



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Máster en Investigación y Evaluación Didáctica en el Aula para el Desarrollo  
Profesional Docente

**DESARROLLO DEL SENTIDO DE LA MEDIDA EN  
EDUCACIÓN PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO  
PARA LA MAGNITUD CAPACIDAD**

**DEVELOPMENT OF THE SENSE OF  
MEASUREMENT IN PRIMARY EDUCATION. A CASE  
STUDY FOR MAGNITUDE CAPACITY**

**Autor:** M<sup>a</sup> Isabel Cerezo Gamarra

**Tutora:** Isabel María Romero Albaladejo

**Cotutora:** María del Mar García López

Convocatoria de septiembre de 2021

## **Resumen**

Durante la etapa de Educación Primaria y, más concretamente, en el área de matemáticas, los alumnos y alumnas desarrollan una serie de competencias de acuerdo a los contenidos que se imparten. Entre estas competencias se encuentra el sentido de la medida, que se asocia al contenido de magnitudes y su medida. Sin embargo, la realidad es que estos contenidos se suelen trabajar de acuerdo con lo establecido en el libro de texto, dejando a un lado las experiencias prácticas en contextos reales, por lo que no se considera que se llegue a desarrollar adecuadamente el sentido de la medida. En este estudio analizaremos una propuesta didáctica que consiste en el desarrollo de un taller de la magnitud capacidad con escolares de 5° de Educación Primaria usando una metodología de Aprendizaje por Descubrimiento. A través de un estudio de caso con material audiovisual, se analizarán las estrategias que los estudiantes ponen en práctica durante el taller, además de las dificultades que manifiestan y los errores en los que incurrir. Así, veremos cómo este tipo de práctica fomenta el desarrollo del sentido de la medida.

**Palabras clave:** Sentido de la medida, Educación Primaria, estrategias, dificultades, errores, Aprendizaje por Descubrimiento.

## **Abstract**

During the Primary Education stage and, more specifically, in the area of mathematics, the students develop a series of competences according to the contents that are taught. Among these competences is the sense of measurement, which is associated with the content of magnitudes and their measurement. However, the reality is that these contents are usually worked in accordance with what is established in the textbook, leaving aside practical experiences in real contexts, so it is not considered that the sense of measurement is adequately developed. In this study we will analyze a didactic proposal that consists of the development of a workshop on the magnitude of capacity with 5th grade Primary School students using a Discovery Learning methodology. Through a case study with audiovisual material, the strategies that the students put into practice during the workshop will be analyzed, as well as the difficulties they manifest and the errors they make. Thus, we will see how this type of practice encourages the development of the sense of measurement.

**Keywords:** Sense of measurement, Primary Education, strategies, difficulties, errors, Discovery Learning.

# ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.	MARCO TEÓRICO .....	2
2.1.	Las magnitudes y su medida en el currículum de Educación Primaria .....	3
2.1.1.	Desarrollo del sentido de la medida .....	5
2.1.2.	Dificultades y errores de los escolares en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida.....	10
2.1.3.	Medida de la capacidad en Educación Primaria y su investigación .....	13
2.2.	Aprendizaje por Descubrimiento .....	17
3.	OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN .....	21
3.1.	Objetivo general .....	21
3.2.	Objetivos específicos .....	21
4.	METODOLOGÍA.....	21
4.1.	Participantes de estudio, instrumento y técnica.....	23
4.2.	Propuesta didáctica .....	24
5.	ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS .....	26
5.1.	Análisis y resultados tarea 1 .....	27
5.2.	Análisis y resultados tarea 2 .....	31
5.3.	Análisis y resultados tarea 3 .....	40
6.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	46
7.	BIBLIOGRAFÍA .....	50

## ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1.</i> Respuestas del grupo 1 en la tarea 2 .....	40
<i>Tabla 2.</i> Respuesta del grupo 3 en la tarea 2 .....	40
<i>Tabla 3.</i> Estrategias utilizadas por los escolares .....	45
<i>Tabla 4.</i> Dificultades y errores manifestados por los escolares .....	46

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Ejemplo donde toman su cuerpo (manos) como referente. ....	28
<i>Figura 2.</i> Primera ordenación del grupo 3 sin comprobación .....	31
<i>Figura 3.</i> Segunda ordenación del grupo 3 tras realizar las primeras comprobaciones .	31
<i>Figura 4.</i> Orden final de los recipientes del grupo 3 tras su comprobación.....	31
<i>Figura 5.</i> Alumno del grupo 3 explicando la proporcionalidad entre las cantidades.....	32
<i>Figura 6.</i> Ejemplo de estrategia en la que usan la medida por iteración a partir de un referente .....	33
<i>Figura 7.</i> Alumnos del grupo 1 usando su cuerpo (manos) como referente .....	33
<i>Figura 8.</i> Ejemplo de la estrategia en la que usan su cuerpo (manos) como unidad .....	33
<i>Figura 9.</i> Alumno del grupo 1 llevando a cabo la estrategia mencionada .....	41

# 1. INTRODUCCIÓN

Según la Orden del 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, en esta etapa y más concretamente en el área de las matemáticas, el fin es lograr un adecuado desarrollo de la competencia matemática, también entendida como alfabetización matemática y que consiste en la capacidad del individuo de razonar, interpretar y formular matemáticas para resolver problemas contextualizados en el mundo real (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2018).

También podemos ver que en el Real Decreto 126/2014 por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria, se le da especial énfasis a trabajar el área de las matemáticas partiendo de la experiencia y de contextos lo más cercanos posibles al alumnado, donde se trabaje la identificación y resolución de problemas.

Para la realización de este Trabajo Fin de Máster nos hemos centrado en un bloque concreto de las matemáticas que es el de medida. Si indagamos dentro del currículum de Educación Primaria, en el área de matemática vemos que, en el apartado de contenidos, hay un desglose en cinco bloques, dichos bloques se dividen en: bloque 1. Procesos, métodos y actitudes matemáticas, bloque 2. Números, bloque 3. Medida, bloque 4. Geometría y bloque 5. Estadística y Probabilidad. Este parece un aspecto muy general, pero el dedicarle un bloque en su totalidad a la Medida nos hace ver que tiene un lugar especial e importante dentro del currículum y que, por tanto, se merece un trato así.

No obstante, a pesar de su importancia tanto en el área de matemática como en otras áreas del currículo, por tratarse de un bloque de contenidos interdisciplinar, veremos que su tratamiento dentro del currículum dista mucho de su puesta en práctica en las aulas de Educación Primaria. Lo habitual es limitar su enseñanza al uso de los libros de texto, donde predominan los ejercicios de conversión de unidades u otro tipo de ejercicios en los que no hay cabida para las experiencias prácticas reales, haciendo así que los alumnos y alumnas no puedan desarrollar adecuadamente el sentido de la medida (Flores y Rico, 2015).

En el currículum de Educación Primaria se habla del desarrollo de la medida con magnitudes como longitud, peso, volumen, capacidad, superficie, tiempo y dinero. Sin embargo, es de resaltar que la realidad es que se les da mayor preferencia a unas

magnitudes que a otras. Así es el caso de la magnitud longitud a la que, sin lugar a dudas, se le dedica un mayor espacio tanto en los libros de texto y propuestas didácticas como en las investigaciones de aula. Por el contrario, magnitudes como la capacidad no tienen dicha repercusión, a pesar de ser igual de interesantes de trabajar.

Por ello, en este Trabajo Fin de Máster se va a presentar una propuesta didáctica para trabajar la magnitud capacidad y su medida, a través de un taller llevado a cabo con alumnos y alumnas de 5º de Primaria. Dicho taller está orientado a desarrollar el sentido de la medida para esta magnitud en los escolares. Este fue llevado a cabo por grupos de cuatros estudiantes que fueron grabados en vídeo para su posterior análisis en el presente trabajo.

Como es sabido en el ámbito educativo, en el desarrollo de las diferentes tareas dentro del aula los alumnos y alumnas ponen de manifiesto tanto estrategias de resolución como dificultades y errores. El propósito de este trabajo es describir estas estrategias, así como las dificultades y errores que manifiesten los escolares durante el desarrollo del taller.

Para ello, llevaremos a cabo un estudio de caso en el que escogeremos a dos de los grupos que realizaron el taller, concebido con una metodología de Aprendizaje por Descubrimiento guiado. A partir de aquí, mostraremos las estrategias comunes, las estrategias de cada grupo, las dificultades encontradas y, sobre todo, cómo salen de ellas y logran dar una respuesta correcta.

## **1. MARCO TEÓRICO**

En este apartado se presenta, por un lado, el marco teórico sobre magnitudes y su medida, particularizando en la magnitud capacidad y, por otro lado, el marco metodológico del aprendizaje por descubrimiento, bajo el que se ha desarrollado esta experiencia.

Empezaremos viendo el tratamiento que se le da a las magnitudes y su medida en el currículum de Educación Primaria, seguidamente se describirán las componentes que son expuestas por varios autores para el desarrollo del sentido de la medida, después abarcaremos las diversas dificultades y errores que se dan durante este desarrollo en los

escolares y, finalizaremos esta parte centrándonos en la magnitud capacidad y su repercusión en la investigación.

