue iniciado en 1833 y financiado por el gobierno inglés hasta 1842 y la máquina no llegó o a construirse (Stewart, 2008).

La necesidad de resolver problemas complejos en ciencia y tecnología y el desarrollo del análisis matemático moderno y de las computadoras electrónicas programables, dieron lugar al nacimiento de los métodos numéricos modernos en la década de los cuarenta del siglo XX. En este siglo, y en especial en su segunda mitad, es cuando los ordenadores llegan realmente a la actividad científica y a nuestro día a día. Ya en la época de entre guerras en el Massachusetts Institute of Technology Vannevar Bush lidera un grupo que construye una máquina analógica que funciona con motores eléctricos, aunque el resto de sus componentes son mecánicos. En la Segunda Guerra Mundial, por obvias necesidades militares, empieza el desarrollo de máquinas cada vez más eficientes. Aitken en Harvard crea la máquina electromecánica MARK I, y durante la guerra, John von Neumann en Pricenton, Alan Turing en Londres y Konrad Zuse en Alemania construyen ordenadores electrónicos. En Estados Unidos de 1943 a 1946 se crea el ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Calculator) y en la postguerra, en 1951, se crea el UNIVAC I (Universal Automatic Calculator). La carrera espacial de los años 60 entre la extinta Unión Soviética y los Estados Unidos de América vuelve a dar un impulso fundamental al desarrollo de la computación y de los ordenadores. Desde este momento el desarrollo es espectacular y a partir de los años 80 el crecimiento es exponencial.

A mediados del siglo XX se popularizó en los ordenadores la utilización de la aritmética de punto flotante, cuyo uso se estandarizó en los años 80 con la implementación del estándar del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos de los Estados Unidos (en sus siglas en inglés IEEE). Normativa que fijó reglas para un redondeo correcto de las operaciones de punto flotante y permitió un mejor manejo de excepciones como el overflow. Además, en esta década apareció la primera versión de Matlab, un paquete interactivo para cálculos matriciales, desarrollado inicialmente por Moler con fines docentes, pero que actualmente es utilizado en el cálculo científico porque da acceso a algoritmos muy eficientes para el cálculo numérico (Martínez-Finkelshtein, 2003).

Hoy en día, a inicios del siglo XXI los matemáticos tienen acceso, además de Matlab, a otros softwares especializados como Fortran, C++, Java, Python, Mathematica, entre otros; los cuales permiten realizar cálculos numéricos, algebraicos y analíticos en computadores, Además, han sido útiles en la solución de antiguos problemas matemáticos y en la demostración de importantes teoremas (Stewart, 2008). Las cada vez mejores prestaciones de los ordenadores junto con la gran cantidad de problemas técnicos que necesitan Métodos Numéricos hacen de esta materia una rama de las Matemáticas en constante desarrollo.

1.2. Integración numérica

La integración numérica es una temática muy relevante en el campo de la matemática aplicada a la ingeniería, debido a que los ingenieros deben tratar en su trabajo diario con sistemas y procesos dinámicos que fundamentan su modelización en muchas ocasiones en ecuaciones integrables o en procesos que necesitan la evaluación numérica de integrales de diverso tipo. La necesidad de aproximar numéricamente el valor de esta integrales, puede darse por la dificultad o imposibilidad de calcularlas utilizando los métodos analíticos, o porque solo se conoce una tabla de valores. Por ejemplo, Arganis-Juárez et al. (2018) muestran cómo obtener el volumen de almacenamiento en un embalse de una presa, usando las cuadraturas de Newton-Cotes: trapecios, Simpson 1/3 y Simpson 3/8, a partir de 241 datos proporcionados por los respectivos histogramas de entrada y de salida.

En este apartado abordaremos los principales métodos numéricos, que constan en las guías docentes de las carreras de ingeniería, para integrar una función en un intervalo de la recta real extendida y de esta forma podemos tratar la integración impropia de primera especie. De esta manera, se desea aproximar la integral definida

$$I(f)=\int_a^b f(t)w(t)dt, \qquad (1)$$

donde $w(t)$ es una función peso en (a,b) con $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Para ello, se destinará un subapartado a la definición de algunos conceptos e ideas claves, otro a las fórmulas de Newton-Cotes y otro para las cuadraturas gaussianas. A lo largo de este capítulo las referencias citadas no han de corresponder necesariamente a los autores originales de los resultados, en especial de las definiciones, sino que corresponden a las referencias bibliográficas de las que se ha tomado.

1.2.1. Ideas y conceptos generales

Definición 1. (Dahlquist y Björck, 2008) *Sea f una función integrable en un intervalo de la recta real extendida. Recibe el nombre de fórmula de cuadratura y se nota $\mathcal{I}(f)$ la expresión que permite aproximar de forma numérica la integral definida (1).*

$$I(f)\approx \mathcal{I}(f)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)=\omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)+\ldots+\omega_n f(x_n) \qquad (2)$$

A $x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0,1,...,n\}$, se les denomina nodos de la cuadratura, verificándose que $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$; ω_i son los pesos de la cuadratura.

Definición 2. (Isaacson y Keller, 1994) *El error de la cuadratura, denotado por* $\mathcal{E}(f)$, *es igual a la diferencia entre el valor real de la integral* $I(f)$ *y su valor aproximado* $\mathcal{I}(f)$, *o sea*

$$\mathcal{E}(f) = I(f) - \mathcal{I}(f) \qquad (3)$$

De donde

$$I(f) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{E}(f). \qquad (4)$$

Definición 3. (Martínez- Finkelshtein y Moreno-Balcázar, 1999) *El máximo valor k tal que para todo polinomio* $f \in P_k$, *el error de la cuadratura es* $\mathcal{E}(f) = 0$, *se llama grado de exactitud (k) de la cuadratura expresada en* (2).

La primera cuestión a plantearse es cómo generar fórmulas de cuadratura del tipo (2) que sean abordables conceptualmente por estudiantes de ingeniería en el marco de la educación superior en Ecuador. Dado que son métodos de integración numérica abordados en guías docentes de diferentes universidades de distintos países y de acuerdo con las opiniones de expertos en análisis numérico, se ha establecido como adecuado considerar las fórmulas de cuadratura interpolatorias de Newton-Cotes y las fórmulas de cuadratura gaussianas. Ambas serán descritas de forma sucinta en las siguientes secciones de este capítulo y conformarán el Contenido de Integración Numérica (CIN), que proponemos como cocimiento imprescindible que debe recibir un estudiante de ingeniería.

Antes de entrar a desarrollar o construir fórmulas de cuadratura, es conveniente introducir, o más bien recordar, algunos conceptos necesarios del análisis numérico que pueden ser encontrados en cualquier texto, aunque a veces con ligeras matizaciones.

En primer lugar, para el análisis numérico es necesario que el problema esté bien planteado, es decir, tenga solución única. Desde un punto de vista genérico consideremos la siguiente situación

$$P\,(t,\ d) = 0 \qquad (5)$$

Donde *t* es la incógnita que debemos determinar a partir de los datos *d*, siendo *P* la relación funcional (ligadura) entre *t* y *d*. El problema está bien planteado si existe una única solución *t* que depende continuamente de los datos *d*. Este concepto se puede formalizar de la siguiente forma:

Definición 4. (Quarteroni, Sacco, y Saleri, 2007) *Sea D el conjunto de datos admisibles, esto es, el conjunto de valores de d para los que (5) tienen solución única. Entonces, sea* δd *una perturbación de los datos tal que* $d+\delta d \in D$*, la única solución a (5) será* $t+\delta t$*, o sea,*

$$P(t+\delta t, d+\delta d)=0$$

y la dependencia continua significa que

$\exists \gamma=\gamma(d)>0,\ \exists \beta=\beta(d)$ *tal que si* $\|\delta d\| \leq \gamma,$ *entonces* $\|\delta t\| \leq \beta\|\delta d\|.$

Los problemas bien planteados son los abordados de mejor manera por el análisis numérico.

Una vez que tenemos un problema bien planteado hemos de considerar su condicionamiento. Para ello, se define el número de condición.

Definición 5. (Quarteroni, Sacco, y Saleri, 2007) *Se define el número de condición relativo para el problema (5) como*

$$K(d)=\sup\left\{\frac{\|\delta t\|/\|t\|}{\|\delta d\|/\|d\|}, \delta d \neq 0, d+\delta d \in D\right\},$$

y el número de condición absoluto como

$$K_{abs}(d)=\sup\left\{\frac{\|\delta t\|}{\|\delta d\|}, \delta d \neq 0, d+\delta d \in D\right\}.$$

Se dice que el problema (5) está mal condicionado si *K(d)* es *"grande"* (concepto ambiguo que depende del problema bajo estudio).

Una vez conocidas las características del problema hay que plantear el método numérico que se le va a aplicar.

De nuevo, de forma genérica, un método numérico para resolver el problema bien planteado (5) será una sucesión de problemas del tipo

$$\mathrm{F}_n\ \left(t_n,\ d_n\right)\ =\ 0, \quad n \geq 1, \qquad (6)$$

donde se espera que $t_n \rightarrow t$ cuando $n \rightarrow \infty,$ siendo *t* la solución de (5).

De nuevo podríamos repetir las definiciones anteriores para cada problema de la sucesión (6), por ejemplo, el número de condición relativo es

$$K_n(d_n)=\sup\left\{\frac{\|\delta t_n\|/\|t_n\|}{\|\delta d_n\|/\|d_n\|}, \delta d_n \neq 0, d_n+\delta d_n \in D_n\right\}$$

y se dice que el método numérico está bien condicionado si $K_n(d_n)$ es "*pequeño*" para cualquier conjunto de datos admisibles d_n. En muchos problemas se suele estimar el número de condición absoluto por su sencillez.

La estabilidad de un método numérico está ligada al valor del número de condición. Así, entendemos de forma intuitiva que un método numérico es estable cuando pequeñas perturbaciones de los datos iniciales (inputs) producen pequeños cambios en los datos obtenidos (outputs) al aplicar el método.

En el caso particular de la integración numérica, según Huybrechs (2009), las reglas de cuadratura pueden ser inestables si los pesos son grandes y difieren en el signo. Se asume *f* como el valor exacto y *f** como el valor aproximado de una función, tal que $\underset{t\in[a.b]}{máx}\left|f(t)-f^*(t)\right|\le\delta$. Entonces, podemos calcular el número de condición absoluto del problema de integración de forma sencilla

$$\left|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}(f^*)\right|=\left|\int_a^b\left(f-f^*\right)(t)w(t)dt\right|\le\delta\int_a^b w(t)dt$$

Siendo por tanto $k_{abs}(\text{int}):=\int_a^b w(t)dt,$ es decir, la integral de la función peso. Por otra parte, el número de condición absoluto de la cuadratura se puede obtener de forma análoga:

$$\left|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}(f^*)\right|=\left|\sum_{i=0}^{n}\omega_i\left(f(x_i)-f^*(x_i)\right)\right|\le\delta\sum_{i=0}^{n}\left|\omega_i\right|$$

Así, $$k_{abs}(cuadratura)=\sum_{i=0}^{n}\left|\omega_i\right|.$$

Es natural preguntarse sobre la relación entre ambos números de condición. Lo ideal sería que $k_{abs}(cuadratura)$ no fuera mucho más grande que el número de condición del problema de integración que estamos abordando. La solución óptima se consigue con las fórmulas de cuadraturas gaussianas (ver 2.2.5) donde veremos que los pesos ω_i son positivos y además $\int_a^b w(t)dt=\sum_{i=0}^{n}\omega_i,$ con lo cual ambos números de condición son iguales.

Otro concepto importante para el desarrollo posterior es el de tolerancia.

Definición 6. (Chapra y Canale, 2006) *La tolerancia* δ *es el nivel de error máximo aceptable, previamente fijado, al aplicar un método numérico.*

La tolerancia se utiliza en el caso de los métodos iterativos y aplicando ciertos criterios de parada como, por ejemplo, en el método de aceleración de Romberg. Por lo general, se utilizan como criterios de parada, bien el determinar previamente el número de iteraciones o bien generar aproximaciones hasta que la diferencia entre dos de ellas sea menor que la tolerancia prefijada.

1.2.2. Cuadraturas interpolatorias de Newton-Cotes

Una primera vía para obtener fórmulas de cuadratura es cambiar la función *f* en (1) por su polinomio interpolador en un número determinado de puntos. A este procedimiento, que a continuación describimos con más detalle, se le denomina cuadratura interpolatoria.

Denotemos por $\mathbb{P}_n$ al espacio vectorial de los polinomios de grado menor e igual que n. Su base canónica es $\left\{1, t, \ldots, t^n\right\}$.

Sea p_n(t) el polinomio interpolador a *f* en la nube de puntos $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, con *a*, *b* números reales, entonces

$$f(t) = p_n(t) + e(t), \qquad t \in [a,b], \qquad (7)$$

donde *e*(t) es el error de interpolación.

Multiplicando (7) por una función peso $w(t)$ e integrando, se obtiene

$$I(f) = \int_a^b f(t)w(t)dt = \int_a^b p_n(t)w(t)dt + \int_a^b e(t)w(t)dt.$$

Comparando con (4) tendríamos

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b p_n(t)w(t)dt = I(p_n) \qquad \mathcal{E}(f) = \int_a^b e(t)w(t)dt. \qquad (8)$$

Si escribimos p_n(t) en la forma de Lagrange, es decir,

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(t),$$

donde $\ell_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$ son los polinomios básicos de Lagrange, obtenemos

$$\mathcal{I}(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \ell_i(t)w(t)dt,$$

de donde ω_i en (2) puede ser expresado como

$$\boxed{\omega_i = I\left(\ell_i\right) = \int_a^b \ell_i(t)w(t)dt} \qquad (9)$$

Definición 7. (Dahlquist y Björck, 2008) *La fórmula de cuadratura (2) es interpolatoria si es válida la expresión (8) o, equivalentemente, los pesos* ω_i *están dados por (9).*

Teorema 1. (Martínez-Finkelshtein y Moreno-Balcázar, 1999) *Una fórmula de cuadratura (2) tiene un grado de exactitud* $\geq n$ *si y sólo si es interpolatoria.*

Demostración: De acuerdo con la definición 7, si la fórmula de cuadratura (2) es interpolatoria es válida la expresión (8), o sea,

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b p_n(t)w(t)dt = I(p_n).$$

Entonces, de acuerdo al teorema de unicidad de la interpolación, que nos dice que para $f \in \mathbb{P}_n, f \equiv p_n$, quedaría como $\mathcal{I}(f) = I(f)$.

Por tanto, la fórmula de cuadratura tiene un grado de exactitud de al menos n.

Para demostrar la condición suficiente para que sea interpolatoria basta tomar los polinomios básicos de Lagrange $\ell_i \in \mathbb{P}_n$, entonces

$$I\left(\ell_i\right) = \mathcal{I}\left(\ell_i\right),$$

e

$$I\left(\ell_i\right) = \int_a^b \ell_i(t)w(t)dt$$

$$\mathcal{I}\left(\ell_i\right) = \sum_{j=0}^{n} \omega_i \ell_i(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \omega_i \delta_{ij} = \omega_i$$

Por tanto,

$$\omega_i = \int_a^b \ell_i(t)w(t)dt,$$

como queríamos demostrar. □

Por otro lado, el *error* de la cuadratura se puede estimar suponiendo que f es suficientemente derivable en el intervalo (a,b) y teniendo en cuenta que el error de interpolación $e(t)$, viene dado por

$$e(t) = f\left[x_0, x_1, ..., x_n, t\right]\omega_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!}\omega_n(t),$$

donde $\omega_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$, $f\left[x_0, x_1, ..., x_n, t\right]$ es la correspondiente diferencia dividida, $\xi_i \in (a,b)$ y sobre f se ha asumido la necesaria derivabilidad para tener la segunda igualdad.

Así, asumiendo $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$, $t \in \left[a,b\right]$, obtenemos

$$\left|\mathcal{E}(f)\right| = \left|\int_a^b e(t)w(t)dt\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|\int_a^b \omega_n(t)w(t)dt\right|. \qquad (10)$$

Se denominan cuadraturas de Newton-Cotes a aquellas fórmulas de cuadratura interpolatorias en las que la función peso $w(t) \equiv 1$ y los nodos son dados y están equiespaciados. En este caso, las expresiones de (8) quedarían como:

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b p_n(t)dt \qquad \mathcal{E}(f) = \int_a^b e(t)dt. \qquad (11)$$

Dependiendo de que incluya o no los extremos del intervalo cerrado $[a,b]$, las fórmulas de Newton-Cotes son *cerradas* o *abiertas* respectivamente. Además, de acuerdo al intervalo considerado, las fórmulas de Newton-Cotes pueden ser simples o compuestas.

Fórmulas de Newton-Cotes simples

Si se trabaja directamente en todo el intervalo de integración, tenemos las fórmulas de Newton-Cotes *simples*. A continuación, introducimos las fórmulas más usuales, yendo de las más simples a más elaboradas. Estas son: rectángulo, punto medio, trapecios, Simpson 1/3 y Simpson 3/8.

Fórmula de rectángulo

Para esta fórmula se considera un único nodo, n = 0 y puede ser de dos tipos:

Fórmula del rectángulo a izquierda, si $x_0 = a$, entonces el polinomio interpolador $p_0(t) = f(a)$ y la expresión de $\mathcal{I}(f)$ en (11) quedaría como

$$\int_a^b p_0(t)dt = \int_a^b f(a)dt = (b-a)f(a).$$

Así, la fórmula de integración de rectángulo a izquierda $\mathcal{I}_{RI}(f)$ es:

$$\boxed{\mathcal{I}_{RI}(f) = (b-a)f(a)}$$

Fórmula del rectángulo a derecha, en este caso, $x_0 = b$ y el polinomio interpolador $p_0(t) = f(b)$. De manera análoga a la anterior, reemplazando en la expresión de $\mathcal{I}(f)$ en (10) e integrando, obtendríamos la fórmula de integración de rectángulo a derecha $\mathcal{I}_{RD}(f)$

$$\boxed{\mathcal{I}_{RD}(f) = (b-a)f(b)}$$

Las fórmulas del rectángulo tienen grado de exactitud k=0 porque son exactas para todo $f \in \mathbb{P}_0$, o sea,

$$I(1) = \int_a^b dt = b - a = \mathcal{I}_{RD}(1) = \mathcal{I}_{RI}(1).$$

Para estimar el error de la cuadratura, lo mostraremos para la fórmula del rectángulo derecha y de forma similar se hace para el rectángulo izquierda. Puesto que el error de interpolación viene dado por $e(t) = f\left[b,t\right](t-b),$ entonces utilizando el teorema del valor medio integral obtenemos

$$\left|\mathcal{E}(t)\right| = \int_a^b f\left[b,t\right](t-b)dt = f\left[b,s\right]\int_a^b (t-b)dt = -f\left[b,s\right]\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_R(f) = -f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}} \qquad \xi \in (a,b).$$

Fórmula de punto medio

Es una fórmula de Newton-Cotes *abierta*, porque utiliza un solo nodo que es igual al punto medio del intervalo $\left[a,b\right]$, o sea, $x_0 = \dfrac{a+b}{2}.$

Entonces, $p_0(t) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right),$ de donde

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p_0(t)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Así,

$$\boxed{\mathcal{I}_{PM}(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Podemos demostrar de forma trivial que esta fórmula tiene grado de exactitud k=1 ya que es exacta para todo $f \in \mathbb{P}_1$, o sea

$$I(1) = \int_a^b dt = b - a = \mathcal{I}_{PM}(1), \qquad I(t) = \int_a^b tdt = \frac{b^2-a^2}{2} = \mathcal{I}_{PM}(t).$$

Sabemos de la teoría de interpolación de funciones, que en este caso

$$e(t) = f\left[\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},t\right]\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

donde el coeficiente del polinomio denota como es habitual la correspondiente diferencia dividida, Así

$$\mathcal{E}_{PM}(t) = \int_a^b e(t)dt = \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, t\right]\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt.$$

Aplicando el teorema del valor medio integral se obtiene que

$$\mathcal{E}_{PM}(t) = f\left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, s\right]\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt,$$

$$= f\left[\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, s\right]\frac{(b-a)^3}{12}, \quad s \in (a,b)$$

Solo resta aplicar la conocida expresión de la diferencia dividida en términos de la derivada para obtener

$$\boxed{\mathcal{E}_{PM}(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3}$$

Fórmula de los trapecios

Esta fórmula utiliza dos nodos iguales a los extremos del intervalo $[a,b]$, es decir $x_0 = a,\ x_1 = b$ y n=1, por lo que es una fórmula *cerrada*. En este caso utilizaremos el siguiente polinomio interpolador en la forma de Newton

$$p_1(t) = f(a) + f[a,b](t-a) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(t-a).$$

Calcularemos la fórmula de la cuadratura de los trapecios $\mathcal{I}_T(f)$ y su correspondiente expresión del error $\mathcal{E}_T(f)$, siguiendo un proceso análogo al de las dos fórmulas anteriores. Primero desarrollaremos $\mathcal{I}_T(f)$

$$\int_a^b p_1(t)dt = \int_a^b f(a)dt + \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)dt = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left.\frac{(t-a)^2}{2}\right|_a^b,$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} = f(a)(b-a) + (f(b) - f(a))\frac{(b-a)}{2}, \text{ de donde}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_T(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))}$$

Al igual que en el caso anterior, la fórmula de los trapecios tiene grado de exactitud k=1, o sea,

$$I(1) = \int_a^b dt = b - a = \mathcal{I}_T(1), \qquad I(t) = \int_a^b t dt = \frac{b^2 - a^2}{2} = \mathcal{I}_T(t).$$

Ahora, se desarrollará el término de error de la cuadratura de los trapecios $\mathcal{E}_T(f)$.

Puesto que

$$e(t) = f\left[a,b,t\right](t-a)(t-b)$$

$$\mathcal{E}_T(f) = \int_a^b f\left[a,b,t\right](t-a)(t-b)dt,$$

de nuevo, aplicando el teorema del valor medio integral y la expresión de la diferencia dividida en términos de la derivada, obtenemos

$$\mathcal{E}_T(f) = f\left[a,b,s\right]\int_a^b (t-a)(t-b)dt$$

$$= -f\left[a,b,s\right]\frac{(b-a)^3}{6}, \qquad s \in (a,b),$$

$$\boxed{\mathcal{E}_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3}$$

Fórmula de Simpson 1/3

La fórmula de integración de Simpson o Simpson 1/3, $\mathcal{I}_S(f)$, es de tipo *cerrada*, fijando 3 nodos: $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, o sea, n=2. Sin embargo, ahora la obtención de la fórmula y del error de la cuadratura es ligeramente diferente para poder seguir aplicando el teorema del valor medio integral. Para ello se considera la nube de puntos x_0, x_1, x_1, x_2. De esta forma el polinomio interpolador a esta nube viene dado por

$$p_3(t) = f(a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}\right](t-a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right](t-a)(t-\frac{a+b}{2})$$

$$+ f\left[a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b\right](t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

y el error de interpolación por

$$e(t) = f\left[a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b, t\right](t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2(t-b).$$

Integrando $\int_a^b p_3(t)$ y simplificando tenemos

$$\boxed{\mathcal{I}_S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]}$$

Esta fórmula tiene grado de exactitud k=3 ya que es exacta para todo $f \in \mathbb{P}_3$, veámoslo

$$I(1)=\int_a^b dt=b-a=\mathcal{I}_S(1), \qquad I(t)=\int_a^b t dt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}=\mathcal{I}_S(t),$$

$$I(t^2)=\int_a^b t^2 dt==\left.\frac{t^3}{3}\right|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3}=\mathcal{I}_S(t), \qquad I(t^3)=\int_a^b t^3 dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_a^b=\frac{b^4-a^4}{4}=\mathcal{I}_S(t^3).$$

Por otra parte,

$$\mathcal{E}_S(f)=\int_a^b f\left[a,\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},b,t\right](t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2(t-b)dt,$$

estando de nuevo en condiciones de aplicar el teorema del valor medio integral, obteniendo

$$\mathcal{E}_S(f)=f\left[a,\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},b,s\right]\int_a^b(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2(t-b)dt,$$

$$\mathcal{E}_S(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{(b-a)^5}{120},$$

$$\boxed{\mathcal{E}_S(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)^5}{2880}}$$

Fórmula de Simpson 3/8

Esta fórmula también es de tipo *cerrada* y para su desarrollo trabajaremos con los nodos: $x_0=a,\ \ x_1=a+\frac{b-a}{3}=\frac{2a+b}{3},\ \ x_2=a+2\frac{b-a}{3}=\frac{2b+a}{3},\ \ x_3=b,$ siendo n=3.

Además, utilizando el correspondiente polinomio interpolador en la forma de Newton, al igual que en los casos anteriores, se plantea la integral

$$\int_a^b p_3(t)=\int_a^b f(a)dt+\int_a^b f\left[a,\frac{2a+b}{3}\right](t-a)dt+$$

$$+\int_a^b f\left[a,\frac{2a+b}{3},\frac{2b+a}{3}\right](t-a)\left(t-\frac{2a+b}{3}\right)dt+$$

$$+\int_a^b f\left[a,\frac{2a+b}{3},\frac{2b+a}{3},b\right](t-a)\left(t-\frac{2a+b}{3}\right)\left(t-\frac{2b+a}{3}\right)dt,$$

y al integrar obtenemos la fórmula de integración numérica de Simpson 3/8.

$$\boxed{\mathcal{I}_{3/8}(f)=\frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{2b+a}{3}\right)+f(b)\right]}$$

La fórmula de Simpson 3/8, al igual que la de Simpson 1/3, tiene un grado de exactitud k=3 ya que también se verifica que es exacta para todo $f\in\mathbb{P}_3$.

Además, para obtener la cota de error para esta fórmula, al igual que para las anteriores, se asume que el integrando es suficientemente derivable. Sin embargo, en este caso, obtener una igualdad no es simple y el enfoque debe ser más general. Isaacson y Keller (1994) en su libro (páginas 308-314), obtienen la expresión del error a través de una demostración de carácter teórico muy lejos del alcance de un estudiante actual de ingeniería. Por ello, no la incluimos en este capítulo introductorio que pretende desarrollar los conceptos básicos de los que posteriormente denominaremos CIN. En cualquier caso, el error para la cuadratura de Simpson 3/8 viene dado por

$$\boxed{\mathcal{E}_{3/8}(f) = -\frac{f^{(IV)}(\xi)(b-a)^5}{6480}}$$

Fórmulas de Newton-Cotes compuestas

Estas fórmulas se obtienen considerando n+1 nodos en el intervalo cerrado $[a,b]$ que lo dividen en n subintervalos equiespaciados, de amplitud $h > 0$ llamada *paso*. Se toma $x_0 = a,\ x_n = b,$ y $x_i = x_0 + ih$, de donde $h = \dfrac{b-a}{n}$.

La integral definida (1) con $w(t) \equiv 1$ se expresa como

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + ... + \int_{x_{n-1}}^{b} f(t)dt.$$

El procedimiento es simple, basta aplicar fórmulas de Newton-Cotes en cada subintervalo para obtener las correspondientes compuestas. A continuación, mostraremos de forma escueta las fórmulas compuestas relativas a las simples anteriormente mencionadas.

En el caso de las fórmulas del *rectángulo compuesto*, es trivial obtener

$$\boxed{\mathcal{I}_{RIC}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{RDC}(f) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}$$

Respecto al error, basta recordar que el error en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es

$$-f'(\xi)\frac{h^2}{2}, \qquad \xi \in (x_i, x_{i+1}), \qquad i = 0, ..., n-1.$$

Entonces,

$$\mathcal{E}_{RC}(f) = -\frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = -\frac{h(b-a)}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f'(\xi_i)}{n}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{RC}(f) = -\frac{h}{2}(b-a)\, f'(\xi)}$$

con $\xi \in (a,b)$ y donde hemos asumido que $f \in C^1[a,b]$ para la última igualdad. Para el resto de las fórmulas compuestas podemos proceder de forma similar.

La fórmula de *punto medio compuesta* es

$$\boxed{\mathcal{I}_{PMC}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}$$

y su error, asumiendo suficiente derivabilidad de *f* es

$$\boxed{\mathcal{E}_{PMC}(f) = \frac{h^2}{24}(b-a)\, f''(\xi)} \qquad \xi \in (a,b).$$

Para obtener la fórmula de los *trapecios compuesta*, basta observar que la evaluación de la función en los nodos intermedios $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ se repite dos veces y en los extremos x_o y x_n solo una vez. Así,

$$\boxed{\mathcal{I}_{TC}(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]}$$

De nuevo, asumiendo que $f \in C^2[a,b]$, como en el caso del punto medio, deducimos que

$$\boxed{\mathcal{E}_{TC}(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\, f''(\xi)} \qquad \xi \in (a,b).$$

El caso de la fórmula de *Simpson compuesta*, por su estructura, es formalmente algo diferente, aunque la idea subyacente es la misma. La diferencia radica en que tomamos *n* par, es decir, tenemos un número impar de nodos. De esta forma,

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(t)dt = \frac{h}{3}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right). \qquad (12)$$

Entonces, la integral definida a aproximar se expresa como

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{\substack{i=0 \\ i\ par}}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(t)dt$$

y aplicando (12) obtenemos

$$\boxed{\mathcal{I}_{SC}(f)=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{\substack{i=1\\ i\ impar}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i\ par}}^{n-2} f(x_i)+f(b)\right)}$$

Teniendo en cuenta que la longitud de cada subintervalo es 2*n*, el error de la fórmula de Simpson en cada subintervalo es

$$-\frac{f^{(4)}(\xi)(2h)^5}{2280}=-\frac{f^{(4)}(\xi)h^5}{90}.$$

Procediendo como en los anteriores casos, pero observando que tenemos $n/2$ subintervalos se llegan con las hipótesis necesarias sobre la derivabilidad de *f*, a

$$\boxed{\mathcal{E}_{SC}(f)=-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)} \qquad \xi\in(a,b).$$

Respecto a la fórmula de *Simpson 3/8 compuesta*, para su formulación es conveniente tomar *n* como un múltiplo de 3. De esta forma, podemos tomar

$$\int_{x_i}^{x+3} f(t)dt\simeq\frac{3h}{8}\left[f(x_i)+3f(x_{i+1})+3f(x_{i+2})+f(x_{i+3})\right] \qquad (13)$$

Entonces,

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{\substack{i=0\\ i=\dot{3}}}^{n-3}\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(t)dt$$

donde $\dot{3}$ denota los múltiplos no negativos de 3, es decir, $\dot{3}=\left\{3k,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$

Así, aplicando (13) en la anterior expresión se obtiene

$$\boxed{\mathcal{I}_{3/8C}(f)=\frac{3h}{8}\left[f(a)+3\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\dot{3}}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=3\\ i=\dot{3}}}^{n-3} f(x_i)+f(b)\right]}$$

Puesto que tenemos $n/3$ subintervalos, suponiendo *f* suficientemente derivable, obtenemos

$$\boxed{\mathcal{E}_{3/8C}(f)=-\frac{h^4}{80}(b-a)f^{(4)}(\xi)} \qquad \xi\in(a,b).$$

Método de aceleración de Romberg

El método de aceleración de Romberg es la aplicación del método de aceleración de Richardson para el cómputo numérico de integrales definidas. La fórmula que se acelera es la de los trapecios. Esta elección viene motivada porque el error de la fórmula de los trapecios compuesta viene dado por (Kincaid y Cheney, 1994).

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i}, \qquad h \to 0$$

donde *h* es el paso de la partición equiespaciada $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ con $x_0 = a$ y $x_n = b$, es decir $h = \frac{b-a}{n}$. Los coeficientes a_i pueden ser determinados explícitamente a través de las evaluaciones de las derivadas de orden impar de la función en los puntos a y b y de los conocidos números de Bernoulli.

Recordemos el procedimiento de forma esquemática.

Paso 1: Se hace una estimación de $\int_a^b f(t)dt$ con trapecios simple, es decir, $h = b-a$ obteniendo

$$R_{0,0} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) \right]$$

Paso 2: Se divide el intervalo $[a,b]$ un número *m* de veces prefijado o determinado para una tolerancia, es decir, las iteraciones del método de Romberg. Por tanto, $h = \frac{b-a}{2^i}$, $i = 1,...m$, generando una columna de valores

$$R_{i,0} = \frac{b-a}{2^i}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{2^i-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2} \right], \qquad i = 1,...,m,$$

donde $x_j = a + j\frac{b-a}{2^i}$.

Esta columna se puede generar así, pero es mucho más adecuado y eficiente computacionalmente hacerlo de la siguiente forma. Tenemos que

$$R_{i,0} - \frac{1}{2}R_{i-1,0} = \frac{b-a}{2^i}\left[\sum_{j=1}^{2^i-1} f\left(a + j\frac{b-a}{2^i} \right) - \sum_{j=1}^{2^{i-1}-1} f\left(a + j\frac{b-a}{2^{i-1}} \right) \right]$$

$$= \frac{b-a}{2^i}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left(a + (2j-1)\frac{b-a}{2^i} \right).$$

Por tanto

$$R_{i,0}=\frac{1}{2}R_{i-1,0}+\frac{b-a}{2^i}\sum_{j=1}^{2^{i-1}}f\left(a+(2j-1)\frac{b-a}{2^i}\right),\qquad i=1,\dots,m.$$

Paso 3: Se genera el esquema triangular

$$R_{i,k}=R_{i,k-1}+\frac{R_{i,k-1}-R_{i-1,k-1}}{4^k-1},,\qquad \text{con } i=1,\dots,m,\quad k=1,\dots,m,\quad k\le i$$

$$\begin{array}{cccccc}
R_{0,0} & & & & & \\
R_{1,0} & R_{1,1} & & & & \\
R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} & & & \\
R_{3,0} & R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{m,0} & R_{m,1} & R_{m,2} & R_{m,3} & \cdots & R_{m,m}
\end{array}$$

El valor buscado corresponde a $R_{m,m}$.

Si *f* es una función continua en $[a,b]$ entonces se puede probar que

$$\lim_{i\to+\infty}R_{i,k}=\int_a^b f(x)dx$$

es decir, cada columna del esquema de Romberg converge a la integral definida.

Puesto que

$$R_{i,k}-R_{i,k-1}=\frac{R_{i,k-1}-R_{i-1,k-1}}{4^k-1}.\qquad (14)$$

El término de la derecha de la anterior igualdad puede usarse como una estimación del error a posteriori.

Finalmente, remarcar que dada la estructura del error de la fórmula de trapecios compuesta, conteniendo solo potencias pares de *h*, se tiene que el error puede ser estimado como

$$I(f)-R_{m,k}=O(h^{2k+2}),\qquad k=0,\dots,m.$$

Cuadraturas Adaptativas

Las cuadraturas adaptativas consisten en las cuadraturas de Newton-Cotes adaptadas a distintos subintervalos de integración. Estas cuadraturas, a diferencia de las anteriormente tratadas, consideran el hecho de que muchas funciones tienen intervalos de alta variabilidad y por ello se colocan nodos adicionales en estos intervalos, ajustando el tamaño del paso *h*. De esta manera, se trabaja con pasos pequeños en intervalos de variación rápida y con pasos más grandes en las regiones donde el cambio de la función es gradual. Además, para ser eficientes, generalmente brindan aproximaciones que están dentro de una tolerancia específica dada, por lo que son particularmente populares para su inclusión en paquetes de software profesionales (Chapra y Canale, 2006; Burden y Faires, 2011).

Estas cuadraturas son muy competitivas desde el punto de vista computacional, pues hacen uso simultáneo del proceso de aceleración de la convergencia de Romberg y de la adaptación del paso.

Veamos cómo funcionan. Tomaremos como aproximación inicial a la integral $I(f)=\int_a^b f(t)dt$ el método de los trapecios que, como hemos comentado anteriormente, es muy adecuado para la aceleración de Romberg dada su expresión del error en solo potencias pares del paso *h*. Seguiremos el siguiente algoritmo:

1. Calculamos las dos primeras columnas del esquema de Romberg en el intervalo $[a,b]$, siendo el paso $h=\dfrac{b-a}{2}$:

$$R_{0,0}=h(f(a)+f(b)),$$

$$R_{1,0}=\frac{1}{2}R_{0,0}+hf(a+h),$$

$$R_{1,1}=R_{1,0}+d.$$

2. Calculamos el error *d* con el término de la derecha de la igualdad (14) y obtenemos

$$d=\frac{R_{1,0}-R_{0,0}}{3}$$

3. Si δ es la tolerancia o error prefijado y $|d|\leq\delta$, entonces $I(f)\approx R_{1,1}$.
4. Caso contrario, volvemos a aplicar los pasos 1 y 2 en los subintervalos $[a,a+h]$ y $[a+h,b]$. Luego calculamos el valor absoluto de las cantidades *d* en cada uno de estos subintervalos y los sumamos. Si esta suma es $\leq\delta,$ entonces paramos y tomamos como aproximación de $I(f)$ la suma de los $R_{1,1}$ en cada subintervalo.
5. En caso de que esta suma no sea $\leq\ \delta$ identificamos el subintervalo con error *d* máximo y le aplicamos el paso 4. Y así sucesivamente hasta que la suma de los errores de los subintervalos sea menor que δ.

Se pueden considerar otras fórmulas de cuadratura para aplicar el esquema adaptativo, sin embargo, es conveniente señalar la eficiencia y sencillez de la fórmula de los trapecios cuando se combina con el método de aceleración de la convergencia de Romberg.

El software Matlab® usaba, hasta hace unos años, la orden “quad” basada en cuadratura adaptativa de Simpson (ahora esta orden ha quedado en desuso). Actualmente, usa la orden “integral” con cuadratura adaptativa global siguiendo el trabajo de Shampine (2007).

1.2.3. Cuadraturas gaussianas

A diferencia de las cuadraturas de Newton-Cotes, que utilizan nodos equidistantes preestablecidos, las cuadraturas de Gauss o gaussianas eligen tanto los nodos como los pesos para maximizar el grado de exactitud de las fórmulas.

Recordemos que las fórmulas de Newton-Cotes proporcionan una exactitud de al menos *n* porque se prefijaban los nodos. Ahora, al tener la libertad de escoger los nodos y pesos de forma adecuada, hemos de esperar fórmulas de mayor exactitud.