## **2.1.Las magnitudes y su medida en el currículum de Educación Primaria**

Podemos decir que la acción de medir es un destreza o habilidad que está presente en nuestro día a día. Por ello, se hace necesario un adecuado desarrollo de esta capacidad, puesto que los escolares deben estar preparados para enfrentarse a cualquier tipo de situación de su contexto, relacionada con las magnitudes y su medida, y poder salir de los problemas de forma airosa.

Para ese correcto desarrollo, es necesario el conocimiento de magnitudes básicas, de sus unidades de medida, identificación de cantidades y una correcta elección de magnitud y unidad según el contexto (Moreno et al., 2015).

En la Orden del 17 de marzo por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, se contempla un único bloque destinado a la medida en el que es imprescindible conocer y manejar distintos tipos de números, además de estrategias de aproximación y estimación para su correcto desarrollo. Esas estrategias se darán gracias a las prácticas reales de medición, que desembocan en la comprensión de la unidad y el sistema de medida (Belmonte et al., 2001).

Haciendo una revisión del currículum actual de Educación Primaria vemos que, con respecto a las magnitudes y su medida, se hace hincapié en que el acto de medir sea algo significativo para el alumnado, que surja de la propia necesidad del contexto. Para ello, propone la planificación de situaciones reales donde la respuesta al problema planteado sea la medición. Junto con esto, también hace referencia al uso de unidades tanto estándares como no estándares, como son el palmo o el pie, y también contempla la utilización de diferentes estrategias para ese fin. Además, se le dan una gran importancia al trabajo de las magnitudes y su medida en contextos reales y lo más cercanos posible al alumnado (Moreno et al., 2015). De esta forma se desarrolla, a su vez, la competencia matemática mencionada anteriormente.

Asimismo, según González y Gómez (2016) los contenidos que se tratan dentro del bloque de medida tienen un gran valor tanto funcional como formativo, puesto que los escolares desarrollan capacidades como la relación entre los distintos tipos de número,

aprendizaje de símbolos, interpretación y expresión de datos e información y el uso de técnicas e instrumentos de medida según el contexto.

Por otro lado, con la cuantificación del entorno físico, gracias al proceso de medir y lo que este conlleva, se pueden establecer vínculos entre los distintos bloques de las matemáticas, y se crea un nexo con otras materias del currículum (Moreno et al., 2015). Así, se entiende la medida como algo esencial haciendo que esta no valga solo por sí misma, sino también por su transversalidad con el resto de disciplinas y su aplicación en el mundo real (Belmonte et al., 2001).

Todo ello hace que los escolares desarrollen el sentido de la medida, el cual se entiende como la capacidad para relacionarse con la medida en situaciones y contextos diferentes de manera segura y confiada (Segovia y de Castro, 2013).

Hasta ahora hemos plasmado la importancia que tienen las magnitudes y su medida tanto para la vida cotidiana de los estudiantes como dentro del currículum de Educación Primaria y para el desarrollo de la competencia matemática. Sin embargo, Chamorro (2003) critica que, en el ámbito escolar, al tema de la medida se le da un carácter social. Esto consiste en considerar la medida como algo que el estudiante va a aprender fuera de la escuela y, por ello, no hay porque dedicarle tanto tiempo a su enseñanza-aprendizaje.

Debido a esto, en gran parte, el trabajo con las magnitudes y su medida dentro del aula se limita al uso del libro de texto. En este se les da mayor importancia a los conocimientos relacionados con la identificación de la unidad de medida y las equivalencias entre ellas, además de la realización de conversiones, ordenación de números naturales y decimales, y operaciones con estos números, de tal forma que se deja de lado la tarea de medir en sí.

A causa de ello, al finalizar la enseñanza primaria se dan una serie de carencias en este ámbito, ya que el conocimiento se reduce al manejo de rutinas con el sistema métrico decimal, principalmente (Belmonte et al., 2001; Flores y Rico, 2015).

La medida de una magnitud no es algo que se deba limitar al uso de fórmulas o a la realización de conversiones. La realidad es que el acto de medir no se da de forma espontánea en los escolares, sino que se requiere de gran experiencia en la práctica de

estimaciones, clasificaciones y seriaciones, y esto se desarrolla principalmente en etapas más tardías de su educación como la etapa de Educación Primaria (Chamorro y Belmonte, 2000).

Con el fin de hacer que los estudiantes desarrollen un correcto sentido de la medida es necesario trabajar dentro del aula con experiencias reales de medición, en las que los alumnos y alumnas pongan en práctica diferentes estrategias que puedan o no ser las correctas, y así aprender a desenvolverse en este tipo de situaciones.

Ahora, para un correcto desarrollo del sentido de la medida, los escolares deben de adquirir una serie de componentes que se describen de forma diferente por diversos autores en el siguiente apartado.

### **2.1.1. Desarrollo del sentido de la medida**

Para la adquisición del sentido de la medida, nos encontramos diferentes autores que abordan diversos constructos para tratar el desarrollo de esta capacidad y el tema de la medida en sí. A continuación, haremos un recorrido por la evolución de lo que dicen los autores más antiguos hasta los más modernos.

De esta forma, por un lado, veremos a aquellos que se centran en un enfoque evolutivo donde describen diferentes etapas, con un orden secuencial, por las que pasan los escolares hasta alcanzar el sentido de la medida (Chamorro y Belmonte, 2000; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Inskip, 1976; Piaget et al., 1960). Por otro lado, expondremos otros autores (Callís, 2002; Castillo, 2006, citado en Segovia et al., 2015; Lehrer, 2003; Moreno et al., 2015) que hablan de una serie de componentes que pueden ir adquiriendo los escolares de forma simultánea y que están relacionados entre sí para el desarrollo de esta capacidad.

Finalmente, nos centraremos en el trabajo de Moreno et al. (2015) por ser el más actual, a la vez que integra los trabajos de sus antecesores.

Comenzando por los enfoques evolutivos, tenemos a aquellos autores (Chamorro y Belmonte, 2000; Dickson et al., 1991; Piaget et al., 1960) que diferencian varias etapas por las que pasa el alumnado. Estas etapas están caracterizadas por ir desde la

conservación y transitividad, pasando por la captación de la idea de unidad y finalizando por la adquisición de nociones de medida (Dickson et al., 1991; Piaget et al., 1960).

Estas etapas son acogidas por Chamorro y Belmonte (2000), aunque estos autores no consideran que la transitividad se dé hasta el final, en lugar de al principio. Además, establecen otras etapas que denominan estadios generales, que deben superar los estudiantes para el conocimiento y manejo de una magnitud dada. Estos estadios van desde la percepción de una magnitud, después la conservación de esta, su ordenación y, por último, establecer relaciones entre magnitud y número, considerado este último como el momento en el que se es capaz de medir.

Además, Chamorro y Belmonte (2000) le dan especial énfasis al proceso de construcción de la unidad, que se da al final de la tercera etapa, donde se asume la idea de transitividad. Según dichos autores, este proceso sigue varias fases: a) ausencia de unidad; b) unidad objetual; c) unidad situacional; d) unidad figural; e) unidad propiamente dicha.

Por su parte, Inskip (1976) establece seis componentes de la medida que se dan de forma sucesiva, los cuales son: percepción, comparación, uso de referentes, sistema de medición, actitud afectiva y práctica de la medición.

En contraposición a este enfoque evolutivo, nos encontramos con autores que describen una serie de procesos que se dan de forma simultánea para la adquisición del sentido de la medida. Algunos de ellos, en lugar de procesos, los llaman factores (Callís, 2002) y otros los llaman componentes (Castillo, 2006, citado en Segovia et al., 2015; Lehrer, 2003; Moreno et al., 2015).

Callís (2002) afirma que para la adquisición completa de la capacidad de medida se requiere del dominio del espacio y el número, pero añade que también se deben dominar tres factores cuya unión significa la obtención del sentido de la medida. Estos factores (adquisición de la magnitud, adquisición de la medida y adquisición de la unidad), junto con los componentes descritos por Lehrer (2003) (relación unidad-atributo, iteración de la unidad, teselado de la cantidad mediante la unidad, conteo de unidades idénticas, estandarización, proporcionalidad, aditividad y origen de la medida)

se centran en la magnitud en sí y la cuantificación de esta mediante el trabajo con las unidades.

Por su parte, Castillo (2006) (como se citó en Segovia et al., 2015) expone una serie de componentes que también tratan los aspectos anteriores, como son, reconocer atributos medibles, manejar la terminología propia de cada magnitud, conocer y usar las unidades de medida, comparar cantidades dependiendo de la magnitud, cambiar de unidad de medida dentro de la misma magnitud y establecer la unidad de medida según el contexto.

Sin embargo, el resto de componentes descritas por este autor son: utilización de instrumentos de medida, realizar mediciones indirectas, reconocer el carácter aproximado de la medida, realizar aproximación y estimaciones. Así vemos que son Castillo e Inskeep los únicos autores hasta ahora que no se centran únicamente en la magnitud y sus unidades, sino que hacen referencia al proceso de medir en sí. Destacamos también la introducción de la estimación por parte de Castillo.

A partir de aquí, y en el resto del trabajo, hablaremos de componentes que se dan para el desarrollo del sentido de la medida teniendo en cuenta que estas no se dan de forma lineal.

Después de esta síntesis, finalizamos exponiendo el trabajo de Moreno et al. (2015) quienes elaboran su propia lista de componentes donde recogen las ideas de los autores anteriores y el cual tomaremos de base principal para la justificación y elaboración de nuestra propuesta didáctica.

Para Moreno et al. (2015) el proceso de medir se inicia con la cimentación de la magnitud y termina con la utilización de instrumentos, técnicas de medidas y estrategias de aproximación. Los componentes que exponen estos autores se dividen en conocimientos implicados en la medición de una magnitud, que sirven para el desarrollo del sentido de la medida, y líneas de acción, que sirven como guías para trabajar en las aulas.

Dentro de los conocimientos necesarios tenemos el *reconocimiento de cualidades comparables y medibles*. Este conocimiento implica gran parte de las etapas, factores y componentes nombrados anteriormente, ya que hace referencia a la percepción,

comparación, transitividad, uso de referentes, ordenación y cantidad de magnitud. Lo que nos recuerda a los primeros autores que se centran en la magnitud y la unidad.

En este caso, los autores, afirman que es la comparación la que facilita la percepción de los atributos de los objetos y que da lugar a la ordenación de acuerdo con una cualidad, al uso de referentes para comparar, a la equivalencia de objetos y a establecer el concepto de cantidad de magnitud.

Otro conocimiento es la *comprensión del proceso de medir*, que está estrechamente relacionado con el anterior puesto que la comparación de objetos conduce a una necesidad de usar unidades de medida. El uso de unidades de medida reiteradamente da lugar a la cantidad de unidades de medida que es el propio proceso de medir. Aquí vemos más similitud con los componentes de Lehrer, ya que hace referencia a las formas de contar la cantidad de unidad, como la iteración, aditividad y estandarización, nombradas anteriormente.

Por último, hablan del *desarrollo de estrategias de estimación* que, como hemos visto, también es nombrado por Castillo. Cabe decir que, para Moreno et al. (2015), la estimación es algo que se da durante todo el proceso de medición, ya que son juicios personales, que se hacen con criterio, sobre la cantidad de magnitud sin necesidad de instrumentos y basándonos en lo visual. Se trata de una habilidad dentro del aula que puede ayudar a los estudiantes a la elaboración de un marco de referencia que relaciona la unidad de medida con objetos cotidianos, a la vez que los entrena en actividades que muestran las propiedades básicas de la medida. Sin embargo, su desarrollo dentro del aula es limitado.

Ahora veremos las líneas de acción que Moreno et al. (2015) proponen como orientación para trabajar el sentido de la medida en el aula. A pesar de estar organizadas secuencialmente, esto no implica que se tengan que trabajar de forma lineal. Estas líneas de acción recogen conceptos que han mencionado los anteriores autores, tales como percepción, comparación, uso del Sistema Internacional, actitud ante la medida, manejo de instrumentos de medida y la medida como aproximación, siendo estas últimas mencionadas por Castillo con anterioridad.

Cabe destacar que son Moreno, Gil y Montoro los primeros en diferenciar entre el uso y la medida con unidades estándar y no estándar. Además, también incorporan la construcción con medidas y escalas, la resolución de problemas y la experiencia con mediciones y estimaciones en contextos reales, que son esenciales para el desarrollo de la competencia matemática.

Después de esto, consideramos que la estimación se merece una mención especial puesto que es un aspecto de la medida que va estrechamente ligado a todo lo expuesto anteriormente y, se podría decir, que no se puede medir sin estimar. Así, Flores y Rico (2015) exponen que trabajar la estimación en las actividades de medida ayuda a centrarse en el atributo y en el proceso de medida, produce motivación intrínseca, hace que los escolares se familiaricen con las unidades estándar y, por último, promueve el desarrollo del razonamiento multiplicativo.

Para trabajar la estimación es necesaria que el alumnado experimente situaciones prácticas en las que pueda ponerla en juego, con datos y contextos reales. Esto hace que los estudiantes descubran referentes para, posteriormente, autocorregirse y así determinar si los resultados obtenidos en otras mediciones son adecuados o no (Belmonte et al., 2001).

Así, se considera que la estimación es una de las componentes más importantes en el proceso de medición. Lo es tanto que, en la literatura, se recogen estrategias asociadas específicamente a esta. En Moreno et al. (2015) se habla de estrategias como el uso de referentes, el troceado (dividir una cantidad en cantidades más pequeñas y manejables o conocidas) y el fraccionamiento (dividir una cantidad en partes iguales).

En resumen, las componentes mencionadas se sintetizan en objetivos de aprendizaje que los alumnos y alumnas deben alcanzar en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes y su medida y que, según González (2015) son: a) percibir la magnitud y sus propiedades; b) conocer y trabajar las unidades de medida; c) conocer y utilizar procedimientos de medida; d) resolución de problemas de medida en diferentes contextos.

Durante el desarrollo de las diferentes tareas que integran las componentes que se han nombrado anteriormente para el desarrollo del sentido de la medida, en los escolares

van apareciendo estrategias a la vez que dificultades y errores. Estas limitaciones que presentan los estudiantes las veremos en el siguiente apartado.

### **2.1.2. Dificultades y errores de los escolares en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida**

En la planificación y puesta en práctica de una propuesta didáctica se hace necesario conocer las limitaciones del aprendizaje en el alumnado, en este caso nos centraremos en las dificultades y errores que presenta el alumnado de Educación Primaria con respecto a los contenidos de las magnitudes y su medida.

Primero debemos empezar por distinguir las dificultades de los errores. Las primeras hacen referencia a aquella “circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos” (González y Gómez, 2018, p.139), mientras que los errores son la manifestación observable de dicha circunstancia, cuyo origen proviene de conocimientos incompletos y en los que se tiende a incurrir. Además, no podemos considerar el error como un mero despiste, sino como “la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado” (Socas, 1997, p.125). En definitiva, toda dificultad da como resultado un error y todo error está asociado y originado por una dificultad.

En el aprendizaje de las matemáticas es común la expresión de dificultades y errores por parte de los alumnos y alumnas, sin embargo, este hecho resulta de gran utilidad a los docentes, ya que les proporciona información acerca de los esquemas mentales de los escolares para alcanzar una buena meta (Socas, 1997). Asimismo, Rico (1997) considera que el estudio de estas limitaciones es esencial para la construcción de secuencias dentro del aula en las que los alumnos y alumnas puedan reestructurar su conocimiento, de tal forma que sean conscientes de sus dificultades y errores y puedan dejarlos atrás.

A continuación, se expondrá la descripción de una serie de dificultades y errores que han recogido y plasmado algunos autores (Belmonte et al., 2001; Chamorro y Belmonte, 2000; González, 2015) relacionadas con las diferentes magnitudes y su medida. Dichas dificultades y errores nos servirán como sustento para identificar las que se puedan dar durante el desarrollo de la propuesta didáctica.

Belmonte et al. (2001) y González (2015) coinciden en la manifestación de una serie de dificultades que hemos decidido agrupar en los siguientes bloques.

- **Dificultades asociadas de la conservación de cantidad**

Por un lado, tenemos dificultades en la conservación de la cantidad. Estas se dan cuando los escolares no son capaces de ver que un objeto tiene la misma cantidad de magnitud después de haber variado su posición o forma. Según González (2015) algunos errores derivados de esta serían, por ejemplo, decir que dos objetos de la misma longitud son diferentes por estar colocados uno por delante de otro o afirmar que una bola de plastilina tiene diferente masa después de variar su forma.

- **Dificultades derivadas de la comparación**

Por otro lado, podemos hablar de dificultades asociadas a la comparación. Este bloque se divide en otras dificultades más concretas como las dificultades asociadas a la percepción de magnitud, dificultades en la transitividad (Moreno et al., 2015), dificultades en la equivalencia de magnitud (Belmonte et al., 2001) y dificultades asociadas a la visualización, siendo esta última compartida por ambos autores.

Estas dificultades se relacionan en gran medida con uno de los errores expuestos por Chamorro y Belmonte (2000) que se denomina “uso erróneo de los sentidos”, ya que durante las comparaciones los escolares se valen de los sentidos, sobre todo de la vista, y si estos no han sido debidamente entrenados con la realización de prácticas reales, se hace más sencilla la aparición de estas limitaciones.

Moreno et al. (2015) exponen que durante las comparaciones se suelen observar carencias o dificultades en la comprensión de la transitividad, de tal modo que ante la comparación de tres objetos A, B y C, comparan primero A y B, y luego A y C. Y obtienen como resultado que  $A > B > C$  sin comparar B y C.