Las cuadraturas gaussianas son del tipo

$$I(f)=\int_a^b f(t)w(t)dt=\mathcal{I}(f)+\mathcal{E}(f), \qquad (15)$$

siendo $\mathcal{I}(f)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i).$ Si se considera el polinomio nodal dado por

$$W_{n+1}(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-x_k)$$

tenemos el siguiente teorema sobre el grado de exactitud de las cuadraturas gaussianas:

<u>Teorema 2</u>. (Quarteroni, Sacco, y Saleri, 2007) *Sea k un número natural positivo verificando que* $1\le k\le n+1$. *Entonces la fórmula de cuadratura (15) tiene un grado de exactitud al menos n + k si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *La cuadratura es interpolatoria, es decir se cumple la expresión (9).*
2. *Para todo polinomio* $q(t)\in\mathbb{P}_{k-1}$ *se tiene que*

$$I(W_{n+1}q)=\int_a^b W_{n+1}(t)q(t)w(t)dt=0. \qquad (16)$$

O sea, en términos de la ortogonalidad

$$W_{n+1}\perp\mathbb{P}_{k-1} \qquad (17)$$

<u>*Demostración*</u>*:* $\Rightarrow)$ Que la cuadratura es interpolatoria es obvio por el Teorema 1.

Tomemos ahora cualquier polinomio $q \in \mathbb{P}_{k-1}$, entonces el polinomio $W_{n+1}q \in \mathbb{P}_{n+k}$. Por tanto, si el grado de exactitud de la cuadratura es al menos $n + k$ se tiene que $I(W_{n+1}q) = \mathcal{I}(W_{n+1}q)$, de donde

$$\int_a^b W_{n+1}(t)q(t)w(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \omega_i W_{n+1}(x_i)q(x_i) = 0. \qquad (18)$$

El valor de la integral anterior es cero dado que el polinomio nodal W_{n+1} se anula en todos sus nodos. Lo que quiere decir que W_{n+1} es ortogonal a $\mathbb{P}_{k-1}$ con respecto al peso $w(t)$.

$\Leftarrow)$ Sea $p \in \mathbb{P}_{n+k}$, con k ≥ 1, al dividirlo para W_{n+1} obtenemos,

$$p(t) = W_{n+1}(t)q(t) + r(t),$$

donde $q \in \mathbb{P}_{k-1}$, y $r \in \mathbb{P}_n$, e integrando tenemos

$$I(p) = I(W_{n+1}q) + I(r),$$

Asumiendo (17) se tiene que $I(W_{n+1}q) = 0$ y quedaría

$$I(p) = I(r),$$

Además, que la cuadratura es interpolatoria es obvio por el teorema 1, por lo que tendríamos

$$I(p) = \mathcal{I}(r)$$

Como $\mathcal{I}(W_{n+1}q) = 0$, obtenemos

$$I(p) = \mathcal{I}(W_{n+1}q) + \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(p). \qquad \square$$

Corolario 1. *En las condiciones del Teorema 2, el máximo grado de exactitud que se puede obtener de la cuadratura (15) es 2n+1 si y sólo si los n + 1 nodos son los ceros del polinomio ortogonal de grado n + 1 con respecto al peso.*

Demostración: Tomando $k = n+1$ tenemos un grado de exactitud de $2n+1$. Por otro lado, la cuadratura no puede ser exacta para polinomios de grado mayor o igual a $2n+2$, ya que si lo fuera sería exacta para el cuadrado del polinomio nodal y en este caso podríamos tomar $p = W_{n+1}^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$ y llegaríamos a una contradicción, pues considerando que $w(t)$ es un peso positivo y aplicando la cuadratura en los nodos de $W_{n+1}(t)$, tendríamos

$$0 < \int_a^b (W_{n+1}(t))^2 w(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \omega_i (W_{n+1}(x_i))^2 = 0. \qquad \square$$

Por otra parte, las cuadraturas gaussianas son una aplicación de la teoría de polinomios ortogonales. Por ello, es conveniente el conocimiento de algunos aspectos básicos sobre esta teoría.

Definición 8. *Un producto escalar es una aplicación* $(\cdot,\cdot)$ *del espacio* $L_w(a,b)$ *en* $\mathbb{R}$, *donde* $L_w(a,b)$ *es el espacio de funciones integrables en el intervalo* (a,b) *con respecto a la función peso* $w(t)$, *es decir,*

$$(\cdot,\cdot):\ L_w(a,b) \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt,$$

verificando:

1. *Simetría:* $(f,g) = (g,f)$.
2. *Bilinealidad:* $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. *Definida positiva:* $(f,f) > 0,\ \forall f \neq 0$ con $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Este producto escalar induce una norma definida como

$$\|f\| = +\sqrt{(f,f)},$$

De esta forma $(L_w(a,b), \|\cdot\|)$ es un espacio normado

Definición 9. *Dada una sucesión de polinomios* $\{P_n\}_n$ *es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) con respecto al producto escalar* $(\cdot,\cdot)$ *si se cumple que:*

1. P_n *es un polinomio de grado exactamente igual a n.*
2. $(P_n, P_m) = 0$ *con* $m \neq n$; $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
3. $(P_n, P_n) > 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Diremos que la sucesión de polinomios es ortonormal si para todo *n* se cumple que:

$$\|P_n\|^2 = (P_n, P_n) = 1.$$

Se tiene una sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM) si el coeficiente líder de $P_n(x)$ es 1.

Teorema 3. (Gautschi, 2012) *Sea* $\{Q_n\}_n$ *una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a* $(\cdot,\cdot)$. *Entonces la SPOM* $\{Q_n\}_n$ *satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma*

$$tQ_n(t) = Q_{n+1}(t) + \alpha_n Q_n(t) + \beta_n Q_{n-1}(t), \quad \mathrm{n} \geq 0 \qquad (19)$$

donde $Q_{-1}(t)=0$ *y* $Q_0(t)=1$, *siendo*

$$\alpha_n=\frac{(tQ_n,Q_n)}{\|Q_n\|^2},\qquad \beta_n=\frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2},\quad \mathrm{n}\ \geq 1,\quad \beta_0=\int_a^b w(t)dt$$

<u>*Demostración*</u>*:* Expandiendo $tQ_n\in P_{n+1}$ en la base ortogonal $\{Q_0,...,Q_{n+1}\}$ de P_{n+1}, se tiene

$$tQ_n(t)=Q_{n+1}(t)+\sum_{i=0}^{n}a_{n,i}Q_i(t)$$

Si i ≤ n – 2, usando la ortogonalidad de los polinomios Q_i se tiene que

$$a_{n,i}=\frac{(tQ_n,Q_i)}{(Q_i,Q_i)}=\frac{(Q_n,tQ_i)}{(Q_i,Q_i)}=0$$

Puesto que $tQ_i\in P_{i+1}$ con $i+1\leq n-1$.

Por tanto,

$$tQ_n(t)=Q_{n+1}(t)+a_{n,n}Q_n(t)+a_{n,n-1}Q_{n-1}(t).$$

Para el cálculo de los dos coeficientes restantes se puede proceder de la misma forma usando la ortogonalidad de los Q_i.

La expresión $\alpha_n=a_{n,n}=\dfrac{(tQ_n,Q_n)}{\|Q_n\|^2}$, se deduce de forma directa y

$$\beta_n=a_{n,n-1}=\frac{(tQ_n,Q_{n-1})}{\|Q_{n-1}\|^2}=\frac{(Q_n,tQ_{n-1})}{\|Q_{n-1}\|^2}=\frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2}.\quad\square$$

Nota: Se puede observar que β_0 no juega ningún papel en la relación de recurrencia (19), pero si lo hará posteriormente.

La teoría de polinomios ortogonales es una rama muy amplia de la Teoría de Aproximación y su tratamiento riguroso excede los objetivos concretos que nos planteamos en este capítulo sobre integración numérica. Sin embargo, hemos de mencionar, sin entrar en los detalles, las tres funciones peso denominadas clásicas que existen en la recta real (Chihara, 1978), pues son los que darán nombre a varias fórmulas de cuadratura gaussianas. Obviamente, cada función peso tiene su correspondiente familia de polinomios ortogonales.

1. *Polinomios ortogonales de Jacobi*, se denotan por $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ y son ortogonales con respecto al producto escalar:

$$(f.g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt,\qquad \alpha,\beta>-1.$$

Así, el peso $w(t)$ es $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$. Algunos casos particulares especialmente relevantes son:

- Los *polinomios ortogonales de Legendre*. Se denotan por $P_n(t)$. Corresponden a $w(t)=1$ en el intervalo $[-1,1]$.
- Los *polinomios ortogonales de Chebyshev de primera especie*. Se denotan por $T_n(t)$. Corresponden a $w(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ en el intervalo $[-1,1]$.
- Los *polinomios ortogonales de Chebyshev de segunda especie*. Se denotan por $U_n(t)$. Corresponden a $w(t)=(1-t^2)^{1/2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

2. *Polinomios ortogonales de Laguerre*. Se denotan por $L_n^{(\alpha)}(t)$ y son ortogonales con respecto al producto escalar:

$$(f.g)=\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{\alpha}e^{-t}dt, \qquad \alpha>-1.$$

   Así, $w(t)=t^{\alpha}e^{-t}$.

3. *Polinomios ortogonales de Hermite*. Se denotan por $H_n(t)$ y son ortogonales con respecto al producto escalar:

$$(f.g)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}dt.$$

   Luego, $w(t)=e^{-t^2}$.

Estas funciones peso clásicas y sus correspondientes familias de polinomios ortogonales tienen una incidencia esencial en la construcción de las correspondientes fórmulas de cuadratura gaussianas: Gauss-Jacobi (casos particulares son Gauss-Legendre o Gauss-Chebyshev), Gauss-Laguerre y Gauss-Hermite.

Algoritmos de cuadraturas gaussianas

Para el cálculo de las cuadraturas gaussianas se utiliza el siguiente procedimiento priorizado como se describe a continuación:

1. *Transformación de la integral convenientemente:* antes de aplicar una de las cuadraturas gaussianas, debemos transformar la integral de forma que se ajuste al intervalo de integración de alguna de ellas.

   Si el intervalo de integración es un compacto $[a,b]$ de la recta real, se ha de trasladar al intervalo $[-1,1]$ mediante la transformación afín

$$x=\frac{2t-a-b}{b-a}, \quad t\in[a,b], \quad x\in[-1,1],$$

Si el intervalo es semiabierto de la forma $[a,+\infty)$, con $a\in\mathbb{R}$, se utiliza la cuadratura de *Gauss-Laguerre* con el cambio de variable adecuado. Finalmente, si se integra sobre la recta real se usa la fórmula de cuadratura de *Gauss-Hermite*.

2. *Cálculo de los nodos* x_i: Antes de abordar cómo determinar los nodos de una cuadratura gaussiana, es importante considerar la siguiente propiedad de las mismas:

Proposición 1. (Gautschi, 2012) *Los nodos* x_i *de una cuadratura gaussiana son todos reales, distintos y pertenecen al intervalo abierto* (a,b).

Para el cálculo de los nodos de una cuadratura gaussiana, desde el punto de vista de la estabilidad numérica, es preferible considerar al cálculo de los ceros de polinomios ortogonales como el cálculo de autovalores para ciertas matrices tridiagonales cuyos elementos son los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos de la SPOM (19). Dichas matrices son conocidas como matrices de Jacobi y vienen determinadas por

$$J_{n+1}=\begin{bmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$$

Ahora bien, si ortonormalizamos la relación de recurrencia (19), tenemos que los polinomios ortonormales son

$$q_n(t)=\frac{Q_n(t)}{\|Q_n\|},$$

entonces

$$t\|Q_n\|q_n(t)=\|Q_{n+1}\|q_{n+1}(t)+\frac{(tq_n,q_n)}{\|Q_n\|^2}\|Q_n\|q_n(t)+\frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2}\|Q_{n-1}\|q_{n-1}(t),$$

de donde

$$tq_n(t)=\frac{\|Q_{n+1}\|}{\|Q_n\|}q_{n+1}(t)+\frac{(tq_n,q_n)}{\|Q_n\|^2}q_n(t)+\frac{\|Q_n\|}{\|Q_{n-1}\|}q_{n-1}(t)$$

$$tq_n(t)=\sqrt{\beta_{n+1}}q_{n+1}(t)+\alpha_n q_n(t)+\sqrt{\beta_n}q_{n-1}(t),\quad n\geq 0,\qquad (20)$$

que induce a la construcción de la matriz tridiagonal simétrica de Jacobi.

$$J_{n+1}^{*}=\begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix}_{(n+1)x(n+1)}$$

Entonces, se establece que

<u>Teorema 4</u>: (Martinez-Finkelshtein y Moreno-Balcázar, 1999) *Los ceros* $x_0, x_1, ..., x_n$ *del polinomio* q_{n+1}*, correspondientes a los nodos de la cuadratura gaussiana, son los valores propios de la matriz* J_{n+1}^{*}.

<u>Demostración</u>: Sean $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ las n+1 raíces del polinomio q_{n+1}, desarrollando (20) se tiene

$$tq_0(t)=\sqrt{\beta_1}q_1(t)+\alpha_0 q_0(t)$$

$$tq_1(t)=\sqrt{\beta_2}q_2(t)+\alpha_1 q_1(t)+\sqrt{\beta_1}q_0(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$tq_n(t)=\sqrt{\beta_{n+1}}q_{n+1}(t)+\alpha_n q_n(t)+\sqrt{\beta_n}q_{n-1}(t)$$

que expresado en forma matricial

$$t\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix}=J_{n+1}^{*}\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \sqrt{\beta_{n+1}}q_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

Evaluando J_{n+1}^{*} en cualquier raíz x_i de $q_{n+1}(t)$, obtenemos que

$$J_{n+1}^{*}\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix}=x_i\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix},\quad i=0,...,n.$$

Por tanto, $x_i,\ i=0,...,n.$ son los valores propios de J_{n+1}^* y $\begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix}$ sus correspondientes vectores propios. □

3. *Cálculo de los pesos* ω_i: el siguiente teorema nos permite calcular los pesos de forma computacionalmente eficiente.

<u>Teorema 5</u>. (Stoer y Bulirsch, 1993) *Si* $v_i=(v_0^i,...,v_n^i)^T$ *es un vector propio, correspondiente a un valor propio* x_i *de* J_{n+1}^*, *entonces los pesos* ω_i *de la cuadratura gaussiana están dados por*

$$I(f)=\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i),$$

con

$$\omega_i=\beta_0\left(v_0^{(i)}\right)^2,\ \ i=0,...,n,\qquad \beta_0=\int_a^b w(t)dt\,.$$

<u>*Demostración*</u>*:* Como hemos visto en la demostración del Teorema 4, el vector propio correspondiente al valor propio x_i es $\left(q_0(x_i),...,q_n(x_i)\right)^T$. Por tanto, el vector propio unitario es

$$(v_0^{(i)},...,v_n^{(i)})^T$$

con

$$v_j^{(i)}=\frac{q_j(x_i)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n}q_k^2(x_i)}} \qquad (21)$$

Puesto que la fórmula gaussiana es exacta en P_{2n+1}, se tiene que

$$\int_a^b q_k(t)w(t)dt=\sum_{i=0}^{n}\omega_i q_k(x_i),\qquad k=0,...,n.$$

Pero, sabemos por la ortogonalidad de q_k que

$$\int_a^b q_k(t)w(t)dt=\begin{cases}\sqrt{\beta_0} & k=0\\ 0 & k=1,...,n\end{cases}$$

Así, se obtiene

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i q_k(x_i) = \begin{cases} \sqrt{\beta_0} & k=0 \\ 0 & k=1,\dots,n \end{cases}$$

Que matricialmente se expresa como

$$\begin{pmatrix} q_0(x_0) & . & . & . & q_0(x_n) \\ q_1(x_0) & . & . & . & q_1(x_n) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ q_n(x_0) & . & . & . & q_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta_0} \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

o, teniendo en mente que los vectores propios son ortogonales, al multiplicar por la matriz traspuesta nos queda

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} q_k^2(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} q_k^2(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & . & \dots & \sum_{k=0}^{n} q_k^2(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ . \\ . \\ . \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde, usando (21)

$$\omega_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} q_k^2(x_i)} = \frac{\left(v_0^{(i)}\right)^2}{q_0^2(x_i)} = \left(\int_a^b w(t)dt\right)\left(v_0^{(i)}\right)^2 = \beta_0 v_0^2. \qquad \square$$

Con estos tres simples pasos se construye las fórmulas gaussianas y hemos de notar que la matriz de Jacobi J_{n+1}^* es muy fácil de construir, ya que las sucesiones $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son explícitamente conocidas para estas familias de polinomios ortogonales.

Finalmente, incluimos dos observaciones. La primera sobre los pesos de una cuadratura gaussiana que tienen la siguiente propiedad de interés tanto teórico como de eficiencia computacional.

<u>Proposición 2</u>. (Gautschi, 2012) *Los pesos ω_i de una cuadratura gaussiana son todos positivos y cumplen*

$$0 < \omega_i \le \int_a^b w(t)dt, \quad i = 0,\dots,n.$$

<u>Demostración</u>: De acuerdo con (7), los pesos $\omega_i = \int_a^b \ell_i(t)w(t)dt$, donde ℓ_i son los correspondientes polinomios básicos de Lagrange. Como $\ell_i \in P_n$, tenemos que,

$\ell_i^2 \in P_{2n}$, y dada la exactitud de la cuadratura en P_{2n}, tenemos que

$$0 < \int_a^b \ell_i^2(t)w(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \omega_k \ell_i^2(t_k) = \omega_i,$$

La cota superior para ω_i se obtiene tomando $f \equiv 1$, así

$$\int_a^b w(t)dt = I(1) = \mathcal{I}(1) = \sum_{j=0}^{n} \omega_j \geq \omega_i. \quad \square$$

Observación. Nótese que en la demostración anterior hemos obtenido de forma elemental que en las cuadraturas gaussianas

$$\int_a^b w(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \omega_i,$$

y por tanto, los números de condición absolutos del problema de integración y de la cuadratura coinciden, siendo ésta la situación óptima.

La segunda observación, es sobre el error en las cuadraturas gaussianas que viene expresado en los términos del siguiente teorema:

Teorema 6. (Martinez-Finkelshtein y Moreno-Balcázar, 1999) *Si* $f \in C^{2n+2}[a,b]$ *y* *Q_{n+1} es el polinomio ortogonal mónico de grado n+1 correspondiente a la función peso w(t), entonces*

$$\mathcal{E}_G(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b Q_{n+1}^2(t)w(t)dt = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \left\| Q_{n+1} \right\|^2.$$

De nuevo el error se puede fácilmente estimar si somos capaces de obtener una cota de $\left| f^{(2n+2)}(t) \right|$ en $[a,b]$ ya que para las cuadraturas consideradas las cantidades $\left\| Q_{n+1} \right\|$ son explícitamente conocidas.

Los métodos de integración numérica abordados en este capítulo, que permiten calcular el valor aproximado de una integral definida, se sintetizan en el mapa conceptual del Contenido de Integración Numérica (CIN) de la Figura 1. En el CIN se presenta a la integración numérica como un método que permite calcular el valor aproximado de la integral definida de una función en el intervalo $[a,b]$. Por ello, cada método numérico cuenta con fórmulas de cuadratura que permiten obtener la aproximación numérica de la integral definida y fórmulas para estimar el error esperado al aplicar dicho método numérico.

Si se prefijan los nodos y tomamos $w(t) = 1$ tenemos las denominadas cuadraturas de

Newton-Cotes, que pueden ser simples o compuestas. Las simples se obtienen al aproximar el integrando por su polinomio interpolador en un conjunto de n+1 puntos (nodos). Las más comunes son: rectángulo, punto medio, trapecios, Simpson 1/3 y Simpson 3/8. Todas estas fórmulas tienen su correspondiente grado de exactitud k y aplicándolas en subintervalos de $[a,b]$ se obtienen las fórmulas de Newton-Cotes compuestas.

Si los nodos no son prefijados tenemos las fórmulas de cuadratura gaussianas cuyo algoritmo de cálculo comienza con la transformación de la integral de forma conveniente para que pueda ser aplicada la fórmula gaussiana. Posteriormente, se realiza el cálculo eficiente de los nodos y de los pesos vía la matriz tridiagonal de Jacobi. Para ello, se necesita un conocimiento básico de los polinomios ortogonales respecto a un producto escalar que involucra a una función peso. Las cuadraturas más usuales son: Gauss-Jacobi para integración de funciones en intervalos compactos de la recta real, Gauss-Laguerre en el caso de integración en intervalos semi-infinitos y Gauss-Hermite para integración sobre la recta real, involucrando estos dos últimos casos el cómputo de integrales impropias de primera especie. Estas fórmulas de integración tienen su relevancia por ser aquellas de máxima exactitud, estableciéndose el convenio de que tienen grado de exactitud m si son exactas para todos los polinomios de grado menor o igual a m.

Como en cualquier método numérico, la estimación del error es esencial para poder establecer una tolerancia prefijada (δ). Por ello, el error y la tolerancia ocupan una posición central en este mapa conceptual, y se incluye el grado de exactitud de cada una de las fórmulas.

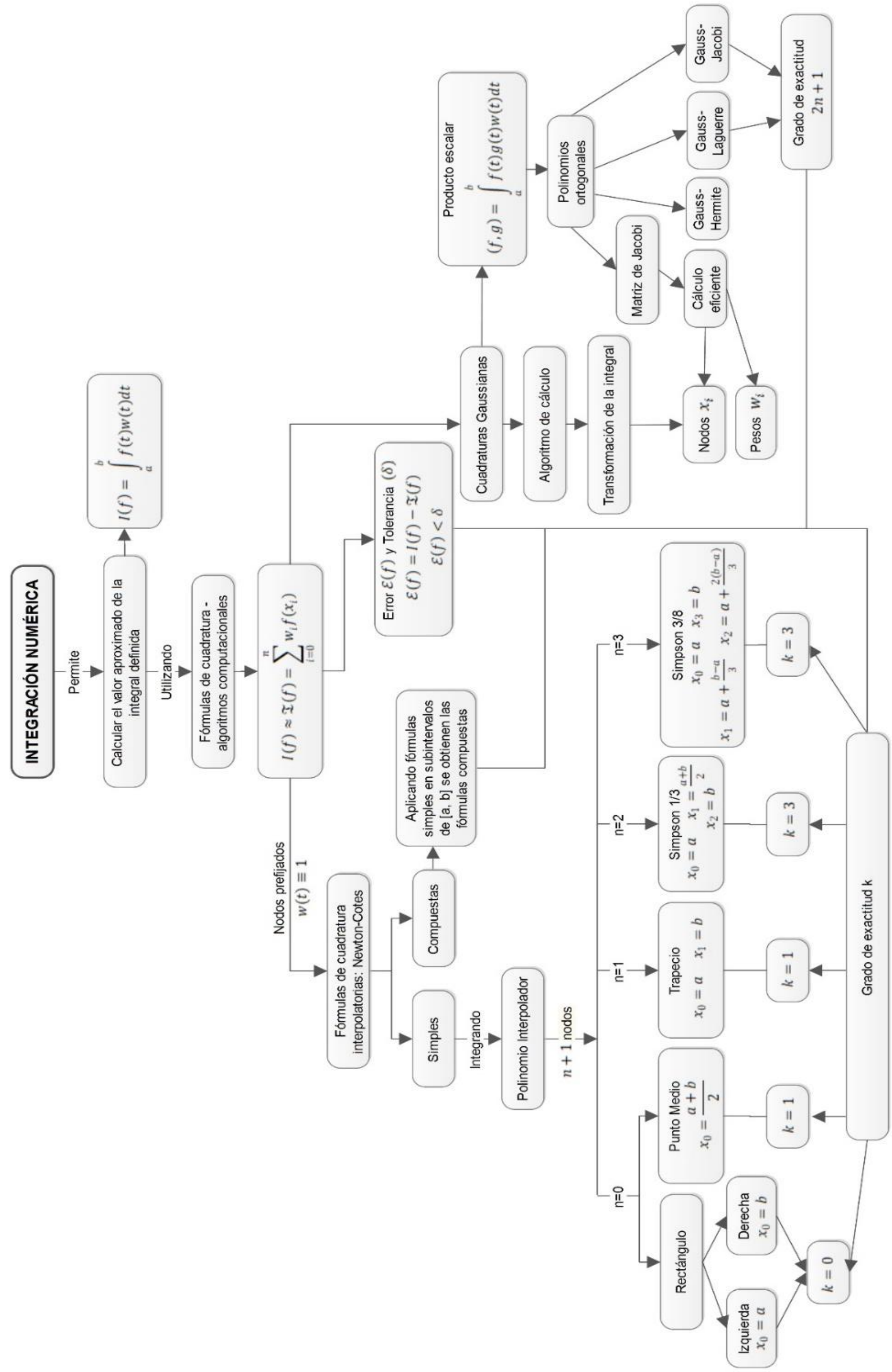

Figura 1: *Mapa conceptual del Contenido de Integración Numérica (CIN)*
Fuente: *Elaboración propia*

2. Conocimiento del profesor

En las últimas décadas, investigadores de Educación Matemática han centrado sus esfuerzos en la observación, análisis y reflexión sobre la práctica docente, como punto de partida para el diseño de propuestas de formación inicial y permanente del profesorado. Uno de sus objetivos consiste en conocer los tipos de conocimiento que ponen en juego los profesores de matemáticas al diseñar y poner en práctica secuencias de aprendizaje. Estos esfuerzos dieron lugar al establecimiento de distintos modelos del conocimiento del profesor, que coinciden en considerar el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento Didáctico del Contenido como los principales dominios del Conocimiento del Profesor de Matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo-Yáñez et al., 2018).
No obstante, su práctica docente se ve influenciada tanto por el grado de conocimiento didáctico y de la materia a enseñar como de sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Aljaberi y Gheith, 2018; Cross, Rapacki y Eker, 2015; Drageset, 2010; Skott, Mosvold y Sakonidis, 2018; Solis, 2015). No es de extrañar, por tanto, que algunos modelos de conocimiento del profesor incluyan las creencias de manera explícita (Carrillo-Yañez et al., 2018) o implícita en las definiciones de los subdominios (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Este capítulo, se divide en dos apartados: el primero describe el modelo de conocimiento del profesor utilizado como referente en esta investigación, mostrando brevemente los modelos en los que se basa; y el segundo presenta una síntesis de investigaciones sobre concepciones y creencias del profesor de matemáticas, base para el diseño de las entrevistas y la interpretación de los datos de esta investigación.

2.1. Modelos de conocimiento del profesor

Shulman (1986) afirma que para enseñar una materia de manera eficiente no basta con dominar el contenido a enseñar. En su modelo divide el conocimiento del profesor en tres categorías: Conocimiento del Contenido de la Materia, Conocimiento del Contenido Pedagógico y Conocimiento Curricular. Dentro de la primera categoría se incluye el conocimiento de los conceptos y principios de la materia, la comprensión del modo en que se organizan estos conceptos y principios básicos y las reglas para determinar su verdad o falsedad, el conocimiento de los motivos por los que es necesario aprender un contenido y su relación con otros contenidos dentro y fuera de la materia. La segunda categoría comprende aspectos del contenido que son más afines a la enseñanza, como son las analogías, ilustraciones, ejemplos, demostraciones y, en general, las formas de representar y formular un tema para que sea comprensible para los estudiantes. En la última categoría se encuentra el conocimiento de los programas y de los materiales educativos de los que se dispone, incluyendo el conocimiento de los contenidos que han recibido en años anteriores y recibirán en posteriores sobre la materia a enseñar, así como de lo que están estudiando en otras materias en ese momento.

Las ideas de Shulman (1986) inspiraron a investigadores en Educación Matemática, que crearon distintos modelos de conocimiento del profesor de matemáticas (Rowland et al., 2005; Ball et al., 2008; Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catálan, 2013). Entre estos modelos, destacamos el modelo denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Figura 2), creado por un grupo de investigadores de la Universidad de Michigan encabezados por Deborah Ball, que divide el conocimiento del profesor de matemáticas en dos grandes dominios: Conocimiento del Contenido Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido (Ball et al., 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

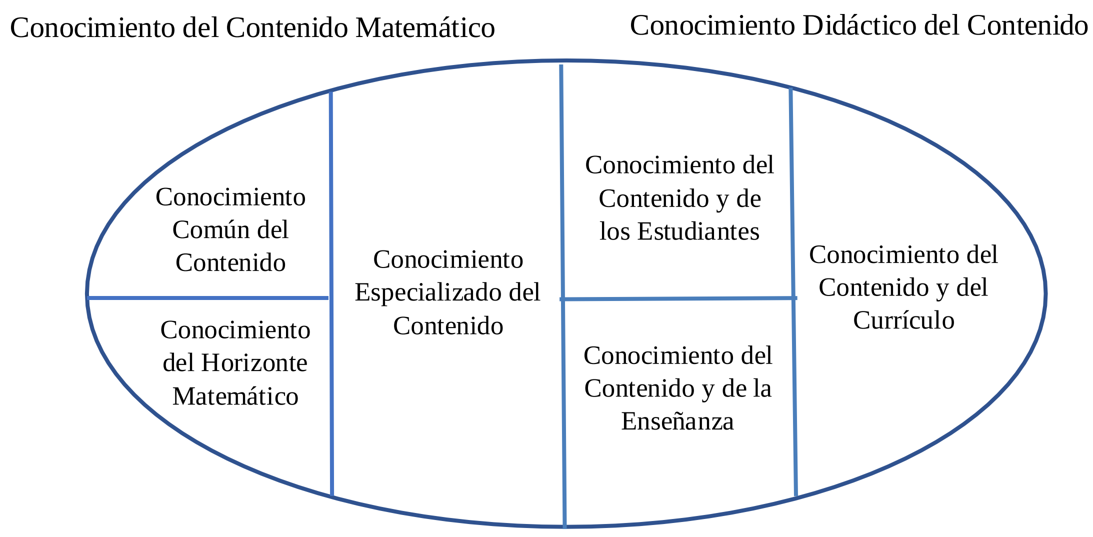

Figura 2: *Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza*
Fuente: *Ball et al. (2008, p. 403)*

El Conocimiento del Contenido Matemático se compone de tres subdominios:

1. *Conocimiento Común del Contenido*, referido al conocimiento matemático que el profesor usa en su enseñanza y que es común a personas que, aunque trabajen en

diversas profesiones, conocen y utilizan las matemáticas;

2. *Conocimiento Especializado del Contenido*, es aquel que permite al profesor enfrentarse a distintas tareas de enseñanza, incluyendo cómo representar correctamente ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas para reglas y procedimientos usuales y examinar y comprender soluciones poco comunes a problemas;
3. *Conocimiento del Horizonte Matemático*, se refiere al conocimiento que posee el profesor de cómo los temas matemáticos previos y futuros están relacionados con las otras asignaturas de matemáticas incluidas en el plan de estudios.

En lo que concierne al Conocimiento Didáctico del Contenido, éste comprende los subdominios:

1. *Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes*, comprende al conocimiento que tiene el profesor del contenido que imparte y de la forma en que los estudiantes pueden conocer o aprender ese contenido.
2. *Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza*, abarca el conocimiento del contenido matemático y de cómo enseñar ese contenido, incluyendo estrategias pedagógicas para solventar las dificultades que se producen durante el aprendizaje.
3. *Conocimiento del Contenido y del Currículo*, se refiere al conocimiento de los elementos curriculares que guían la práctica docente y la selección de las tareas adecuadas para el aprendizaje.

Varias investigaciones ponen de manifiesto algunas dificultades al aplicar este modelo, especialmente a la hora de delimitar sus subdominios, como pueden ser distinguir entre Conocimiento Común y Conocimiento Especializado del Contenido, especialmente en el nivel secundario y universitario (Speer, King y Howell, 2015; Carrillo-Yañez et al., 2018). Según Flores-Medrano, Sosa y Ribeiro (2016) la diferencia entre ellos no está en su naturaleza, sino en las características del sujeto que las posee o las analiza.

En un intento de superar estas dificultades, Carrillo et al. (2013) desarrollaron el Modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – MTSK), que incluye únicamente el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este modelo mantiene como principales dominios el Conocimiento Matemático (Mathematics Knowledge–MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge–PCK) y considera las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como aspectos que permean el Conocimiento Matemático y el Conocimiento Didáctico y condicionan su práctica, de ahí que en la figura 3 ocupen la posición central (Montes, Contreras y Carrillo, 2018).

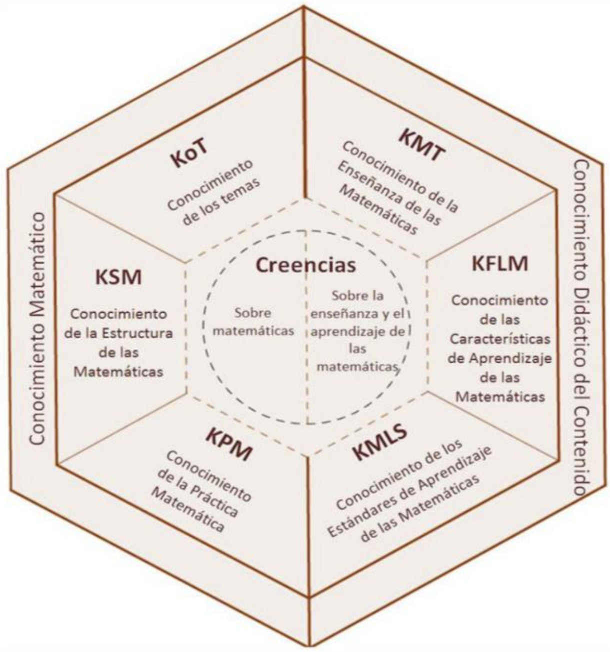

Figura 3: *Dominios y subdominios del MTSK*
Fuente: *Sosa, Flores-Medrano, y Carrillo (2016, p. 175)*

En este modelo, el Conocimiento Matemático se compone de:

1. *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (Knowledge of the Structure of Mathematics - KSM).* Se refiere a los conocimientos que permiten al profesor establecer conexiones entre conceptos matemáticos elementales y avanzados.
2. *Conocimiento de la Práctica de las Matemáticas (Knowledge of the Practice of Mathematics - KPM).* Comprende el conocimiento de las formas de saber, demostrar, crear y producir en matemáticas; incluyendo el conocimiento de aspectos de comunicación matemática, razonamiento y prueba.
3. *Conocimiento de los Temas (Knowledge of Topics - KoT).* Describe el conocimiento que tiene el profesor sobre un tema que forma parte del programa de asignatura e implica un profundo conocimiento del contenido matemático.

En cuanto al Conocimiento Didáctico del Contenido, está conformado por los subdominios:

1. *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Teaching - KMT),* que se refiere al conocimiento de las actividades, estrategias, técnicas, recursos y demás herramientas necesarias para enseñar un contenido matemático específico, así como de las limitaciones y obstáculos que implica el uso

de los mismos;

2. *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards - KFLM)*, que comprende el conocimiento de la manera de razonar y proceder de los estudiantes en matemáticas, incluyendo sus estilos y dificultades de aprendizaje, desarrollo cognitivo, motivaciones y expectativas; y,
3. *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards KMLS)*, abarca el conocimiento de lo que el estudiante puede aprender en un determinado nivel en relación con lo que ha aprendido y aprenderá en los niveles subsiguientes.

Este modelo ha sido usado recientemente para analizar el conocimiento manifestado por profesores universitarios de matemáticas durante el desarrollo de sus clases (Vasco, 2015; Vasco, Climent, Escudero-Avila y Flores-Medrano, 2015), mostrando que supera las dificultades presentadas por el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Figura 2) en la delimitación de los subdominios. En este trabajo nos centraremos en dos componentes de este modelo: el Conocimiento de los Temas (KoT) y las creencias de los profesores sobre los métodos numéricos y su enseñanza y aprendizaje.

2.2. Conocimiento de los Temas de Integración numérica

Según Carrillo-Yañez et al. (2018), para caracterizar el KoT de cualquier tema que el profesor esté enseñando hay que analizar el conocimiento del profesor sobre:

1. *Definiciones, propiedades y fundamentos*. Implica el conocimiento necesario para describir o definir conceptos y demostrar propiedades en base a los fundamentos matemáticos que los sustentan como axiomas y teoremas. En esta categoría, también se incluye el conocimiento del profesor de imágenes y ejemplos de objetos matemáticos.
2. *Procedimientos*. Comprende el conocimiento de cómo, cuándo y por qué se hace algo. O sea, el conocimiento de los algoritmos, sus fundamentos matemáticos, las condiciones necesarias y suficientes para su aplicación y las particularidades del objeto matemático resultante.
3. *Registros de representación*. Corresponde al conocimiento de las diversas formas

de representar los contenidos, que pueden ser gráfica, algebraica, aritmética o pictográfica, entre otras. Además, comprende el conocimiento de la notación y vocabulario asociado a estas representaciones.

4. *Fenomenología y aplicaciones*. Implica el conocimiento de los fenómenos asociados a un tema, así como sus usos y aplicaciones.

El Conocimiento de los Temas (KoT), comprende el conocimiento que tiene el profesor del contenido matemático de los temas que constan en el correspondiente programa o guía docente de la asignatura. Este conocimiento debe ser más profundo, formal y riguroso que el que van a recibir los estudiantes (Liñan, Contreras y Barrera, 2016), permitiéndole ser consciente de aspectos matemáticos que surgen y pueden surgir durante la clase, considerarlos en su preparación y evaluación, y brindándole seguridad al sentirse preparado para responder a las posibles inquietudes de los estudiantes (Montes, 2015).

Si nos centramos en el contenido de integración numérica propio de cursos generales de ingeniería, tal y como se detalló en el Capítulo 1, se considera necesario dominar *definiciones* como cuadraturas interpolatorias o error de la cuadratura y las *propiedades y fundamentos* como el teorema de caracterización de las cuadraturas interpolatorias y el teorema de caracterización de las cuadraturas gaussianas que son las que alcanzan mayor exactitud.

Por otro lado, se requieren *procedimientos y destrezas* para alcanzar los siguientes objetivos: obtener fórmulas de cuadratura, calcular aproximadamente el valor de una integral definida aplicando dichas fórmulas, estimar el error cometido, calcular eficientemente los pesos y los nodos en las fórmulas de cuadratura gaussianas e implementar en el ordenador las cuadraturas. Todos estos procedimientos requieren del uso del razonamiento deductivo. En contraste, la obtención de fórmulas de Newton-Cotes compuestas, a partir de la subdivisión del intervalo [a, b], requiere de razonamiento analógico al establecer en cada uno de estos subintervalos analogía con las cuadraturas simples.