- **Dificultades asociadas a la unidad de medida**

Por su parte, González (2015) describe dificultades asociadas a la unidad de medida que, al tratarse de un tema amplio, divide a su vez en dificultades en la reiteración

de la unidad, dificultades asociadas a la igualdad de tamaño en las unidades, y dificultades asociadas a la relación inversa entre tamaño de la unidad y número de unidades.

Junto con las anteriores también podemos relacionar la dificultad nombrada por el mismo autor asociada a la linealidad. Esta iría más destinada al trabajo de conversiones con el Sistema Métrico Decimal, ya que al enseñarse con la típica escalera no se da una interiorización del proceso en sí y los escolares lo hacen de forma mecanizada. Por ello se dan diversos errores como pensar que, por ejemplo, en temas de superficie, las unidades van de 10 en 10 en lugar de 100 en 100.

Asimismo, esta dificultad guarda relación con la nombrada por González (2015) como aquella asociada a la introducción temprana de fórmulas que deriva en errores de escritura sin sentido (Chamorro y Belmonte, 2000). Puesto que los escolares solo aprenden a sustituir variables en una fórmula, pero no su verdadero fin y significado haciendo que incluso haya errores en esa sustitución.

- **Dificultades derivadas del acto de medición**

En otro orden, se contemplan dificultades asociadas al acto de medición. Esta dificultad está asociada, por un lado, a dificultades relacionadas con la utilización inadecuada de los instrumentos de medida, que conlleva errores en el manejo de estos, como son errores en el transporte del instrumento, carencia de estrategias para efectuar medidas y errores de precisión (Chamorro y Belmonte, 2000; Belmonte et al., 2001).

Por otro lado, también se manifiestan errores en la aproximación y exactitud (encuadramiento) de las mediciones, puesto que la mala ejecución de la medición junto con la falta de experiencias prácticas hace que los escolares piensen que los resultados han de ser exactos y no contemplan la aproximación. Además, se dan también errores en la elección de la unidad dependiendo del contexto y en los encuadramientos, es decir, decidiendo cómo han de redondear dependiendo de la situación.

Por último, según Belmonte et al. (2001) también existen dificultades asociadas a la estimación. Realmente todas las anteriores se pueden relacionar con la estimación, puesto que para llevar a cabo esta es necesario trabajar adecuadamente la percepción del atributo, la comparación, la equivalencia y el uso adecuado de las unidades de medida.

### **2.1.3. Medida de la capacidad en Educación Primaria y su investigación**

Después de todo lo expuesto sobre la enseñanza-aprendizaje de la medida en general en Educación Primaria, procederemos ahora a indagar en la magnitud que nos ocupa, que es la capacidad. Para ello, se ha llevado a cabo una búsqueda exhaustiva en diferentes plataformas de búsqueda online, dando como resultado una falta de investigación en el trabajo de la magnitud capacidad en el aula.

Para llevar a cabo esta indagación, comenzamos por la Encyclopedia of Mathematics Education. Esta primera búsqueda se inició introduciendo en la caja de búsqueda “magnitudes y su medida”, lo que dio cuatro resultados cuyos títulos son: Dificultades de aprendizaje, necesidades especiales y aprendizaje de matemáticas; Las rectas numéricas en la educación matemática; Enseñanza y aprendizaje de números; Enseñanza y aprendizaje temprano de álgebra.

Como podemos ver, además de no hacer una referencia específica a la medida de la capacidad, tampoco vemos indicios de poder encontrar algo sobre sentido de la medida o trabajo con magnitudes.

En un nueva búsqueda se decide optar por usar “medida” o “medición” y obtenemos veinticuatro resultados cuyos títulos son: Plan de estudios de Elkonin y Davydov en educación matemática; Las rectas numéricas en la educación matemática; Evaluación externa en educación matemática; Evaluación de matemáticas en el aula; Enseñanza y aprendizaje de números; Estudio de desarrollo de la formación docente-Matemáticas (TEDS-M); Forma y espacio: enseñanza y aprendizaje de la geometría; Organización, plan de estudios y resultados de la formación de profesores de matemáticas; Accesos de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación matemática; Educación matemática realista; Conocimiento matemático para la enseñanza; Conceptos erróneos y conceptos alternativos en la educación matemática; Dificultades de aprendizaje, necesidades especiales y aprendizaje de matemáticas; Marcos de competencias en educación matemática; Conocimiento de contenidos pedagógicos en educación matemática; Enfoques matemáticos; Situaciones didácticas en la educación matemática; Alfabetización matemática; Educación Matemática Infantil; Adultos aprendiendo matemáticas.

En esta nueva búsqueda volvemos a ver títulos muy generales que no nos hacen pensar que podamos encontrar nada con relación a las magnitudes y su medida, y menos aún de la magnitud capacidad en específico.

Además, si en la búsqueda usamos la frase “capacidad y volumen” directamente nos indica que no encuentra nada relacionado con eso.

A continuación, recurrimos a la revista Uno de la editorial Graó. Aquí encontramos un único número dedicado por completo a la medida. Sin embargo, no hay ninguna sección que vaya dedicada a la capacidad. Las diferentes secciones hacen referencia a la estimación, el área, la magnitud tiempo o al currículum de medida en Educación Primaria y ESO.

Haciendo una búsqueda más exhaustiva dentro de esta misma revista, encontramos secciones aisladas dedicadas a la medida dentro de algunos números, tales como aquellas con los títulos: Un entorno virtual para construir la idea de volumen en una aula inclusiva; Medida y premedida: una experiencia lúdica en la escuela primaria; La enseñanza del volumen en los libros de texto mexicanos: un siglo de educación en México; Fenómenos de enseñanza de la medida en la escuela elemental; Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria; evaluación del sentido de la medida.

Aquí sí podemos apreciar una clara referencia a la medida. Además, los artículos en los que se menciona el volumen nos hacen pensar que pueden tener algo que ver con la capacidad, aunque tras leerlos vemos que no dicen nada referente a la capacidad.

Asimismo, de entre todos los números, encontramos una sección de uno de ellos con el título “A tope” que trata de la descripción de un taller que se realizó en una clase de Educación Infantil sobre capacidad. Este es el artículo que más se relaciona con esa magnitud y con el TFM aquí presente, ya que dicho taller tiene ciertas similitudes con el que posteriormente se va a analizar.

Después de esto, se pasó a indagar en plataformas de búsqueda más comunes como Dialnet o Google, usando patrones de búsqueda comunes como “magnitudes y su medida en Educación Primaria”, “medida de la capacidad en Educación Primaria”, “mediciones en Educación Primaria” o “capacidad y volumen en Educación Primaria”. Los resultados de estas búsquedas continuaron siendo igual de ambiguos o daban como

resultado artículos en los que se hablaba de la enseñanza y aprendizaje de las medidas en general. Es más, muchos de ellos eran investigaciones con maestros de Educación Primaria y no con alumnado de Educación Primaria u otras etapas.

A partir de estas búsquedas vimos que se repetían en las bibliografías de los diferentes artículos autores como M<sup>a</sup> Carmen Chamorro, Luis Rico, Isidoro Segovia o Pablo Flores, entre otros. Por ello se decide seguir la pista de estos autores para la fundamentación de este trabajo, aunque vemos que dentro de las investigaciones y publicaciones de estos no se da un especial énfasis a la magnitud capacidad.

Una vez realizada la indagación estos son los resultados obtenidos con respecto a la magnitud capacidad relacionados con los apartados descritos anteriormente:

- **En relación a las componentes para el desarrollo del sentido de la medida**

En Chamorro y Belmonte (2000) vemos que se usa la magnitud capacidad como ejemplo cuando se refieren a las fases que se deben de seguir para la construcción de la unidad. Recordamos que esto es un proceso que se da al final de lo que estos autores han definido como tercera etapa.

Entre esas fases tenemos que, en la llamada “ausencia de unidad” los escolares pueden comparar dos recipientes sin tener que usar una unidad de medida. En el caso de la fase de “unidad objetal”, para medir la capacidad de un recipiente se les da a los escolares recipientes más pequeños y de diversas formas, donde es más probable que los estudiantes utilicen, de entre estos, el recipiente con la forma más parecida al que quiere medir.

En la fase de “unidad situacional”, los estudiantes se centran más en la cantidad de capacidad que contiene un recipiente que en la forma. Luego, en la fase de “unidad figural”, se van asociando los recipientes a determinadas unidades y así los van eligiendo para medir. Por último, en la fase de “unidad propiamente dicha”, se menciona que la capacidad es comprendida por los escolares entre los 6 y 8 años.

Por otro lado, Moreno et al. (2015) nos hablan de componentes que se concretan en conocimientos y líneas de acción, como ya hemos visto.

Dentro de los conocimientos descritos por estos autores, en el llamado “reconocimiento de cualidades comparables y medibles”, mencionan la capacidad. Puesto que, al trabajar con esta se da un claro ejemplo de la deficiencia en la adquisición de la transitividad en los escolares al comparar, por ejemplo, la capacidad de tres recipientes.

En las líneas de acción se menciona la capacidad como una magnitud más que debe ser trabajada en el aula, pero no se dice nada específico de esta.

Finalmente, González (2015) sintetiza las componentes que se deben desarrollar para adquisición del sentido de la medida en objetivos generales, como hemos visto anteriormente. Esta misma autora redacta unos objetivos específicos para la magnitud capacidad que son:

- a) Conocer o entender la capacidad como la propiedad de un objeto de servir de recipiente o contener a otros.
- b) Identificar el litro como la unidad de medida de la capacidad junto con sus múltiplos y submúltiplos, además de sus referentes (medio litro, tercio de litro, cuarto de litro). También deben hacer uso de unidades de medida no convencionales (vaso, jarra, botella).
- c) Aprender métodos directos para comparar capacidades de diversos recipientes (métodos de descomposición, recomposición, completación y llenado de recipientes sencillos).
- d) Comprender que la capacidad del recipiente no depende del líquido que contenga, sino del propio recipiente.

- **En relación a la dificultades y errores durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la magnitud capacidad**

En cuanto a dificultades y errores específicos de la magnitud capacidad, la literatura expone realmente poco sobre ello. En Chamorro y Belmonte (2000) encontramos que afirman que la mayoría de los errores y dificultades que se pueden dar con esta magnitud (y las demás) se deben a la falta de experiencias prácticas.

Además, en estos mismos autores encontramos una pequeña referencia específica a la capacidad dentro del error que denominan “asociado al uso erróneo de los sentidos”,

donde usan la capacidad para ejemplificar que no se puede percibir esta magnitud con el tacto, por ejemplo.

Consideramos, por tanto, que los escasos resultados obtenidos en estas búsquedas por las diferentes plataformas hacen necesario el trabajo aquí presente en el que se realizará una investigación de estrategias y dificultades, entre otras cosas, que presentan y manifiestan alumnos y alumnas de Educación Primaria en un taller de una magnitud tan poco estudiada como la capacidad.

## **2.2. Aprendizaje por Descubrimiento**

Ahora pasamos a centrarnos en la metodología de enseñanza que se ha llevado a cabo en la experiencia de aula que, en este caso, es el Aprendizaje por Descubrimiento.

En la enseñanza-aprendizaje de la medida, Belmonte et al. (2001) critican que se le da una gran importancia al Sistema Métrico Decimal y a las relaciones entre las distintas unidades dentro de este, poniendo así el acento en los aspectos algorítmicos sin dejar que los alumnos y alumnas tengan la oportunidad de descubrirlas y entenderlas. Se argumenta que el uso de algoritmos es un método cuya ejecución es más rápida y cómoda, sin embargo, estos mismos autores afirman que tanto epistemológicamente como didácticamente, la utilización de métodos de medición directos, o en los que subyace la idea de medida directa, tienen la ventaja de ser más accesibles a los alumnos y alumnas, en contraposición a los procesos aritméticos. De esta manera, los estudiantes serán capaces de descubrir por sí mismos las unidades de medida y el proceso de medir en sí, además de verle una verdadera utilidad llegando a ser significativo para ellos.

El hacer énfasis en este tipo de conocimientos algorítmicos, hace que en la mayoría de ocasiones la metodología empleada sea, principalmente, la tradicional de transmisión y recepción. Esta se apoya en el libro de texto, como hemos comentado en apartados anteriores, y no se centra en el aprendizaje activo del estudiante ni en el propio alumnado en sí, por tanto, no llega a ser algo significativo para este, sino un mero trámite para aprobar la asignatura.

Es más, Chamorro (2000) afirma que este tipo de metodología tradicional ha tenido una repercusión negativa en el aprendizaje de las matemáticas, pero más aún en el aprendizaje de las magnitudes y su medida, puesto que se hace necesaria la manipulación

para diferenciar las propiedades de los objetos que no se pueden identificar a simple vista, lo que hace que el alumnado carezca de experiencias propias y se limite a la memorización de procesos y reglas que olvidará a corto plazo.

Para enfrentar este tipo de metodologías tradicionales en las que predomina el aprendizaje memorístico basado en la repetición, surge lo que Bruner (1966), en su obra “Toward a Theory of Instruction”, denomina Aprendizaje por Descubrimiento. Este tipo de aprendizaje se define como aquel en el que no se dan los contenidos en su formato final, sino que es el propio estudiante el que se encarga de ir descubriendo esos contenidos de forma autónoma. Así, los escolares se convierten en los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje y el papel del docente se limita a ser un guía y soporte, además de facilitador de todas las herramientas necesarias para ayudarlos durante el camino de descubrimiento del conocimiento.

Baro (2011) afirma que, tanto para Bruner como para Vygotsky, dentro del proceso de aprendizaje, la parte principal a destacar es el papel de la actividad, sin embargo, a la actividad guiada descrita por Vygotsky, Bruner suma que para que sea significativa para el estudiante es indispensable que tenga que descubrirla por él mismo.

Según Reibelo (1998), del pensamiento de Bruner se pueden derivar cuatro hipótesis:

- Cuando el alumnado es el responsable de resolver los problemas planteados y transformar la información bajo la guía del docente se produce un desarrollo del potencial intelectual.
- La motivación pasa de ser extrínseca a intrínseca, puesto que nace del interior y favorece así un aprendizaje significativo.
- Se plantea el aprendizaje por descubrimiento para aquellos problemas que requieren de la creatividad, ya que no son fáciles, por lo que se necesita de una planificación previa.
- El aprendizaje por descubrimiento beneficia la consolidación y retención de los conocimientos, ya que ha sido el propio alumnado el encargado de descubrirlos.

Por su parte, Barrón fija diez principios que desarrollan la teoría del aprendizaje por descubrimiento:

- El ser humano está dotado de potencialidad natural para descubrir conocimiento
- El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa
- El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas
- El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso de resolución significativa de problemas
- El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas
- Para que la actividad resolutoria pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y creativa
- El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores
- Al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la mediación sociocultural
- El grado de descubrimiento es inversamente proporcional al grado de predeterminación del proceso resolutorio
- El aprendizaje por descubrimiento puede ser pedagógicamente promovido (1993, p.3-5).

Asimismo, podemos distinguir entre descubrimiento inductivo (de lo particular a lo general), descubrimiento deductivo (de lo general a lo particular) y descubrimiento transductivo (encontrar similitudes entre dos elementos) (Baro, 2011).

Por otro lado, el objetivo del Aprendizaje por Descubrimiento es que los alumnos y alumnas experimenten un aprendizaje significativo. Estos dos conceptos están estrechamente relacionados puesto que, el aprendizaje por descubrimiento ayuda en la evaluación de la comprensión obtenida gracias al aprendizaje significativo junto con la incorporación de los primeros conceptos en edades tempranas. Así, el aprendizaje por descubrimiento se concibe como un método de gran importancia dentro de la escuela, sobre todo en las primeras etapas (García, 1993).

El fin último de los métodos por descubrimiento es conseguir un aprendizaje significativo, entendido este como aquel que “se produce cuando el nuevo contenido se relaciona sustancialmente con la estructura cognitiva del sujeto que aprende, modificándola” (Trianes, 2012, p. 408). Es decir, con el aprendizaje por descubrimiento se pretende dejar a un lado los métodos tradicionales memorísticos y repetitivos para

hacer que el alumnado sea consciente de su aprendizaje, a la vez que le ve utilidad para usarlo en futuras situaciones.

Por ello, el aprendizaje significativo se caracteriza por ser aquel que relaciona los conocimientos previos con los nuevos y porque se requiere de una actitud favorable para llevar a cabo lo anterior (García, 1993), de lo que se derivan las dos condiciones que propone Trianes (2012) para que este se produzca:

- Utilizar un material potencialmente significativo, que esté preparado, estructurado y planificado con anterioridad y que se relacione de forma sustantiva con los conocimientos previos del alumnado
- Esfuerzo y motivación por parte del alumnado. Esto es esencial puesto que lo anterior no serviría de nada si el alumno o alumna no muestra una predisposición óptima hacia el aprendizaje.

Además del papel protagonista del alumnado en el desarrollo de este tipo de aprendizaje, tanto significativo como por descubrimiento, también debemos destacar la labor del docente. Este es el encargado de guiar a los estudiantes durante este proceso, a la vez que los animan y orientan sin adelantar las soluciones, por lo que tiene que organizar, estructurar y planificar las tareas de forma adecuada y adaptada al grupo de clase, con el propósito de que los alumnos y alumnas sean capaces de asimilar los nuevos conocimientos (García, 1993; Domínguez, 1990).

Para ello, las condiciones que debe tener en cuenta el docente, según Baro (2011), para llevar a cabo el aprendizaje por descubrimiento son:

- Considerar un ámbito de búsqueda restringido para no desviar al alumnado del objetivo principal
- Plantear y utilizar objetivos y medios llamativos y atrayentes para el alumnado
- Tomar como base los conocimientos previos del estudiante
- Familiarización del alumnado con las herramientas a utilizar en el método por descubrimiento (observación, búsqueda, control y medición de variables).