En lo que respecta a los *sistemas de representación,* se utilizan los sistemas de representación verbal, simbólico y algebraico para enunciar definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, reglas, fórmulas, ejemplos y problemas. El sistema de representación algebraico es de especial relevancia a la hora de enunciar fórmulas. El sistema de representación gráfico se utiliza para motivar geométricamente los métodos de integración numérica. La representación mediante tablas de valores se utiliza para presentar los datos de un problema o sus resultados. También, se hace uso de la representación matricial cuando, por ejemplo, se utiliza la matriz tridiagonal de Jacobi para el cálculo eficiente de pesos y nodos en las cuadraturas gaussianas. Las nuevas tecnologías ofrecen otras formas de representación de los conceptos matemáticos (Mishra y Koehler, 2006) como son los algoritmos computacionales, que en nuestro caso se utilizan para la implementación de las cuadraturas en un ordenador.

Con respecto a la *fenomenología*, sin ser exhaustivos, la integración numérica es muy útil para otras materias de ingeniería como las Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Modelización, etcétera y en diversidad de aplicaciones como, por ejemplo, cálculo de áreas, mecánica de sólidos, sistemas dinámicos y de control, bioingeniería, electromagnetismo y electrónica, economía y finanzas o física clásica y cuántica, entre otras (Dimov, Faragó y Vulkov, 2017; Laín, 2013).

2.3. Concepciones y creencias

En la literatura se observa una falta de acuerdo en la definición de creencias, utilizándose en muchas ocasiones indistintamente con otros términos como concepciones, percepciones, valores u orientaciones (Cross et al., 2015; Skott et al., 2018). Sin embargo, para otros autores como Ponte (1992), las creencias y las concepciones son conceptos diferentes.

Así vemos que, para Pajares (1992) las creencias son los juicios de naturaleza afectiva que tiene una persona sobre la verdad o falsedad de una proposición. Gil (2000) considera a las creencias como "un conjunto de nociones a las que se les presta un asentimiento firme, considerándolas como verdades" (p.43). Cross (2009) las define como ideas corporales conscientes e inconscientes y pensamientos que la persona tiene sobre sí mismo, el mundo y la posición que en él ocupa, desarrolladas a través de la pertenencia a grupos sociales y que considera como verdaderas. Mientras que Philipp (2007) las concibe como premisas que el individuo psicológicamente sostiene como su verdad sobre el mundo. Y, para Richardson (2003) son proposiciones, sin garantía epistémica, que cada persona acepta como verdaderas.

En cuanto a las concepciones, Ponte (1992) las considera de naturaleza cognitiva, indispensables para estructurar el significado que le damos a las cosas, pero que también bloquean y limitan nuestra capacidad de comprensión y acción ante nuevas realidades. Moreno y Azcárate (2003) dan a las concepciones un carácter subjetivo menor que a las creencias, en cuanto se apoyan sobre un sustrato racional que describe la naturaleza de los objetos matemáticos. Por su parte, Attorps (2006) las concibe como un conocimiento subjetivo, basado en las experiencias y comprensión del individuo.

Basándonos en estas definiciones, consideramos a las creencias como verdades personales fundamentadas en los sentimientos y la experiencia, de carácter subjetivo y valor afectivo; y a las concepciones como un tipo de conocimiento que comprende una visión personal de los conceptos, fundamentado en el razonamiento y de valor intelectivo.

No obstante, hablaremos de concepciones y creencias ya que, aun siendo conceptos distintos, múltiples investigaciones exponen la dificultad de establecer diferencias entre ellos, especialmente cuando entrevistamos a alguien u observamos su comportamiento (Gil, 2000; Ramos y Casas, 2018).

Varias investigaciones han realizado un intento por clasificar las concepciones y creencias del profesorado de matemáticas. De este modo, encontramos concepciones y creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje (Ernest, 1989; Fives et al., 2015), sobre uno mismo como aprendiz de las matemáticas, acerca del papel del profesorado de matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero, 2008); y otras más específicas como las relativas a la evaluación (Gil, 2000; Paternina y Quessep, 2017) o al papel del software informático en la enseñanza de las matemáticas (Williams, Boone y Kingsley, 2004).

2.3.1. Concepciones y creencias sobre la naturaleza de las matemáticas

Ernest (1989) estableció tres formas de concebir las matemáticas:

1. *Visión instrumentalista*, concibe a las matemáticas como un conjunto de hechos, reglas y habilidades útiles, pero no relacionadas.
2. *Visión platónica*, considera a las matemáticas como cuerpo estático, pero unificado de conocimiento que no se crea, sino que se descubre.
3. *Visión de resolución de problemas*, concibe a las matemáticas como un campo de creación humana que está en constante crecimiento y cuyos resultados se mantienen abiertos a revisión.

En este sentido, se propuso una jerarquía en estas filosofías: la visión instrumentalista estaría en el nivel más bajo, al considerar las matemáticas como un conjunto de hechos, reglas y procedimientos que, aunque útiles, se presentan como entidades separadas; la visión platónica la concebiría como una estructura consistente, objetiva y conectada; y, en el último nivel está el punto de vista constructivista o de resolución de problemas en la que las matemáticas tienen una estructura organizada y dinámica que se localiza en un contexto social y cultural.

Por otro lado, Carrillo y Contreras (1995) caracterizaron esta clasificación de acuerdo al tipo de conocimiento bajo el cual se concibe a la matemática, el fin que persigue y su evolución (Tabla 1).

Tabla 1: *Concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas*

	Instrumentalista	*Platónica*	*De resolución de problemas*
Tipo de conocimiento	Conjunto de reglas y medios, sin vinculación teórica ni práctica determinada, útil y veraz.	Conocimiento preexistente, lógico y objetivo; absoluto, universal y abstracto.	Conocimiento en constante revisión, relativa veracidad de procesos y resultados.
Fin que persigue	El desarrollo de otras ciencias.	El desarrollo de la propia matemática.	El desarrollo de las capacidades intelectuales.
Modo de evolución	El principal impulsor del conocimiento es la creación y uso de algoritmos.	El conocimiento matemático no puede ser creado porque ya existe y espera ser descubierto.	El conocimiento matemático está en continua creación, impulsado por la resolución de problemas.

Fuente: *Carrillo y Contreras (1995)*

De acuerdo a ello, quién tiene una concepción *instrumentalista* de la matemática la concibe como un conjunto de reglas y medios que no se vinculan de manera teórica ni práctica, que son utilizados como herramientas para resolver problemas y cuyos resultados tienen una veracidad indiscutible, valorados mediante argumentación empírica. Para los instrumentalistas, la matemática evoluciona gracias a la creación y uso de algoritmos construidos para explicar, de manera determinista, la relación causa-efecto; siendo el fin que persigue el desarrollo de otras ciencias.

En el caso de aquellos que tienen una concepción *platónica* de la matemática, la consideran como un cuerpo de conocimientos ya existentes, por lo que no puede ser creado y solo espera ser descubierto. Posee una estructura lógica que le da un carácter objetivo, absoluto, universal, abstracto y libre de valores. Se construye en base a resultados ya obtenidos, validados por el razonamiento lógico y utilizados para explicar problemas surgidos en la propia matemática y en otras ciencias; teniendo como fin último su propio desarrollo.

Finalmente, quienes tienen una concepción de *resolución de problemas* conciben a la matemática como un conjunto de conocimientos en continua creación, cuyos procesos y resultados tienen una relativa veracidad por lo que son sometidos a contante revisión. Además, dependen del contexto social, cultural y científico, por lo que se construyen por interacción social, para dar respuesta a los diversos problemas del convivir humano, combinando procesos inductivos y deductivos en el razonamiento matemático, y teniendo como finalidad el desarrollo de las capacidades intelectuales.

En la práctica, las concepciones que presentan los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas pueden ser una combinación de estas tipologías, con predominio de alguna de ellas (Garegae, 2016).

2.3.2. Concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

De acuerdo con Fives, Lacatena y Gerard (2015), las categorías utilizadas en investigaciones sobre creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas han evolucionado para centrarse en dos grandes categorías de creencias: (a) centradas en el estudiante, que por lo general reflejan puntos de vista constructivista de la enseñanza y (b) centradas en el profesor, vinculadas a un modelo de transmisión de la enseñanza.

Para Contreras (2009), las concepciones que tiene el profesor actúan como filtros que regulan su estilo personal de enseñanza, la selección de los contenidos a enseñar, su metodología de enseñanza, los recursos que utiliza y su forma de evaluar. Según las concepciones que el profesor tiene sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el profesor presenta cuatro tendencias didácticas en su praxis educativa: Tradicionalista, Tecnológica, Espontaneista e Investigativa; cuyos indicadores se han sintetizado en la tabla 2.

Los profesores de tendencia didáctica *tradicionalista,* siguen obligatoriamente una programación preestablecida por la institución, elaborada sin considerar los puntos de vista del profesor ni de los estudiantes y que no guardan relación entre las unidades. La asignatura es considerada de carácter formal, orientada a proporcionar información relativa a conceptos y reglas. El profesor utiliza la clase magistral, asume el papel de especialista y trasmisor de contenidos y asigna al estudiante un rol receptivo al dedicarse a tomar apuntes y usar la memorización para reproducir estos contenidos en el examen, considerado el instrumento ideal a través del cual el profesor medirá su capacidad de retener información y aplicar reglas de manera mecánica.

Tabla 2: *Tendencias didácticas del profesor según sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*

Tendencia Didáctica	*Tradicionalista*	*Tecnológica*	*Espontaneista*	*Investigativa*
Tipo de programación	Preestablecida, rígida. Elaborada sin la participación del profesor ni de los estudiantes.	Cerrada y secuenciada de acuerdo a los aspectos estructurales de las matemáticas.	Sin organización inicial y basada en los intereses de los estudiantes.	Sin una programación concreta. Propuesta organizativa de los elementos del programa.
Carácter de la asignatura	Formal e informativo.	Informativo y práctico.	Formativo.	Informativo y formativo.
Papel del profesor	Especialista y trasmisor de los contenidos.	Transmisor de con tenidos y procesos lógicos.	Carácter humanista y especialista en dinámica de grupos.	Experimentador interactivo de contenidos y métodos.
Cómo enseñar	Clase magistral. Libro de texto, único material curricular.	Uso de estrategias expositivas. Simulación de procesos de construcción usando medios tecnológicos.	Actividades experimentales, de manipulación de modelos. Uso exclusivo del método inductivo.	Procesos investigativos debidamente planificados por el profesor.
Papel del estudiante	Simple receptor del conocimiento.	Imitador del estilo cognitivo del profesor al reproducir los procesos lógicos mostrados por éste.	Participante activo en la planificación y en el aprendizaje.	Es investigador, consciente de su proceso de aprendizaje.
Cómo se aprende	Memorización, único recurso de aprendizaje.	Utiliza la memoria, pero organizando los conocimientos según la lógica de construcción de la propia matemática.	De manera espontánea, cuando el objeto de aprendizaje es de interés y propicia el descubrimiento.	A través de la resolución de problemas, mediante la investigación.
Evaluación	Evaluación periódica. El examen, instrumento ideal para medir capacidad de retener información a corto plazo y de aplicación mecánica.	Evaluación periódica. El examen mide el aprendizaje en función del grado de operatividad y reproducción mecánica.	Sensor permanente del aprendizaje. Busca medir el grado de participación del alumno. No considera al examen instrumento adecuado de evaluación.	Sensor permanente del aprendizaje. Busca medir el grado de implicación del alumno y la significatividad de su aprendizaje. Considera el uso del examen.

Fuente: *Contreras (2009).*

Por otra parte, los profesores de tendencia didáctica *tecnológica*, también siguen una programación cerrada, pero en este caso las unidades tienen una secuencia adecuada según los criterios estructurales de la asignatura, que además de presentar información al estudiante, también tiene una finalidad práctica. Por lo que, en este caso, el profesor que asume el rol de transmisor de contenidos y de procesos lógicos, cree que se debe enseñar utilizando estrategias expositivas que simulen el proceso de construcción del conocimiento apoyándose en medios tecnológicos. Por su parte, el estudiante asume el rol de imitador de los procesos mostrados por el profesor, utilizando para ello la lógica de construcción de la propia matemática. El grado de operatividad y reproducción mecánica alcanzado por el estudiante es medido a través del examen.

Los profesores de tendencia didáctica *espontaneísta*, a diferencia de los anteriores, no siguen una programación preestablecida, sino que la van elaborando de acuerdo a los intereses de los estudiantes; lo que puede dar lugar a conocimiento no organizado. En este caso, la asignatura es de carácter formativo, orientada a la adquisición de valores y actitud positiva hacia el aprendizaje. Para ello, el profesor asume un rol humanista de especialista en dinámicas de grupos, y cree que se debe enseñar mediante actividades de experimentación y manipulación de modelos. Además, considera que el estudiante aprende cuando el objeto de aprendizaje es de su interés y está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento, por lo que le asigna un rol activo en la planificación y la consecución del aprendizaje y considera que debe ser evaluado de forma permanente su grado de participación. Para lo cual, no considera al examen tradicional como instrumento adecuado de evaluación, buscando evaluar de acuerdo al contexto y el criterio e intereses del estudiante.

Finalmente, el profesor de tendencia didáctica *investigativa* tampoco sigue una programación preestablecida, solamente elabora una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero sin vincularla a un recorrido concreto, porque la misma depende de los intereses de los estudiantes. Según esta tendencia, la asignatura, además de buscar que el alumno aprenda conceptos y procedimientos, también es de carácter formativo y tiene como finalidad que el estudiante adquiera herramientas que le permitan un aprendizaje autónomo y despierten su curiosidad y pasión por la investigación. Para ello, el profesor asume el rol de proveedor de estas herramientas y cree apropiado enseñar mediante procesos investigativos debidamente planificados. Además, asigna al estudiante el rol de investigador consciente de su propio proceso de aprendizaje, y considera la utilidad de la evaluación para medir este aprendizaje y el grado de implicación del estudiante en el mismo.

Por otra parte, estas concepciones y creencias están relacionadas con sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. Así, tenemos que los profesores con una concepción platónica o instrumentalista están más acordes con tendencias didácticas de tipo tradicionalista y tecnológica. Mientras que, aquellos con una concepción de resolución de problemas están más acordes con tendencias didácticas espontaneísta e investigativa (Contreras y Carrillo, 2018).

2.3.3. Concepciones y creencias sobre el uso de la tecnología

Actualmente, la tecnología forma parte del quehacer docente del profesor universitario, y en el caso de los métodos numéricos, el uso de software como Matlab, Phython, Octave, Scilab o Mathematica, entre otros, resulta imprescindible para obtener soluciones a problemas reales. No obstante, la tecnología puede ser usada como un objetivo de aprendizaje, como medio para aprender o como apoyo o refuerzo de contenidos explicados previamente (Area, González, Cepeda, y Sanabria, 2011).

En numerosas ocasiones la inclusión de tecnología en el aula no produce cambios metodológicos, ignorando su potencialidad para favorecer el aprendizaje de conceptos nuevos (Marcelo, Yot y Perera, 2016; Lin, Sokolova y Vlasova, 2017).

Fraga y Gewerc (2013) en un estudio de casos encontraron las siguientes creencias sobre el uso de la tecnología en el aula: la tecnología es un elemento motivador importante del aprendizaje, se debe utilizar la tecnología en función de la seguridad profesional que ofrezca al docente, el uso de la tecnología diferencia una clase innovadora de una tradicional, y cuanta más tecnología se utilice en el aula más aprenden los estudiantes.

Para Ertmer (2005), el uso de la tecnología en el aula está asociado con las creencias pedagógicas de los docentes. En este sentido, profesores con creencias centradas en el estudiante tienen mayor facilidad para integrar la tecnología en el aula. Por el contrario, profesores con creencias pedagógicas centradas en el docente son más propensos a utilizar la tecnología, si es que lo hacen, para apoyar actividades de enseñanza tradicionales.

Garrido (2009) en una investigación con formadores de docentes y futuros docentes encontró creencias optimistas y pesimistas sobre la utilidad de las TIC como un recurso para el aprendizaje en entornos de enseñanza. Dentro de las optimistas apareció la creencia de que las TIC provocan cambios en la manera de pensar, mejoran ciertas capacidades cognitivas, permiten profundizar en el tratamiento de contenidos, proporciona autonomía y motivan al estudiante. En cuanto a las pesimistas, encontramos la creencia de que los medios digitales no ofrecen información fiable que apoye procesos formativos, que pueden confundir al estudiante y que las TIC son interesantes únicamente cuando no es posible la enseñanza presencial. Por otro lado, aparecen creencias sobre los efectos positivos y negativos de las TIC en el proceso educativo por su condición de artefactos culturales. Por ejemplo, una creencia sobre efecto negativo es que la presencia de las TIC en la vida diaria de los estudiantes ha disminuido la riqueza lingüística de los estudiantes y, en el aspecto positivo, que la tecnología nos permite interactuar con personas de otras culturas para aprender de ellos.

Ertmer et al. (2012) consideran estas creencias pesimistas sobre la tecnología como barreras de “segundo orden” que impiden su uso en el aula. Estas deben ser superadas, porque de lo contrario no sería útil solventar las barreras de “primer orden”, que son la falta de recursos, de apoyo administrativo y problemas de la tecnología y las pruebas estandarizadas.

Misfeldt, Jankvist y Aguilar (2016), estudiaron las creencias de tres profesores daneses sobre las matemáticas y sobre el uso de la tecnología en el aula. Entre los resultados determinó que el profesor que presenta una visión instrumentalista de las matemáticas, la concibe como una acumulación de hechos, reglas y habilidades para alcanzar un fin, sin importar si estas habilidades están o no orientadas a la tecnología. Por lo tanto, considera al computador como un mero reemplazo del papel y no cree que la tecnología juegue un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por el contrario, el docente que con respecto a la naturaleza de las matemáticas fue caracterizado como un solucionador de problemas, cree que el computador y la tecnología en general son herramientas útiles para el aprendizaje de las matemáticas.

2.3.4. Influencia de las concepciones y creencias de los profesores en su práctica docente

Algunos investigadores han determinado que las creencias que tienen los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas, y sobre cómo se enseñan y aprenden, influyen en su práctica docente (Aljaberi y Gheith, 2018; Goldin, Rösken, y Törner, 2009; Donoso (2015); Mapolelo y Akinsola, 2015; Pajares, 1992; Skott et al., 2018; Stipek, Givvin, Salmon, y MacGyvers, 2001), llegando en algunas ocasiones a tener mayor relevancia que los conocimientos adquiridos de manera formal (Solis, 2015).

Sin embargo, algunos estudios muestran inconsistencias entre las creencias de los profesores y sus prácticas de enseñanza (Cross, 2014; Solís, 2015; Shi, Zhang, y Lin, 2014). Según Cross (2014), esta aparente inconsistencia entre las creencias de profesores de matemáticas declaradas en las entrevistas y su práctica docente obedece a la influencia de otras creencias no matemáticas y a factores contextuales. Por ejemplo, un profesor creía que la investigación era una forma significativa de involucrar a los estudiantes en el pensamiento matemático, pero no la puso en práctica porque consideró que estaba limitado por el tiempo asignado y que sus estudiantes no tenían un nivel de conocimiento suficiente para llevarlo a la práctica. Al respecto Philipp (2007) ya había sugerido que para algunos investigadores estas aparentes contradicciones no existen en el profesor sino en la mente del investigador, quien debe intentar comprender mejor los sistemas de creencias de los profesores y las circunstancias que rodean su práctica docente.

Por otro lado, Fives et al. (2015) sugieren que este desajuste puede deberse a la tendencia a estudiar las creencias de los docentes sobre la enseñanza e ignorar sus creencias sobre el aprendizaje. En este sentido, Beswick (2012) afirma que debe considerarse que las creencias que tienen los profesores sobre sí mismos y su capacidad para enseñar están vinculadas con las creencias que tienen sobre la capacidad de algunos de sus estudiantes para aprender matemáticas y sobre los tipos de experiencias de aprendizaje que le son apropiados. Así, por ejemplo, si cree que sus estudiantes tienen poca capacidad matemática probablemente se trace expectativas académicas de bajo nivel y planifique un currículo empobrecido.

Finalmente, también se debe considerar que las creencias del profesor se forman a través de la experiencia como estudiante de matemáticas durante las distintas etapas de la vida (Cooney, Shealy y Arvold, 1998; Fives et al., 2015), que a su vez depende en gran medida del contexto cultural en el que se encuentre (Cai y Wang, 2010; Chan y Elliott, 2004). Por ejemplo, Cai y Wang (2010) observaron que los profesores americanos tienen una concepción más instrumentalista de las matemáticas que los profesores chinos.

3. Marco metodológico

3.1. Propósito de la investigación

La importancia de los métodos numéricos para la formación profesional de un ingeniero, contrasta con la escasez de trabajos de investigación que versen sobre aspectos importantes de su enseñanza y aprendizaje como pueden ser el modo de incorporar innovaciones tecnológicas que vinculen la teoría con la práctica, el conocimiento del contenido didáctico de sus profesores, las creencias que sustentan o el modo en que los estudiantes aprenden y comprenden dichos contenidos.

En otros niveles y/o áreas de las matemáticas, investigadores de Educación Matemática han mostrado su interés en cómo los profesores manifiestan su conocimiento y sus creencias en el proceso de instrucción, y hacia cómo los estudiantes aprenden y comprenden aspectos específicos de las matemáticas (Kilpatrick, 1998). Tal es el caso de Moreno y Azcárate (2003), que indagaron las concepciones y creencias de seis profesores universitarios, expertos en matemática aplicada, acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Mediante el uso de entrevistas determinaron que, aunque casi todos los profesores tienen concepciones platónicas (centrada en el contenido y con énfasis en la comprensión conceptual) y formalistas (centradas en la clase), su práctica docente es esencialmente instrumentalista (énfasis en la práctica). Además, tienen un estilo de enseñanza tradicional con dominio de la clase magistral y válido para estilos de aprendizaje por imitación.

Este énfasis de los profesores universitarios en la enseñanza tradicional, también fue detectado por otros investigadores como Paternina y Quessep (2017) en Colombia, y por Solís (2015) que, tras la revisión de algunos estudios de creencias sobre enseñanza y aprendizaje en profesores universitarios en contextos cercanos a Ecuador, afirma que:

> *De los estudios revisados, quedan claros dos puntos en el tema de las creencias sobre enseñanza-aprendizaje en docentes universitarios: por un lado, aún predominan las creencias de enseñanza tradicional, con el uso de herramientas centradas en el profesor y donde el estudiante es visto como un receptor de conocimientos. Por otra parte, no hay una total concordancia entre lo que los docentes manifiestan como su creencia pedagógica y su conducta en el aula* (p.237).

Los antecedentes descritos, nos llevaron a plantearnos, como primer propósito de esta investigación, el indagar acerca de las concepciones y creencias que sustentan profesores que imparten métodos numéricos en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador, así como la coherencia con su práctica docente (OG1).

Más concretamente, se pretende explorar las concepciones y creencias que manifiestan los profesores sobre la naturaleza de los métodos numéricos y su enseñanza y aprendizaje (OE1).

Como se comentó en el Capítulo 1, la tecnología jugó un papel importantísimo en el desarrollo y evolución de los métodos numéricos. Si bien los cambios producidos por la tecnología en nuestro día a día y entornos laborales son evidentes, su impacto en los entornos educativos no es el esperado. Según Marcelo et al. (2016), la mayoría de los profesores universitarios utilizan la tecnología para realizar tareas que ya realizaban anteriormente en su práctica docente, como puede ser utilizar una presentación multimedia en lugar de la pizarra, o atender al estudiante en tutorías online en lugar de las presenciales. La mayoría de las investigaciones sobre modernización de la enseñanza de las matemáticas en la universidad conciben el uso de las herramientas de las TIC únicamente como instrumentos para aumentar la visualización y la motivación (Lin et al., 2017). Es decir, en numerosas ocasiones la inclusión de tecnología en el aula no produce cambios metodológicos, ignorando su potencialidad para favorecer el aprendizaje de conceptos nuevos.

Estos hechos nos han motivado a indagar sobre las creencias que tiene el profesor respecto al papel del software especializado en la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos (OE2).

Además, consideramos necesario determinar en qué medida las creencias manifestadas por los profesores se corresponden con su práctica docente (OE3).

Como se vio en el Capítulo 2, son muchas las facetas que pueden analizarse sobre el conocimiento del profesor. Por ejemplo, Vasco y Climent (2018), caracterizaron el Conocimiento Especializado de dos profesores universitarios de Álgebra Lineal, a través de la observación de varias sesiones de clases y la realización de entrevistas semiestructuradas a los profesores. Entre los resultados de este estudio se encontró en uno de los profesores un énfasis conceptual coherente con su Conocimiento de los Temas (KoT), su Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) especialmente de las dificultades presentadas, y su Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) al seleccionar ejemplos para la enseñanza. En el caso del otro profesor, se encontraron principalmente evidencias de KoT relativas a procedimientos y a fenomenología y aplicaciones a situaciones reales.

Dado que la mayoría de los profesores que imparten métodos numéricos en Ecuador son ingenieros o profesionales educativos, no necesariamente titulados en matemáticas, decidimos centrarnos en analizar el conocimiento del contenido de Métodos Numéricos de profesores que imparten esta materia en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador (OG2). Más concretamente, nos propusimos como objetivo determinar el grado de conocimiento de conceptos claves de Métodos Numéricos de algunos profesores de esta materia (OE4) y describir el Conocimiento de los Temas referentes a integración numérica manifestado por un profesor de métodos numéricos en sus clases (OE5).

En definitiva, la presente investigación tiene dos objetivos generales:

OG1: Aproximarse a las concepciones y creencias que sustentan algunos profesores que imparten Métodos Numéricos en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador, así como la coherencia con su práctica en el aula.

OG2: Analizar el conocimiento del contenido de Métodos Numéricos de algunos profesores que imparten esta materia en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador.

El objetivo general 1 se desglosó en los siguientes objetivos específicos:

OE1: Explorar las concepciones y creencias que manifiestan los profesores sobre la naturaleza de los Métodos Numéricos y su enseñanza y aprendizaje.

OE2: Indagar en las creencias que sobre el papel del software especializado en la enseñanza y el aprendizaje de los Métodos Numéricos tienen los profesores.

OE3: Determinar en qué medida las creencias manifestadas por los profesores se corresponden con su práctica docente.

Por otro lado, para la consecución del objetivo general 2, se han propuesto los siguientes objetivos específicos:

OE4: Determinar el grado de conocimiento de conceptos claves de Métodos Numéricos de los profesores de esta materia.

OE5: Analizar el Conocimiento de los Temas referentes a integración numérica manifestado por un profesor de Métodos Numéricos en sus clases.

3.2. Metodología

Para alcanzar los objetivos expuestos se optó por utilizar métodos de investigación cualitativos. En concreto, para conocer las concepciones y creencias que sustentan algunos profesores que imparten Métodos Numéricos en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador y si estas son coherentes con su práctica docente (OG1), se realizó un estudio de casos colectivo con 12 profesores de Métodos Numéricos o Análisis Numérico de universidades del Ecuador. De acuerdo a lo mencionado en el Capítulo 1, se han considerado los profesores de la asignatura bajo ambas denominaciones.

A través de un análisis de datos cruzados, se determinaron semejanzas y diferencias entre los casos estudiados (Simons, 2015), valorando, desde una visión de conjunto, las descripciones, interpretaciones y análisis de cada uno de ellos (Aróstegui Plaza y Guerrero Valiente, 2014).

Por otro lado, para analizar el conocimiento del contenido de Métodos Numéricos de algunos profesores que imparten esta materia en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador (OG2), se analizaron las explicaciones sobre algunos términos esenciales en métodos numéricos de los doce profesores y se estudió con mayor profundidad uno de los doce casos.

Según Stake (1998) el estudio de casos es una técnica de investigación exhaustiva que permite estudiar una situación en su contexto real con el objetivo de comprender el objeto de estudio, sus contextos, particularidades y complejidades.

Se trata por tanto de un estudio descriptivo, ya que no busca la generalización sino la comprensión, a través de un informe detallado del objeto de estudio y aportando información básica sobre un área poco investigada (Álvarez y San Fabián, 2012), como es el caso de la enseñanza de los métodos numéricos. Además, el estudio de casos pertenece al paradigma cualitativo interpretativo porque considera que la realidad se construye con el aporte directo de las personas involucradas (profesores de métodos numéricos) en la situación estudiada, conjugándose con la realidad del investigador y la del lector del informe de investigación (Ceballos-Herrera, 2009).

A continuación, se describe la muestra y las técnicas e instrumentos de recogida de información utilizados para llevar a cabo cada uno de los objetivos planteados.

3.2.1. Selección de los casos de estudio

La selección de participantes en el estudio se realizó de manera intencional, buscando que hubiera universidades de todas las categorías A, B y C, en las que están clasificadas las universidades ecuatorianas, y el contexto socio-cultural en el que se encuentra, es decir, que estuvieran ubicadas tanto en las tres principales ciudades del país, como son Quito, Guayaquil y Cuenca, así como de ciudades más pequeñas, tanto de la región sierra como de la región costa. La región Amazónica no fue considerada puesto que en ella solo existen dos universidades y ninguna oferta carreras de ingeniería en las que se dicten los métodos numéricos.

Dadas las dificultades para encontrar profesores dispuestos a dedicar parte de su tiempo a la entrevista y abrirnos las puertas de su aula para observar el desarrollo de sus clases, los participantes del estudio lo componen aquellos profesores que voluntariamente accedieron a colaborar con nosotros, tras garantizarles confidencialidad y anonimato tanto del profesorado como de la universidad. No obstante, se respetaron sus requerimientos como, por ejemplo, el caso de Rolando que no permitió que se grabara la entrevista, teniendo que tomarse notas; o el caso de Marcelo que no consideró necesario que se observara su clase y solicitó se analicen las clases que ha grabado y tiene a disposición de los estudiantes.

En la tabla 3 se ha clasificado a los 12 participantes de la investigación según la categoría de su universidad y la región en la que se encuentra. Como se puede observar, la mitad de los casos corresponden a profesores de universidades categoría A, tres de la zona de la sierra y tres de la costa. Esto se justifica en el hecho de que los profesores de estas universidades son los que estuvieron más prestos a colaborar en la investigación, ya que por lo general sienten mayor seguridad en su dominio del tema y por tanto, menos recelo a permitir observar sus clases.

En su diseño inicial, las universidades ecuatorianas estaban clasificadas en cuatro niveles, por lo que, además se contó con dos profesores de las categorías B, dos de la C y tres de la D. De los dos casos pertenecientes a la universidad E4 (B), de categoría B, se tuvo que descartar uno de ellos por la imposibilidad de concretar la observación de aula. Sin embargo, la universidad codificada como E5 (B), que en el momento de selección de la muestra pertenecía a la categoría D, ascendió a la categoría B dos meses después de haber entrevistado y observado las clases de sus tres profesores participantes. De este modo, contamos con cuatro profesores de universidades de categoría B de la región de la costa y dos profesores de universidades de categoría C, uno de la región de la sierra y otro de la costa.

Tabla 3: *Selección de la muestra*

Categoría de la Universidad	*Región*	*Código asignado a la Universidad*	*Profesor*
A	Sierra	E1(A)	Samuel
	Costa	E2 (A)	Marcelo, Rolando y Alan
	Sierra	E3 (A)	Orlando y Fernando
B	Costa	E4 (B)	Rudy
	Costa	E5 (B)	Alberto, Romina y Lorena
C	Sierra	E6 (C)	Antonio
	Costa	E7 (C)	Sandro

Como se ha indicado anteriormente, uno de los profesores prefirió darnos acceso a grabaciones en vídeo de sus clases que tiene disponibles para sus estudiantes que concertar una cita para observar su clase. Si bien esto puede verse como un obstáculo en la investigación, decidimos tomar ventaja de la información proporcionada por el profesor y analizar el Conocimiento de los Temas referentes a integración numérica manifestado en dichas grabaciones (OE7).

3.2.2. Técnicas e instrumentos utilizados para alcanzar el objetivo general 1

Las técnicas e instrumentos de investigación más usuales en los estudios de casos son la observación, las entrevistas y el análisis de documentos (Stake, 1998).

La **entrevista** es uno de los mejores medios de indagar en el pensamiento de los profesores, especialmente cuando se realiza cara a cara y en un ambiente relajado. En nuestro caso, optamos por una entrevista semiestructurada cuyo guion aparece en la Figura 4, ya que, en función de las respuestas, la entrevistadora reformulaba la pregunta de otra manera, indagaba sobre el significado de la respuesta que no quedaba clara o exploraba un área surgida de manera espontánea.

Este guion es una adaptación del cuestionario CPEAM (Gil, 2000) consistente en el reemplazo de la palabra matemáticas por métodos numéricos (preguntas 5 a 8, 13 a 15) y la creación de preguntas sobre la importancia del desarrollo matemático de los métodos, la implementación de los algoritmos en el ordenador, el uso de *toy problems* (preguntas 9 a 11), así como los cambios en la enseñanza de los Métodos Numéricos en los últimos años (pregunta 17). Todas estas preguntas permiten indagar en las concepciones y creencias de los profesores sobre la naturaleza de los Métodos Numéricos, cómo se enseñan y se aprenden y el papel que juegan el software informático en dichos procesos (OE1 y OE2). Adicionalmente, se recogió información sobre la edad, formación, su trayectoria laboral y su antigüedad como profesor de Métodos Numéricos (preguntas 1 a 4).

1. ¿Cuál es su edad?
2. ¿Cuál es su formación profesional?
3. ¿Cuál es su experiencia profesional y docente, y como docente de Métodos numéricos?
4. ¿Escogió dar la asignatura de Métodos Numéricos o le fue asignada?
5. ¿Por qué los ingenieros deben estudiar Métodos Numéricos? ¿Qué formación deben recibir al respecto?
6. La materia de Métodos Numéricos es muy extensa y habitualmente hay que escoger qué métodos enseñar, ¿qué criterios usa para seleccionarlos?
7. ¿Qué proceso sigue al preparar las clases de Métodos Numéricos?
8. ¿Cuáles son las actividades que realiza en sus clases de Métodos Numéricos?
9. ¿Qué importancia tiene en su asignatura el desarrollo matemático para obtener el método numérico?
10. ¿Usa *toy problems* para explicar los métodos?
11. ¿Qué papel juegan los ordenadores y uso del software en el aprendizaje de los Métodos Numéricos? ¿Qué peso tiene en la asignatura? ¿Qué software usa?
12. ¿Cómo motiva a sus estudiantes?
13. ¿Cómo se aprenden los Métodos Numéricos?
14. ¿Qué piensa que es un buen estudiante de esta materia?
15. ¿Qué hechos le hacen sentir que ha realizado un buen trabajo enseñando Métodos Numéricos?
16. ¿Cómo evalúas a sus estudiantes?
17. ¿Qué cambios son los más significativos que ha experimentado la enseñanza de los Métodos Numéricos en los últimos tiempos?

Figura 4: *Guion de la entrevista a los doce profesores.*

Si bien con la entrevista se puede tener un acercamiento a las creencias del docente, la **observación** permite determinar su presencia en su accionar en el aula. En este caso se ha decantado por una observación no participante, pues es la que menos interfiere en el proceso que pretendemos comprender y describir. En concreto, se observó una clase de Métodos Numéricos de cada uno de los profesores participantes en el estudio, utilizando la guía de observación que aparece en la figura 5. Para ello, se debió llegar a un previo acuerdo con el docente sobre la fecha y hora de la clase a observar.

Dado que el objetivo de la observación es determinar en qué medida las creencias manifestadas por los profesores se corresponden con su práctica docente (OE4), el centro de atención de la observación son las acciones del profesor, por lo que la investigadora se dirigió a la parte posterior del aula para poder observarla mejor. No obstante, también nos interesó saber el papel de los estudiantes y las interacciones profesor-estudiante.

1. ¿Cuál fue el objetivo propuesto por el docente?
2. ¿Cómo motivo el docente la clase?
3. ¿Cuáles fueron las actividades iniciales de clase?
4. ¿Cuáles fueron las actividades de desarrollo de la clase?
5. ¿Qué materiales utilizó en la clase?
6. ¿Qué recursos tecnológicos utilizó en clase? ¿Qué software?
7. ¿Se evidenció dominio matemático del docente?
8. ¿Qué importancia dio el docente al desarrollo matemático para obtener el método numérico?
9. ¿Cuáles fueron las actividades de refuerzo utilizadas?
10. ¿Cómo evaluó a los estudiantes?
11. ¿En qué medida se evidenció una preparación previa de la clase?
12. ¿Cuál fue el papel que el docente asignó al alumno?
13. ¿Qué rol ejerció el docente?
14. ¿Qué hechos dejaron en evidencia si el docente realizó o no un buen trabajo en la clase? ¿Si alcanzó o no el objetivo planteado al inicio de la clase?
15. ¿Qué problemas surgieron en el desarrollo de la clase?

Figura 5: *Guía de observación de clase para consecución de OE4.*

En el caso de Marcelo, la guía de observación se aplicó al vídeo de una de sus clases, lo que presenta algunas limitaciones, como pueden ser no observar las expresiones faciales y accionar de los estudiantes.

Con la información recogida en las entrevistas y en la clase observada se procedió, en primer lugar, a hacer un análisis individual de cada uno de los profesores, tratando de identificar sus concepciones y creencias sobre la naturaleza de los Métodos Numéricos, su enseñanza y aprendizaje y el uso del software especializado; así como la coherencia de estas creencias con el accionar del docente en el aula.

Posteriormente, se realizó un análisis comparativo global para tener una visión general de las concepciones y creencias de los profesores, destacando las más relevantes asumidas por la mayoría de ellos. Para ello, se procedió a la determinación de categorías emergentes a los datos obtenidos. Algunos ejemplos son: “los métodos numéricos son complejos", "los estudiantes no son capaces de aprenderlo por sí solos", “los métodos numéricos no han cambiado” y “lo más importante es el desarrollo matemático”. Por otro lado, contamos con categorías pre-establecidas para clasificar las creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos (Ernest, 1989), estilos de enseñanza (Contreras, 2009), uso de la tecnología (Area et al., 2011).

Por último, se revisó el syllabus o guía docente de la asignatura de Métodos Numéricos, cuyo formato es propio de cada universidad. En ocasiones son los mismos profesores que imparten la materia los que los han elaborado o han colaborado en la elaboración de los syllabus, y en otras les fue impuesto sin opción de modificarlo. En el primer caso, el syllabus reflejará sus creencias sobre los métodos numéricos, su enseñanza y aprendizaje y el uso del software especializado.