### **3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

Como dijimos en el apartado de introducción, en esta investigación se va a analizar un taller de capacidad que fue llevado a cabo por pequeños grupos de cuatro integrantes de 5º de Educación Primaria.

A continuación, vamos a establecer un objetivo general que se pretende conseguir en este trabajo y, por otro lado, una serie de objetivos específicos que complementan al general.

#### **3.1. Objetivo general**

El objetivo principal que se persigue en esta investigación es el siguiente:

- Analizar y describir el desarrollo de una propuesta didáctica en formato de taller para el desarrollo del sentido de la medida en la magnitud capacidad en dos grupos formados por escolares de 5º de Educación Primaria.

#### **3.2. Objetivos específicos**

El objetivo anterior se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Describir las diferentes estrategias comunes y no comunes que cada grupo pone en juego para resolver la situación problemática a la que se enfrenta.
- Identificar y analizar las dificultades que presenta cada grupo y los errores en los que incurren durante el desarrollo del taller.
- Identificar el tipo de ayuda que se les presenta o surge para solventar o salir de los errores y dificultades que surgen durante el desarrollo del taller.
- Concluir si finalmente acaban resolviendo correctamente la situación problemática a la que se enfrentan de forma favorable o no.

### **4. METODOLOGÍA**

Para el desarrollo del presente Trabajo Fin de Máster se ha optado por seguir una metodología cualitativa la cual va más allá de un conjunto de técnicas para recoger datos (Rist, 1977). La metodología cualitativa, según Taylor y Bogdan (1992), se define como

aquella “que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable” (p.7).

Estos mismos autores describen esta metodología con una serie de características tales como: su carácter inductivo y humanista; las personas y escenarios no se reducen a variables, sino que son considerados como un todo; los investigadores son sensibles a los efectos que ellos mismos causan, además de tratar de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas; el investigador también suspende o aparta sus propias creencias y considera valiosas todas las perspectivas. Estos investigadores también dan énfasis a la validez en su investigación, para ellos todos los escenarios y personas son dignos de estudio, y así consideran la investigación cualitativa como un arte.

Este tipo de investigación se caracteriza, además, por la descripción como proceso para elaborar datos (Badilla, 2006). En este caso aplicaremos la metodología cualitativa para estudiar y analizar el comportamiento, las estrategias utilizadas, las dificultades que manifiestan y cómo salen de ellas de los alumnos y alumnas de Educación Primaria durante la consecución de un taller donde se trabaja la magnitud capacidad y su medida.

Dentro de los tipos de modalidades de investigación cualitativa, podríamos definir la nuestra como una investigación comparativa de dos estudios de caso mediante el análisis de grabaciones. El estudio de casos en sí se define como el “examen de un ejemplo en acción. El estudio de unos incidentes y hechos específicos y la recogida selectiva de información de carácter biográfico, de personalidad, intenciones y valores, permite al que lo realiza, captar y reflejar los elementos de una situación que le dan significado” (Walker, 1983, citado en Angulo y Vázquez, 2003, p.2).

Siguiendo esta línea, Cebreiro y Fernández afirman que este tipo de método no se limita a la recogida de números, sino que se caracteriza por la descripción de diferentes muestras de información, en este caso cualitativa, que se manifiesta principalmente en palabras, por tanto, “lo esencial en esta metodología es poner de relieve incidentes clave, en términos descriptivos, mediante el uso de entrevistas, notas de campo, observaciones, grabaciones de vídeo, documentos” (2004, p.666).

Hablamos de un estudio comparativo de dos casos porque, como veremos más detenidamente en el apartado siguiente, se han escogido dos grupos concretos de alumnos y alumnas para su descripción y comparación.

A continuación, describimos, por un lado, los participantes en el estudio junto con el instrumento con el que se recogieron los datos y la técnica utilizada. Por otro lado, la propuesta didáctica y, finalmente, el procedimiento de análisis.

#### **4.1. Participantes de estudio, instrumento y técnica**

Badilla (2006) considera que en las investigaciones cualitativas es el investigador quien identifica las características relevantes que poseen los participantes de la investigación, es decir, es el que decide qué participantes pueden aportar algo significativo a la investigación para dar respuesta a las preguntas o problemas y, por ende, a la teoría que busca.

Los participantes del estudio han sido escolares de edades comprendidas entre 10 y 11 años, de la etapa de Educación Primaria, más concretamente de 5º curso. Todos ellos y ellas pertenecen al colegio Clara Campoamor de Huércal de Almería.

Por otro lado, el único y principal instrumento y fuente de información para esta investigación han sido las grabaciones que se realizaron en el aula durante la realización del taller y, por tanto, la técnica que se va a usar para la descripción va a ser la observación, en este caso una observación a posteriori que nos va a servir para centrarnos más en detalles que pueden pasar desapercibidos, en comparación con una observación en el momento preciso que se da la situación.

Las grabaciones se realizaron a cinco grupos diferentes, compuestos tanto por alumnos como por alumnas. Tras la visualización de todas ellas, se ha decidido escoger a dos de los grupos (grupo 1 y 3) para su análisis en profundidad por ser los grupos que se han considerado más completos, donde realizan todas las tareas y por mostrar estrategias y dificultades tanto propias como repetitivas en el resto de los grupos. Así pues, el grupo 1 está formado por dos chicos y dos chicas, y el grupo 3 por tres chicos y una chica.

Cabe mencionar también que el colegio Clara Campoamor es un centro público que está acostumbrado a trabajar con metodologías alternativas y que, concretamente, los niños y niñas que realizaron el taller estaban acostumbrados a trabajar en equipo, ya que su tutora los sumergió en el aprendizaje por equipo de forma cooperativa y colaborativa desde edades bien tempranas.

#### **4.2. Propuesta didáctica**

Antes de entrar de lleno en el análisis de datos, cabe mencionar, para situar al lector en el contexto de la situación, que se trata de un taller en el que se trabaja la magnitud capacidad y que consta de varias tareas que suponen una situación problemática para el alumnado, la cual deben resolver.

Estas tareas han sido diseñadas de acuerdo a las componentes que debe adquirir un estudiante para el desarrollo del sentido de la medida, las cuales hemos visto en el apartado de marco teórico. Dichas tareas son:

- ***Tarea 1: Comparar y ordenar***

En esta se les da a los alumnos y alumnas una serie de recipientes de diferente forma, dimensiones y capacidad. Dichos recipientes se dividen en cuatro grupos según su capacidad, unos de 0,25 litros, otros de 0,5 litros y otros de 1 litro y 1,5 litros, de las cuales los escolares no tienen constancia de antemano.

En una primera parte, los estudiantes deben de ordenar dichos recipientes a ojo, ya sea de menor a mayor o de mayor a menor capacidad. Seguidamente, en la segunda parte de la tarea, deben de compararlos y ordenarlos realizando trasvases de agua.

- ***Tarea 2: Se establece un recipiente como unidad***

Esta tarea se divide en dos partes, ya que se usarán dos unidades diferentes y, a su vez, cada una de estas partes podríamos decir que se subdivide en dos, puesto que en la primera se estima y en la segunda se comprueba.

En la primera parte de la tarea se toma uno de los recipientes más pequeños como unidad, siendo este en realidad de 0,25 litros y, en la segunda parte, se toma como unidad un recipiente un poco mayor al anterior, de 1 litro.

En cada parte el grupo de alumnos y alumnas debe estimar cuántos recipientes del que se considere unidad caben en los restantes y, una vez que se estime a ojo, podrán comprobar sus conjeturas.

- ***Tarea 3: Cantidad de litros y mililitros de cada recipiente***

En la consecución de esta tarea los alumnos y alumnas tienen que estimar la capacidad de cada recipiente en litros y mililitros. Primero se hará la estimación a ojo y posteriormente se les dará un vaso medidor para comprobarlo.

#### **4.3.Procedimiento de análisis**

Antes de realizar el análisis de datos se han tenido en cuenta las fases descritas por Powell et al. (2003) para el análisis de grabaciones de audio y vídeo. Esta secuencia de fases no es lineal, sino que interactúan unas con otras. Se concretan en:

1. Visualización de los datos del vídeo
2. Descripción de los datos del vídeo
3. Identificación de eventos críticos
4. Transcripción
5. Codificación
6. Construcción de una historia
7. Composición narrativa

En nuestro caso comenzamos por realizar varias visualizaciones de los vídeos correspondientes al total de los grupos, en este caso cinco grupos de cuatro alumnos y alumnas cada uno. La primera visualización fue algo más general y se realizaron las primeras descripciones y anotaciones de los vídeos para su posterior análisis.

Después de esto, se llevó a cabo una segunda visualización en la que se identificaron eventos críticos que sirvieron para seleccionar dos grupos para su posterior análisis en profundidad.

Una vez seleccionados los grupos, se realizaron varias visualizaciones posteriores donde se describieron más detalladamente aspectos de las grabaciones importantes para el trabajo.

En las siguientes visualizaciones se optó por transcribir momentos representativos de las situaciones acaecidas en las grabaciones, llevando a cabo también una codificación de los momentos críticos.