Por el contrario, si el syllabus le fue impuesto, evidenciará la posición de la universidad respecto a la enseñanza y aprendizaje y al uso del software. Por ejemplo, para el caso de las creencias sobre el uso del software, en la guía docente de cada universidad se buscaron alusiones al software en diferentes apartados: objetivos o resultados de aprendizaje, contenidos, metodología, evaluación y bibliografía. Con dicha información se indujo el rol que cada universidad da al uso del software en la asignatura según las categorías de Area et al. (2011), es decir, si el software es un objetivo de aprendizaje, un medio para aprender o un recurso para apoyar y reforzar el aprendizaje. Además, en la práctica el profesor puede seguir en mayor o menor medida las indicaciones recogidas en él; siendo conscientes de que seguirá más aquellas que coincidan con su forma de pensar, o aquellas que considere más importantes para la formación de sus estudiantes.

Finalmente, en caso de discrepancias entre las creencias manifestadas por el profesor y su práctica en el aula, el syllabus nos dará la pauta de si el accionar docente obedece al seguimiento estricto de lo planificado en el mismo.

3.2.3. Técnicas e instrumentos utilizados para alcanzar el objetivo general 2

Las técnicas e instrumentos utilizados para analizar el conocimiento del contenido de Métodos Numéricos de profesores que imparten esta materia en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador (OG2) comenzó con la determinación del grado de conocimiento de conceptos claves de métodos numéricos de los doce profesores (OE4). Para ello, como finalización de la **entrevista** anterior, se les pidió que dijeran lo que le sugieren sobre la enseñanza-aprendizaje del Análisis Numérico las palabras: aproximación, nodo, fórmula, ajuste, nube de puntos, redondeo, overflow, convergencia, peso, malla, cancelación, estabilidad, recurrencia, uso de escalas en los gráficos, números máquina, implementación, paso, condicionamiento, discretización y algoritmo. Posteriormente, con la ayuda de un experto en Métodos Numéricos, se clasificaron las respuestas a cada uno de los conceptos en los tres niveles siguientes:

- *Desconocimiento del tema*, cuando el profesor no responde, confunde con otro concepto o la respuesta no tiene relación con lo preguntado.
- *Algún conocimiento del tema*, si la respuesta dada no permite asegurar que el profesor posee dicho conocimiento, pero se intuye por las afirmaciones usadas que no hay desconocimiento.
- *Conocimiento del tema*, cuando la respuesta es una definición informal pero correcta del concepto o enuncia sus propiedades o características.

Por otro lado, las **observaciones** de aula nos permitieron contrastar si los profesores mostraron dominio del contenido de la clase observada, cometían errores y/o mostraron solvencia al responder a posibles dudas de los estudiantes.

Por último, se procedió a analizar el Conocimiento de los Temas referentes a integración numérica manifestado por un profesor de Métodos Numéricos en sus clases (OE5). Para ello, se comparó la actuación del profesor en las cinco grabaciones de aula que Marcelo puso a disposición de sus estudiantes sobre Integración Numérica, con el análisis descrito sobre este tema en los apartados 1.2 y 2.2.

Finalmente, para contrastar la información proporcionada en las grabaciones y profundizar en el análisis de su Conocimiento de los Temas referentes a la integración numérica, realizamos una segunda entrevista semiestructurada a Marcelo, cuyo guion aparece en la Figura 6.

Como se puede observar, se preguntó por los aspectos más importantes de integración numérica para un estudiante de ingeniería, las razones que le llevan a abordar la materia de esa manera, cómo explica algunos aspectos que no se vieron en las grabaciones y su conocimiento sobre las aplicaciones en el campo de la ingeniería de la integración numérica. Además, pretendía confirmar si los errores observados en las grabaciones se debían a un despiste o a falta de conocimiento, por lo que se le preguntó en la entrevista sobre dicho contenido.

1. ¿Qué considera que es lo más importante que sobre integración numérica se debe explicar a un estudiante de ingeniería?, ¿En qué orden lo explica y por qué?
2. Las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes compuestas, ¿las explica en clase o son propuestas como ejercicios para que las deduzcan los estudiantes?
3. ¿Por qué en las clases observadas no hace un enfoque general, tanto en las fórmulas de Newton-Cotes como de las Gaussianas?
4. ¿Cómo explica a sus estudiantes el cálculo de los nodos y los pesos de las fórmulas gaussianas?
5. En la primera clase de las Gaussianas, en una parte usted dice que tienen orden de exactitud de al menos 2n + 1. ¿Es eso correcto?
6. ¿En lo que corresponde a las Gaussiana, hay necesidad de Gauss Legendre con *n* pequeños para ingenieros?
7. ¿Por qué no considero en sus clases Gauss-Laguerre, ni Gauss-Hermite?
8. ¿Por qué en las clases observadas no les habla de tolerancia?
9. ¿Qué considera que le aporta más a un ingeniero, discusiones teóricas o la implementación computación del método?
10. En los vídeos que he visto, aparece únicamente usted realizando el desarrollo teórico de las fórmulas de varios métodos y del cálculo de su error. ¿Realiza problemas en clase, en que los estudiantes tengan que aplicar el método para aproximar el valor de algunas integrales?
11. Por otro lado, nos ha comentado que le gusta la materia, porque permite aplicar las matemáticas a temas de ingeniera, la materia se presta para resolver problemas del mundo real. ¿Utiliza dichos aspectos para motivar a sus estudiantes al estudio de esa asignatura? ¿Utiliza aplicaciones reales de los métodos numéricos en ingeniería en sus clases?
12. ¿Podría decirme algunas de las aplicaciones más importantes de los métodos de integración numérica en ingeniería?

Figura 6: *Guion de preguntas de entrevista para consecución de OE7.*

SEGUNDA PARTE:
RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4. Concepciones y creencias del profesorado de métodos numéricos en Ecuador

En este capítulo se muestra una descripción del perfil de cada uno de los sujetos de la investigación, sus creencias y la forma de dar clase, organizados según la categoría de la universidad en la que imparten la materia de Métodos Numéricos. Posteriormente se presenta un análisis comparativo de los siguientes aspectos de los profesores: perfil profesional, concepciones y creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos, creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos, creencias sobre el papel del software especializado en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos, y sobre la coherencia entre las creencias manifestadas y la clase observada.

4.1. Análisis individual

4.1.1. Caso de Samuel

El caso que analizaremos corresponde al profesor que llamamos Samuel. Es ingeniero civil y posee un máster en métodos numéricos y un doctorado sobre aplicaciones de los métodos numéricos en ingeniería. Tiene cuarenta y cuatro años, diez años de experiencia como profesor universitario y ocho impartiendo la asignatura de Métodos Numéricos, ubicada en segundo curso de una carrera de ingeniería de una universidad ecuatoriana de categoría A. Imparte esta asignatura por elección propia ya que considera que es una materia cuya enseñanza es agradable.

Además, considera que los ingenieros deben estudiar métodos numéricos porque son una herramienta indispensable para la ingeniería, siendo el puente entre los problemas reales y el entorno matemático en el que se sustentan. En este sentido, espera que la mayoría de sus estudiantes "tengan una cultura general de métodos numéricos, para que cuando tengan que usarlos sean usuarios inteligentes".

Por ello, selecciona los métodos a enseñar teniendo en cuenta que sean básicos y se usen en la realidad, así como que "no impliquen demasiada complejidad conceptual de manera que oculte la idea general de los métodos numéricos". Organiza dichos métodos por problemas (ceros de funciones, resolución de ecuaciones lineales, problemas de autovalores y autovectores, interpolación y ajuste, integración y diferenciación numérica, ecuaciones diferenciales, problemas de valores iniciales y de valores de contorno unidimensionales) y enfatiza la necesidad de que interioricen conceptos como estabilidad y convergencia, indicando que "no es necesario llegar a altos grados de formalización, sino tener la idea clara. […] Si uno da mucho detalle, el estudiante se siente abrumado y no se va a acordar de nada".

En este sentido, afirma que su visión acerca de la finalidad de los métodos numéricos en carreras de ingeniería, y por tanto su enfoque de enseñanza, ha cambiado a lo largo de los años debido a la experiencia acumulada.

> *Cuando empecé a dar clase estaba bastante preocupado del rigor matemático, pero me he ido relajando en las clases. […] Son estudiantes de ingeniería. Lo que ellos necesitan es tener una idea clara del método, y en la práctica, ¿quién se pone a hacer un análisis de estabilidad? […] Lo que uno hace es implementar y ver qué ocurre con la solución.*

En definitiva, que el estudiante domine la implementación con ordenador de los distintos métodos y discuta las soluciones es uno de sus objetivos primordiales. De hecho, afirma que el alumnado adquiere adecuadamente los contenidos y competencias de esta materia a través de la programación e implementación de los algoritmos impartidos, analizando su estabilidad y convergencia.

No obstante, necesita mostrar distintos conceptos, las ideas generales de los métodos y realizar su desarrollo matemático y algunas demostraciones. Para ello, utiliza clases expositivas puesto que considera poco viable que un estudiante de segundo año de universidad pueda construir de forma autónoma el conocimiento.

> *Es bien difícil, con estudiantes que están en segundo año, no intentar dirigir ciertas cosas, sobre todo esto que son conceptos... Uno quizás puede esperar que un niño construya el conocimiento por su parte, porque son cosas intuitivas, por ejemplo, los números naturales. Pero esto son cosas, a veces, contraintuitivas. […] Lo que uno puede hacer es irles marcando hitos sobre cómo se construye y que luego ellos interioricen. No creo que estas cosas puedan ser construidas intuitivamente. Yo ahí soy más amigo de la clase magistral, pero bueno estoy dispuesto a cambiar si alguien me da argumentos razonables en contra de mi opinión.*

También cree que, aunque lo ideal es trabajar con problemas reales, es necesario el uso de toys problems para que el estudiante comprenda de forma más sencilla la materia. Eso sí, hay que indicárselo a los estudiantes y no utilizarlos en exceso.

> *No hay que abusar. A los estudiantes hay que decirles la verdad. Esto son problemas de juguete, pero no os puedo poner el verdadero porque aún necesitan conocer algunas cosas más para poder abordarlo. Pero imagínense si combinan esto con otras cosas que van a aprender, entonces se convierte en una herramienta poderosa.*

Afirma que el detalle de sus explicaciones desciende a medida que avanza la asignatura. “En los primeros métodos llego incluso hasta el algoritmo de pseudocódigo […] pero luego le voy dando más tareas a ellos”. De este modo, tras exponer el desarrollo matemático del método, utiliza las clases prácticas para que los estudiantes implementen el método en grupos, dejando para casa la implementación de aquellos algoritmos que no da tiempo a hacer en clase, utilizando Matlab y Octave. Además, pide a los estudiantes que sinteticen, a modo de manual, la utilidad y los principales aspectos de cada método numérico implementado.

> *En la parte de implementación, a mí me gusta sentarme al lado. Los divido en grupos y me siento al lado a ver como implementan. […]Me siento con cada uno de ellos y voy asegurándome… ¿Por qué ocurre eso? Por ejemplo, cuando hay oscilaciones. A mi sinceramente me parece que ese sí es un instante valioso de interacción con el estudiante.*

En este sentido, estima que ha realizado un buen trabajo enseñando un método numérico concreto cuando el estudiante implementa el método, funciona correctamente y contesta con cierta solvencia las preguntas al respecto. En esta línea, afirma que “un error típico es creer que porque ya ha codificado el método ya está. Sin hacer pruebas.” Él les indica que siempre tienen que probar con un ejemplo que se pueda hacer a mano para comprobar e ir subiendo el nivel de complejidad de los ejemplos. Y que, de este modo, analizan sus errores y mejoran a medida que avanza el curso.

En cuanto a los estudiantes, afirma que considera que los buenos estudiantes son aquellos que les gustan las matemáticas y buscan las estrategias adecuadas para abordar y resolver problemas. Para ello, afirma utilizar anécdotas matemáticas para motivar a los estudiantes. Además, enfatiza muchísimo el carácter práctico de los métodos numéricos y en la experimentación con el software que usa, de modo que las actividades realizadas hagan que el estudiante reflexione sobre la realidad matemática que hay detrás de los resultados numéricos obtenidos. Por ejemplo:

> *Ahora ya no hago el análisis de estabilidad. Uno puede ver cómo se propagan los errores, pero veía que aquello no causaba impacto en los estudiantes. Les causa más impacto el correr el método y ver que salen oscilaciones y ver que explota. Me parece mucho más impactante, que se va a quedar en la memoria, que hacer el análisis de estabilidad.*

Por último, considera que la enseñanza teórica de los métodos numéricos ha cambiado poco: se realizan clases magistrales para explicar los contenidos teóricos y se programan los métodos en el ordenador. Para él, lo único que ha cambiado es que las herramientas informáticas han mejorado. De hecho, cree que las clases prácticas deberían replantearse debido a la irrupción de Internet y con el objetivo de atender a las necesidades reales de un ingeniero, aunque no sabe muy bien cómo hacerlo.

> *Creo que deberían de cambiarse para adaptarse a una realidad. Cuando yo era estudiante, si quería hacer un método tenía que programarlo yo mismo. Ahora lo que se hace es bajarse un programa que está en la red, mucho mejor programado, optimizado, y no ponerme a programar yo mismo. […]Por eso estas actividades de escritura de entradas de manual, tienen la intención de adquirir ese conocimiento sintético que es el que uno usa para elegir herramientas. […] Pero no hemos asimilado bien cómo adaptarnos a esta nueva realidad.*

Estas creencias que manifiesta sobre la importancia del conocimiento conceptual y la implementación de algoritmos se reflejan en la evaluación de la asignatura, por lo que cada uno de estos aspectos supone un 50% de la calificación de la asignatura.

La clase observada fue de índole teórico, haciendo la explicación magistral de los conceptos con el correspondiente desarrollo matemático del método numérico y la aplicación de reglas y procedimientos en toys problems. Tal y como dijo en la entrevista, contó con escasa participación de los estudiantes que tuvieron un rol receptivo, a los que trató de motivar a través de anécdotas matemáticas.

En resumen, sus creencias han evolucionado: considera la matemática como una ciencia deductiva y en sus inicios estaba muy preocupado por el rigor matemático, preocupado por explicar todo con detalle (visión platónica). Sin embargo, esta necesidad de rigor matemático ha disminuido, enfocando ahora la asignatura con un punto de vista más práctico. Es decir, el principal objetivo debe ser resolver problemas reales de un ingeniero. Dicho de otra forma, ha evolucionado a la visión de "resolución de problemas", puesto que no ve la matemática como una ciencia memorística, sino que piensa que todo está interrelacionado y que el método deductivo es una herramienta fundamental (Ernest, 1989).

Por otro lado, vemos cómo sus decisiones sobre cómo debe dar clase se ven influenciadas por sus creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos y las capacidades de los estudiantes para construir el conocimiento. Por ejemplo, habla de que las ideas propuestas en los métodos numéricos no son intuitivas y por ello sus estudiantes no pueden construir dichos conceptos de manera autónoma. Esto le lleva a pensar que debe ir dando indicaciones y exponerles dichas ideas por medio de la clase magistral. Además, aunque cree en la relevancia de abordar problemas reales en ingeniería, sin embargo, afirma usar más a menudo *toy problems* porque los estudiantes no tienen conocimiento necesario para abordar problemas de mayor complejidad.

Por último, tiene la creencia de que para comprender adecuadamente un método numérico es necesario saber implementarlo correctamente y de esta forma su aprendizaje sea más duradero. Considera que se debe dedicar el tiempo necesario a tareas de implementación y discusión de los resultados en grupo, ya que aportan un valor esencial a la formación que adquieren y, por tanto, se debe reflejar en el proceso de evaluación. Es decir, ve el uso del software y la programación como medio para aprender métodos numéricos y un objetivo de aprendizaje de esta asignatura.

En definitiva, su estilo de enseñanza es acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista en la impartición de los conceptos teóricos, pero mostrando un sesgo investigativo y tecnológico cuando se trata de las clases prácticas y de implementación de algoritmos (Contreras, 2009).

4.1.2. Caso de Rolando

Rolando, de sesenta y seis años, es el mayor de los profesores participantes en el estudio. Es ingeniero mecánico, con un máster en Ciencias y treinta y ocho años como profesor de métodos numéricos. Está jubilado, pero trabaja como profesor invitado de la asignatura de Métodos Numéricos en las carreras de ingeniería de una universidad ecuatoriana de categoría A.

Imparte esta asignatura por elección propia, ya que le gusta desde que era estudiante y considera que los ingenieros deben estudiarla para resolver problemas de su vida profesional que no tienen solución por métodos exactos. En este sentido, uno de sus principales objetivos es que el estudiante aplique los métodos numéricos para resolver problemas, por lo que al final del curso los estudiantes deben presentar un proyecto final que consiste en resolver un problema real que previamente ha debido modelizar.

En su opinión, el aprendizaje viene dado por el interés que despierta la utilidad de lo explicado, por lo que intenta motivar a través de las aplicaciones para que “el estudiante comprenda la utilidad de lo que está aprendiendo”.

Yo creo que el aprendizaje más viene por el interés. Si se le ve que ese método tiene aplicación, ahí le va dar más interés. O sea, planteando el problema de aplicación y que vean que los métodos numéricos le sirven para resolver esos problemas. Ahí creo que está la clave del éxito del estudiante. […] Porque si a un estudiante se le dice "Resuelva esta ecuación", no le va a dar lo mismo que si le dice "Formule una ecuación para este problemita y luego aplique el método numérico". Entonces, ahí lo va a ver más interesante. Que vean que los métodos numéricos sirven para resolver problemas prácticos reales. El alumno debe crear primero el modelo matemático y luego saber qué método numérico aplicar para resolverlo.

Además, afirma que gracias al software especializado como Python y Matlab, ya no es necesario enseñar muchos métodos numéricos, sino solamente aquellos más significativos. Por ello, de las temáticas que constan en la guía docente de la asignatura (teoría de errores, raíces de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales, interpolación, diferenciación e integración numérica, y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales), selecciona y presenta los métodos numéricos a sus estudiantes de acuerdo a su complejidad, partiendo de lo más simple a lo más complejo.

En todos los temas yo comienzo con el método más sencillito y luego decirle cual es el método más preciso. El método más sencillito nos da una respuesta, pero no muy exacta. Entonces, se les dice que hay métodos más precisos, pero que requieren un poquito más de conocimiento, un poquito más de complicación. Pero que, finalmente puesto en el computador sigue siendo un concepto simple. Por ejemplo, en el caso de la integración, se comienza con la regla del trapecio, la regla de Simpson, la cuadratura de Gauss. Igualmente, en diferenciación numérica, dependiendo de la cantidad de puntos que incorpora en la fórmula.

Para enseñar Métodos Numéricos considera necesario exponer el desarrollo matemático del método numérico para que "no sea una cajita no más que diga: "esta es la fórmula para resolver el problema"; sino, que sepa de dónde sale esa fórmula". Además, para facilitar su comprensión, propone *toy problems* para aplicar cada método.

En su opinión, los métodos numéricos a enseñar han cambiado poco, lo que hace que no necesite preparar las clases teóricas dada su experiencia como docente de esta asignatura.

Para dar la teoría en el aula prácticamente no preparo porque con tantos años

> *dando la materia ya sé la teoría, y la parte matemática del análisis numérico casi no ha cambiado. Por eso tenemos nombres como Newton, Gauss, que siguen vigentes después de tantos siglos [...] En la parte de la teoría en las clases presenciales, expongo en la pizarra y también proyecto partes de mi libro y complemento desarrollando la parte matemática en la pizarra porque en los libros no está todo.*

Para él, el cambio más significativo de la enseñanza de los métodos numéricos se debe al software informático, que juega un papel fundamental para poder resolver problemas reales.

> *Juegan un papel fundamental sino los métodos numéricos se quedan solamente como conocimientos formativos. Al utilizar la computación se convierte en un conocimiento aplicativo. [...] a la resolución de problemas reales.*

Por ello, dedica dos horas semanales en el laboratorio de computación, donde, en lugar de utilizar *toy problems*, propone problemas más elaborados para que vean su potencialidad.

> *Por ejemplo, sistema de ecuaciones lineales, en clases usan problemas de tres por tres digamos, para ver cómo se llega a la solución. Pero en el laboratorio, por ejemplo, yo les hago generar aleatoriamente matrices de cientos de ecuaciones, de miles de ecuaciones. Y vean que el computador la resuelve en un instante.*

En este sentido, considera de suma importancia que los estudiantes sean capaces de utilizar el ordenador y software para resolverlos. Para él lo importante no es programar el método, sino identificar en un problema dado el modelo matemático y el método a utilizar. De hecho, prepara el código de los métodos numéricos para entregárselos a los estudiantes en las clases prácticas, donde trabajan de manera individual y en grupo para resolver problemas.

> *El ingeniero no puede perder tiempo resolviendo a mano, debe saber usar métodos computacionales. Básicamente el uso, no tanto programar, porque ahora la parte computacional ya traen incorporado. Por ejemplo, el mismo Matlab o Python, ya traen bibliotecas con métodos numéricos. […] En la parte computacional yo les entregó a los estudiantes los métodos numéricos ya desarrollados computacionalmente, para que en el laboratorio ellos los usen y apliquen para resolver problemas.*

La importancia del uso de algoritmos para resolver problemas se ve reflejada en la evaluación, dedicándole el 25% de la calificación. Sin embargo, muestra su descontento con el hecho de tener que realizar los exámenes sin ordenador, por la necesidad de realizar un examen común para todos los grupos y que sus compañeros de trabajo no compartan su opinión.

> *Lamentablemente, como hay colegas que solamente lo dan como conocimiento formativo y los exámenes tienen que ser los mismos para todos los paralelos, entonces en ellos solamente se pone a resolver problemas pequeñitos. Yo compenso eso dándole peso a la parte computacional en las lecciones. En las lecciones la parte computacional tiene un peso de un 25%. Se evalúa el uso de algoritmos ya hechos, que les doy o que los encuentran en Internet. Se evalúa que sea capaz de usar, no de implementar.*

Además de los exámenes, al final de las clases suele realizar preguntas a sus estudiantes para comprobar si comprendieron la materia. Adicionalmente, al término de cada capítulo dedica una sesión, de carácter teórico, que tienen como objetivo que los estudiantes “demuestren que sí conocen los fundamentos de los métodos numéricos”. La parte computacional la evalúa mediante lecciones prácticas en el ordenador, haciendo énfasis en la precisión de la respuesta.

> *Cada clase lo que si le hago algunas preguntas pendientes. Pero al final de cada capítulo yo les tomo una lección. Parte de la lección puede ser los conocimientos matemáticos, puede ser la parte computacional, donde aplican los métodos numéricos. [...] Pero lo que yo siempre hago énfasis en que no es suficiente la respuesta, son los métodos numéricos que tiene que dar la respuesta y además hacer una estimación de la precisión de la respuesta. Es el otro componente fundamental [...] Eso es lo que en sí les digo a los estudiantes, que alguna vez alguien le va a preguntar la respuesta para un problema, y él le va a dar la respuesta, pero esa persona también le puede decir “¿Cuán preciso es?”. Tiene que decir algo.*

Por todo ello, considera que ha hecho un buen trabajo enseñando métodos numéricos cuando sus estudiantes han podido poner en práctica lo aprendido.

> *Algunos estudiantes aplican métodos numéricos para resolver, a veces sus proyectitos. Inclusive algunas veces sus trabajos de graduación. De vez en cuando me encuentro con los estudiantes, y a veces si recuerdan los métodos numéricos.*

Para él, los buenos estudiantes son aquellos que, además de cumplir con sus obligaciones académicas, disfrutan de la materia.

Acorde con lo manifestado en la entrevista, la clase observada contó con una parte teórica, en la que expuso el desarrollo matemático del método numérico y realizó ejercicios de aplicación tipo *toy problems,* y de una parte práctica, en la que los estudiantes descargaron de la página web de la asignatura los métodos ya codificados en Python por el docente para resolver las tareas propuestas por el profesor. Sin embargo, en esta parte, replicaron en sus ordenadores el proceso de resolución seguido por el profesor, asumiendo un papel receptivo y de reproductor de procesos. Además, no realizó motivación ni evaluación alguna.

Como vemos, este profesor presenta creencias mixtas sobre la naturaleza de los métodos numéricos. Por un lado, da una visión estática de la matemática, cuando afirma que los métodos numéricos no han cambiado durante los más de treinta años que lleva dando clase, lo que muestra una visión platónica de los métodos numéricos, según la clasificación de Ernest (1989), y le lleva a considerar que no necesita preparar sus clases teóricas. Por otro lado, afirma que el principal objetivo de la asignatura es que los estudiantes sean capaces de aplicar los métodos numéricos a la resolución de problemas de ingeniería, manifestando una visión instrumentalista de las matemáticas. Además, concibe al software especializado como una herramienta que ahorra gran cantidad de tiempo en la realización de cálculos, por lo que el profesor pide a los estudiantes que utilicen algoritmos ya codificados para resolver problemas. Además, utiliza *toy problems* porque los considera adecuados para explicar la aplicación del método antes de pasar a resolver problemas más complejos con el ordenador, acorde con su creencia de que es necesario enseñar empezando por lo más sencillo.

Por otro lado, afirma que en ocasiones su práctica docente se ve muy condicionada por el contexto en el que se encuentra. En este caso, la necesidad de realizar un examen común le lleva a utilizar un modo de evaluar no del todo acorde con sus creencias sobre la finalidad de los métodos numéricos. Aunque, la clase observada fue coherente con las creencias manifestadas.

Por último, el uso de la clase magistral, la proyección de su texto guía como único material bibliográfico de apoyo, asumir el rol de transmisor de conocimiento y asignar al estudiante el de receptor y reproductor de procesos, y concebir a la prueba escrita como el medio para que los estudiantes “demuestren que sí conocen los fundamentos de los métodos numéricos”, indican un estilo de enseñanza de tipo tradicionalista (Contreras, 2009). Sin embargo, el hecho de dar importancia tanto a los métodos como a los procesos lógicos que los sustentan, inducir al estudiante a reproducir procesos computacionales y buscar impregnarle un carácter práctico a la asignatura, evidencian también un estilo de enseñanza de tipo tecnológico (Contreras, 2009).

4.1.3. Caso de Alan

A continuación, analizaremos el caso de Alan, compañero de Rolando, de cincuenta y seis años. Es ingeniero eléctrico, con un máster en investigación matemática y en sistemas de información gerencial y treinta años de experiencia como profesor de Métodos Numéricos en ingeniería. Escogió dar la asignatura, ganando el correspondiente concurso de méritos, porque siempre le ha agradado.

> *Yo fui ayudante de cátedra de Análisis Numérico cuando fui estudiante. Y ahí me gustó mucho enseñar esta materia por lo que luego escogí quedarme como profesor de la misma.*

Además, piensa que la razón por la cual los ingenieros deben estudiar métodos numéricos es porque son “el puente entre las matemáticas y la computación”.

> *Yo siempre he dicho a los estudiantes que Análisis Numérico es la herramienta básica del ingeniero. […] Lo que los ingenieros hacen ahora, utilizando dispositivos y sensores, es tomar datos como velocidades y distancias. Con esos datos, construyen un modelo matemático que implica derivadas e integrales. […] Un ingeniero tiene un problema, él sabe que necesita conseguir los datos y con esos datos construye los modelos. […] se viene preparando desde hace mucho tiempo atrás con las matemáticas básicas y construyendo modelos lineales, modelos cuadráticos, que es lo que puede hacer hasta ese momento; pero después se da cuenta que tranquilamente puede construir modelos con mayor precisión.*

Al igual que para Rolando, afirma no tener que preparar las clases porque los contenidos a enseñar no han sufrido cambios y tiene muchos años de experiencia docente. No obstante, nos indica que los métodos numéricos que enseñan son aquellos que aparecen en la guía docente de la asignatura. Además, los profesores se coordinan y plasman su experiencia en un programa analítico que sirve de guía para cualquier profesor nuevo, aunque, en la práctica, cada uno elige cómo enseñar los temas. Por ejemplo, él considera muy importante la interpolación y el polinomio de Newton por su practicidad.

> *Hay una coordinación, nos ponemos de acuerdo y decimos este tema lo vamos a tratar ahora, lo vamos a tratar después o, simplemente, no lo tratamos y se lo enviamos al estudiante como investigación bibliográfica. [...] Se determinan en general las temáticas a tratar, pero de ahí cada profesor decide la forma de abordarlas. [...] Tenemos un syllabus, que nos dice justamente cuáles son los temas que tenemos que tratar en ambos parciales. Las clases de esos temas ya las tenemos preparadas de antemano. Además, con la experiencia que tenemos, esas clases ya las sabemos de memoria. Lo único que hemos hecho es plasmarlas en un documento llamado programa analítico, en el que se detalla los tiempos y objetivos específicos para cada tema, así como las actividades que vamos a implantar dentro y fuera del curso; para que sirva de guía para que imparta sus clases cualquier profesor nuevo que venga.*

Por lo general, Alan inicia sus clases planteando el tema y objetivo enfocado de acuerdo a los tres tipos de conocimiento que concibe:

> *Hay tres tipos de conocimiento, primero el saber conocer, o sea, conocer las fórmulas, conocer las temáticas; saber hacer, que él sea capaz de calcular lo que se le pide con esas fórmulas: y luego, la tercera que ya es más difícil, pero que poco a poco tendremos que ir abarcando, que es el saber ser, es decir que utilice este conocimiento para resolver un problema ya práctico de la vida real.*

Para el “saber conocer” considera necesario que los estudiantes consulten la teoría de los métodos numéricos antes de la clase, de forma que estos conocimientos previos le permiten profundizar un poco más en las explicaciones teóricas.

> *La teoría de antemano la envío a consultar a los estudiantes para que la traigan desarrollada a mano. De tal forma que, cuando vaya a tratar esa teoría los estudiantes ya tengan algún conocimiento al respecto y puedan plantear sus dudas. Inclusive les hago que hagan preguntas de alto nivel relacionado con la temática y que las respondan.*

Además, realiza en clase la deducción de ciertas fórmulas y envía como trabajo a casa el desarrollo de otras, aunque acaba explicándolas porque no son realizadas correctamente por los estudiantes.

> *Unas las deduzco en clase y otras les envió para que ellos las deduzcan, pero no todos las hacen. El asunto es que uno termina haciéndola porque algunos no la hacen y se quedan ahí con vacíos. Yo no quiero que se queden con vacíos, todavía nos falta mucho para que el estudiante se dedique por su cuenta a hacer las cosas*

> *que le dice que haga el profesor. Posiblemente, se siente incompetente todavía como para hacerlo.*

Debido a esta creencia, siempre le queda la duda de si el estudiante ha comprendido y considera necesario realizar actividades de refuerzo al final de la clase y enviar tareas a casa, con miras a una evaluación en la siguiente clase.

Para enseñar la aplicación del método, o sea, para el “saber hacer”, utiliza ejercicios tipo *toy problems*, enfatizando la importancia de la aplicación del método y el análisis de convergencia, de ahí que estos aspectos sean considerados en la evaluación de tareas propuestas y exámenes.

> *Entonces, no es simplemente calcule la integral, o utilice el método tal para encontrar esto. Sino que se le pide que verifique la existencia o que verifique que el método converge, o sea, no solamente que aplique el método, sino que verifique que el método es bueno.*

Además, afirma que el estudiante aprende métodos numéricos a través del cálculo manual, considerando el uso del ordenador y del software como una herramienta poco útil para el aprendizaje.

> *El software es útil para la aplicación, pero para el aprendizaje no. Tiene que hacerlo a mano, sino el estudiante siente que no está aprendiendo. Me ha ocurrido los estudiantes me piden “No, vamos al aula no más”. Porque el computador es el que hace todo, aunque se le dé todas las instrucciones. En cambio, el estudiante para aprender tiene que ir a hacer a mano, calcular así paso a paso, cada uno de los datos y valores que tiene que hacer.*

Por ello, aunque realiza talleres con el ordenador en grupo en los que utiliza programas copiados del libro guía para resolver problemas de ingeniería con Matlab, no los considera en las evaluaciones. En sus palabras:

> *Es como quien dice un trabajo regalado, prácticamente lo que hay que hacer es asistir. ¿Por qué? Porque es un trabajo en grupo, si a usted no le sale el otro le ayuda.*

Por último, para abordar la aplicación de los métodos numéricos a problemas reales, que este profesor denominó, “saber ser”, propone a sus estudiantes un proyecto de fin de curso que consiste en resolver utilizando métodos numéricos un problema de aplicación a la ingeniería, creado por él mismo o tomado del texto guía.

En este sentido, considera que el hecho de presentar problemas reales de ingeniería obliga al estudiante a razonar más, siendo este, en su opinión, el cambio más significativo que ha experimentado la enseñanza del Análisis Numérico en los últimos tiempos.

Cuando yo tomé análisis numérico, eran más concretos los métodos. [...] Ahora es más o menos así, pero hay más aplicaciones; o sea, el problema comienza con un caso, entonces donde tú tienes que identificar cuál es la situación que tienes que plantear y construir el modelo para poder responder las preguntas planteadas. Me parece que anteriormente era más directo, ahora hay que hacerlo razonar más al estudiante, y eso es lo que no quieren muchos. No es por nada, pero algunos no saben ni interpretar lo que dice el problema.

Como se desprende del párrafo anterior, para el profesor la capacidad de algunos de sus estudiantes es muy limitada. En este sentido, afirma que, dado que el análisis numérico es una continuación del Cálculo y el Álgebra Lineal, los buenos estudiantes en ambas materias coinciden. Por otro lado, motiva a los estudiantes presentando vídeos cortos que muestran la funcionalidad de los métodos numéricos en ingeniería.

La clase observada fue teórico-práctica, y en general se desarrolló acorde a lo manifestado en la entrevista. Resaltó la utilidad del tema para resolver problemas de la ingeniería, realizó el desarrollo matemático del método numérico apoyándose en diapositivas, planteó ejercicios de aplicación tipo *toys problems* que fueron resueltos por los estudiantes en pizarra, y posteriormente implementados en Matlab. Además, envió tarea de refuerzo a casa y los estudiantes, que habían realizado una lectura previa de la temática a tratar, se mostraron motivados, aunque se limitaron a reproducir procesos presentados por el profesor.

En resumen, su principal objetivo es que el estudiante pueda resolver problemas empleando los métodos numéricos, pero dominando primeramente los procesos manuales de aplicación de las fórmulas utilizadas en dichos métodos. Además, muestra las demostraciones y el desarrollo de los métodos numéricos, que, en su opinión, han cambiado poco en los últimos treinta años. Esto muestra una visión instrumentalista y platónica de la naturaleza de los métodos numéricos (Ernest, 1989).

Acorde con su visión instrumentalista, dedica gran cantidad de tiempo a la repetición de ejercicios y resolución de *toy problems*, no dando paso a la aplicación computacional mientras el estudiante no domine el cálculo manual. Este hecho se debe en gran parte a su creencia de que los métodos numéricos se aprenden practicando y resolviendo tareas a mano. Lo que evidencia que su práctica docente es coherente con sus creencias.

Por otro lado, no considera que el software especializado sea útil para el aprendizaje, sino como una herramienta para agilizar cálculos, por lo que lo utiliza únicamente para mostrar cómo funciona y haciendo uso de codificaciones ya elaboradas.

Para concluir, el hecho de seguir una programación debidamente estructurada pero cerrada; apoyarse en estrategias expositivas usando medios tecnológicos; considerar necesario evaluar lo aprendido en cada clase a través de una prueba escrita; dar a la asignatura un carácter informativo y práctico al buscar que los estudiantes aprendan los diferentes métodos numéricos y sus fundamentos matemáticos, y que reproduzcan algoritmos computacionales con miras a la solución de problemas de ingeniería; manifiestan un estilo de enseñanza de tipo tecnológico (Contreras, 2009).

4.1.4. Caso de Marcelo

El caso que presentamos a continuación es el de Marcelo, cuya experiencia como profesor de Métodos Numéricos en la institución de Rolando y Alan es de cinco años en el momento de la entrevista, aunque llevaba quince años trabajando en la universidad. Marcelo tiene cuarenta y un años, es ingeniero en computación y tiene un máster en investigación matemática, sistemas de información gerencial y administración de empresas. Escogió dar la asignatura porque le agrada y considera que los ingenieros deben estudiarla para dar respuestas a problemas del mundo real.

> *Es una materia que permite aplicar matemáticas en problemas de ingeniería, o sea, la materia se presta para resolver problemas del mundo real, por eso es muy bonita. […] En el mundo real los problemas no tienen solución exacta y hay que aproximarla.*

A diferencia de sus compañeros, que afirmaron tomar decisiones sobre los métodos numéricos a enseñar y/o haberse coordinado con otros profesores para tomar dicha decisión, Marcelo se siente limitado por las indicaciones de la guía docente. No obstante, reconoce que está diseñada de acuerdo a lo que utilizan las mejores universidades de otros países como Estados Unidos, Chile, Brasil, Argentina y México. “Lo que pasa es que acá, en ese sentido hay poca libertad para el profesor porque hay un syllabus que hay que seguir, que hay que respetar”.

Otra diferencia con sus compañeros, es que considera necesario prepararse adecuadamente para enseñar esta asignatura.

> *No me gusta normalmente cuando doy clases apoyarme en apuntes. No digo que sea malo el hacerlo, pero a mí no me gusta en lo personal. Prefiero ir bien preparado, o sea me preparo como que voy a dar un examen. Sí, en las definiciones, en el enunciado de un teorema, en las demostraciones, y, además incluso en los mismos problemas que pongo, en los mismos ejercicios, en ese momento los creo mientras estoy dando la clase.*

Este énfasis en la preparación de los referentes teóricos se justifica en el hecho de que el 90% de la clase la dedica a la exposición de la teoría matemática del método numérico, apoyándose en ejemplos e ilustraciones.

> *Tiendo a ilustrar con ejemplos porque si lo dejo en la definición y paso a otra definición, a otro teorema… Normalmente la definición es muy formal y el estudiante puede perderse. Entonces, trato de aterrizar rápidamente con ejemplos, con ilustraciones, con números, para que ellos vean, para que ellos comprendan esa definición. Lo mismo hago con los teoremas: lo enuncio, una vez que lo enuncio, igual lo explico, y que identifiquen bien las hipótesis, las conclusiones, la demostración. Intento paso a paso justificar bien el proceso en sí de la demostración y rápidamente aterrizar con ejemplos, con ilustraciones que es como me gusta. O sea, me gusta que el estudiante se sienta cómodo. Normalmente en una clase de matemáticas los profesores van a veces muy rápido y se despreocupan del estudiante en ese sentido.*

De esta forma trata de crear un clima de confianza en el aula en el que los estudiantes se sientan cómodos para preguntar sus dudas, lo que le da una idea de si los estudiantes han comprendido o no.

> *Trato de generar un ambiente de confianza en clase, para que los estudiantes puedan, con toda la libertad y con confianza, hacerme consultas, preguntas. Entonces cuando termina un tema, yo pregunto si tienen alguna inquietud. Muchos estudiantes me preguntan alguna cuestión, alguna otra cuestión y yo les respondo; y en base a eso… me da una idea de que el estudiante está comprendiendo.*

Su énfasis por la comprensión de los métodos numéricos le lleva a exponer su desarrollo matemático en clase, de manera exhaustiva, ya que lo considera necesario para que “el estudiante no llegue a memorizar, sino que comprenda el procedimiento para la obtención de una formula en particular”. De hecho, utiliza las demostraciones para motivar al estudiante, haciéndole ver que la materia no es complicada.

> *Yo intento todo, todo, desarrollarlo en clase. Me gusta, lo disfruto, por un lado, y por otro lado me gusta que el estudiante vea que llegar a las expresiones finales no es complicado, que es cuestión de que estudien.*

Su principal objetivo es que el estudiante comprenda y domine la teoría, para lo que resulta conveniente utilizar toys problems y discutir la convergencia del método al resolver problemas.

> *Me sirvo de problemas juguetes para que ellos vean efectivamente como conforme uno integra, por ejemplo, se gana convergencia o sea el error se va para cero. […] Se termina acostumbrando porque les hago ver lo importante que es esa discusión teórica cuando resuelve problemas.*

Por ello, considera que la evaluación no debe centrarse solo en la resolución de problemas, sino en la discusión de conceptos matemáticos relevantes en el análisis numérico como son el error o la convergencia.

> *Para mí, no debe ser solo resolución de problemas. Eso es un error, para mi hay que evaluar teoría, discusión de convergencia y discusión de error que hay detrás de los métodos, para mí eso es muy importante. Que el estudiante pueda acotar el error, por ejemplo, que pueda discutir si tal método converge al resolver un problema en particular.*

Por otro lado, afirma que el uso de los ordenadores y el software es importante para el aprendizaje de los métodos numéricos y que, el desarrollo computacional es el cambio más significativo que ha experimentado la enseñanza de los métodos numéricos en los últimos tiempos porque le permite al estudiante llevarlos a la práctica.

> *Primero que el estudiante comprenda el método numérico, y no hay otra forma sino llevándolo a la práctica, desarrollándolo, es decir, programándolo. Y, por otro lado, no descuidando la teoría matemática atrás del método, es decir el estudio de la convergencia, el análisis de la convergencia, y lo que es el análisis del error. Sí, eso es importante, lo que a veces el estudiante no comprende, cree que solamente es el método y no se da cuenta como la discusión de la convergencia y del error es básica.*

Sin embargo, solamente el 10% de la clase lo dedica a la programación del método numérico, utilizando C. Sharp y Visual Studio.net como entorno de desarrollo.

> *Siempre les recomiendo que programe el método en casa […] Hay profesores que les gusta tener clases de análisis numérico en el laboratorio, y obviamente*

como es en el laboratorio, el profesor lo que hace es que, resuelve un problema en clase. Él se sienta y empieza a programar, y los chicos empiezan a programar junto con el profesor. Yo no hago eso porque considero que se pierde mucho tiempo, entonces prefiero dedicarle ese tiempo a la discusión teórica. No es que descuide la práctica, pero tiendo a llevar los programas ya desarrollados a clase, y en vez de dedicarme 45 minutos o 1 hora en resolver un problema, dedico 10. Explico a los estudiantes rápidamente el código. Son programas hechos por mí. Pero previamente los tengo ya desarrollados y los llevo a clase. Prefiero emplear mejor el tiempo en discusiones teóricas. Yo creo que el estudiante debe tener un buen conocimiento teórico antes de pensar en resolver problemas.

Además, la implementación computacional de los métodos numéricos no está contemplada dentro de las evaluaciones, sino que se considera en un proyecto de fin de curso, que consiste en la resolución de un problema donde el estudiante utilice alguno de los métodos discutidos en clase.

En su opinión, estima que realiza un buen trabajo enseñando métodos numéricos porque en la época de registro los estudiantes se “pelean por un cupo” en su clase y en las evaluaciones que le hacen al final del curso, por lo general, le “califican bien” y le ponen “bonitos comentarios”.

La clase observada fue completamente teórica, de tipo expositiva, dedicada al desarrollo matemático de los métodos numéricos y del error. Todas estas deducciones fueron escritas por el profesor en la pizarra para que los estudiantes tomaran apuntes, asumiendo éstos un papel receptivo.

En definitiva, Marcelo da mucha importancia al rigor matemático, preocupado por explicar al detalle la demostración de teoremas y desarrollo matemático de los métodos numéricos; lo que sugiere que posee una visión platónica de los métodos numéricos (Ernest, 1989). No obstante, los ve como una herramienta para resolver problemas de la ingeniería, lo cual le da un tinte también instrumentalista. Además, el carácter eminentemente magistral de las clases, el papel del profesor como especialista y transmisor de contenidos y el papel receptivo de los estudiantes que se dedicaron a tomar apuntes, muestran un estilo de enseñanza acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista (Contreras, 2009).

En general, la práctica docente del profesor está acorde con las creencias manifestadas; no así, en el caso de la programación de métodos numéricos y su aplicación a la resolución de problemas, donde aparecen contradicciones. Por un lado, afirma que el estudiante comprende programando el método, por lo que sería visto como un medio para el aprendizaje. Por otro, apenas le dedica tiempo en clase, muestra únicamente el código propuesto y no lo considera en las evaluaciones, lo que sugiere que concibe el software especializado solo como una herramienta de cálculo. No obstante, esta contradicción podría explicarse porque considere que los estudiantes tienen capacidad suficiente para programar los métodos de forma autónoma, mientras que necesitan que el profesor les explique con detalle los conceptos y demostraciones; y, además, que la comprensión de la teoría es un requisito para poder programar los métodos y resolver problemas.

4.1.5. Caso de Orlando

Orlando tiene cincuenta y cinco años y cuenta con una licenciatura en educación, un máster en educación superior y otro en enseñanza de la matemática. Ha trabajado durante treinta años como profesor en educación secundaria y universidad, aunque comenzó a impartir la asignatura de Métodos Numéricos hace seis años, en carreras de ingeniería en una universidad ecuatoriana de categoría A. Escogió dar esta asignatura porque dice "sentirse bien" impartiéndola, aunque también admite que "no es una materia muy fácil de enseñar".

Según Orlando, los ingenieros deben estudiar métodos numéricos porque son necesarios para su ejercicio profesional.

> *Ellos van a realizar muchos proyectos en los cuales harán simulación y modelamiento, y métodos numéricos será el recurso indispensable precisamente para aquello.*

Por eso, afirma que al estudiante se le debe impartir todas las temáticas que constan en la guía docente de la asignatura como errores, raíces de ecuaciones, sistemas lineales y ajustes de curvas, derivación e integración numérica y ecuaciones diferenciales ordinarias; y que han sido escogidas de acuerdo a lo dictado en la mayoría de las universidades.

Con respecto a las clases, considera conveniente previamente estudiar bien la teoría y preparar los problemas a ser desarrollados por los estudiantes. Inicia sus clases haciendo un diagnóstico de los conocimientos previos de los estudiantes, dado que se han detectado carencias en conocimientos referentes al álgebra y al cálculo diferencial e integral. Luego, las desarrolla de manera tradicional, según lo descrito en sus propias palabras.

> *Yo normalmente sigo el proceso pedagógico clásico, como es el recordar o diagnosticar si los estudiantes cuentan con los prerrequisitos que necesito para poder desarrollar lo planificado. Luego, desarrollo la teoría mediante una clase participativa, resuelvo un problema modelo e inmediatamente se generan talleres con los estudiantes, que me permitan verificar que ha sido asimilado lo enseñado.*

También considera que, dada la “rigurosidad de la materia”, es importante realizar en clase “demostraciones, desarrollar procesos, permitir que el estudiante llegue a conclusiones y haga inferencias lógicas que le permitan luego tener criterio suficiente para poder interpretar la respuesta obtenida”. Además, cree que el estudiante aprende métodos numéricos mediante la ejercitación y el aprendizaje autónomo.

> *Métodos numéricos presupone, como toda la matemática, una habilidad personal que tiene que irse desarrollando en base a la ejercitación. Si no, es imposible aprender matemáticas en ninguno de los campos [...] y obviamente la voluntad propia de esforzarse y de investigar por su cuenta, o sea, necesita un estudio autónomo. Debe el estudiante generar niveles de autonomía, no solo para métodos sino para todo lo que es matemática”.*

Por otro lado, considera que el uso del software es importante para el aprendizaje de los métodos numéricos como un medio para comprobar respuestas, de ahí que dedique sesiones prácticas (1 a 2 horas semanales) a la resolución de problemas por medio de Octave, Scilab y Matlab.

> *El uso del software tiene un papel importantísimo, porque métodos numéricos está a la vanguardia con la tecnología, pues sería un trabajo incompleto sino se contactará con el desarrollo de códigos que permitan comprobar respuestas.*

Estas prácticas son consideradas en las evaluaciones, tanto por la entrega de actividades realizadas como por su presencia en los exámenes, suponiendo entre un 25% y un 50% de la calificación dependiendo de si la actividad es un taller, un examen o una tarea de investigación. En los que se pide encontrar la respuesta e interpretarla, valorando más el proceso que la respuesta.

> *Normalmente en las pruebas y en los exámenes se solicita la construcción de software y también muchas veces se pide correrlo en un problema en donde se debe*

no solo encontrar la respuesta sino saberla analizar e interpretar. […] Es más importante la aplicación de la teoría a la práctica, antes que la parte mecánica o la memorización de fórmulas, que muchas veces son intrascendentes.

Además, cree que un buen estudiante es aquel que "logra aplicar los conocimientos dados en la explicación de fenómenos naturales o aplicaciones a la ingeniería que logren pronosticar resultados confiables". Por ello, el interés que el estudiante pone en realizar estas aplicaciones le da la pauta de que ha hecho un buen trabajo enseñando métodos numéricos. En su opinión, el cambio más significativo en la enseñanza de los métodos numéricos es precisamente "permitir al estudiante establecer aplicaciones de los métodos numéricos en otras áreas, tener un criterio profesional mucho más científico, fiable y sin supuestos o hipótesis de elucubración. Ellos ya tienen la idea de poder comprobar las cosas y decir con seguridad algo". En este sentido, motiva a sus estudiantes haciéndoles reflexionar sobre el hecho de que "los métodos numéricos permiten contrastar resultados" y es una materia importante dentro de su perfil profesional.

En cuanto a la clase observada, se llevó a cabo de acuerdo a lo manifestado en la entrevista. El profesor inició con un repaso de lo visto en clase anterior, luego hizo una exposición de la teoría y desarrolló ejemplos tipo *toy problems* con la participación de los estudiantes, quienes se veían motivados. Además, realizó una tabla de cálculo de los errores de cada uno de los métodos utilizados para comparar resultados. En esta ocasión, no realizó el desarrollo matemático del método numérico manifestando haberlo hecho en la clase anterior; pero, desarrolló un taller para la implementación de códigos en el ordenador, donde los estudiantes reprodujeron los procesos realizados por el profesor.

En conclusión, concibe los métodos numéricos como una herramienta para resolver problemas de ingeniería, que se aprenden por repetición; sugiriendo con ello una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989). El ordenador y el software son vistos como una herramienta para la verificación de resultados, aunque son considerados en las evaluaciones, lo que sugiere que el uso de esta herramienta supone un objetivo aprendizaje. Estas creencias influencian su práctica docente, siendo así que en la clase observada los estudiantes implementaron códigos en el ordenador para verificar los resultados obtenidos manualmente.

Además, el hecho de seguir una programación debidamente estructurada pero cerrada, el carácter informativo y práctico que da a la asignatura valorando su aplicación en otras disciplinas científicas, el uso de estrategias expositivas, su rol de transmisor de contenidos y de procesos lógicos usando medios tecnológicos, los cuales son considerados en las evaluaciones, y el rol reproductivo del estudiante, dejan entrever un estilo de enseñanza más acorde con tendencias didácticas de tipo tecnológica (Contreras, 2009). Lo cual se evidencio en la clase observada.

4.1.6. Caso de Fernando

Fernando es un ingeniero civil de cincuenta y dos años que ha compatibilizado su trabajo de ingeniero con el de docente universitario durante diecinueve años en la misma institución que Orlando. Realizó un máster en enseñanza de la matemática, donde recibió la asignatura de métodos numéricos, que le gustó tanto que decidió enseñarla en su universidad durante los tres años anteriores a la entrevista.

Según Fernando, los ingenieros deben estudiar esta materia porque permiten resolver problemas que no tienen solución analítica.

> *A veces uno se topa en la modelación con ecuaciones diferenciales. Sabemos todos que las ecuaciones diferenciales parciales en un alto porcentaje no tienen solución analítica, especialmente al cambiar las condiciones de frontera, y la que aparentemente tenía solución analítica sólo se puede resolver con los métodos numéricos.*

A diferencia de su compañero Orlando, Fernando opina que el profesor debe abordar lo que, de acuerdo a su experiencia, considere lo más importante de cada uno de los contenidos que constan en la respectiva guía docente.

> *El profesor debe ser hábil para dar, como se dice vulgarmente, la base, lo que el alumno necesita, porque no hay tiempo para hacer un análisis. Uno tiene que ir con las partes importantes, las demostraciones precisas y los ejercicios tipo para que ellos comprendan y correlacionen la teoría con la práctica.*

Además, aborda contenidos que considera necesarios por su experiencia de ingeniero y que no aparecen en la guía docente, por ejemplo, el método de diferencias finitas para la resolución de ecuaciones diferenciales.

> *Yo hice mi tesis [de maestría] en ecuaciones diferenciales parciales. […] Según mi criterio como ingeniero, vi que las diferencias finitas en dominio regulares son muy*

importantes, por lo que además de lo que está en el programa yo trato de darles diferencias finitas. [...] A mi criterio los estudiantes pueden enfrentar mejor las ecuaciones parciales si saben el método de diferencias finitas que no está en el programa. [...] Hay un compañero que también me dijo que cómo así doy, le explique mis razones y sé que él también está dando diferencias finitas.

En su opinión, uno de los cambios más significativos en la enseñanza de los métodos numéricos, la aparición de nuevos métodos iterativos, que deberían incorporarse poco a poco a las guías docentes.

Ahorita hay cantidad de métodos iterativos nuevos. [...]Nuevos aportes que hay no están incorporados todavía en los libros didácticos. Por ejemplo, el método Meshfree para ecuaciones diferenciales, es un método genial, porque lo complicado en los problemas de modelamiento son los mallados. [...] Hay muchos aportes ahorita, que poco a poco habría que ir incorporando a los programas.

Para Fernando, "métodos numéricos se aprende como cualquier otra materia, se aprende haciendo ejercicios y siendo muy hábil para la programación". Por ello, considera conveniente iniciar sus clases recordando lo visto anteriormente, ya que cree que los estudiantes presentan carencias de conocimientos previos. Posteriormente, plantea el tema y objetivo y explica los referentes teóricos, incluido el desarrollo matemático del método numérico que considera muy importante.

A mi criterio el desarrollo matemático es la base fundamental. A veces, no hay tiempo para hacer una buena demostración de teoremas, pero sí que tengan la idea de cómo se obtiene el método numérico. A veces, se despierta el interés y ellos mismos van y buscan en libros de donde mismo se obtienen los métodos. Pero es importantísimo el desarrollo matemático. Desgraciadamente, como en todas las asignaturas, hay docentes que vienen y simplemente plantean "la fórmula es esta" y parten de ahí. Entonces, yo siempre he sido de la idea de que el desarrollo matemático, el explicar de dónde salen las cosas, es la base del conocimiento.

Además, reconoce la importancia que tiene en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos el uso del ordenador y del software, pero considera que éstos deben usarse solamente después que el estudiante ha dominado el cálculo manual.

Esta materia tiene como herramienta fundamental la programación. Yo utilizo Matlab, Scilab o también el Octave, con las tres jugamos en clases. [...] Normalmente en temas como, por ejemplo, sistemas de ecuaciones, ecuaciones no lineales, ajuste de curvas, siempre finalizamos realizando la programación en

> *Matlab en el aula. Luego, lo verificamos, entonces mezclo la teoría con la práctica. Tiene que saber hacer el ejercicio primero a mano, una vez que domina a mano nos metemos a hacer la programación, y la idea es salir en las clases realizando el programa [...] sin los ordenadores no se podría realmente conseguir los objetivos planteados. Por ejemplo, cuando uno resuelve una ecuación diferencial parcial, se generan sistemas de ecuaciones muy grandes. Entonces necesitamos justamente contar con ordenadores que nos permitan aplicar los programas correspondientes.*

Además, dice realizar talleres de ejercicios de aplicación con la participación activa de los estudiantes, que evalúa al final de la clase.

> *En la clase también propicio la participación de los estudiantes [...] En los ejercicios de clase nunca les digo "así hay que hacer" si no, vamos a resolver entre todos. "¿Qué haríamos aquí?" Cada uno va dando su opinión y vamos armando el ejercicio o el programa. Es un proceso interactivo entre los estudiantes y yo.*

Para él, la evaluación debe centrarse en la aplicación de conceptos, con especial atención a que sea capaz de resolverlo manualmente.

> *La evaluación debe centrarse primero en los aspectos conceptuales, pero conceptos aplicados. La idea es que el alumno resuelva primero el ejercicio manualmente, porque sé que hay universidades en el país donde el método numérico se enseña sin programación. […] Creo que ahí estaría el mayor peso, que el alumno resuelva el ejercicio a mano. Si luego logra resolverlo utilizando la programación, ya sería completo, ahí sí estaría muy bien.*

Por ello, realiza pruebas de clase individuales, para comprobar lo aprendido ese día, tres pruebas parciales en las que deben aplicar conceptos a la resolución de ejercicios sin la utilización del ordenador. El uso del ordenador se concibe únicamente en los talleres, después de realizar los ejercicios a mano, y en las pruebas "conjuntas". Las pruebas "conjuntas", también son escritas, pero dado que son pruebas finales acumulativas sobre todo lo aprendido en la asignatura, incluyen ejercicios más complejos que requieren del uso de software especializado para agilizar los cálculos. Sin embargo, el uso del software no tiene peso en la calificación de estas pruebas porque ese no es el objetivo de la misma.

> *La prueba de clase consiste en hacer un ejercicio de lo que hemos visto en el día, en la clase, con todo de lo que ellos dispongan, pero individual. Es una manera de comprobar lo que han aprendido en clase, además de los talleres, las pruebas parciales y las conjuntas. […] En la mayor parte de los exámenes yo lo que trato*

es que me demuestren que ellos saben aplicar los conceptos. Entonces, no es tanto el software, no. A veces ellos tienen que usar ya un programa que hicimos en clase, pueden usarlo, pero es otro el objetivo. No es tanto que usen el programa, sino que sepan aplicar los conceptos.

Como vemos, Fernando le da mucha importancia a la aplicación de los conceptos de métodos numéricos y motiva a sus estudiantes haciéndoles reflexionar sobre la utilidad de lo aprendido.

Yo siento que los estudiantes se ven interesados en lo que se les está enseñando. Muchas veces, la mayoría de veces, les hago ver primero la importancia de lo que van a aprender y dónde lo van a aplicar, que es la parte que a ellos les motiva más. Luego, eso se ve reflejado en los resultados de las pruebas, de los talleres.

El hecho de ver a sus estudiantes motivados e interesados en la clase, y los resultados de los talleres y evaluaciones le dan la pauta de estar haciendo un buen trabajo docente. Además, considera que un buen estudiante es aquel que muestra mucho interés e iniciativa en la asignatura, reflejándose su dedicación y responsabilidad en las calificaciones obtenidas.

Acorde a lo manifestado, inició la clase con un breve repaso de lo visto anteriormente. Realizó una exposición teórica del desarrollo matemático de las fórmulas de aproximación de diferencias finitas progresivas, centradas y regresivas. Posteriormente, realizó un taller de ejercicios de aplicación tipo *toy problems* con la participación activa de los estudiantes, a quienes motivó haciéndoles reflexionar sobre la importancia de la temática abordada. Los estudiantes se mantuvieron receptivos y trabajaron animadamente las tareas encomendadas. En esta ocasión no realizó implementación computacional alguna.

En conclusión, el profesor cree que los métodos numéricos son herramientas para resolver problemas que no se pueden resolver por los métodos analíticos, aplicando conceptos propios de la materia, que continúa en construcción dando lugar a la aparición de nuevos métodos iterativos; sugiriendo una visión instrumentalista de los métodos numéricos con inclinación a resolución de problemas (Ernest, 1989).

Considera que los métodos numéricos se aprenden principalmente a través del desarrollo manual de ejercicios de aplicación, aunque debe completarse con la programación de dichos métodos y el uso de software especializado. En este sentido, el uso del software es un objetivo de aprendizaje, aunque no es prioritario, que debe abordarse una vez dominada su aplicación con lápiz y papel. Esto explica que no utilizara el ordenador, a pesar de la clase realizarse en el laboratorio de computación. Lo que evidencia la influencia de sus creencias en su práctica docente.

El carácter formal e informativo que da a la asignatura, el énfasis que hace en el aprendizaje de conceptos y calculo manual a ser medidos a través de una prueba escrita al final de cada clase, el asumir el papel de especialista y transmisor de contenidos, el asignar al estudiante un papel receptivo, el no seguir rígidamente una programación preestablecida y el considerar como parte de los objetivos de aprendizaje el uso de medios tecnológicos, presupone tendencias didácticas de tipo tradicionalista y tecnológico (Contreras, 2009).

4.1.7. Caso de Rudy

Rudy es el único profesor que se ha formado fuera del sistema educativo ecuatoriano, obteniendo una licenciatura y un máster en educación. Tiene sesenta y cinco años y cuarenta y seis años de experiencia como profesor en educación secundaria y universitaria, el último de los cual comenzó a impartir Métodos Numéricos en ingeniería en una universidad ecuatoriana de categoría B. Aunque la materia le fue asignada y considera que "los métodos numéricos son complicados, son difíciles, porque hay que dominar mucho las matemáticas", le gusta impartirla porque le agrada todo lo relacionado con las matemáticas.

En su opinión, los ingenieros deben estudiar métodos numéricos porque son necesarios para procesar datos obtenidos en las investigaciones y dar respuesta a problemas no resolubles de forma exacta.

> *A veces el ingeniero se enfrenta con tablas que contienen resultados de mediciones. Entonces, ¿cómo interpola con los resultados de una tabla? ¿Cómo da una expresión que siga la tendencia de los resultados de esa tabla? A veces tiene que hallar la derivada en un punto determinado. ¿Cómo hacerlo si lo que tiene es una tabla? No tiene la ley que sigue. El ingeniero trabaja mucho con datos empíricos que procesar, y, para procesar esos datos empíricos, le hace falta necesariamente los métodos numéricos.*

En concreto, afirma que deben estudiar fundamentalmente: interpolación y ajuste de curvas, derivación e integración numérica, y ecuaciones diferenciales. De estas temáticas selecciona los métodos numéricos a impartir teniendo en cuenta que sean inteligibles y permitan resolver los problemas más habituales en ingeniería.

> *El profesor debe darles lo esencial, lo principal que ellos deben conocer para poder resolver los diferentes tipos de problemas, y que ellos dominen esos contenidos para poder resolver esos problemas esenciales con los cuales va a tener que enfrentarse. [...] Normalmente elijo los métodos que sean más asequibles, fácilmente entendibles, y que, al mismo tiempo, permitan resolver los problemas esenciales dentro de la ingeniería.*

En este sentido propone abordar contenidos básicos y sin demasiada complejidad, para que puedan ser asimilados fácilmente por los estudiantes y estos puedan obtener buenas calificaciones, ya que considera que "en un aula de 30 estudiantes, que aprueben 5 no es un buen resultado".

Su preocupación por estos resultados se debe al hecho de haber detectado ciertas dificultades de aprendizaje en los estudiantes, a quienes les cuesta mucho trabajo seguir el desarrollo matemático del método en un texto, resolver problemas manualmente y analizar su solución. Por ello, sostiene que es fundamental orientar correctamente a los estudiantes para que superen sus deficiencias y adquieran los contenidos y competencias de la materia.

Para enseñar la materia considera conveniente iniciar sus clases con la exposición de los referentes teóricos del método numérico. En este sentido, aunque considera importante realizar el desarrollo matemático del método numérico, afirma que en numerosas ocasiones puede generar pérdida de tiempo, ya que los estudiantes no son capaces de seguirlo.

> *El desarrollo matemático es importante, sin lugar a dudas. El desarrollo matemático es muy importante para llegar al método, pero a veces nos enfrentamos con el hecho de que, en ese camino del desarrollo matemático, nos perdemos y el alumno no entiende ni la mitad de las cuestiones que se hacen. Entonces perdemos una gran cantidad de tiempo en eso.*

Una vez expuesto el desarrollo teórico, realiza ejercicios de aplicación manualmente y con ordenador.

> *He llegado a la conclusión de que, si usted no utiliza tecnología en el aula, si lo hace a mano... Hay dos cosas muy importantes: primero, pierde una gran cantidad de tiempo haciendo algo relativamente operativo y segundo, generalmente no va*

bien, generalmente los estudiantes se equivocan.

En concreto, afirma dedicar tiempo a la implementación computacional en todas las clases por dos motivos. Por un lado, permiten al estudiante aplicar la teoría, ahorrando un tiempo considerable en realizar los cálculos que puede dedicarse a la interpretación de los resultados obtenidos o a enseñar más contenidos dependiendo del tema impartido y de la predisposición y nivel de la clase. Por otro lado, aumenta la motivación de los estudiantes al ver que llegan a resultados correctos sin realizar cálculos que en algunos casos pueden ser tediosos. Para él, la introducción de la tecnología en el aula es uno de los cambios más significativos que ha experimentado la enseñanza de los Métodos Numéricos en los últimos tiempos.

Todas estas creencias sobre la importancia de la implementación computacional se reflejan en el peso que tiene en la evaluación que "constituye algo así como un 60% de todo". El resto de la calificación corresponde a una prueba escrita que consta de una parte teórica y otra práctica de carácter no computacional. El profesor justifica su método de evaluación de la siguiente forma:

Si el estudiante no hace bien la parte práctica, no llega a la solución, y si no llega a la solución está mal, no ha resuelto el problema. Si no resuelve el problema, no cumple los objetivos y nunca va a ser un ingeniero.

Para él "un ingeniero que nunca ha resuelto un problema no es un ingeniero", de ahí que considere que un buen estudiante es aquel que "se enfrenta al problema, encuentra el método que debe emplear para resolverlo, lo aplica y llega a la solución correcta". Precisamente el hecho de que los estudiantes resuelvan por sí solos las tareas encomendadas y lleguen a resultados correctos al usar la tecnología y verlos motivados durante el proceso le hacen sentir que ha hecho un buen trabajo.

En la clase observada el profesor comenzó con la exposición teórica de un método numérico, en la que no completó su desarrollo matemático, indicando a los estudiantes que era difícil y se iban a equivocar. Posteriormente, los estudiantes resolvieron *toy problems*, siguiendo fielmente el proceso realizado por el profesor, quien utilizó el programa Excel para realizar los cálculos.

En resumen, concibe a los métodos numéricos como herramientas para el tratamiento de datos empíricos y tiene como principal objetivo que el estudiante los aplique para resolver problemas de la ingeniería, sugiriendo una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989).

Por otro parte, su práctica docente está influenciada por sus creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos y la capacidad que tienen los estudiantes para su aprendizaje. Por ejemplo, tiene la creencia que los métodos numéricos son difíciles y que sus estudiantes comenten gran cantidad de errores de cálculo y tienen grandes dificultades para comprender el desarrollo matemático de algunos métodos numéricos, por ende, piensa que debe impartir contenidos esenciales y fáciles de comprender y ve una pérdida de tiempo exponer dichos desarrollos matemáticos. Por otro lado, concibe el uso de la tecnología como un objetivo de aprendizaje y una herramienta para agilizar cálculos y motivar a los estudiantes.

En general, su estilo de enseñanza está acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista y tecnológico (Contreras, 2009), por el hecho de querer enseñar contenidos que puedan ser asimilados fácilmente por los estudiantes con el objetivo de que éstos obtengan buenas calificaciones en las evaluaciones, a las que concibe como instrumentos para medir conocimientos; de asumir el papel de especialista y trasmisor de contenidos y de procesos lógicos usando medios tecnológicos; y propiciar que el estudiante tenga un papel receptivo y de reproductor de procesos, al limitarlo a seguir fielmente sus instrucciones.

4.1.8. Caso de Alberto

Alberto tiene cuarenta y siete años, es un ingeniero civil y tiene un máster en ingeniería de la construcción. Ha trabajado durante cuatro años en una universidad de categoría B, en la que le asignaron la asignatura de Métodos Numéricos un año y medio antes de la realización de la entrevista. Esta asignatura no le agradaba al principio, dada su complejidad, pero la considera importante para los ingenieros porque se pueden implementar en el ordenador.

Para seleccionar las temáticas y los métodos numéricos a enseñar se basó en su pertinencia y utilidad para la profesión. De hecho, tuvo la oportunidad de modificar la guía docente de la asignatura cuando pasó de tener carácter anual a semestral. Los temas que constan ahora en dicha guía son: errores y redondeo, sistemas de ecuaciones lineales, optimización, interpolación, integración y diferenciación numérica y solución numérica de ecuaciones diferenciales. De todos ellos, el tema de optimización es uno de los que le parece más importante.

Cuando recibí el plan de asignatura de métodos numéricos era anual y yo lo hice semestral. Había temas que no tenían nada que ver con la asignatura o se repetían en otras asignaturas. Entonces quité esos temas y puse la optimización […]Hay una unidad que es de optimización y se refiere al uso de la programación lineal, como asignar recursos a diferentes actividades que compiten entre ellas. Esa unidad me parece mucho más interesante y más aplicable a la ingeniería civil, incluso debería existir una materia específicamente con el nombre de investigación de operaciones, como la están dando en la carrera de empresariales.

Para realizar bien su trabajo y lograr el aprendizaje en los estudiantes, consulta vídeos tutoriales de la web y el texto guía de la asignatura. En base a ello elabora diapositivas y prepara ejercicios de aplicación para sus clases. En ellas comienza planteando el tema y objetivo, expone el desarrollo matemático del método numérico, realiza ejemplos de ejercicios en pizarra y plantea otros para que los realicen los estudiantes.

Por lo general, les doy el tema, vemos el objetivo, en lo posible deduzco la fórmula para que ellos no se la aprendan de memoria. Desarrollo un ejercicio en la pizarra, luego hago preguntas sobre si tuvieron alguna dificultad en el ejercicio, si me dicen que no entonces les planteó un ejercicio en clase que ellos mismos lo desarrollen y después los voy evaluando.

Alberto cree que los ordenadores y el software juegan un papel muy importante en la enseñanza de los métodos numéricos al "evitarnos hacer cálculos tediosos y aburridos". En este sentido, aunque afirma que es necesario programar algoritmos en algún software, para tratar de automatizar todo este cálculo y el procedimiento sea más rápido, los estudiantes no realizan la implementación computacional de los métodos numéricos, sino que la traen desarrollada de casa. Lo que el profesor hace en clase es proyectar el ejercicio que trae previamente implementado, comprobando los resultados de los ejercicios haciendo el uso de aplicaciones como Matlab, Lingo y/o Excel. Además, no considera el uso del software en las evaluaciones, que son siempre escritas, con resolución manual de ejercicios de aplicación. El software solo es considerado en pequeños trabajos de revisión bibliográfica enviadas a los estudiantes, donde tienen un peso del 40% de la calificación.

La mayor parte de los ejercicios los desarrollo manualmente y los compruebo con el software […] hago ejercicios en la pizarra, les proyecto el solver de Matlab y les hago observar como aplico el error que yo deseo y la máquina hace el número de iteraciones y me da un resultado aproximado.

Para Alberto, los métodos numéricos se aprenden como cualquier otra materia: “con ensayos y errores, desarrollando ejercicios”. Por ello, “un buen estudiante es aquel que practica estos ejercicios, investiga y lee bastante sobre los temas tratados, es disciplinado, puntual, responsable y honesto”. No obstante, se encuentra con la dificultad de que los estudiantes tienen deficientes conocimientos previos, como en el caso de la derivación e integración analítica. En este sentido, cree que ha realizado un buen trabajo cuando los estudiantes pueden realizar los ejercicios planteados y se muestran satisfechos. Para mejorar la satisfacción y motivación de sus estudiantes les hace ver la utilidad de lo aprendido.

Por último, su poca experiencia como profesor de métodos numéricos no le permite establecer los cambios más significativos que ha tenido su enseñanza en los últimos tiempos, pero considera que, comparado con lo recibido en su formación como ingeniero, los estudiantes ahora salen mejor preparados.

> *Comparando con lo que yo vi, recibí solo tres clases de métodos numéricos. Pero, ahora con los nuevos cambios en la educación, ya se cumple todo lo programado en el pensum de estudio, por lo que los estudiantes van a salir mucho mejor preparados que hace unos cinco o diez años.*

En la clase observada utilizó el método expositivo para explicar la teoría y ejemplos de aplicación de las fórmulas mediante el reemplazo mecánico de datos. Además, proyectó un ejercicio que había hecho en Matlab y propuso ejercicios tipo *toy problems* del texto guía para que lo resolvieran los estudiantes, que asumieron un papel receptivo. No realizó el desarrollo matemático del método numérico ni motivación alguna.

En conclusión, concibe a los métodos numéricos como un conjunto de fórmulas que, aplicadas correctamente, permiten resolver ciertos tipos de problemas, sugiriendo una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989). Además, el ordenador es visto como una herramienta para agilizar cálculos.

Por otro lado, su práctica docente presenta incoherencias como el hecho de no motivar ni realizar el desarrollo matemático del método, a pesar de haber manifestado la creencia de que se debe motivar a los alumnos haciéndoles comprender la utilidad de lo aprendido y de que es importante realizar el desarrollo matemático del método. Aunque, está en concordancia con ciertas creencias manifestadas sobre la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos. Por ejemplo, cree que se aprende "desarrollando ejercicios como cualquier otra materia", por lo que en la clase hizo el desarrollo manual de los ejercicios que son del tipo *toys problems*, enfocándose en el reemplazo de datos en las fórmulas y no en el análisis de los resultados obtenidos.

Estos hechos, unidos al uso de la clase magistral, el carácter formal e informativo que da a la asignatura, su papel de transmisor de contenidos y el papel receptivo que da al estudiante, manifiestan un estilo de enseñanza acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista (Contreras, 2009).

4.1.9. Caso de Lorena

Lorena es una ingeniera de sistemas de treinta y cinco años. Tiene un máster en docencia y gerencia en educación superior y ocho años dedicados a la docencia universitaria en la misma universidad que Alberto. En el momento de la entrevista, Lorena se enfrentaba a la enseñanza de los Métodos Numéricos en ingeniería por primera vez, aunque afirma no desear seguir impartiéndola debido a su complejidad y su falta de formación en esta materia.

> *No quiero seguir impartiéndola. No porque sea fea, sino porque es bastante compleja y hay que tener cuidado para poder llegar a los jóvenes. Mi carrera era orientada a lo administrativo, fue más aplicado a los negocios, a lo empresarial. Entonces, nos fuimos más a la parte administrativa y nunca vimos matemáticas con la complejidad que se ve aquí.*

Esta falta de formación previa en la asignatura de Métodos Numéricos no le permite juzgar que contenidos matemáticos deben ser abordados en esta asignatura, por lo que aborda los contenidos de la guía docente, que asume como los mínimos necesarios en la formación de un ingeniero y deben darse obligatoriamente.

> *Los contenidos mínimos que han propuesto me parecen bien, pero hay cosas que nosotros como ingenieros de sistemas desconocemos de esta área, entonces se nos hace un poco pesado. Pero, en realidad no me siento con propiedad para decidir qué temas deben darse.*

No obstante, considera que los ingenieros deben estudiar métodos numéricos porque "todos necesitamos de matemáticas, y mayor aún de su análisis, para poder ser más analíticos y poder llegar a la solución y al fin que necesitemos ".

Lorena opina que los estudiantes aprenden a través del análisis, por lo que considera conveniente iniciar sus clases motivando a los estudiantes a confiar en sus propias capacidades y a reflexionar sobre la necesidad de investigar. Luego explica la teoría, exponiendo el desarrollo matemático de los métodos más sencillos, en los otros casos, solamente refiere la fuente de consulta o presenta vídeos tutoriales de la web.

> *Bueno algunas fórmulas las demostré, otras no, solamente les indiqué el autor y el 0libro de donde las había consultado. Pero, para la última que fue de las Gaussianas les presenté un video que duró unos 15 minutos, para que ellos puedan comprender de donde se originan las fórmulas.*

Lorena no consulta el texto guía de la asignatura porque “no está fácil, asume como que ya se sabe todo y hace planteamientos directos”, por lo que se prepara las clases “estudiando bien la teoría”, consultando libros, revistas y vídeos tutoriales de la web.

Posteriormente, desarrolla ejercicios de aplicación y envía a casa tarea de refuerzo y solicita a los estudiantes una breve revisión bibliográfica sobre el tema a tratar en la siguiente clase. El hecho de que los estudiantes tengan muchas inquietudes durante la clase le da la pauta de que no han comprendido sus explicaciones y debe reforzar. Además, considera que los estudiantes “no saben analizar” y vienen con la idea preconcebida de que los “métodos numéricos son complejos”.

> *Ellos no saben analizar y quieren que se les de todo, como quien dice desmenuzado, que se les indique que método aplicar. Entonces lo ven como un proceso mecánico, piensan que en todos los ejercicios se va a aplicar la misma fórmula, que no hay que analizar para obtener los resultados.*

Respecto al uso del software, considera que es el cambio más significativo en la enseñanza de los métodos numéricos.

> *Anteriormente no había la facilidad de utilizar software o aplicarlo en la vida cotidiana. Simplemente era una clase muy magistral, en cual se enseñaba todo, pero los estudiantes no sabían en qué aplicarlo.*

Sin embargo, afirma no realizar prácticas con ordenador porque su universidad no cuenta con licencia de Matlab. En su lugar, utiliza aplicaciones en los celulares para los problemas más sencillos. Además, concibe al software como un instrumento para verificar cálculos.