Finalmente, con el fin de dar sentido a los datos, se construyó una historia de forma que se ordenaron los datos encontrados y se les dio sentido, lo que dio lugar a la composición narrativa donde vemos el conjunto de datos que hacen que se cumplan nuestros objetivos de investigación.

Una vez seguido este proceso, se procede al análisis de datos en sí, que detallaremos de manera más clara y precisa en el siguiente apartado.

## **5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS**

En este apartado, y como su nombre indica, vamos a proceder al análisis de datos y resultados. Para ello, lo vamos a dividir según las tareas del taller que, en este caso son tres. Recordamos que, a su vez, cada tarea consta de dos partes, una primera parte en la que los escolares deben estimar y una segunda parte en la que pueden comprobar con transvases.

Para comprobar si se alcanzan los objetivos propuestos, en cada parte de cada tarea analizaremos y veremos los resultados de:

- Las estrategias comunes en ambos grupos
- Las estrategias de cada grupo en particular
- Dificultades asociadas a cada tarea
- Errores en los que incurren en cada tarea
- Cómo salen de esos errores y dificultades
- Si llegan a resolver la tarea correctamente

Una vez expuesto lo anterior, nos adentramos en el análisis en sí.

## 5.1. Análisis y resultados tarea 1

La tarea 1 se dividía en dos partes. En una primera parte los escolares debían de realizar una ordenación de los diferentes recipientes de forma aproximada y a priori. La segunda parte consistía en realizar esa misma ordenación, pero ayudándose de transvases de agua con los recipientes.

### Parte 1: Ordenación sin comprobación (sin transvase de líquidos)

#### a) Estrategias comunes

##### 1. Tomar las dimensiones como referente

Al haber una falta de instrumento que les proporcione la cantidad de magnitud, en ambos grupos se opta por recurrir a las dimensiones de los recipientes (largo, ancho, alto) y hacer la comparación y ordenación a partir de estas.

Así, hacen uso de una estrategia común en la estimación como es el uso de referentes (Moreno et al., 2015).

Aunque consideramos que no es una estrategia muy fiable, consiguen con ella hacer una primera ordenación cercana a la correcta.

##### 2. Proporcionalidad de dimensiones

Esta estrategia está íntimamente ligada con la anterior para realizar una buena ordenación.

Esta consistió en que los escolares fueron capaces de percibir dos dimensiones de los recipientes de forma simultánea y establecer entre ellas una relación de proporcionalidad. De tal manera que consideraban que dos recipientes distintos, en lo que respecta a largo y ancho, eran iguales puesto que lo que uno tenía de largo lo que el otro tenía de ancho.

### 3. Comparación por pares

Siempre realizan comparaciones entre dos recipientes que dan como resultado que uno es mayor que otro o igual, a raíz de ahí cogen uno de esos y lo comparan con otro, y así sucesivamente.

b) Estrategias propias del grupo 1

#### 1. Comparar recipientes parecidos

Durante la comparación primero escogen recipientes parecidos en lugar de empezar por establecer comparaciones entre recipientes muy dispares.

c) Estrategias propias del grupo 3

#### 1. Tomar su propio cuerpo como referente

Para comparar dos recipientes que consideran de la misma anchura se ayudan de sus manos (figura 1) poniéndolas en uno de los recipientes de un extremo a otro y, manteniendo esa separación con las manos, las ponen en otro para ver si son iguales.

Una vez más vemos el uso de referentes como estrategia común en la estimación (Moreno et al., 2015).



*Figura 1.* Ejemplo donde toman su cuerpo (manos) como referente.

## Parte 2. Ordenación con comprobación (con transvase de líquidos)

a) Estrategias comunes:

### 1. Empezar por los recipientes más grandes

El grupo decide optar por empezar llenando los recipientes que consideran mayores y realizar los transvases desde ese origen.

### 2. Repetir transvases a la inversa

Cuando al realizar un transvase no ven claro el resultado o no están seguros, sobre todo con recipientes que han dado indicios de ser equivalentes en el primer transvase, deciden realizar el transvase a la inversa para asegurarse.

## Dificultades y errores en la tarea 1

Durante esta tarea se dan dificultades y errores principalmente asociados a la categoría que hemos denominado, en el marco teórico, como “dificultades derivadas de la comparación”. Así nos encontramos con que los escolares presentan dificultades en la transitividad (Moreno et al., 2015) al comparar tres recipientes, por lo que da lugar a errores en la ordenación de dichos recipientes.

Por otro lado, dentro de esta misma categoría, vemos manifestadas dificultades asociadas a la forma de los recipientes puesto que, en ocasiones, no tienen en cuenta todas las dimensiones (ancho, alto). Esta dificultad da lugar a errores de los sentidos (Chamorro y Belmonte, 2000), ya que, en este caso, hacen uso de la vista, pero de forma inadecuada.

En otro orden, nos encontramos con dificultades que se enmarcan en la categoría que hemos denominado “dificultades asociadas al acto de medición”. Dentro de esta se manifiestan dificultades asociadas al uso incorrecto de los instrumentos (Belmonte et al., 2001), en este caso los recipientes, donde el trabajo que se hace con estos por parte de los escolares carece de rigurosidad.

Esto da lugar a errores en el transporte del instrumento y errores de precisión (Belmonte et al., 2001; Chamorro y Belmonte, 2000). Ejemplos de estos errores los podemos ver cuando en los transvases que realizan los escolares, en su mayoría, durante

el transporte, existe una pérdida de líquido que hace que los resultados obtenidos no sean del todo certeros y les hagan dudar y tener que repetir el transvase.

### ¿Cómo salen o solventan las dificultades y errores?

Para salir o solventar este tipo de dificultades y errores los escolares cuentan durante la tarea con ayuda de la docente que hace de guía, pero nunca dando el resultado final (García, 1993; Domínguez, 1990). Es aquí donde vemos una pincelada del Aprendizaje por Descubrimiento.

Por otro lado, los propios compañeros y compañeras también se sirven de apoyo entre ellos. Estos también intentan ayudarse unos a otros como vemos, por ejemplo, en esta transcripción:

*Alumna 2:* ¿Y cómo una botella tan grande puede tener igual agua que esto pequeño?

*Alumna 1, Alumno 2 y Alumno 1:* ¡Porque ese es más ancho!

Aquí vemos que una alumna no entiende cómo dos recipientes tan desiguales, en relación a la forma, tienen la misma cantidad de magnitud y son sus compañeros los encargados de darle la clave.

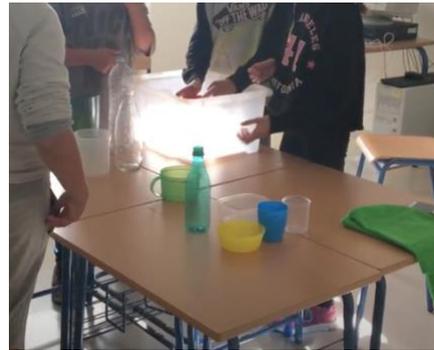
### ¿Consiguen resolver la tarea correctamente?

Aunque ambos grupos cometes errores en la ordenación sin comprobación, es cierto que, tras realizar la comprobación con los transvases, tanto el grupo 1 como el grupo 3 llegan al orden correcto. En las siguientes imágenes (figuras 2, 3 y 4) vemos la evolución en el orden de los recipientes en el grupo 3.

En la figura 2 vemos una primera ordenación que llevaron a cabo (sin comprobar mediante transvases y de forma aproximada) apoyándose en lo que percibían mediante la vista. En la figura 3 tenemos una segunda ordenación que se dio durante los transvases al darse cuenta de que había recipientes que, a pesar de su forma tan desigual, podían ser iguales. Finalmente, en la figura 4 vemos la ordenación final que realizan tras terminar de hacer los transvases y que se corresponde con la ordenación correcta.



*Figura 2.* Primera ordenación del grupo 3 sin comprobación



*Figura 3.* Segunda ordenación del grupo 3 tras realizar las primeras comprobaciones



*Figura 4.* Orden final de los recipientes del grupo 3 tras su comprobación

## 5.2. Análisis y resultados tarea 2

Esta tarea se divide en tres partes, teniendo en cuenta que en cada parte se utiliza un recipiente diferente como unidad. A su vez, cada una de estas partes se subdivide en otras dos, siendo una de estimación y otra de comprobación con transvases. En este análisis no hemos hecho distinción entre las tres primeras partes mencionadas, sino que distinguiremos entre las estrategias que manifiestan los escolares en la estimación, por un lado, y las estrategias que se dan durante la comprobación, por otro.

Cabe mención que durante la tarea se da una diferencia destacable en cuanto a su desarrollo en los distintos grupos. Se trata de una diferencia en la ejecución por parte de la docente, ya que en el grupo 1 las estimaciones y medidas fueron anotadas en una única hoja que poseía la docente a la que los alumnos y alumnas podían acceder siempre que quisieran, mientras que en el grupo 3 se decidió, como mejora improvisada, hacer una tabla en la pizarra para reflejar las estimaciones y medidas, y que sirviera así de soporte y ayuda para el resto de las partes de la tarea.