En este sentido, la evaluación se centra única y exclusivamente en la aplicación manual de ejercicios, poniendo especial interés en el análisis exhaustivo que el estudiante hace del problema planteado, por qué ha utilizado dicho método y en su solución. Para ella, un buen estudiante es una persona que, “aparte de ser analítica le gusta encontrar las

soluciones de un problema".
El uso del software es considerado únicamente en la presentación de un proyecto final que consiste en resolver un problema de la vida diaria aplicando métodos numéricos y utilizando algún software especializado. Pero, al preguntarle si el manejo del software está considerado en los parámetros de calificación del proyecto, dice:

> *No tiene peso en la calificación porque el uso del software en el proyecto final es opcional. Si lo utilizan simplemente pongo como comentario "investigación extra, utilizaron también una herramienta".*

Lorena inició la clase observada haciendo preguntas a los estudiantes sobre la consulta o breve investigación bibliográfica enviada en la clase anterior y enunciando el tema y objetivo. Luego, explicó el desarrollo del método numérico, apoyándose en la lectura de diapositivas. Posteriormente, presentó un video tutorial con ejemplos de ejercicios tipo de aplicación. Finalmente, los estudiantes realizaron ejercicios tipo *toys problems* que consistieron en reemplazar datos en las fórmulas dadas y verificar los resultados en la calculadora del programa MatsTools, herramienta bajada de la web a sus celulares.

En conclusión, podemos decir que la profesora concibe a los métodos numéricos como un conjunto de fórmulas aisladas que permiten resolver problemas, sugiriendo con todo ello una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989). Esta creencia también se manifiesta con respecto al uso de software especializado, al que considera como un instrumento para verificar cálculos.
Por otro lado, se encuentran incoherencias entre su práctica docente y algunas de sus creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, manifestó la creencia de que los estudiantes aprenden a través del análisis, pero durante la clase no se propició este análisis, si no por el contrario, los estudiantes se limitaron a escuchar y seguir instrucciones. Esto podría explicarse por la falta de experiencia docente de la profesora y su visión de los métodos numéricos como una asignatura complicada. Este hecho, unido al uso de la clase magistral y a seguir una programación rígida, manifiesta un estilo de enseñanza acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista (Contreras, 2009). Sin embargo, el hecho de utilizar medios tecnológicos como apoyo, a pesar de sus limitaciones, manifiesta inclinaciones de tipo tecnológico.

4.1.10. Caso de Romina

Romina es una ingeniería civil de cuarenta y siete años que cuenta con un máster en gestión de la construcción y amplia experiencia como ingeniera. En el momento de realización de la entrevista, Romina se encontraba en su primer año como profesora universitaria, impartiendo clases de métodos numéricos en la universidad de Alberto y Lorena. Al igual que Lorena, Romina opina “es una materia muy complicada”, sin embargo, está dispuesta a continuar impartiéndola, porque la considera útil. Al igual que Lorena, siente que no tiene experiencia suficiente en la materia como para decidir qué contenidos son importantes, por lo que imparte los contenidos que aparecen en la guía docente.

> *Es una materia muy complicada. […] No tengo problema en volver a darla. Es útil y permite al estudiante aprender a hacer cálculos en las diferentes áreas y a optimizar recursos en una obra. […] Es el primer año que doy la materia por lo que ahora no puedo hacer un análisis de que temas son importantes que ellos conozcan.*

Consciente de su falta de formación en métodos numéricos, consulta los libros que constan en la guía docente y se apoya en vídeos tutoriales en Internet para preparar la clase. Dado que cree que se aprende métodos numéricos desarrollando ejercicios de aplicación a la profesión, prepara este tipo de ejercicios y motiva a los estudiantes haciéndoles ver la utilidad de los métodos propuestos.

> *Lo que más preparo es la aplicación de estas fórmulas en el desarrollo y aplicación de ejercicios prácticos que nos puedan servir para la ingeniería civil, porque si no los chicos dicen: “Me enseñan esto, y ¿para qué me va a servir?”.*

En este sentido, por lo general inicia las clases registrando la asistencia y recogiendo las tareas enviadas a casa. Luego, plantea el tema, resaltando su utilidad, explica la teoría y fórmulas y desarrolla ejercicios de aplicación con la participación de los estudiantes.

> *Las actividades que hago al ingresar son: saludar, tomar asistencia, recibir los trabajos, ponerles el tema y motivarlos indicando para qué les va servir. Luego, desarrollo toda la clase normalmente: teoría, fórmulas y la aplicación de todo eso en un ejercicio. Posteriormente, se hace participar a los estudiantes uno por uno, para que comprendan, porque a veces uno desarrolla el ejercicio, pero los chicos no entienden. Cuando van pasando a la pizarra recién están ellos entendiendo, por*

eso me gusta hacerlos participar en la clase.

El aprendizaje teórico que espera en sus estudiantes, no incluye el desarrollo matemático de las fórmulas correspondientes a los métodos numéricos, por considerarlo complicado.

A veces deducir las fórmulas es complicado. Te puedes pasar la hora y a la final llegas a la fórmula, que es la única que existe. Para mí como docente no tiene mucho significado, mucha relevancia, tratar de demostrarla, porque a veces te puedo llevar a algo tan engorroso que caes en un aburrimiento con los estudiantes.

Esto le lleva a considera que un buen estudiante es aquel que sabe aplicar los métodos numéricos y que la utilidad e importancia que se les da ahora a los métodos numéricos es el cambio más importante que ha tenido su enseñanza en los últimos tiempos.

En cuanto al papel del software en el aula, si bien lo considera importante, afirma no utilizar software alguno en sus clases porque no cuenta con un laboratorio de computación. Además, considera que este solo debe utilizarse una vez que el estudiante ha dominado el cálculo manual. Por ello, la implementación de los métodos numéricos en Matlab lo propone como trabajo de casa y no es considerado en la calificación de la asignatura.

Para mí es muy importante el uso del software, pero primero deben aprender la teoría y a hacer manualmente los ejercicios. Y una vez ya ellos ya tienen este conocimiento, pueden usar cualquier software que necesiten.

Para ella, el principal indicador de que ha logrado el aprendizaje en sus estudiantes es que resuelvan numéricamente los problemas propuestos y den respuestas acertadas en las evaluaciones a través de pruebas escritas.

Acorde con la entrevista, la clase observada comenzó con un breve repaso de lo visto anteriormente, enunciando el tema y su objetivo y destacando la utilidad del tema a tratar. Posteriormente, contrario a lo manifestado en la entrevista, no utilizó material audiovisual, sino que dictó la teoría y los ejercicios con el texto guía en mano, copiando gráficos y fórmulas en pizarra. En lugar de realizar problemas de aplicación a la profesión, utilizó ejercicios de tipo *toy problems* resueltos en el libro, planteando ejercicios similares para ser resueltos por los estudiantes, que asumieron un papel receptivo.

En conclusión, el hecho de concebir la asignatura como un conjunto de conceptos y fórmulas aisladas, útiles para resolver ejercicios de aplicación a la profesión, priorizando el cálculo manual, sugieren una concepción instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989).

Esta visión, junto con su creencia sobre la complejidad de la asignatura influencian su práctica docente, no exponiendo el desarrollo matemático del método numérico y copiando formulas y ejercicios del libro. Por otro lado, si bien concibe el uso del ordenador y el software como una herramienta para agilizar cálculos, este no se usa en clase por falta de recursos.

Romina tiene un estilo de enseñanza con tendencia tradicionalista (Contreras, 2009); dado el uso del texto guía como único material curricular, el carácter formal e informativo que da a la asignatura, el uso del dictado, el papel receptivo del estudiante y el considerar a la evaluación como medida de aprendizaje.

4.1.11. Caso de Antonio

Antonio es licenciado en ciencias de la educación, en la especialización de ciencias exactas, tiene un máster en educación matemática y otro en formación del profesorado secundario de física y química. Tiene cuarenta años, seis años de experiencia en la docencia universitaria y dos como profesor de Métodos Numéricos en la carrera de Ingeniería de Sistemas en una universidad de categoría C.

Para Antonio, los Métodos Numéricos, materia le fue asignada y que le agradaría continuar enseñando a pesar de ser "un poquito compleja", constituyen herramientas para resolver problemas de ingeniería. Por lo que considera apropiadas, para la formación de un ingeniero, todas las temáticas que constan en la guía docente de la asignatura: aproximación y errores, ecuaciones de una variable, solución de sistemas de ecuaciones lineales, interpolación, derivación e integración numérica. De estas temáticas escoge enseñar los métodos numéricos que convergen más rápido.

> *Siempre se ven los métodos que convergen más rápido. Por ejemplo, se les da el método de Newton-Raphson, para resolución de una ecuación lineal, pero después el método de Newton acelerado.*

Además, cree que el alumno aprende estos métodos complementando la información dada en clase con otras lecturas, práctica y automatiza los procesos.

> *Para aprender análisis numérico, aparte de las instrucciones que da el docente, el*

estudiante tiene que ir a consultar, a investigar. En el momento en que investiga, complementa lo que se le da en clase. Aprende haciendo, automatizando, de esta manera domina y se apodera del conocimiento.

En este sentido, considera que un buen estudiante es investigador, creativo e innovador.

Para mí un buen estudiante es aquel que es curioso, que con la parte que se le da uno como docente en el aula, investiga un poco más allá y trae preguntas e inquietudes al aula.

Las clases, que se realizan siempre en el laboratorio de computación, son desarrolladas, según él, de "modo tradicional". Inicia con la presentación del tema y objetivo. Recuerda los conocimientos dados previamente, ya que considera que los estudiantes tienden a olvidar lo aprendido. Posteriormente, expone los fundamentos teóricos. Después, afirma que "participan los estudiantes y una vez que se apoderan del conocimiento, ahí ellos lo llevan a la práctica". A continuación, se resuelven *toy problems* para poner en práctica la teoría. El desarrollo matemático del método numérico en clase queda condicionado al tiempo disponible.

Cuando no hay tiempo se le presenta las fórmulas y se las aplica. Pero, cuando tenemos tiempo hago demostraciones. [...]. En las fórmulas Gaussianas, como no son matemáticos, no se les hace la demostración, solamente se hace la aplicación.

La clase concluye con la implementación en Matlab de los ejemplos vistos, tarea que queda pendiente para casa cuando no da tiempo en clase.

Al finalizar la clase se le suele pedir que automaticen [programen] lo que hemos visto. Para la automatización utilizamos nosotros Matlab. Entonces, se les propone un ejemplo o el mismo ejemplo que se desarrolló en la clase, precisamente se les pide que por favor ellos automaticen. Como métodos numéricos precisamente depende de interacciones para poder llegar a la respuesta más óptima, entonces por ahí ellos van programando y van haciendo. Y esa es mi forma de evaluar, porque si es que no acaban en clase, ellos quedan pendientes para después entregar lo que hemos visto en clases ya automatizado.

En este sentido, considera muy importante el uso del ordenador y el software, pero sin desestimar el uso de la clase magistral.

El uso del ordenador y del software es importantísimo, porque nos ayuda precisamente a evitar todo el proceso manual en la pizarra de las típicas clases magistrales que, sin embargo, son necesarias. Eso no quiere decir que la clase *magistral no es buena, de hecho, yo creo que es la base para que el estudiante tenga el pensamiento lógico formal para que luego en base a eso lo lleve precisamente al ordenador, al software.*

En su opinión, el cambio más significativo en la enseñanza de los métodos numéricos es el uso de los ordenadores, ya que "facilitan muchísimo el trabajo tedioso de repetir muchas veces un proceso". Sin embargo, su uso no tiene un peso definido en la calificación de la asignatura.

Aunque concibe la implementación computacional en ciertas evaluaciones, para él, lo más importante es obtener el resultado correcto.

En el examen se les puede pedir que programen y obtengan el resultado. Pero, cuando no hemos visto todas las herramientas o comandos para poder aplicar el método, les digo que resuelvan el ejercicio manualmente. […]Los estudiantes cuando estén en el campo ocupacional no van a decir "yo tengo solamente hasta aquí". Si me piden a mí en una empresa que automatice algo, y yo digo "Mi proceso está bien, pero no me sale el resultado", no me sirve de nada. Entonces, a lo que doy valoración es precisamente al resultado; porque si es que el resultado está bien, obviamente el proceso está bien.

El énfasis que hace a la aplicación de los métodos numéricos lo lleva a creer que el hecho de que los estudiantes comprendan la utilidad de lo aprendido es un indicador de haber realizado un buen trabajo enseñando métodos numéricos. Para ello, busca motivar a los estudiantes mediante la conversación de algún tema de interés o la presentación de un video motivacional.

Cuando los estudiantes salen con una visión de que la matemática no es solamente para aprobar el semestre, sino posteriormente ellos ven la utilidad en muchos de los semestres subsiguientes. Donde aplican, por ejemplo, algunos estudiantes alguna vez conversábamos de minería de datos y decían "¡Ah! en minería, justo esta parte, sí se vio en matemática un modelo de regresión lineal o un modelo de regresión polinomial".

La clase observada, de acuerdo a lo manifestado por el profesor, fue una clase tradicional, tipo magistral en la parte teórica, que la inició con una breve revisión de conocimientos previos. Luego, hizo la exposición de conceptos teóricos, el desarrollo matemático del método numérico, y ejercicios de aplicación tipo *toy problems*, con la participación de los estudiantes, que tuvieron un rol receptivo. Además, para motivar proyectó un video sobre la utilidad de las matemáticas. Pero, no utilizó software alguno a pesar de haber impartido la clase en un laboratorio de computación, y envió tarea a casa.

En definitiva, el profesor concibe a los métodos numéricos como herramientas para resolver problemas de la profesión y que, como futuros ingenieros, solo deben saber aplicar fórmulas. Todo esto sugiere que el profesor tiene una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989). Esta visión instrumentalista también la tiene respecto al uso del software, ya que lo considera como una herramienta útil para agilizar cálculos.

Además, su accionar en el aula es influenciado por sus creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos y su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, hace uso de la clase magistral tradicional dada su creencia de que ésta es la base para que el estudiante tenga el pensamiento lógico formal; realiza ejercicios de aplicación con la participación de los estudiantes porque cree que ellos aprenden practicando, y solo utiliza el software después de la explicación teórica y realización manual de ejercicios. En este sentido, considera el software como una herramienta para agilizar cálculos.

Dado el uso de la clase magistral; el carácter formal e informativo que da a la asignatura al orientarla a la adquisición de conceptos y fórmulas, su rol de transmisor de contenidos y el papel receptivo del estudiante; podríamos decir que en general, su estilo de enseñanza está acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista (Contreras, 2009).

4.1.12. Caso de Sandro

Sandro es ingeniero en sistemas computacionales con una maestría en gerencia de tecnologías de la información. Tiene cuarenta y ocho años y la mayor parte de su vida ha trabajado como ingeniero civil en una empresa de construcciones y en varias empresas públicas y privadas como técnico de sistemas. Lleva trabajando ocho años en una universidad ecuatoriana de categoría C, donde le fue asignada la asignatura de Métodos Numéricos en la carrera de Ingeniería de Sistemas dos años antes de la realización de este estudio.

Para Sandro, los métodos numéricos proporcionan herramientas para resolver problemas de ingeniería, de ahí la importancia de esta asignatura.

> *El ingeniero de sistemas necesita reconocer en cada problema qué herramienta debe utilizar. De ese modo, podrá desarrollar software para resolver problemas de ingeniería y/o de otras profesiones". […]Los muchachos deben tener la capacidad analítica para determinar cómo proceder en cada caso. Por ejemplo, en ingeniería, en el caso de análisis de costos, tienen que elaborar modelos matemáticos en los que intervienen los polinomios, y desarrollar algoritmos para resolverlos. Esa es la razón por la que el ingeniero en sistemas debe aprender a manejar métodos numéricos.*

Dada la gran cantidad de métodos numéricos y la limitación de tiempo, afirma que escoge los métodos numéricos a enseñar de acuerdo a los objetivos de aprendizaje, de la carrera y su experiencia profesional. En concreto, nos indica que la guía docente de la asignatura se diseñó analizando las guías docentes de otras universidades con mayor trayectoria y, como debían reducir temario por cuestiones de tiempo, seleccionaron aquellos que creía más útiles para su futuro profesional, teniendo en cuenta su experiencia previa como ingeniero. Como resultado, indica que se debe abordar manejo de errores, solución de ecuaciones no lineales, interpolación, integración numérica, matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales.

Por otro lado, afirma que para el estudio de estos métodos los libros existentes son complejos, especialmente para profesionales ajenos a las matemáticas y a las ingenierías.

> *Los libros que hasta ahora encuentro de métodos numéricos son bastante complejos de leer. Tienes que tener un conocimiento bien fundamentado para que tú entiendas la resolución de ejercicios. Yo me he puesto a pensar, ¿qué pasaría si no estudio ingeniería, pero quiero aprender métodos numéricos? ¿Qué libro leo? […]No van a poder. Por eso es que más la gente se va a los tutoriales. En los tutoriales van paso a paso indicando, en YouTube, cómo desarrollar el ejercicio, pero ahí no se aprende por qué salen las cosas. Ahí es donde entra el libro. Mi idea es hacer un pequeño libro para mi carrera, donde cualquiera pueda leer el libro y lo entienda.*

Por ello, utiliza preferentemente vídeos tutoriales para "reaprender" y preparar sus clases. Estas comienzan con la exposición teórica del método, luego resuelve un ejercicio manualmente y propone un taller que se realiza en Matlab para que los estudiantes lo resuelvan individualmente o en parejas con el objeto de "crear discusión".

Cuando doy la clase, como los muchachos ya saben programar, ellos arman el pequeño bloque de programación de los métodos que estemos dando. Para todos los ejercicios y todos los temas utilizamos Matlab".

En estas actividades dice hacer poco uso de los *toy problems* porque cree más conveniente trabajar en casos reales de la vida profesional, de ahí que considere que un buen estudiante es el que "aplica los métodos numéricos en la solución de problemas del mundo real y desarrolla un algoritmo para cualquier situación".

No obstante, considera que los estudiantes llegan a la asignatura de métodos numéricos con muchas lagunas y que deben ser conscientes de cuáles son y superarlas practicando.

Se aprende en base a la clase teórica, a los ejercicios, pero más es practicando. Aquí a los muchachos yo les hago mucho hincapié: la carpintería es esta y la parte metodológica o esencial es esta. Les digo "párense en esta sección que es dónde están los principales errores" y "esto tiene que ser así". Entonces les doy en detalle la explicación para que ellos lo puedan resolver.

Por ello, pide a los estudiantes que usen las tutorías y también que desarrollen manualmente ciertas operaciones básicas que ya conocen, pero donde cometen muchos errores. Por otro lado, afirma que estos errores de cálculo disminuyen muchísimo al implementar los métodos numéricos con Matlab, que considera el principal avance en la enseñanza de los métodos numéricos, permitiendo aprender mucho más rápido. En este sentido, opina que:

La evaluación debe centrarse en cómo ellos, en un caso concreto, han tomado la decisión de qué método numérico utilizar para resolver ese sistema. Y el resultado tiene una ponderación, pero no es algo que pueda perjudicarles mucho.

Por ello, realiza exámenes escritos, donde lo más importante es el desarrollo y la aplicación del método numérico al caso particular que se presenta, y exámenes con ordenador, donde no admite errores en el resultado. El peso del examen con ordenador en la calificación cambia de un 30% en el primer semestre, que cuenta con ejercicios más sencillos que pueden resolverse a mano, a un 60% en el segundo semestre, donde se encuentran con ejercicios más largos y complejos que requieren el uso de Matlab.

La necesidad que impone de obtener el resultado correcto en los exámenes con ordenador se justifica en su futuro profesional.

El resultado tiene que ser óptimo, de ley, porque si no un ingeniero en sistemas que haga un algoritmo y la respuesta sale mal, pues no funciona el sistema. Es más, el *cliente no ve el algoritmo, sino que ve el resultado y de acuerdo a ello dirá si es bueno o malo el sistema.*

El resultado de estas evaluaciones y las expresiones faciales de los estudiantes al final de la clase, son los aspectos que le sugieren si ha hecho o no un buen trabajo enseñando un método numérico concreto.

Dada la complejidad de la materia, el profesor intenta motivar a los estudiantes creando un clima de confianza en el aula que les permita expresar sus inquietudes, porque cree que "más allá del conocimiento que debe tener, el profesor debe ser una persona flexible, que de confianza al estudiante para preguntar sin temor a equivocarse". Esta creencia posiblemente derivada de su experiencia como estudiante.

Cuando yo fui estudiante tuve un profesor que era bastante rígido. Conocía mucho la materia, pero era difícil preguntarle algo por el temor a equivocarse, por el temor a hacer alguna pregunta tonta. Yo en cambio les digo: tonto no es el que pregunta tonterías, sino el que no pregunta, ese es el tonto. Equivóquense en clase, riámonos todos… Pero en clase, para que, cuando hagamos un examen o estemos allá fuera, graduados… Allá no debemos cometer errores.

La clase observada inició con el desarrollo de un taller de ejercicios pendientes de la clase anterior. Apoyándose en notas manuales, hizo una breve explicación teórica que no incluía el desarrollo matemático del método, planteó y resolvió parcialmente *toy problems* que fueron completados por los estudiantes. En sus explicaciones tuvo ciertos errores conceptuales y procedimentales que fueron corregidos por los estudiantes, que tuvieron un rol receptivo y a quienes motivó haciendo comentarios agradables acerca de los errores de cálculo que cometían. Por último, envió como tarea a casa la resolución en Matlab de los ejercicios realizados.

Tras la clase, manifestó haber delegado a los estudiantes, como trabajo grupal, la preparación y dictado de ciertas clases; siendo la clase anterior una de ellas, y por ello, abordaba solamente ciertos aspectos que los estudiantes no habían explicado.

En conclusión, el profesor opina que los métodos numéricos son una herramienta para resolver problemas reales de ingeniería y otras profesiones, enfatizando el proceso mecánico y la implementación de los métodos numéricos. Además, concibe a los métodos numéricos como un conjunto de reglas y procesos que, presentados de una manera adecuada, pueden llegar incluso a ser manejados por otros profesionales ajenos a las matemáticas y la ingeniería. Todo esto nos sugiere que tiene una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989). Su visión instrumentalista se refleja también en el uso del software que, si bien es considerado como un objetivo de aprendizaje, y por tanto considerado en las evaluaciones, es visto como una herramienta para realizar cálculos más exactos.

Por otra parte, su accionar en el aula es influenciado por sus creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos y sobre su enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, manifestó que los estudiantes aprenden principalmente a través de ejercicios de aplicación, enfatizando el proceso de cálculo manual. Por ello, en la clase desarrolló ejercicios de aplicación tipo *toy problems* con la participación de los estudiantes en la pizarra. Además, motivó a los estudiantes restando importancia a los errores de cálculo cometidos por él y/o sus estudiantes, algo coherente con su creencia de que el profesor debe ser una persona flexible, que dé confianza al estudiante para preguntar sin temor a equivocarse, característica que considera más importante que el conocimiento del profesor.

Sin embargo, se encontraron varias incoherencias entre las afirmaciones realizadas en la entrevista y las observaciones de aula. En concreto, la importancia del software manifestada en la entrevista, donde afirmó trabajar con el ordenador en todas las clases, contrastó con la ausencia de dicha práctica en la clase observada. Además, dijo trabajar con problemas de la vida profesional y hacer poco uso de los *toy problems*, pero solo desarrolló éste tipo de ejercicios en la clase.

El carácter informativo que en clase da a la asignatura orientándola a la adquisición de conceptos y reglas, su accionar como transmisor de contenidos y el del estudiante como receptor de los mismos, deja entrever un estilo de enseñanza acorde con tendencias didácticas de tipo tradicionalista (Contreras, 2009). No obstante, el hecho de que envíe a sus estudiantes preparar las clases, genera dudas de si quiere aplicar una enseñanza de tipo investigativa, o es negligencia en su trabajo, ya que afirmó que los libros que existen actualmente son difíciles de comprender, que los estudiantes presentan grandes lagunas en matemáticas y cometió errores conceptuales en la clase.

4.2. Análisis Comparativo

En primera instancia, en la tabla 4 se puede observar una relación entre la formación profesional de los profesores, su experiencia como docente de métodos numéricos, el hecho de haber elegido o no enseñar esta asignatura, y sus concepciones y creencias sobre los métodos numéricos.

Tabla 4: *Formación, experiencia docente, elección de la asignatura y creencias sobre la naturaleza de los métodos numéricos.*

Universidad (Categoría)	*Profesor*	*Formación*	*Experiencia enseñanza asignatura*	*Elección de asignatura*	*Creencia sobre la asignatura*
U1 (A)	Samuel	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Métodos numéricos *Doctorado*: Aplicación de los métodos numéricos a la ingeniería.	8	Opción propia	Agradable Resolución de problemas
U2 (A)	Rolando	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Ciencias	38	Opción propia	Agradable Platónico e instrumentalista
	Alan	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Investigación matemática.	30	Opción propia	Agradable Platónico e instrumentalista
	Marcelo	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Investigación matemática, Sistemas de información gerencial, y Administración de empresas.	5	Opción propia	Agradable Platónico e instrumentalista
U3 (A)	Orlando	*Grado*: Licenciatura en educación. *Máster*: Educación superior, Enseñanza de la matemática.	6	Opción propia	Agradable Instrumentalista
	Fernando	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Enseñanza de la matemática.	3	Opción propia	Agradable Instrumentalista con inclinación a resolución de problemas
U4 (B)	Rudy	*Grado*: Licenciatura en educación. *Máster*: Educación.	1	Asignada	Complejos Instrumentalista
U5 (B)	Alberto	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Ingeniería de la construcción.	1,5	Asignada	Complejos Instrumentalista
	Lorena	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Docencia y gerencia en educación superior.	0	Asignada	Complejos Instrumentalista
	Romina	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Gestión de la construcción.	0	Asignada	Complejos Instrumentalista
U6 (C)	Antonio	*Grado*: Licenciatura en educación. *Máster*: Educación matemática, Formación del profesorado.	2	Asignada	Complejos Instrumentalista
U7 (C)	Sandro	*Grado*: Ingeniería *Máster*: Gerencia de tecnologías de la información.	2	Asignada	Complejos Instrumentalista

En este sentido observamos dos grandes grupos. Por un lado, los profesores de las universidades de categorías B y C, si bien tienen formación de posgrado, pertenece a áreas distintas a las matemáticas. Adicionalmente, cuentan con muy poca o nula experiencia en el dictado de la asignatura. La conjunción de conocimiento superficial del material y la falta de experiencia docente propicia que consideren que los métodos numéricos son complejos, con una visión instrumentalista de los mismos, es decir, considerándolos como un conjunto de fórmulas a utilizar para resolver problemas.

En contraposición, los profesores de las universidades de categoría A escogieron impartir la asignatura porque la consideran agradable. Sin embargo, la visión de los métodos numéricos es variada. Por un lado, encontramos que el profesor con mayor formación académica relacionada directamente con los métodos numéricos, es el único que presenta solamente una visión de resolución de problemas. En contraste, los profesores con mayor experiencia docente presentan visiones platónicas e instrumentalistas de esta materia. El resto, al igual que sus compañeros de las universidades B y C, presentan una visión instrumentalista; presentando adicionalmente uno de ellos, visión de resolución de problemas. Con respecto a la formación, los profesores de las universidades de categoría A presentan formación de posgrado más relacionada con las matemáticas que el resto.

Este análisis nos sugiere que, a mayor formación acorde a los métodos numéricos y mayor experiencia en su enseñanza, mejor disposición hacia su enseñanza y concepción sobre su naturaleza, según la jerarquía de las categorías propuesta por Ernest (1989).

Por otro lado, en las tablas 5 y 6 se ha sintetizado las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos manifestadas por los profesores de universidades de categoría A y los profesores de las categorías B y C, respectivamente. Como se puede apreciar, todos los profesores coinciden en que la guía docente contiene los métodos numéricos que deben enseñarse, si bien algunos profesores de las universidades de categoría C indicaron que no tenían conocimiento suficiente de la materia como para juzgar dicha guía docente. Además, algunos profesores creen que se deben enseñar aquellos que considera más útiles.

La mayoría de los profesores coinciden en las creencias de que los métodos numéricos se aprenden mediante su aplicación en la solución de “problemas”, algo que, unido a la realización de *toy problems* o “ejercicios” manualmente, es acorde con su visión instrumentalista de los métodos numéricos. De hecho, tres de ellos indican la necesidad de realizar los cálculos manualmente. Los dos profesores de categoría A que ven esta materia como un campo de resolución de problemas creen que el estudiante aprende mediante la programación e implementación computacional, por lo que el software informático tiene gran importancia para ellos en el aula. En contraste, uno de los profesores prioriza el aprendizaje de los aspectos teóricos, acorde con su visión platónica de los métodos numéricos. Otras creencias particulares que se observan son la de que el estudiante aprende a través del análisis, a través de la investigación o de manera autónoma.

En cuanto a las actividades que se deberían realizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos, casi todos los profesores indican que se debe comenzar con una exposición teórica de los métodos numéricos. En este sentido, aunque la mayoría opina que debe realizar el desarrollo matemático de los métodos numéricos, algunos profesores, de las universidades de categoría B y C manifiestan creencias negativas sobre el desarrollo matemático del método numérico, como considerarlo "una pérdida de tiempo. Es complicado y no es necesario porque "no son matemáticos". Además, estos mismos profesores tienen creencias negativas acerca de los estudiantes como: no tienen la capacidad para comprender el desarrollo matemático, olvidan fácilmente lo aprendido. Estas creencias estarían relacionadas con la creencia de que los métodos numéricos son complejos, que como se vio anteriormente, posiblemente obedece a la falta de formación matemática y muy poca experiencia de los profesores de estas categorías. Por otro lado, todos afirman utilizar *toy problems* o ejercicios para aplicar los métodos numéricos. La mayoría de los profesores, exige la resolución manual de estos ejercicios, aunque algunos de ellos lo complementan con su resolución con el ordenador en sesiones prácticas.

Además, salvo un profesor de universidad categoría A, que considera únicamente la clase teórica a pesar de tener disponible un laboratorio de computación para hacer prácticas, el resto de profesores no dedican tiempo en clase a este aspecto por no contar con el espacio ni los recursos informáticos necesarios, porque opinan que los estudiantes saben programar o porque es necesario que dominen primero los referentes teóricos y suplir algunas carencias en el conocimiento matemático de los estudiantes. Esto hace que la mayoría de estos profesores solo evalúen la asignatura por medio de un examen escrito.

No obstante, la mayoría de los profesores creen que se debe motivar el aprendizaje en los estudiantes haciéndoles reflexionar sobre la utilidad de los métodos numéricos en

Tabla 5: *Creencias manifestadas por los profesores de las universidades de categoría A respecto a la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos.*

Profesor	*Samuel*	*Rolando*	*Alan*	*Marcelo*	*Orlando*	*Fernando*
Creencias sobre qué métodos numéricos enseñar.	Básicos, comprensibles y útiles. Los correspondientes a temas de la guía docente.	De simples a complejos. Los correspondientes a temas de la guía docente.	Que sean útiles. Los correspondientes a temas de la guía docente.	Los correspondientes a temas de la guía docente.	Los correspondientes a temas de la guía docente.	Lo más importante de temas de guía docente. Adicionó método de diferencias finitas.
Creencias sobre cómo se aprende	Mediante programación e implementación computacional. Analizando estabilidad y convergencia.	Aplicándolos en la solución de problemas. Interés en su utilidad.	Aplicándolos y calculando manualmente.	Estudiando la teoría. Aplicándolos en la solución de problemas.	Aplicándolos en la solución de problemas. Mediante el aprendizaje autónomo.	Aplicándolos y calculando manualmente. Con habilidad para programar.
Creencias sobre actividades que se deberían realizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos.	Clases teóricas y prácticas en ordenador. Clase magistral para teoría. Uso de *toy problems*. Desarrollo matemático del método. Trabajo grupal para implementación de métodos en ordenador. Motivar reflexionando sobre utilidad de los métodos numéricos, o relatar anécdotas matemáticas. Evaluación teórica y práctica en ordenador.	Clases teóricas y prácticas en ordenador. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Uso de *toy problems*. Preguntas orales al final de la clase. Motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. Exámenes teóricos, lección con uso de software, enfatiza precisión en resultado.	Clases teóricas y prácticas en ordenador. Estudiante consulta tema previamente. Plantea tema y objetivo. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Uso de *toy problems*. Motivar mostrando vídeos de aplicaciones a la ingeniería. Tarea de refuerzo a casa. Evaluaciones teóricas, con análisis de convergencia.	Clases solamente teóricas. Repaso de prerrequisitos. Clase expositiva para teoría. Uso de ilustraciones y ejemplos. Uso de *toy problems*. Desarrollo matemático del método. Motivar a través de las demostraciones. Evaluaciones teóricas, considera análisis de error y convergencia.	Clases teóricas y prácticas en ordenador. Diagnóstico de prerrequisitos. Clase expositiva para teoría. Problema modelo. Desarrollo matemático del método. Taller de ejercicios. Motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. Evaluación teórica y práctica en ordenador. Valora más el proceso que la respuesta.	Clases teóricas y prácticas en ordenador. Repaso de clase anterior. Plantea tema y objetivo. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Taller de ejercicios. Prueba de clase. Motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. Evaluaciones teóricas, valora desarrollo manual de ejercicios.

Tabla 5: *Creencias manifestadas por los profesores de las universidades de categoría A respecto a la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos (continuación).*

Profesor	*Samuel*	*Rolando*	*Alan*	*Marcelo*	*Orlando*	*Fernando*
Actividades realizadas en clase observada.	Clase completamente teórica. Clase magistral para teoría. Desarrollo matemático del método. Uso de *toy problems*. Papel receptivo de los estudiantes. Motivó relatando anécdotas matemáticas. No evaluó.	Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Uso de *toy problems*. Clase práctica en el ordenador. Estudiante asume papel de reproductor de procesos. No motivó. No evaluó.	Clase expositiva para teoría. Estudiante consultó tema previamente. Motivó resaltando utilidad del tema. Desarrollo matemático del método, apoyándose en diapositivas. Uso *de toy problems*. Clase práctica en ordenador. Tarea de refuerzo a casa. Papel del estudiante como reproductor de procesos. No evaluó.	Clase completamente teórica. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Todas estas deducciones fueron escritas por el profesor en la pizarra para que los estudiantes tomaran apuntes. Papel receptivo de los estudiantes. Papel del profesor como especialista y transmisor de contenidos. No motivó. No evaluó.	Clase expositiva para teoría. Uso de *toy problems*. No realizó el desarrollo matemático del método. Clase práctica en ordenador. Papel de estudiante como reproductor de procesos. Papel del profesor como transmisor de contenidos y de procesos lógicos usando medios tecnológicos. No motivó. No evaluó.	Repaso de lo visto en clase anterior. Desarrollo matemático del método. Motivó resaltando utilidad del tema. Taller de ejercicios. Uso de *toy problems*. No realizó implementación computacional. Papel del profesor como especialista y transmisor de contenidos. Papel receptivo de los estudiantes. No evaluó.
Creencias sobre capacidad del estudiante.	Tiene dificultad para aprender de manera autónoma. El buen estudiante gusta de la materia. Busca estrategias para resolver problemas utilizando los métodos numéricos.	Tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante es responsable, gusta de la materia.	No es capaz de realizar el desarrollo matemático, No interpreta problemas. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante es responsable, obtiene buenas calificaciones.
Cuándo cree que ha realizado un buen trabajo.	Funciona la implementación del algoritmo realizada por el estudiante y éste responde correctamente a preguntas.	El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.	El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.	Las preguntas de los estudiantes Calificaciones obtenidas por los estudiantes. Resultados de la evaluación docente.	El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.	Estudiantes motivados e interesados. Calificaciones obtenidas por los estudiantes.
Cambios que cree ha tenido la enseñanza de métodos numéricos.	Desarrollo de software especializado.	Desarrollo de software especializado.	Más aplicaciones a problemas de ingeniería, que propician el razonamiento.	Desarrollo de software especializado.	Permitir al estudiante tener un criterio profesional mucho más científico y fiable.	Desarrollo de nuevos métodos iterativos.
Tendencia Didáctica	Tradicionalista con sesgo tecnológico e investigativo	Tradicionalista Tecnológico	Tecnológico	Tradicionalista	Tecnológico	Tradicionalista Tecnológico

Tabla 6: *Creencias manifestadas por los profesores de las universidades de categoría B y C respecto a la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos.*

Profesor	*Rudy*	*Alberto*	*Lorena*	*Romina*	*Antonio*	*Sandro*
Creencias sobre qué métodos numéricos enseñar.	Básicos y sencillos. Los correspondientes a temas de la guía docente.	Que sean útiles. Los correspondientes a temas de la guía docente.	Los correspondientes a temas de la guía docente.	Los correspondientes a temas de la guía docente.	Los correspondientes a temas de la guía docente y convergen más rápido.	Los correspondientes a temas de la guía docente.
Creencias sobre cómo se aprende	Orientando a los estudiantes para que superen sus deficiencias y adquieran adecuadamente los contenidos y competencias de la materia.	Aplicándolos en la solución de problemas.	A través del análisis	Aplicándolos en la solución de problemas.	Aplicándolos en la solución de problemas. Mediante la investigación.	Aplicándolos y calculando manualmente.
Creencias sobre actividades que se deberían realizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos.	Clases teóricas y prácticas en el ordenador. Clase expositiva para teoría. No realiza el desarrollo matemático del método, es pérdida de tiempo. Taller de ejercicios. Motivar mediante uso del ordenador que permite agilizar cálculos. Evaluación teórica y práctica en ordenador.	Clases solamente teóricas. Plantea tema y objetivo. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método. Desarrollo de ejemplos. Taller de ejercicios. Motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. Exámenes teóricos. Valora más el proceso que la respuesta.	Clases solamente teóricas. Estudiante consulta el tema previamente. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático de métodos sencillos, uso de material de apoyo incluidos vídeos tutoriales de la web. Taller de ejercicios. Motivar reflexionado sobre autoconfianza y la necesidad de investigar. Tarea de refuerzo a casa. Exámenes teóricos, centrados en el análisis exhaustivo.	Clases solamente teóricas. Registro de asistencia. Recepción de tareas. Plantea tema. Clase expositiva para teoría. Desarrollo de ejercicios de aplicación a la profesión. Motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. No realiza desarrollo matemático del método porque cree que es complicado. Taller de ejercicios. Evaluaciones teóricas, con ejercicios tipo *toys problems*.	Clases teóricas y prácticas en el ordenador. Plantea tema y objetivo. Repaso de prerrequisitos. Clase magistral para teoría. Uso de *toy problems*. Motivar mostrando vídeos de aplicaciones a la ingeniería. Cree que no es necesario el desarrollo matemático del método porque “no son matemáticos”. Evaluaciones teóricas y prácticas en el ordenador. Valora resultado.	Clases teóricas y prácticas en el ordenador. Clase expositiva para teoría. Desarrollo de ejemplo. No realiza desarrollo teórico. Taller de ejercicios. Motivar creando un clima de confianza en el aula. Evaluaciones teóricas y prácticas en el ordenador.

Tabla 6: *Creencias manifestadas por los profesores de las universidades de categoría B y C respecto a la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos (continuación)*

Profesor	*Rudy*	*Alberto*	*Lorena*	*Romina*	*Antonio*	*Sandro*
Actividades realizadas en clase observada.	Clase expositiva para teoría. No completó su desarrollo matemático. Uso de *toy problems*. Papel del estudiante como reproductor de procesos. Papel del profesor como transmisor de contenidos y de procesos lógicos usando medios tecnológicos. No evaluó.	Clase expositiva para teoría. No realizó desarrollo matemático del método. Desarrollo de ejemplos. Uso de *toy problems*. Papel del profesor como transmisor de contenidos. Papel receptivo de los estudiantes. No motivó. No evaluó.	Preguntas sobre consulta enviada. Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método apoyándose en diapositivas. Video tutorial de la web sobre ejercicios de aplicación. Uso de *toy problems*. Papel receptivo de los estudiantes. No motivó. No evaluó.	Clase solamente teórica. Plantea tema y objetivo. Repaso de lo visto en clase anterior. Motivó reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos. Dictado de teoría del texto guía. Copia en pizarra gráficos, fórmulas y *toy problems* resueltos en el libro. Papel receptivo de los estudiantes. No evaluó.	Clase expositiva para teoría. Desarrollo matemático del método apoyándose en diapositivas. Uso de *toy problems*. Papel del profesor como transmisor de contenidos. Papel receptivo de los estudiantes. Motivó mostrando video sobre utilidad de las matemáticas. Tarea de refuerzo a casa. No evaluó.	Clase expositiva para breve explicación teórica apoyándose en notas manuales. No hace desarrollo matemático del método. Uso de *toy problems*. Motivó creando un clima de confianza en el aula. Envió como tarea a casa implementación en Matlab de ejercicios realizados manualmente. Papel del profesor como transmisor de contenidos. Papel receptivo de los estudiantes.
Creencias sobre capacidad del estudiante.	No es capaz de comprender el desarrollo matemático, de resolver manualmente un problema y de analizar su solución. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante muestra interés e iniciativa, utiliza el conocimiento para resolver problemas.	No es capaz de analizar. El buen estudiante es analítico, utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Olvida fácilmente lo aprendido. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.	Olvida fácilmente lo aprendido. El buen estudiante es investigador, creativo e innovador.	El estudiante tiene carencias de conocimientos previos. El buen estudiante utiliza el conocimiento para resolver problemas.
Cuándo cree que ha realizado un buen trabajo.	Estudiantes motivados El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.	El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas.	Los estudiantes no tienen mayores inquietudes al finalizar la clase.	El estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas. Calificaciones obtenidas por los estudiantes.	El estudiante comprende la utilidad de lo aprendido.	Calificaciones obtenidas por los estudiantes. Expresiones de satisfacción de los estudiantes.
Cambios que cree ha tenido la enseñanza de métodos numéricos.	Desarrollo de software especializado.	Su poca experiencia no le permite comparar.	Desarrollo de software especializado.	Utilidad e importancia actual.	Desarrollo de software especializado.	Desarrollo de software especializado.
Tendencia didáctica	Tradicionalista Tecnológico	Tradicionalista	Tradicionalista Tecnológico	Tradicionalista	Tradicionalista	Tradicionalista

la profesión.

Al comparar las creencias que acabamos de analizar con las actividades realizadas por el profesor en la clase observada, podemos determinar que los profesores de las universidades de categoría A tienen una práctica docente más acorde con las creencias manifestadas que los profesores de las universidades de categoría B y C.

Por ejemplo, uno de los profesores de universidad de categoría B manifestó las creencias de que se debe motivar reflexionado sobre utilidad de los métodos numéricos y que es importante realizar el desarrollo matemático. Sin embargo, en la clase observada no mencionó utilidad alguna del método explicado ni desarrolló matemáticamente dicho método, limitándose a escribir la fórmula en la pizarra, indicando lo que significaba cada uno de los términos usados y realizando problemas de aplicación directa.

En la metodología (3.2.2) se especificó que, en caso de discrepancias entre las creencias manifestadas por el profesor y su práctica en el aula, el syllabus o guía docente nos permitirá determinar si el accionar docente responde al seguimiento estricto del mismo. De acuerdo a ello, se revisó el syllabus de la universidad de este profesor, en el cual consta el desarrollo matemático de la fórmula numérica como parte de los contenidos y la aplicación de los métodos numéricos a problemas de ingeniería civil como parte del objetivo de la asignatura. Por lo que su praxis no corresponde al seguimiento del syllabus.

De acuerdo con lo manifestado en las entrevistas y lo observado en la clase, se ha podido determinar en todos los profesores un estilo de enseñanza predominantemente tradicionalistas (Contreras, 2009). Unos pocos, si bien son tradicionalista en sus clases teóricas, en la parte práctica tienen inclinaciones tecnológicas e investigativas.

Finalmente, tenemos que la mayoría de los profesores entrevistados, acorde con su visión instrumentalista de los métodos numéricos, creen que han hecho un buen trabajo enseñándolos cuando el estudiante puede aplicar lo aprendido en la resolución de problemas sencillos. Además, consideran que el desarrollo del software especializado es el cambio más significativo que ha tenido la enseñanza de los métodos numéricos en los últimos tiempos. Profundicemos un poco más en las creencias que, sobre el uso del software especializado, tienen los profesores participantes en este estudio (Tabla 7).

Tal y como puede verse en la tabla 7, casi todos los profesores creen que el uso del software es necesario para el aprendizaje de los métodos numéricos, por lo que lo consideran un objetivo de aprendizaje, acorde con el rol dado en las respectivas guías docentes.

Tabla 7: *Creencias sobre el uso del software especializado.*

Profesor	*Creencias sobre el uso del software especializado en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos.*
Samuel	Objetivo de aprendizaje. Necesario para el aprendizaje de los métodos numéricos. La programación de los métodos es un medio y un fin de su aprendizaje. implementación de algoritmos es 50% de la calificación de la asignatura. Uso de Matlab y Octave.
Rolando	Objetivo de aprendizaje. Herramienta para agilizar cálculos. Usa Python y Matlab. Los estudiantes deben utilizar algoritmos ya codificados. No es considerado en los exámenes. Considerado en lecciones con peso del 25%.
Alan	El software es útil para la aplicación, pero para el aprendizaje no. Se debe programar el método una vez que se ha dominado el cálculo manual. Herramienta para agilizar cálculos. Usa Matlab. Los estudiantes deben utilizar algoritmos ya codificados. No es considerado en los exámenes.
Marcelo	Prioriza las explicaciones teóricas antes que la implementación computacional. Es una pérdida de tiempo usar software en clase. Es una herramienta de cálculo. Personalmente usa C. Sharp y Visual Studio.net, los estudiantes pueden utilizar cualquier software. Los estudiantes deben utilizar algoritmos ya codificados. No es considerado en los exámenes.
Orlando	Objetivo de aprendizaje. Herramienta de apoyo al aprendizaje. Se debe programar el método para comprobar respuestas. Considerado en las evaluaciones. Peso del 25%-50%. Usa Octave, Scilab y Matlab.
Fernando	Objetivo de aprendizaje no prioritario. Herramienta de apoyo al aprendizaje. Se debe programar el método una vez que se ha dominado el cálculo manual. Usa Octave, Scilab y Matlab. No tiene peso en la calificación.
Rudy	Objetivo de aprendizaje. Herramienta para agilizar cálculos. Herramienta para motivar a los estudiantes. Uso del excel. Considerado en las evaluaciones. Peso del 60%.
Alberto	Herramienta para agilizar cálculos. Utiliza Matlab, Lingo y/o Excell. Proyectar el ejercicio que trae previamente implementado. No es considerado en los exámenes. Peso del 40% en pequeñas investigaciones bibliográficas.
Lorena	Herramienta que permite verificar resultados. Utiliza aplicaciones en los celulares. No es considerado en los exámenes.
Romina	Se debe programar el método una vez que ha dominado el cálculo manual. No usa software en clase por falta de recursos. La implementación de los métodos numéricos en Matlab lo propone como trabajo de casa. No es considerado en los exámenes.
Antonio	Herramienta para agilizar cálculos. Al final de la clase, o como tarea, implementa en Matlab ejemplos de clase. No tiene peso definido en la calificación. Considerado en ciertas evaluaciones.
Sandro	Objetivo de aprendizaje. Herramienta para realizar cálculos más exactos. Considerado en los exámenes (30% de la calificación en primer semestre, 60% en segundo semestre).

Si bien es cierto que el software sirve para agilizar cálculos, algunos profesores consideran que su fin es únicamente ese: agilizar cálculos y contrastar resultados. Es decir, lo ven únicamente como una “calculadora”, no considerando necesario programar y que se deben aplicar programas ya diseñados, enfatizando su uso únicamente cuando domina el cálculo manual. Por otro lado, tal y como se dijo anteriormente, varios profesores creen que los estudiantes tienen capacidad para programar los métodos de manera autónoma, por lo que mandan esta tarea para casa.

Sin embargo, el profesor con mayor formación en métodos numéricos ve la programación de los mismos como un medio y un fin del aprendizaje. En este sentido, si bien es consciente de la gran cantidad de métodos programados existentes en Internet, considera que programar el método ayuda a profundizar en su conocimiento y permite elegir qué programa utilizar (de todos los disponibles en Internet).

Dada la importancia del uso de la tecnología y particularmente del software especializado en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos, y el hecho de no haber podido observar en todos los casos una clase práctica, nos ha llevado a considerar lo manifestado al respecto en las guías docentes. En este sentido encontramos que usar el software para resolver problemas de ingeniería forma parte de los objetivos de todas las guías docentes, si bien la redacción de dichos objetivos de aprendizaje permite que el profesorado vea la programación de los métodos como algo opcional.

Cabe indicar que solamente la mitad de clases tuvieron prácticas en el ordenador, y en la mayoría de las mismas el accionar del profesor estuvo acorde con las creencias manifestadas sobre uso del software.

5. Conocimiento del profesor sobre métodos numéricos

5.1. Conocimiento de los profesores entrevistados sobre algunos conceptos de métodos numéricos

Para determinar el grado de conocimiento de conceptos claves de métodos numéricos que tienen los doce profesores participantes en esta investigación, en la entrevista se les pidió que dijeran lo que le sugieren sobre la enseñanza-aprendizaje de la integración numérica las siguientes palabras: aproximación, nodo, fórmula, ajuste, nube de puntos, redondeo, overflow, convergencia, peso, malla, cancelación, estabilidad, recurrencia, uso de escalas en los gráficos, números máquina, implementación, paso, condicionamiento, discretización y algoritmo.

Las respuestas dadas a estos conceptos por cada uno de los profesores, fueron clasificadas, con la colaboración de dos expertos en métodos numéricos, en tres niveles: desconocimiento del tema (D), cuando el profesor no responde, confunde con otro concepto o la respuesta no tiene relación con lo preguntado; algún conocimiento del tema (AC), si la respuesta dada no permite asegurar que el profesor posee dicho conocimiento, pero se intuye por las afirmaciones usadas que no hay desconocimiento; y conocimiento del tema (C), cuando la respuesta es una definición informal pero correcta del concepto, a través de ejemplos o enunciando sus propiedades o características.

Por ejemplo, en caso del término *nodo*, la mayoría de los profesores no dieron una contestación acorde a la definición de este concepto en integración numérica. Por ejemplo, indicaron de forma genérica que era “un punto”, “interconexión entre varias actividades” o no contestaron. Samuel, indicó de forma escueta que se trata de un “punto en la discretización”, y Marcelo lo particularizó en un problema concreto, “cuando uno está, por ejemplo, desarrollando un problema con valores en la frontera está la malla, ahí están los nodos”, por lo que consideramos que conoce el tema. En el caso de Alan se consideró que tenían algún conocimiento ya que confundió el concepto con un método para obtener nodos.

En el concepto *implementación*, únicamente Marcelo y Alan mostraron conocimiento del tema, al indicar, por ejemplo, que “es expresar en cierto lenguaje de programación las instrucciones que me dice el algoritmo que sean ejecutadas”. El resto de los profesores de universidades de categoría A mostró algo de conocimiento, con ejemplo, Fernando “siempre implementamos, o sea, la programación puede ser implementación". En contraste, ejemplos de desconocimiento fue la respuesta de Sandro, que indicó que le sugiere "integración y matrices".

En el caso de los *números máquina*, un ejemplo de respuesta que demuestra conocimiento del concepto son los ejemplos de Samuel y Marcelo, por ejemplo, este último nos indica

> *Hay que tener presente, y yo siempre les digo eso a los estudiantes que desde el mismo momento que están usando el computador ya están cometiendo un error. Porque, por ejemplo, supongamos que la solución de una ecuación es un número irracional, el computador solo usa números racionales. Siempre intento que el estudiante tenga presente el tema de la aritmética computacional y del error de redondeo que está inherente.*

En la tabla 8 se muestra el resultado de la calificación realizada, si bien se pueden consultar todas las respuestas en el Anexo I.

Tabla 8: *Conocimientos de los profesores sobre conceptos de métodos numéricos.*

Concepto	Samuel	Rolando	Alan	Marcelo	Orlando	Fernando	Rudy	Alberto	Romina	Lorena	Antonio	Sandro
Aproximación	**C**	AC	AC	**C**	D	D	D	**C**	D	**C**	D	D
Nodo	**C**	D	AC	**C**	D	D	D	D	D	D	D	D
Fórmula	**C**	D	AC	D	AC	D	D	D	D	D	D	D
Ajuste	**C**	AC	**C**	D	AC	D	D	AC	D	D	D	AC
Nube de puntos	**C**	**C**	**C**	D	AC	AC	D	D	D	D	D	D
Redondeo	**C**	**C**	**C**	D	AC	D	D	AC	**C**	AC	AC	D
Overflow	**C**	**C**	**C**	AC	AC	D	D	D	D	D	D	D
Convergencia	**C**	AC	**C**	**C**	AC	D	D	AC	D	D	D	D
Peso	**C**	D	**C**	**C**	**C**	D	D	D	D	D	D	D
Malla	**C**	D	**C**	**C**	D	AC	D	D	D	D	AC	D
Cancelación	**C**	D	AC	D	D	D	D	D	D	D	D	D
Estabilidad	**C**	D	**C**	**C**	D	D	D	D	D	D	D	D
Recurrencia	AC	D	**C**	**C**	D	D	AC	D	D	D	D	D
Uso de escalas en los gráficos	D	D	**C**	AC	AC	D	D	D	D	D	D	D
Números máquina	**C**	D	D	**C**	D	AC	D	AC	D	D	AC	D
Implementación	AC	AC	**C**	**C**	AC	AC	D	D	D	D	D	D
Paso	AC	D	**C**	**C**	D	AC	D	D	D	D	D	D
Condicionamiento	**C**	D	**C**	AC	D	D	D	D	D	D	D	D
Discretización	**C**	AC	**C**	**C**	D	D	D	D	D	D	D	D
Algoritmo	**C**	D	AC	**C**	**C**	**C**	D	AC	D	D	D	D

C=Conocimiento del tema, AC=Algún conocimiento del tema, D=Desconocimiento del tema.

Como puede observarse en la tabla 8, los profesores de las universidades de categoría B y C, tienen escaso dominio de la materia, algo que se correlaciona con su falta de formación matemática y de experiencia. Esto es acorde con su disposición negativa hacia la asignatura y que la consideren como una materia complicada. En este sentido, solo dan respuestas adecuadas a conceptos muy generales como redondeo y aproximación. En contraste, los profesores de universidades de categoría A muestran dominio de al menos la mitad de los conceptos planteados, siendo Samuel y Alan, profesores con mayor formación académica relacionada con los métodos numéricos o experiencia docente, los que demuestran mayor dominio.

Esto sugiere que, dado que ninguno de los profesores proviene de licenciaturas o grados en matemáticas, la relevancia de la formación de posgrado en matemáticas es muy alta, lo cual se puede ver reflejado en los casos de Samuel, Alan e incluso Marcelo. No obstante, si bien podría pensarse que la experiencia docente mejora el grado de dominio de la asignatura, el caso de Rolando muestra que una larga trayectoria como profesor de esta asignatura no garantiza dominarla.

5.2. Conocimiento del tema de integración numérica manifestado por un profesor

A continuación, se muestra el análisis del Conocimiento de los Temas de integración numérica manifestado por el profesor en sus clases, triangulando los resultados de las observaciones de la actuación del profesor en clase con lo manifestado en la entrevista y haciendo la respectiva comparación con el CIN y el análisis del Conocimiento del Tema (KoT) de Integración Numérica realizados en los capítulos 1 y 2, respectivamente.

En sus clases el profesor, acorde con el CIN, indicó que las fórmulas de cuadratura son expresiones que permiten obtener como resultado el valor aproximado de la integral y la estimación del error que se comete y consideró como estructura las funciones integrables en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Por limitaciones de tiempo, se centró únicamente en las cuadraturas que constan en la guía docente de la asignatura. En concreto, de las cuadraturas consideradas en el CIN, comenzó abordando las de Newton-Cotes: trapecios, Simpson 1/3, Simpson 3/8, y sus correspondientes fórmulas compuestas. Las imparte en el orden dado porque:

Normalmente es más sencillo explicar primero el método del trapecio, ya que la función que quiere integrar la aproximamos utilizando un polinomio de grado 1, después Simpson 1/3, porque aproxima la función con un polinomio de grado 2 y luego Simpson 3/8, que aproxima la función con un polinomio de grado 3. Entonces suele ser más sencillo ir en ese orden.

Sin embargo, en lugar de partir de la expresión general de las fórmulas de Newton-Cotes y posteriormente particularizar a los nodos considerados en cada método (capítulo 1), el profesor realizó la construcción concreta para varios casos particulares, sin abordar el caso general. La Figura 7 ejemplifica el modo de construir la fórmula de Simpson 1/3, donde se aprecia dominio del razonamiento deductivo, notaciones semejantes a las del CIN y el uso de los sistemas de representación verbal, simbólico, algebraico y gráfico. Tras obtener cada una de las fórmulas de Newton-Cotes simples, aplicó razonamiento analógico para obtener las respectivas fórmulas compuestas.

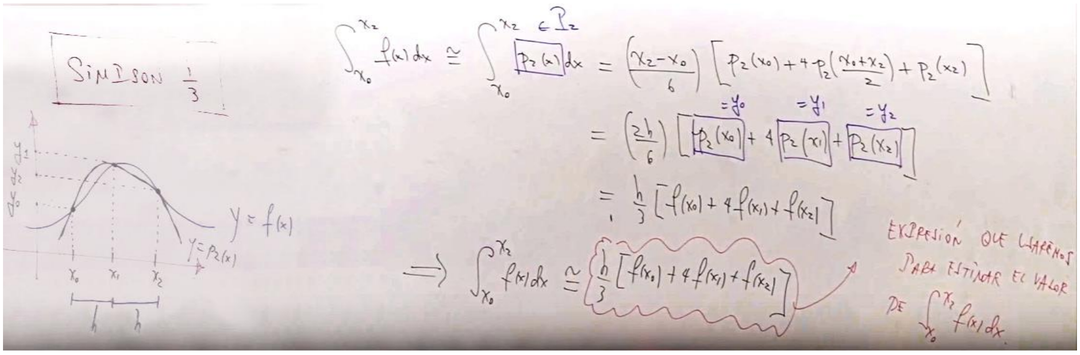

***Figura 7**: Construcción de la fórmula de Simpson 1/3.*

En cuanto a la estimación del error, no mencionó la tolerancia, ni por tanto, cómo determinar el número de subintervalos que debe tomar para alcanzar una tolerancia establecida para un problema determinado. Al preguntarle en la entrevista la razón de ello, nos indicó:

En clases anteriores les dije que la tolerancia es la cota máxima del error permitido y ya no lo repito más. […] No quiero perder tiempo al estar hablando de lo mismo. […] Tendría que preguntar a otros a ver si lo hacen, pero en tantas reuniones que he estado de coordinación, por ejemplo, cuando se preparan exámenes y se evalúa a los estudiantes, nunca hay una pregunta que le diga "si usted desea que el error sea máximo de tanto, ¿cuántos subintervalos debería de tener?". Pero sí es importante.

En las cuadraturas gaussianas el profesor construye solamente la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre que es a su vez es un caso particular de la cuadratura de Gauss-Jacobi. Para ello, presenta los polinomios de Legendre como una familia de polinomios ortogonales que denota $\{p_0, p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}\}$, y proporciona algunos ejemplos:

Algunos de estos polinomios, anótenlos a ver, por ejemplo $p_0(x)$ *es 1,* $p_1(x)$ *es x,* $p_2(x)$ *es* $\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$, $p_3(x)$ *es* $\frac{1}{2}\left(5x^2-3x\right)$, *voy a indicar algunos más, ya,* $p_4(x)$ *es* $\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$, *y un último* $p_5(x)$ *sería* $\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$, *y así [...]*

Hay una ecuación recursiva que permite en base a los primeros polinomios encontrar los polinomios siguientes dentro de la familia de Legendre, de esta familia de polinomios ortogonales de Legendre, ¿ok? pero no es tan importante conocer exactamente cuáles son los polinomios sino la teoría detrás de ellos. Cómo usar esta familia ortogonal de polinomios dentro de la integración numérica es realmente la parte que nos interesa.

El profesor no explica al estudiante cómo se obtienen dichos polinomios ni facilita la relación de recurrencia que cumplen, la cual es fundamental para un cálculo computacionalmente eficiente de nodos y pesos. Incide en el hecho de que $p_{n+1}(x)$ tiene n+1 raíces reales distintas en (-1,1) que denota como $-1 < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1,$ resultado que utiliza para justificar la utilidad de estos polinomios en integración numérica. Su objetivo es determinar la fórmula $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ + término del error.

El profesor demuestra que la fórmula obtenida es exacta para polinomios de grado menor o igual que 2n+1, indicando que "con cuadratura de Gauss se obtiene un grado de precisión al menos 2n+1", expresión que repite al desarrollar varios casos particulares de n.

Tal y como lo expresa el profesor el estudiante puede pensar que estas fórmulas podrían alcanzar un grado de exactitud superior o igual a 2n+2, lo cual no es cierto (Corolario 1, Gautschi, 2012). En la entrevista se le preguntó sobre este error. Inicialmente se mostró sorprendido y después de revisar el vídeo admitió su error y lo achacó a un despiste.

El profesor construye la fórmula de Gauss-Legendre para los valores n = 0, 1 y 2. Mostramos a continuación el proceso seguido por el profesor en la clase para n = 0, 1:

Vamos a hacer el análisis para que vean. ¿Quién es el p_1? $p_1 = x$. Ese tiene únicamente una raíz. ¿Cuál es raíz en el intervalo $[-1,1]$? Su única raíz es cero. Quiere decir que solo trabajamos con x_0=0. Entonces, $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0)$ *. Pero ya estoy diciendo que x_0=0, ¿qué necesito encontrar aquí? w_0 ¿quién es w_0? Tendríamos que derivar p_{n+1}, en este caso el p_1, ¿Cuál es la derivada de x?* $p_1'(x) = 1$. *Entonces no me va a importar en cual evalúo, me da 1. Bueno ahí solo tengo que evaluar en 0 me da 1, lo dejo así.*

Y ahí tendríamos que $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x-0} dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = 1-(-1) = 2.$

Entonces, $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0).$ *Obviamente esa fórmula raramente la vamos a usar. Tiene precisión de grado 1, le ponemos aquí, al menos precisión de grado 1.*

Vamos con el siguiente valor de n que sería... ¿cuánto? El siguiente es n=1. Quiere decir que nos interesa el polinomio $p_2(x).$ *A ver si alguien me lo dicta ahí.*

Es $p_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$ *Necesitamos derivarlo, ¿quién sería* $p_2'(x)$ *?*

Sería $p_2'(x) = \frac{1}{2}$ *por 6x = 3x.*

Entonces $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1).$ *Entonces, hay que encontrar las 2 raíces.*

Y, ¿cómo encontramos las raíces? Se ve clarito que es $3x^2 - 1 = 0,$ *entonces* $x^2 = \frac{1}{3},$ *y por lo tanto ¿x a qué es igual?* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$ *Entonces para ordenarlo, ¿ x_0 quién es?* $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, *y ¿quién es x_1?* $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Vamos a encontrar los pesos ahora. ¿Quién sería w_0 por la expresión que tuvimos?

$w_0 = \frac{1}{p_2'(x_0)} \int_{-1}^{1} \frac{p_2(x)}{x - x_0} dx = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{3}}} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2 - 1)}{x + \frac{3}{\sqrt{3}}} dx.$ *[El profesor resolvió esta integral, obteniendo* $w_0 = 1$. *Esto sería w_0 y ¿quién sería* w_1 *?*

$w_1 = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{3}}} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{x-\frac{3}{\sqrt{3}}} dx.$ *[Les indicó que* w_1 *lo podrían calcular de la misma manera y les dio la fórmula* $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}).$

Obvió que la suma de los w_i es igual a la integral del peso y por tanto $w_1 = \int_{-1}^{1} dx - w_0 = 2-1=1,$ algo más simple que realizar la integral, además de propiciar en el estudiante un apropiado razonamiento matemático.

En el caso n=2 el profesor calculó la derivada del polinomio $p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$ y sus raíces, $x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5},$ $x_1 = 0,$ y $x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5},$ y sustituyó dichos valores en la fórmula $w_i = \frac{1}{p_3'(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{p_3(x)}{x-x_i} dx.$

Por último, proporcionó los valores finales a los estudiantes, sin resolverlo y manifestando:

Nosotros vamos a usar la fórmula máxima con n=2. Voy a dejar indicado como queda y el resultado final. $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{15}}{5}).$

Típicamente nosotros para resolver problemas usaremos n=1, n=2.

Esta forma de calcular los pesos y los nodos en la fórmula de Gauss-Legendre es solamente útil para valores pequeños de *n* e ineficiente para el resto de los valores. Por otra parte, con el procedimiento propuesto por el profesor abordar las cuadraturas de Gauss-Laguerre y Gauss-Hermite conllevaría graves dificultades para calcular las integrales que determinan los correspondientes pesos, las cuales en la mayoría de los casos no se pueden determinar de forma analítica.

Con respecto a estas dos situaciones se le preguntó en la entrevista si realiza algún tipo de práctica en la que el estudiante tenga que usar la fórmula de Gauss-Legendre, por ejemplo, con *n*=30, respondiendo: “Yo desarrollo en clase toditas las fórmulas para que los estudiantes las generalicen”.

Obvia por tanto el hecho que la fórmula de Gauss-Legendre con *n*=30 nodos sólo pueden construirse de forma eficiente con la ayuda de un ordenador previa implementación del correspondiente algoritmo. Como es sabido, los nodos y los pesos se calculan de forma eficaz a través de los autovalores y autovectores de matriz tridiagonal de Jacobi (Teoremas 4 y 5 del capítulo 1).

Dado que las clases observadas se dedicaron a la deducción de las fórmulas de los métodos numéricos y del error cometido, no se evidenció uso del sistema de representación computacional ni posibles aplicaciones a la ingeniería. Por ello, en la entrevista se le preguntó sobre la implementación computacional de los métodos numéricos, indicándonos que considera importante el uso de los ordenadores y el software para el aprendizaje de los métodos numéricos y que el estudiante debe comprender el método numérico llevándolo a la práctica a través de la programación. Sin embargo, el desarrollo teórico del método tiene una mayor importancia para él pues lo considera un requisito previo para poder resolver problemas, reflejándose así en la distribución temporal de las sesiones de clase y en lo manifestado en la primera entrevista (ver 4.1.4.), donde el profesor manifestó la creencia de que el uso del software en clase es una pérdida de tiempo, por lo que dedica apenas 10 minutos de la misma para explicar a los estudiantes el código de ejercicios que trae preparados y les envía a implementar los métodos numéricos en casa.

> *Yo siempre les recomiendo que programen el método en casa. Cada vez que hago un método les digo: "Muchachos por favor es importante que en casa escriban los programas correspondientes", y les doy total libertad en cuanto al lenguaje de programación y la herramienta que ellos quieran utilizar.*

En cuanto a la fenomenología, le preguntamos si utiliza en sus clases aplicaciones reales de los métodos numéricos en ingeniería en sus clases y qué aplicaciones de los métodos de integración numérica considera más importantes. Su respuesta fue:

> *No hay tiempo… […] Los estudiantes de ingeniería eléctrica y de telecomunicaciones necesitan resolver ecuaciones integro diferenciales. […] En cálculo de probabilidades para funciones que no tienen integral analítica como el caso de la normal, y cuando tienen que calcular el área de una región y el volumen.*

De acuerdo con los indicadores del KoT, observamos en primer lugar que el profesor mostró dominio de conocimiento de definiciones, reglas, teoremas y propiedades de integración numérica y procesos de deducción de las fórmulas de Newton-Cotes, así como de los distintos sistemas de representación tradicionales. No obstante, el hecho de no incluir en la guía docente de la asignatura las tres fórmulas de Newton-Cotes con un solo nodo (rectángulo izquierdo, rectángulo derecho y punto de medio), podría deberse a la creencia de que estas fórmulas son excesivamente básicas. Si bien es cierto que estas fórmulas son muy sencillas, esta creencia común muestra cierto desconocimiento de la materia ya que el caso de la fórmula del punto medio tiene como error teórico la mitad del error de los trapecios.

En el desarrollo de las fórmulas gaussianas abordó solo un caso particular, mostrando carencias en el conocimiento del contenido matemático que probablemente estén relacionadas con la falta de una formación más acorde con la asignatura. Además, como ingeniero de computación cabría esperar que proporcionara a sus estudiantes un conocimiento más amplio acerca de las aplicaciones de la integración numérica en el campo de la ingeniería, de forma que constituyera un elemento motivador para éstos. Sin embargo, la ausencia de estas aplicaciones, más allá de las puramente matemáticas, sugiere carencias en el aspecto fenomenológico.

6. Conclusiones, limitaciones y líneas abiertas

En este capítulo presentamos las conclusiones de esta investigación de acuerdo con los objetivos planteados; así como sus aportes, limitaciones y líneas abiertas para futuras investigaciones.

6.1. Conclusiones con respecto a los objetivos de la investigación

Los objetivos de la presente investigación, planteados en el Capítulo 3, surgen de dos grandes interrogantes respecto a algunos profesores de métodos numéricos en carreras de ingeniería en universidades de Ecuador:

1. ¿Cuáles son las concepciones y creencias sobre los métodos numéricos, su enseñanza y aprendizaje y el uso del software especializado, y su coherencia con la práctica en el aula?
2. ¿Cuál es el conocimiento del contenido de métodos numéricos?

A continuación, presentamos las conclusiones respecto a cada una de estas interrogantes y su relación con otras investigaciones.

En cuanto al primer interrogante, se ha determinado que casi todos los profesores comparten una visión instrumentalista de los métodos numéricos (Ernest, 1989), algunos son platónicos y muy pocos de resolución de problemas. Estas concepciones se reflejan también en sus creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos. Así tenemos que todos los instrumentalistas y platónicos presentan tendencias didácticas de tipo tradicionalista y algunos también tienen tendencias tecnológicas (Contreras, 2009). Lo cual apoyaría lo manifestado por Contreras y Carrillo (2018) cuando nos dicen que concepciones instrumentalistas y platónicas de la matemática están relacionadas con tendencias didácticas de tipo tradicionalista y tecnológica.

Las creencias anteriormente descritas, están en la línea de resultados de otras investigaciones como la de Martínez-Sierra, Valle-Zequeida, García-garcía, y Dolores-Flores (2019), que determinaron en profesores de matemáticas la creencia de que las matemáticas son una “caja de herramientas” a ser utilizadas en la resolución de problemas de la vida diaria. Aunque en el citado estudio, la resolución de los problemas está orientada al uso del razonamiento matemático y a la toma de decisiones, a diferencia de nuestro caso, en que la mayoría de los profesores orienta esta aplicación al uso de fórmulas numéricas en la resolución de problemas tipo *toys problems*.

Por otro lado, Moreno y Azcárate (2003), también determinaron una práctica docente instrumentalista en profesores universitarios de ecuaciones diferenciales motivada, entre otras razones, por el bajo nivel competitivo de los estudiantes, su poca capacidad de razonamiento matemático y deficiente pensamiento relacional. En nuestro caso, todos los profesores también manifestaron la creencia de que los estudiantes no están lo suficientemente capacitados para el aprendizaje de los métodos numéricos; la mayoría lo atribuye al hecho de que los estudiantes no poseen los conocimientos matemáticos previos necesarios. Esto nos sugiere que las creencias que tienen los profesores sobre cómo enseñar están en función de las creencias que tienen sobre la capacidad de sus estudiantes para aprender (Beswick, 2012).

Otro aspecto en el que coincidimos con Moreno y Azcarate (2003), es el marcado estilo de enseñanza tradicionalista (Contreras, 2009) con dominio de la clase magistral, que hemos determinado en los profesores ecuatorianos analizados. Lo cual era de esperarse, dado que se han encontrado resultados similares en entornos cercanos a Ecuador como Colombia, Perú, Chile y Argentina (Paternina y Quessep, 2017; Solís, 2015). Además, una de las conclusiones de la investigación realizada por Vasco (2015) en profesores de algebra lineal de una universidad de Ecuador nos dice: “Las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orienta hacia características tradicionales y tecnológicas” (p.333).

Según lo analizado, nuestra investigación demuestra que la educación universitaria en Ecuador no ha tenido mayor variación en la última década; ya que, en 2010, el Consejo Nacional de Educación Superior (CONESUP) al investigar la práctica docente en la universidad pública ecuatoriana, ya determinó que ésta era mayoritariamente tradicionalista y tecnocrática (CONESUP, 2010).

La citada investigación del 2010, también determinó que la tecnología era utilizada por los profesores universitarios ecuatorianos como reemplazo de medios de enseñanza tradicionales como la pizarra, lo cual se ha identificado también en otros contextos universitarios (Marcelo et al., 2016). Una realidad semejante, se ha detectado en la presente investigación, donde la mayoría de los profesores no utilizan el ordenador en clase o lo utilizan como herramienta de cálculo en reemplazo de las antiguas calculadoras. Es decir, no aprovechan el potencial que tiene el uso de la tecnología, especialmente del software especializado, para el aprendizaje de conceptos nuevos (Lin et al., 2017). Únicamente el profesor con mayor formación en métodos numéricos utiliza el ordenador y la programación como un medio para aprender y profundizar en el conocimiento de los métodos numéricos.

Ertmer et al. (2012) nos habían hablado de las pruebas estandarizadas como una barrera de “primer orden” para el uso de la tecnología. En nuestro caso, uno de los profesores no puede evaluar de acuerdo a sus creencias sobre el uso del software, debido a la imposición de una prueba común para todos los cursos que reciben análisis numérico en su universidad. Esto confirma lo manifestado por otros investigadores sobre como la influencia del contexto puede provocar aparentes inconsistencias entre las creencias manifestadas por un profesor y su práctica docente (Cross, 2014, Philipp, 2007). De acuerdo a ello, en el caso de quienes presentan mayores incoherencias, éstas podrían darse por el uso de la entrevista ya que, ante la necesidad de aceptación social, los profesores responden lo que se considera adecuado pero que no se corresponde con su realidad (Moreno y Azcárate, 2003).

Otro hecho que llama la atención en la presente investigación es el que, en términos generales, los profesores de las universidades de categoría A, con formación más acorde con los métodos numéricos y mayor experiencia docente, son los que mejores creencias manifiestan sobre la naturaleza de los métodos numéricos y su enseñanza y aprendizaje, y menos incoherencias presentan entre las creencias manifestadas y su accionar en el aula. Esto sugiere una relación directa entre la formación académica del profesor y sus creencias.

Con respecto a la segunda cuestión, es decir, analizar el conocimiento del contenido de métodos numéricos de los profesores del estudio, se determinó que los profesores de las universidades de categoría A poseen mayor grado de conocimiento en relación con los profesores de las universidades de categoría B y C. Esto podría explicarse en el hecho de que las universidades de categoría A tienen más exigencias en cuanto al perfil profesional de sus profesores ya que cuidan mantener la calidad educativa correspondiente a su categoría.

En segundo lugar, se analizaron vídeos de las clases de uno de los profesores, las mismas que se limitaron a la deducción de las fórmulas de integración numérica y del error cometido, lo cual se diferencia de los resultados obtenidos por Vasco (2015) en que los profesores de su estudio le dan un sentido práctico a la asignatura y evidenciaron conocimiento de las aplicaciones del contenido matemático abordado.

En nuestro caso, el profesor mostró mayor dominio de las fórmulas de Newton-Cotes, a diferencia de la cuadratura gaussiana donde se observaron mayores carencias, probablemente relacionadas con la falta de una formación más acorde según lo sugerido por Tchoshanov et al. (2017). Hace uso de técnicas convencionales que implican procesos manuales, no dedicando tiempo a la implementación en ordenador de los algoritmos computacionales asociados a los métodos de integración numérica. De esta forma, no se presta la adecuada atención al valor añadido que la programación de los algoritmos proporciona al proceso de enseñanza-aprendizaje de un estudiante de ingeniería en el siglo XXI.

Este hecho puede deberse a dos creencias evidenciadas durante la entrevista. Una de ellas es considerar que es más importante explicar contenidos teóricos que las implementaciones computacionales. La segunda es pensar que los estudiantes serán capaces de generalizar el conocimiento proporcionado por el profesor y escribir el código de programación necesario para cada método de manera autónoma.

Dichas creencias, junto con la tradición de la universidad de que el profesor debe explicar todo el contenido teórico, llevan a que el profesor dedique gran parte del tiempo al dictado del desarrollo teórico de los métodos y publique únicamente dichos desarrollos en la web para que los estudiantes lo tengan disponible en todo momento. Esto sugiere que sus creencias condicionan el conocimiento del tema de integración numérica impartido en clase, de acuerdo con Montes, Contreras, y Carrillo (2018). Este énfasis conceptual coincide con el resultado de otras investigaciones como la de Vasco y Climent (2018).

Acorde con los contenido desarrollados, se observó que utiliza principalmente sistemas de representación tradicionales como son el verbal, simbólico, algebraico y gráfico, dejando en un segundo plano y como tarea para los estudiantes el uso de algoritmos computacionales que es una forma de representación proporcionada por el uso de las nuevas tecnologías (Mishra y Koehler, 2006).

Por otro lado, la ausencia de explicaciones sobre el uso y las aplicaciones de la integración numérica en las clases y la restricción al campo de la matemática de las aplicaciones en ingeniería dadas en la entrevista deja entrever carencias en el aspecto fenomenológico.

En resumen, el haber determinado que la enseñanza de los métodos numéricos en Ecuador todavía se encuentra estancada en una visión instrumentalista y una práctica tradicionalista, lleva a la reflexión sobre la necesidad de implementar estrategias de mejora hacia una visión de resolución de problemas y una práctica docente orientada a la investigación.

Por otro lado, el análisis sobre el Conocimiento que del Contenido de Integración

Numérica debe tener un profesor de métodos numéricos, puede servir como referente para estudios similares, así como de orientación para profesores universitarios que impartan dicha materia.

Además, el hecho de que los profesores de las universidades de categoría A, con formación más acorde a la materia y mayor experiencia en su enseñanza, tengan mejores creencias según la tipología de Ernest (1989) y mayores conocimientos de conceptos claves de la materia, resalta la importancia de implementar cursos de especialización y actualización de conocimientos. Con ello se pretende que el profesor vea la necesidad de dotar a los estudiantes de ingeniería de herramientas que le permitan resolver problemas reales, así como de ejemplos reales que puedan ser utilizados en sus clases, para lo cual es imprescindible dedicar tiempo suficiente a la programación computacional de los algoritmos en ordenador. Es decir, realizar propuestas que incluyan aspectos fenomenológicos y promuevan cambio de creencias.

6.2. Limitaciones de la investigación y líneas abiertas para futuras investigaciones

El presente estudio ha tenido ciertas limitaciones que analizaremos a continuación con miras a obtener mejores resultados en trabajos futuros, para los cuales se proponen nuevas líneas de investigación.

Philipp (2007) ya nos hablaba de la necesidad de una mejor comprensión del sistema de creencias de los profesores y de las circunstancias que rodean su práctica docente, para poder clarificar aparentes contradicciones entre las creencias manifestadas por los profesores y su accionar en el aula. Por ello, además de entrevistar a los profesores, se pudo haber entrevistado también a estudiantes y directivos, los cuales nos podían haber proporcionado información complementaria para una mejor comprensión de la influencia del contexto educativo en el que se desenvuelven los profesores. Esto nos lleva a proponer una primera línea abierta de investigación encaminada a determinar la influencia del contexto educativo en las concepciones y creencias y práctica docente de los profesores universitarios.

La distancia entre las ciudades (Quito, Guayaquil y Cuenca) en que se encuentran las universidades y la poca disponibilidad de tiempo de los profesores participantes en este estudio fueron los limitantes para no realizarles entrevistas adicionales y observar más de una de sus clases. Esto hubiese sido conveniente para poder tener mayores elementos de juicio para valorar el conocimiento de los temas por parte del profesor, analizar su accionar en el aula y determinar la coherencia con las creencias manifestadas. Por ello, se propone el estudio de las concepciones y creencias de uno o dos casos particulares, de tal forma que se pueda aplicar más instrumentos, recoger más información y hacer un análisis más exhaustivo de los mismos.

Si bien en la entrevista se hicieron preguntas relativas al conocimiento del profesor sobre conceptos claves de métodos numéricos, podría haber sido útil plantear adicionalmente cuestionarios que incluyan, además de conceptos, problemas de aplicación, que nos permitan tener una visión más amplia del conocimiento de los temas por parte del profesor. La aplicación de estos cuestionarios, daría paso a líneas de investigación enfocadas a establecer comparaciones con el conocimiento matemático de profesores de otros países.

Además, el circunscribirnos al Conocimiento de los Temas (KoT) ha sido otra limitante, porque los resultados obtenidos permiten analizar también otros subdominios del MTSK como el Conocimiento de la Práctica de las Matemáticas (KPM), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Por ello, otra línea abierta de investigación sería el analizar tanto el Conocimiento Matemático como el Conocimiento Didáctico del profesor de métodos numéricos.

Las diferencias significativas encontradas entre los resultados de los profesores de las universidades de categoría A, con formación más acorde a los métodos numéricos, mejor disposición hacia la asignatura y más tiempo de experiencia docente, y los resultados de los profesores de las universidades de categoría B y C, nos lleva a plantear otra línea de investigación tendiente a estudiar la relación entre la formación académica del profesor y su conocimiento del tema y creencias sobre los métodos numéricos y su enseñanza y aprendizaje.

Finalmente, si bien se ha tratado de tener una muestra representativa, los resultados encontrados en este estudio no pueden considerarse generales dado el número relativamente pequeño de profesores participantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aljaberi, N., y Gheith, E. (2018). In-Service Mathematics Teachers' Beliefs About Teaching, Learning and Nature of Mathematics and Their Mathematics Teaching Practices. *Journal of Education and Learning*, *7*(5), 156–173. doi.org/10.5539/jel.v7n5p156

Álvarez, C., y San Fabián, J. L. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, *28*(1), 14.

Area, M., González, D., Cepeda, O., y Sanabria, A. L. (2011). Un análisis de las actividades didácticas con TIC en aulas de educación secundaria. Pixel-Bit. *Revista de Medios y Educación*, (38), 187–199.

Arganis-Juárez, M. L., Cortés-Rosas, J. J., González-Cárdenas, M. E., Pinilla-Morán, V. D., Salazar-Moreno, A., y García-Burgos, S. (2018). Métodos de integración numérica de Newton aplicados en un problema de manejo de embalses. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, *19*(2), 183–193. https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2018.19n2.016

Aróstegui, J. L., y Guerrero, J. L. (2014). El Papel de las TIC en la Mejora de la Calidad Docente en Secundaria: Un Estudio Multicasos. *Multidisciplinary Journal of Educational Research*, *4*(1), 101–124. https://doi.org/10.4471/remie.2014.04

Attorps, L. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations* (tesis doctoral). Universidad de Helsinki, Finlandia.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. doi.org/10.1177/0022487108324554

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 127–147. doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2

Burden, R. L., y Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis*. Boston, USA: Brooks/Cole.

Caballero, A., Blanco, L. J., y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradigma*, *29*(2), 157–171.

Cai, J., y Wang, T. (2010). Conceptions of effective mathematics teaching within a cultural context: perspectives of teachers from China and the United States. J*ournal of Mathematics Teacher Education*, 13, 265–287. doi.org/10.1007/s10857-009-9132-1

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D.,…, y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University.

Carrillo, J., y Contreras, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79–92.

Ceballos-Herrera, F. A. (2009). El informe de investigación con estudio de casos. *magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *1*(2), 413-423.

Chan, K. W., y Elliott, R. G. (2004). Relational analysis of personal epistemology and conceptions about teaching and learning. *Teaching and Teacher Education*, *20*(8), 817-831.

Chapra, S. C., y Canale, R. P. (2006). *Métodos Numéricos para ingenieros (Quinta)*. México D.F., México: McGraw-Hill.

Chihara, T. S. (1978). An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York, USA: Gordon and Breach Science Publishers.

CONESUP (2010). *La práctica docente en las universidades públicas del país*. Loja, Ecuador.

Contreras, L. C. (2009). Concepciones, creencias y conocimiento: referentes de la práctica profesional. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología*, *1*(1), 11–36.

Contreras, L., y Carrillo, J. (2018). El esquivo dominio del conocimiento del conocimiento del profesor de matemáticas. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 219–236). México D.F., México: SOMIDEM

Cooney, T. J., Shealy, B. E., y Arvold, B. (1998). Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 306–333. doi.org/10.2307/749792

Cross, D. I. (2009). Alignment, cohesion, and change: Examining mathematics teachers' belief structures and their influence on instructional practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(5), 325–346. doi.org/10.1007/s10857-009-9120-5

Cross, D. I. (2014). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 173-201. doi.org/10.1007/s10857-014-9276-5

Cross, D., Rapacki, L., y Eker, A. (2015). The Individual, the Context, and Practice: A Review of the Research on Teachers' Beliefs Related to Mathematics. En H. Fives y M. G. Gill. (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (pp. 336–352). New York, USA: Routledge.

Dahlquist, G., y Björck, A. (2008). *Numerical Methods in Scientific Computing, Volume I*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Delgado, F. (2013). *Métodos Numéricos para ingeniería*. Monterrey, México: Editorial Digital.

Dimov, I., Faragó, I., y Vulkov, L. (Eds.) (2017). *Numerical Analysis and Its Applications: 6th International Conference, NAA 2016, Lozenetz, Bulgaria, June 15-22, 2016, Revised Selected Papers.* Lozenet, Bulgaria: Springer International Publishing.

Donoso, P. M. (2015). *Estudio de las concepciones y creencias de los profesores de educación primaria chilenos sobre la competencia matemática* (Tesis doctoral) Universidad de Granada, Granada, España.

Drageset, O. G. (2010). The Interplay Between the Beliefs and the Knowledge of Mathematics Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *12*(1), 30-49

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13–33.

Ertmer, P. A. (2005). Teacher pedagogical beliefs: The final frontier in our quest for technology integration? *Educational Technology Research and Development*, *53*(4), 25–39. https://doi.org/10.1007/BF02504683

Ertmer, P. A., Ottenbreit-Leftwich, A. T., Sadik, O., Sendurur, E., y Sendurur, P. (2012). Teacher beliefs and technology integration practices: a critical relationship. *Computers and Education*, *59*(2), 423–435. doi.org/10.1016/j.compedu.2012.02.001

Espinoza Cevallos, C. (2016). Quality of education and indices management in connection with the budget of Ecuador universities in the year 2015. *Revista Universidad y Sociedad*, *8*(2), 210-217.

Fives, H., Lacatena, N., y Gerard, L. (2015). Teachers' Beliefs About Teaching (and Learning). En H. Fives y M. G. Gill. (Eds.), *International Handbook of Research on Teachers' beliefs* (pp. 249–264). New York, USA: Routledge

Flores-Medrano, E., Sosa, L., y Ribeiro, C. M. (2016). Tránsito desde el MKT al MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7-11), Huelva.

Fraga, F., y Gewerc, A. (2013). Creencias sobre tecnología educativa de profesorado en formación inicial: un estudio de caso. *Innovación Educativa*, 23, 241–254.

Garegae, K. G. (2016). Teachers' professed beliefs about the nature of mathematics, its teaching and learning: inconsistencies among data from different instruments. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 30, 1–18.

Garrido, J. (2009). *Creencias sobre el rol de las tecnologías de información y comunicación en la formación inicial de docentes: explorando las diferencias* *entre estudiantes y docentes universitarios* (Tesis doctoral). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.

Gautschi, W. (2012). *Numerical Analysis*. New York, USA: Springer Science Business Media.

Gil, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas*. Almería, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Almería.

Goldin, G., Rösken, B., y Törner, G. (2009). Beliefs–no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In *Beliefs and attitudes in mathematics education*, 1-18. doi.org/10.1163/9789087907235_002

Goldstine, H. (1977). *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*. New York, USA: Springer-Verlag.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic- Specific Knowledge of Students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372–400.

Isaacson, E., y Keller, H. (1994). *Analysis of Numerical Methods*. New York, USA: Dover publications, INC.

Kilpatrick, J. (1998). La investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes*. *Resolución de problemas. Evaluación Historia* (pp. 1-18). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Kincaid, D., y Cheney, W. (1994). *Análisis numérico las matemáticas del cálculo científico*. Buenos Aires, Argentina: Addison-Wesley Iberoamericana S. A.

Laín, S. (Comp.) (2013). Métodos Numéricos y sus Aplicaciones en Diferentes Áreas. *IX Congreso Colombiano de Métodos Numéricos: Simulación en Ciencias y Aplicaciones Industriales IX CCMN 2013*. Cali, Colombia: Universidad Autónoma de Occidente.

Lin, K., Sokolova, A. N., y Vlasova, V. K. (2017). Methodological Potential of Computer Experiment in Teaching Mathematics at University. *Eurasia Journal of*

Mathematics, Science and Technology Education, 13(7), 3539–3552. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00743a

Liñan, M. M., Contreras, L. C., y Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los temas (kot). En J. Carrillo, L. Contreras, y M. Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor, Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12–20). Huelva.

Mapolelo, D. C., y Akinsola, M. K. (2015). Preparation of mathematics teachers: Lessons from review of literature on teachers' knowledge, beliefs, and teacher education. *American Journal of Educational Research*, *3*(4), 505-513.

Marcelo, C., Yot, C., y Perera, V. H. (2016). El conocimiento tecnológico y tecnopedagógico en la enseñanza de las ciencias en la universidad. Un estudio descriptivo. *Enseñanza de las Ciencias*, *34* (2), 67–86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1552

Martínez-Finkelshtein, A., y Moreno-Balcázar, J. J. (1999). *Métodos numéricos aproximación en R*. Almería, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Martínez-Finkelshtein, A. (2001). *Métodos Numéricos resolución de ecuaciones*. Almería, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

Martínez-Finkelshtein, A. (2003). El análisis numérico en los últimos 25 años. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 26 (57), 919–928.

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., García-garcía, J., y Dolores-Flores, C. (2019). 'Las matemáticas son para ser aplicadas': Creencias matemáticas de profesores mexicanos de bachillerato. *Educación Matemática*, *31*(1), 92–120. https://doi.org/10.24844/EM3101.04

Merzbach, U. C., y Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3era ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Misfeldt, M., Jankvist, U. T., y Aguilar, M. S. (2016). Teachers' Beliefs about the Discipline of Mathematics and the Use of Technology in the Classroom. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *11*(2), 395-419.

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.

Montes, M. A. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva, España.

Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 5–20.

Montoro, A., Moreno-Balcázar, J. J., y Pinta, M. (2019a). Conocimiento del profesor al enseñar integración numérica: un estudio de caso. *Enviado.*

Montoro, A., Moreno-Balcázar, J. J., y Pinta, M. (2019b). La enseñanza de los métodos numéricos en ingeniería: concepciones y creencias de profesores en la universidad ecuatoriana. *Enviado.*

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265–280.

Oñate, E. (2000). El Bucle de los Números. *Publicatión CIMNE* (192), 1–13.

Oñate, E. (2008). Posibilidades de los métodos numéricos en el mundo industrial. En M. I. Marrero (Ed.), *Descubrir las matemáticas hoy: Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2006.* San Cristóbal de la Laguna, España: Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307–332.

Paternina, A., y Quessep, D. C. (2017). Creencias y concepciones: una mirada a la evaluación matemática en la educación superior. *Revista Boletín Redipe, 6*(4), 150–159.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol.1, pp. 257-315). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Pinta, M., Montoro, A., y Moreno-Balcázar, J. J. (2019). Papel de software en la enseñanza y aprendizaje de los métodos numéricos en la universidad ecuatoriana. En F. Egea, J. Gázquez, M. Molero, M. Simón, A. Martos, A. Barragán, N. Oropesa, y J. Soriano (Eds.), *Innovación Docente e Investigación en Ciencias, Ingeniería y Arquitectura* (pp. 309-320). Madrid, España: Dykinson, S.L.

Pinta, M., Moreno-Balcázar, J. J., Gil-Cuadra, F., y Montoro, A. (2018). Conceptions and beliefs of the professors of numerical methods in the engineering degrees at ecuadorian universities. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 42,* V5 (pp.136). Umea, Suecia.

Ponte, J. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. En M. Brown, D. Ferrandez, J. Matos, y J. Ponce (Eds.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional.

Quarteroni, A., Sacco, R., y Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics (Texts in Applied Mathematics)*. New York, USA: Springer.

Ramos, L., y Casas, L. (2018). Concepciones y creencias de los profesores de Honduras sobre la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *21*(3), 275–299. https://doi.org/10.12802/relime.18.2132

Richardson, V. (2003). Preservice Teachers' Beliefs. En J. Raths y A. McAnench (Eds.), *Teacher beliefs and classroom performance: The impact of teacher* (pp. 1–22). Greenwich, CT, USA: Information Age Pub.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: the Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Sanz-Serna, J. M. (2019). La cuadratura gaussiana según Gauss. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *22*(1), 101-116.

Shampine, L. F. (2007). Design of software for ODEs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *205*(2), 901–911. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.051

Shi, Q., Zhang, S., y Lin, E. (2014). Relationships of new teachers' beliefs and instructional practices: Comparisons across four countries. *Action in Teacher Education*, *36*(4), 322-341.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simons, H (2015). *El estudio de caso: teoría y práctica*. Madrid, España: Ediciones Morata S.L.

Skott, J., Mosvold, R., y Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and techers' knowlegde, biliefs, and identity. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Predige, y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 162–180). London, UK: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315113562

Solis, C. A. (2015). Creencias sobre enseñanza y aprendizaje en docentes universitarios: Revisión de algunos estudios. *Propósitos y Representaciones, 3*(2), 227–260. doi.org/10.20511/pyr2015.v3n2.83

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática, 28*(2), 151-174.

Speer, N. M., King, K. D., y Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122. doi.org/10.1007/s10857-014-9277-4

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Barcelona, España: Crítica.

Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., y MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and teacher education*, *17*(2), 213-226.

Stoer, J., y Bulirsch, R. (1993). *Introduction to Numerical Analysis* (2da. ed.). New York, USA: Springer-Verlag.

Tchoshanov, M., Cruz, M., Shakirova, K., Ibragimova, E., y Shakirova, L. (2017). Comparative analysis of mathematics teachers' content knowledge in USA and Russia through the lens of TIMSS results. Education and Self Development, *12*(1), 23–33. https://doi.org/10.26907/esd12.1.02

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Avila, D., y Flores-Medrano, E. (2015). The characterisation of the specialised knowledge of a university lecturer in linear algebra. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *CERME 9, Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3283–3288). Praga, República Checa: ERME.

Williams, D. L., Boone, R., y Kingsley, K. V. (2004). Teacher beliefs about educational software: A Delphi study. *Journal of Research on Technology in Education*, *36*(3), 213-229. https://doi.org/10.1080/15391523.2004.10782413

ANEXO

ANEXO I. Respuestas de los profesores a conceptos claves de métodos numéricos.

Aproximación

Samuel: Cercanía al valor real.

Rolando: Es una estimación.

Alan: En precisión. O sea, cuando nosotros tenemos cierta técnica, tenemos que tener claro cuál es la precisión que hay en la estimación de ese parámetro o de ese resultado. Porque yo puedo tener varias técnicas, pero cuál de esas me aproxima mejor.

Marcelo: Cuando uno resuelve problemas con métodos numéricos, uno siempre aproxima, porque los problemas del mundo real por lo general no tienen solución exacta. La solución analítica es desconocida, entonces los métodos numéricos botan aproximaciones.

Orlando: Métodos numéricos.

Fernando: Error mínimo.

Rudy: Medición.

Alberto: Tratar de llegar lo más cerca posible al valor que uno considere correcto.

Romina: Esa es una palabra a la que nosotros llegamos al aplicar los métodos numéricos.

Lorena: El valor casi real de un resultado.

Antonio: Errores.

Sandro: Errores.

Nodo

Samuel: Punto en la discretización.

Rolando: Elemento de análisis.

Alan: Los nodos son el mecanismo que se emplea para discretizar una variable, que puede ser espacio o tiempo, para poder estimar las soluciones de la función, en esos puntos.

Marcelo: Cuando uno está, por ejemplo, desarrollando un problema con valores en la frontera está la malla, ahí están los nodos.

Orlando: Punto ubicado en el plano.

Fernando: Un punto.

Rudy: Está relacionado mucho con resolución de ecuaciones.

Alberto: Una conexión, interconexión entre varias actividades.

Romina (No contesta)

Lorena: Varias formas de poder llegar a alguna parte y poder utilizar uno o varios nodos.

Antonio: Un punto.

Sandro: Eso me lleva a investigación de operaciones.

Fórmula

Samuel: Expresión matemática que permite mediante el reemplazo de ciertas cantidades en variables encontrar un valor deseado.

Rolando: Cualquier cosa es una formula, para mi es una receta.

Alan: Son expresiones que han sido probadas para ser utilizadas en ingeniería.

Marcelo: Las fórmulas son importantes, siempre intento en tal caso que el estudiante no las memorice.

Orlando: Relación entre los elementos de un suceso.

Fernando: A la que se debe llegar o la que debo tomar para resolver un problema.

Rudy: No sé.

Alberto: Con ella puedo encontrar un valor exacto.

Romina: Fórmula para poder encontrar valores aproximados.

Lorena: Resolución de elementos en la cual vamos a tener que encontrar su resultado.

Antonio: Ecuación.

Sandro: Interpolación.

Ajuste

Samuel: Reemplazo de una función por otra función que se le parece y es conveniente para su tratamiento matemático.

Rolando: Interpolación.

Alan: Se utiliza en interpolación o en regresión lineal. Justamente cuando nosotros no obtenemos, o cuando el modelo no es determinístico, sino que nosotros tenemos que ajustarnos al mejor polinomio que se pueda obtener de un determinado grado.

Marcelo: Es un término que no uso.

Orlando: Interpolación.

Fernando: Error mínimo.

Rudy: No vemos eso.

Alberto: Sería algo similar. Tratar de que lo que uno obtiene, en lo posible, no difiera mucho del valor deseado.

Romina (No contesta)

Lorena: Que podemos interpretar de una u otra forma para poder llegar con ese ajuste a un resultado.

Antonio: Curvas.

Sandro: Interpolación.

Nube de puntos

Samuel: Puntos que voy a ajustar.

Rolando: Estadística.

Alan: La nube de puntos justamente es la malla que se tiene cuando nosotros discretizamos el plano o la línea.

Marcelo: Tengo una nube de puntos, cuando estoy interpolando, por ejemplo, o cuando quiero hacer una integración.

Orlando: Conjunto de datos que conforman una información dada.

Fernando: Conjunto de nodos.

Rudy: Es para subir y bajar información.

Alberto: Conocimiento que esté ahí un poco suelto y que hay que tratar de unir.

Romina: Bueno, he leído que está relacionado, por ejemplo, con la precisión y la exactitud respecto a un ejercicio.

Lorena: No lo he visto.

Antonio: Una función.

Sandro: Matrices

Redondeo

Samuel: Lo que tengo que hacer porque tengo aritmética finita.

Rolando: Dispositivo de aproximación.

Alan: Tenemos tres tipos de redondeo. Tenemos el redondeo superior, el redondeo simétrico, y el redondeo inferior. De ahí tenemos los tipos de errores que son por redondeo justamente, o por truncamiento.

Marcelo: Algo necesario cuando uno está resolviendo problemas.

Orlando: Aproximación.

Fernando: Puede ser el error de la máquina

Rudy: Plantearlo a mí me da la idea de saltos.

Alberto: Cuando ya no se puede trabajar con tantos decimales hasta cierto valor.

Romina: Redondeo es, por ejemplo, trabajar con un determinado número de decimales y no con todas los que se puedan encontrar.
Lorena: Aproximar a lo mayor posible, dependiendo el redondeo que tenga, y se va a aproximar a lo que necesita.
Antonio: Aproximación.
Sandro: Todo lo que tenga que ver con teoría de errores.

Overflow

Samuel: Explotó la computadora, dividir para cero.
Rolando: Problema computacional.
Alan: Cuando nosotros estamos haciendo un cálculo y los números me salen tan grandes que no pueden ser representados en el computador, se provoca un error de overflow y eso hará que mi valor estimado difiera mucho del valor real.
Marcelo: Quiere decir, por ejemplo, si yo declaro una variable de un tipo, por ejemplo, entero de 32 bits, y resulta que en el momento de hacer el cálculo quiero almacenar en esa variable, por ejemplo, un valor que supera en su representación los 32 bits, ahí va a haber un overflow.
Orlando: Sobrepasa la capacidad.
Fernando (No contesta)
Rudy: No sé
Alberto: Cuando estoy fuera del asunto
Romina (No contesta)
Lorena: Que sobrepaso los límites o algo de que está casi lleno.
Antonio: Programación.
Sandro: La integración numérica.

Convergencia

Samuel: Aproximación iterativa a la solución exacta. Aproximación a medida que voy reduciendo el tamaño de la discretizacion a la función que es solución de mi problema.
Rolando: Propiedad de los métodos iterativos.
Alan: Realmente todos estos métodos tienen que ser convergentes. Converger a un valor que aproxime a la solución. Por ejemplo, veíamos en los métodos de Jacobi, Gauss Seidel, que tienen que ser convergentes. Y por esto justamente tienen que hacerse las pruebas, como la de iteración de puntos fijos para sistemas lineales, en la

que si el radio espectral es menor que uno, nos asegura que esos métodos iterativos son convergentes. Los teoremas no dicen las condiciones que deben cumplirse para que los métodos sean convergentes.

Marcelo: Los métodos numéricos tienden a construir una sucesión numérica, y se espera que esa sucesión sea convergente a lo que uno quiera, al valor exacto.

Orlando: Tendencia de una sucesión serie a un valor.

Fernando: El método confiable converge o una seria converge a un valor específico.

Rudy: Series

Alberto: Cuando nos vamos acercando en el siguiente procedimiento cada vez más a algo.

Romina: A donde llegas tú con tus resultados

Lorena (No contesta)

Antonio: Aproximación o resultado.

Sandro: Eso lo vemos en interpolación. Converge o no converge, hago la gráfica.

Peso

Samuel: Lo que multiplicado por las funciones evaluadas en ciertos puntos me proporciona una cuadratura.

Rolando: Dispositivo de ajuste.

Alan: Son valores que van en las fórmulas para darle mayor presencia a ciertos datos.

Marcelo: Vemos los pesos cuando hacemos integración numérica. Por ejemplo, evalúo la función en ciertos puntos y eso tiene un peso. Y uno escribe, por ejemplo, combinación lineal de evaluaciones y los coeficientes de esa combinación lineal son los pesos.

Orlando: Porcentaje asignado a un ítem con respecto al total.

Fernando: Tal vez es muchas líneas de sentencia. No relaciono mucho el peso.

Rudy: Distribución.

Alberto: Podría ser el valor que se le asigna a cierta actividad.

Romina (No contesta)

Lorena: Es la medición para poder encontrar el resultado de acuerdo a lo que tenga.

Antonio: Masa.

Sandro: En teoría de errores.

Malla

Samuel: Es un grafo que me sirve para representar de manera discreta algo que en un principio era continuo.

Rolando: Dispositivo de análisis.

Alan: Es un grupo de nodos en forma de red.

Marcelo: Es un conjunto de celdas conectadas en forma de red.

Orlando: Configuración de datos que siguen una ley.

Fernando: Conjunto de puntos específicos en la búsqueda de alguna cosa.

Rudy: Obtención de valores discretos.

Alberto: Un pensum, un programa de estudios.

Romina (No contesta)

Lorena: Algo extenso, en la cual se va tener varias opciones, para poder obtener algo.

Antonio: Una malla, nodos.

Sandro: Matrices.

Cancelación

Samuel: La máquina ya no logra representar el número porque es demasiado pequeño.

Rolando: Aritmética.

Alan: Cuando ocurre ese problema de overflow, tiene que detener el proceso y buscar otro mecanismo de estimación.

Marcelo: No sé a qué se refiere. Es un término que no uso.

Orlando (No contesta)

Fernando: Tampoco le relaciono, porque se supone que si hacemos algo hay que terminarlo.

Rudy: No sé.

Alberto: Dar por terminado algo.

Romina: Bueno, eso no lo he visto.

Lorena: Que rechaza alguna propuesta.

Antonio: Cancelación.

Sandro: Matrices.

Estabilidad

Samuel: Cuando hay estabilidad los errores no se propagan

Rolando: Validez del modelo matemático.

Alan: Significa que los errores que nosotros tenemos en las primeras estimaciones se van diluyendo en el cálculo de las siguientes estimaciones. Si fuera lo contrario, esos errores se propagan de tal manera que se va formando una bola de nieve y al final la solución obtenida no tiene nada que ver con la real. Son resultados basura, así se los llama debido a que los métodos son inestables. Nosotros tenemos hacer justamente esas pruebas de estabilidad para garantizar que los errores no sean un problema.

Marcelo: La estabilidad es muy importante porque se espera que el error sea vaya haciendo cada vez más pequeño.

Orlando: Proceso que no varía en un intervalo dado.

Fernando: En sistemas de ecuaciones los métodos son estables.

Rudy: No sé.

Alberto (No contesta)

Romina (No contesta)

Lorena: Algo seguro, con la cual vamos a poder llegar a resultados óptimos.

Antonio (No contesta)

Sandro: Teoría de errores.

Recurrencia

Samuel: Otra palabra para hablar de algo iterativo. Recursividad es cuando una función se llama a sí mismo.

Rolando: Reutilización.

Alan: Hay unas fórmulas recurrentes, que te permiten hacer el cálculo con una cierta base de números. Cuando nosotros tenemos en análisis numérico alguna fórmula recursiva, por ejemplo, para calcular el factorial de un número, tenemos $n! = n(n-1)!$ entonces utilizo la formula del factorial en función de la fórmula del factorial mismo.

Marcelo: Por ejemplo, en el método Newton hay una recurrencia, la ecuación es la recurrencia. Normalmente son funciones que se llaman a sí mismas. Importante en programación y obviamente importante en análisis numérico.

Orlando (No contesta)

Fernando: No lo relaciono mucho a recurrencia. Sólo que sea el error de recurrencia.

Rudy: Interacción.

Alberto: Cuando recurrentemente se repite o acierta algo.

Romina: Es repetir

Lorena: Que es muy frecuente para poder utilizar en la fórmula.

Antonio (No contesta)

Sandro: Estamos hablando de interpolación.

Uso de escalas en los gráficos

Samuel: No es demasiado importante.

Rolando: Estimación visual.

Alan: Siempre es importante porque te permite representar valores muy grandes y muy pequeños. Cuando tienes valores combinados, muy grandes y muy pequeños, hay que cambiar la escala mediante algún escalamiento algoritmo, que es importante y muy utilizado en análisis numérico.

Marcelo: Si uno va a hacer el gráfico a mano es difícil conservar la escala, pero si uno hace un plot en Matlab, en Mathemática, el software en ese sentido maneja la escala mucho mejor.

Orlando: En el caso de Matlab el estudiante conoce los tipos de escalas a utilizar, logarítmicas, exponencial, normal, el estudiante tiene que aprender a interpretar dicha información.

Fernando: Los gráficos me dan una gran idea de que es lo que quiero hacer. Por ejemplo, si quiero encontrar raíces de ecuaciones no lineales, entonces tener un gráfico me intuye a mí en donde está la raíz.

Rudy: La escala en los gráficos lo que hacen es reducir o ampliar el tamaño de los gráficos.

Alberto: Representación visual de algún problema.

Romina: Sería un valor, pero no lo relaciono.

Lorena: Eso no utilicé.

Antonio: Precisión.

Sandro: Teoría de errores.

Números máquina

Samuel: Número representado con la aritmética finita del computador.

Rolando: Eso es del computador.

Alan: Número máquina, el número de operaciones, es un dato que uno tiene que considerar. Si nosotros lo analizamos en los métodos directos para resolver los sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, el método de eliminación de Gauss tenemos ahí un número de multiplicaciones que es aproximadamente $n^3/3$ Entonces, eso significa que si nosotros tenemos un sistema de 100 ecuaciones con 100 incognitas, $100^3/3$ = 130000 multiplicaciones. Entonces, si el número de multiplicaciones es más grande usted ya tiene que tener claro cuantas operaciones necesitará realizar para hacer ese cálculo de la solución del sistema. Entonces, para los problemas de la vida real, tranquilamente usted puede tener un sistema de 1000 ecuaciones, 2000 ecuaciones; entonces, uno tiene que confiar en eso, cuantas operaciones se requieren para resolver ese problema.

Marcelo: Hay que tener presente, y yo siempre les digo a los estudiantes que desde el mismo momento que están usando el computador ya están cometiendo un error. Porque, por ejemplo, supongamos que la solución de una ecuación es un número irracional, el computador solo usa números racionales. Siempre intento que el estudiante tenga presente el tema de la aritmética computacional y del error de redondeo que está inherente.

Orlando (No contesta)

Fernando: Le relaciono con el lenguaje de máquina, con aritmética del punto flotante.

Rudy: No sé.

Alberto: La cantidad de dígitos que puede presentar en una computadora en un cálculo.

Romina: El método con el que puedan hacerlo con un software.

Lorena: No lo hemos visto tampoco, pero imagino que es la aplicación de una herramienta en la cual se va a dar algo específico y eso de ahí nos va llevar al resultado.

Antonio: Números máquina, IEEE.

Sandro: En la aplicación de los softwares.

Implementación

Samuel: Importantísimo, es llevar a la realidad una buena idea. Pero, como dicen, de buenas ideas está empedrado el camino al infierno. Si uno no hace una buena implementación puede terminar en el infierno.

Rolando: Llevar a la realidad el método numérico.

Alan: La implementación es expresar en cierto lenguaje de programación las instrucciones que me dice el algoritmo que sean ejecutadas.

Marcelo: Implementar es llevar a la práctica. Entonces el algoritmo que lo vemos en la pizarra, que es una cuestión teórica, siempre recomiendo implementarlo, llevarlo a la práctica con un lenguaje de programación.

Orlando: Desarrollo de un proceso y ejecución

Fernando: Siempre implementamos, o sea la programación puede ser una implementación.
Rudy: Eso es la resolución de un algoritmo.
Alberto: Poner algo a prueba para ver cómo responde.
Romina: Implementar nuevos métodos, implementar más temas que nos puedan servir.
Lorena: Todo lo que se ha visto para poder ser aplicado en ciertas circunstancias.
Antonio: Cambio.
Sandro: Integración y matrices.

Paso

Samuel: Delta t.
Rolando: Control de precisión.
Alan: El tamaño del paso h, es importante. Tu puedes trabajar con un determinado paso, para obtener una predicción, entonces en una de esas, si yo disminuyo el paso, vamos a mejorar la predicción. Pero, si sigo haciendo eso, llegará un momento en que no mejoras la precisión y puede ser que comience a aumentar el error. Entonces, el paso *h* es un parámetro que tiene su rango, no puede ser ni muy grande, ni muy pequeño.
Marcelo: Tamaño del paso es la distancia que hay entre un valor de abscisa y otro. Por ejemplo, cuando uno está aplicando integración.
Orlando: Un código se puede formar por pasos que deben seguir una estricta secuencia lógica y orden.
Fernando: El paso representa la viabilidad a encontrar el problema, porque si no escojo el paso adecuado, entonces no voy a tener la precisión.
Rudy: Me sugiere un establecimiento de escala.
Alberto: Los pasos necesarios para desarrollar algún problema.
Romina: Pasos de cómo ir haciendo cada método estudiado.
Lorena (No contesta)
Antonio: Procesos
Sandro: Interpolación.

Condicionamiento

Samuel: Que tan sensible es la matriz a la propagación de errores.
Rolando: Confianza en la respuesta.

Alan: También tenemos eso en los sistemas de ecuaciones. Si la matriz está mal condicionada, significa que el error en la solución va a variar con respecto a un pequeño cambio en algún coeficiente de la matriz o de los términos independientes. Ahora, imagínese que ese sistema de ecuaciones represente a la distribución de energía eléctrica en el país. Sería un sistema de ecuaciones gigante, donde un pequeño cambio en los coeficientes, son suficientes para hacer costos, pueden ser capacidades, resistencias, decaimiento de voltaje o cualquier situación que corresponda a algo físico y si la matriz está mal condicionada; es decir que el número de condiciones sea muy grande, nos arroja una solución que va a variar, va ser inestable inclusive, porque para un pequeño cambio va a tener grandes cambios en la solución. Entonces, eso no ocurre cuando un sistema está bien condicionado, donde si hay pequeños cambios en los coeficientes, habrá pequeños cambios en la solución y eso no hay problema, lo importante es que esté acotado el error.

Marcelo: Lo vemos en la parte de sistemas lineales, como un sistema bien condicionado, un sistema mal condicionado. Es importante trabajar con sistemas bien condicionados.

Orlando: Puede ser de diferentes tipos, condición lógica, condición matemática, condición numérica.

Fernando: Le relaciono mucho con la programación.

Rudy: Requisitos.

Alberto: Estar sujeto a cierta cuestión y no salir de ella.

Romina: Es cuando encuentra el valor de esta ecuación condicionada a un parámetro.

Lorena: Que debe estar presto para algo, para que se pueda dar.

Antonio: Una estructura, for, un while, una estructura lógica de programación

Sandro: En matrices vemos ciertas condiciones que se deben de cumplir.

Discretización

Samuel: Es pasar de lo continuo a lo no continuo.

Rolando: Recurso para métodos en ecuaciones diferenciales, ahí usamos eso.

Alan: Discretización es la división de las variables en nodos, para justamente buscar las soluciones en esos puntos.

Marcelo: Discretizar, eso hacemos siempre. Yo quiero hacer, por ejemplo, una integral y en vez de hacer una barrilla en el continuo que representa un intervalo cerrado, lo hago en un número finito de puntos, entonces estoy discretizando ahí.

Orlando: División en número de intervalos iguales.

Fernando: Eso es la facilidad para resolver un problema específico en integración.

Rudy: Descontrol.

Alberto: Tomar los resultados con cautela y tratar de comprobarlo de la mejor forma.

Romina: No sé

Lorena: No sé

Antonio (No contesta)

Sandro: Interpolación.

Algoritmo

Samuel: Conjunto de pasos bien definidos para resolver un problema.

Rolando: Elaboración del método numérico.

Alan: Son los que nos permiten desarrollar estos métodos y poderlos resolver mediante el computador.

Marcelo: Secuencia de pasos para resolver un problema en particular.

Orlando: Enunciación de los pasos que resuelven un problema.

Fernando: Base de la programación, los caminos que tengo que seguir para el objetivo.

Rudy: Métodos de solución.

Alberto: Diseñar a breves rasgos lo que uno debe hacer para solucionar un problema.

Romina: Son números, ecuaciones.

Lorena: Sería el resultado porque tiene que tener una serie de números, cálculos.

Antonio: Conjunto de pasos.

Sandro: Integración numérica.