## Estrategias durante la estimación

### a) Estrategias comunes

#### 1. Establecer proporcionalidades teniendo en cuenta los resultados de la parte anterior

El grupo decide recurrir a los resultados que han obtenido en la parte anterior para intentar estimar a partir de ahí las cantidades que se les pide en esta parte con una nueva unidad de medida.

En la figura 5 vemos a uno de los alumnos del grupo 3 ayudándose de la tabla para explicar a sus compañeros su razonamiento.



*Figura 5.* Alumno del grupo 3 explicando la proporcionalidad entre las cantidades

### b) Estrategias propias del grupo 1

#### 1. Medida por iteración usando el recipiente unidad como referente

Esta estrategia consiste en que los estudiantes cogen el recipiente unidad y, sin usar ningún líquido, lo ponen al lado del recipiente que quiere comparar y lo van reiterando de abajo hacia arriba (figura 6).

Esta estrategia en la que se hace uso de referentes es propia de la estimación (Moreno et al., 2015) como ya hemos visto en la tarea anterior.



*Figura 6.* Ejemplo de estrategia en la que usan la medida por iteración a partir de un referente

c) Estrategias propias del grupo 3:

1. Usar su cuerpo como referente

Volvemos a ver otra estrategia propia de la estimación (Moreno et al., 2015) como es el uso de referentes mencionado anteriormente. En este caso, este grupo opta por usar sus manos para recoger el alto de un recipiente y trasladarlo a otro para reiterar esa unidad que han creado con sus manos (figuras 7 y 8).

Esta misma estrategia es usada para comprobar si un recipiente está lleno por la mitad.



*Figura 7.* Alumnos del grupo 1 usando su cuerpo (manos) como referente



*Figura 8.* Ejemplo de la estrategia en la que usan su cuerpo (manos) como unidad

## 2. Uso de unidades de medida convencionales

En este grupo los escolares se dieron cuenta de que en algunos recipientes ponía la cantidad. En la siguiente transcripción vemos lo que pasó en ese momento:

*Alumno 1:* Esta botella mide medio litro y el vaso mide veinticinco litros.

*Profesora:* Pero esto, ¿por qué?

*Alumno 1:* Porque lo sabemos, porque en la botella pone medio litro y aquí (otra botella) pone un litro y medio. Entonces si son estas (otros recipientes) medio litro, y estos (vasos pequeños) veinticinco, pues hacen falta dos porque veinticinco y veinticinco dan medio litro.

El Alumno 1 dice que uno de los vasos mide veinticinco litros, esto es un error de vocabulario, pero entendemos que quería referirse a una cantidad menor al medio litro como es un cuarto de litro.

### Estrategias durante la comprobación (medida de la cantidad)

#### a) Estrategias comunes

##### 1. Obviar comprobaciones innecesarias

Deciden que no tienen que comprobar todos y cada uno de los recipientes porque en la tarea anterior han visto que algunos de ellos son equivalentes entre sí y que por tanto tendrán la misma cantidad de unidades.

#### b) Estrategias propias del grupo 1

##### 1. Seleccionar de entre los recipientes equivalentes tomados como unidad el que más cómodo resulte para realizar los transvases

Con la tarea anterior han visto que hay recipientes que son equivalentes en capacidad, por tanto, ellos deciden cambiar de recipiente según les convenga para su comodidad durante los transvases.

2. Usar todos los recipientes equivalentes a la unidad en la comprobación para ir más rápido

Se les ha dado un recipiente que deben usar como unidad, entonces durante la medida de los recipientes deciden hacer uso del resto de recipientes equivalentes a la unidad para acelerar el proceso de medida.

3. Estimación visual

En la comprobación de dos recipientes donde se duda si uno es la mitad de otro, llenar el más grande, transvasarlo al pequeño y comprobar si el líquido sobrante en el mayor es la mitad a ojo. O, por el contrario, llenar el pequeño, transvasarlo al grande y comprobar si se ha llenado hasta la mitad a ojo, de nuevo.

c) Estrategias propias del grupo 3

1. Transvase a la inversa para comprobar la conjetura

Después de reiterar la unidad con los transvases en un recipiente, no están seguros de que contenga el número de unidades que ellos creen debido a que se ha derramado líquido. Esta estrategia se da en dos situaciones, en una primera situación transvasan el líquido de un recipiente que consideran que contiene dos unidades a dos recipientes equivalentes a la unidad, al llenar por completo estos, pueden confirmar que el recipiente inicial consta de dos unidades.

En una segunda situación tienen dificultades con un recipiente que creen que puede contener cuatro unidades, para volver a comprobarlo de una forma óptima, deciden llenar dos recipientes que ya saben que tiene una capacidad de dos unidades, y como al hacer los transvases se llenan enteros pueden confirmar que el recipiente inicial consta de cuatro unidades.

2. Uso de recipientes ya conocidos como referentes

Cuando conocen la capacidad de algunos recipientes después de medirlos, en lugar de seguir usando solo la unidad para medir el resto de los recipientes, hacen uso de esos recipientes de los que ya conocen la cantidad y así agilizan el proceso.

Otra estrategia asociada al uso de referentes (Moreno et al., 2015) propuesta por uno de los componentes del grupo es que, teniendo un recipiente que consideran que mide seis unidades y que contiene ya tres, se propone terminar de llenarlo con un recipiente que mide cuatro unidades y la conjetura consistiría en que, si sobra líquido, entonces efectivamente constaría de seis unidades.

### Dificultades y errores en la tarea 2

La mayoría de las dificultades que se dan en esta tarea, durante el momento de la estimación, son aquellas relacionadas con la iteración. Como hemos visto, para realizar estimaciones los escolares se valen de referentes como su cuerpo o los recipientes que se han tomado como unidad. La dificultad surge cuando iteran estos, ya que no son cuidadosos a la hora de colocarlos y suelen, o no dejar suficiente espacio entre una iteración y otra, o dejar demasiado espacio. Estas dificultades se resumen en un mal uso del instrumento de medida que se encuentra dentro del grupo que hemos clasificado como “dificultades asociadas al acto de medición”.

Por otro lado, tampoco tienen en cuenta que el recipiente que están iterando no tiene la misma dimensión con respecto a la anchura, por tanto, la estimación no será del todo correcta.

Estas dificultades se enmarcan en lo que anteriormente hemos llamado “dificultades asociadas a la unidad de medida”, donde González (2015) incluía dificultades en la reiteración de la unidad, entre otras.

En otro orden, otra dificultad que presentan los escolares se da cuando se les pide que estimen la cantidad de unidades de un recipiente cuando la unidad es mayor que el recipiente a estimar. En este momento hay algunos estudiantes que se bloquean y no saben que responder. Esta dificultad podemos relacionarla con lo que González (2015) define como “dificultades asociadas a la relación inversa entre tamaño de la unidad y número de unidades”, puesto que, como hemos mencionado, algunos estudiantes no conciben decir una cantidad menor a la unidad en un primer momento.

Cabe mencionar, por otro lado, que dentro de esta tarea se dan dificultades relacionadas con el vocabulario, en este caso con decimales y fracciones. Ya que, para la expresión de unidades inferiores a la unidad, los alumnos y alumnas emplean expresiones

como “un medio” o “un cuarto”. Las dificultades surgen a la hora de escribirlo, puesto que muchos de los escolares no acaban de tener claro ni la relación entre decimales y fracciones, ni su escritura.

A continuación, vemos una transcripción que ejemplifica este tipo de dificultad y cómo la solventan con la ayuda de la docente.

*Alumno 1:* es 0,25

*Profesora:* ¿y eso es lo mismo que...?

*Alumno 1:* que un cuarto

*Profesora:* ¿y cómo se escribe?

*Alumno 1:* 0,25

*Profesora:* ¿se puede escribir de alguna otra manera? ¿Esos números se pueden escribir de otra manera? De palabra estáis diciendo dos formas distintas de decirlo. ¿0,50 o..? o ¿0,25 o...?

*Alumno 1:* un cuarto

*Profesora:* ¿y cómo se escribiría eso, alguien lo sabe?

\*Una alumna se levanta a escribir en la pizarra y escribe  $\frac{1}{4}$ \*

*Profesora:* ¿0,50 en números fraccionarios cómo se escribe? También podéis pensar en las botellas, cuanto era.

\*La misma alumna se levanta y escribe  $\frac{2}{4}$ \*

*Profesora:* ¿hay alguna otra manera o solamente  $\frac{2}{4}$ ? ¿Se puede simplificar? Pensad en las botellas, pensando en los recipientes, en la relación que había entre uno y otro. ¿Cuándo decíamos 0,5 qué era? ¿Qué cabía?

*Alumno 1:* la mitad

*Profesora:* ¿cómo se escribe la mitad en fracción?

*Alumno 1: ¿5?*

*Alumno 2: ¿0,5?*

*Profesora: eso es decimal, y en fracción ¿cómo se escribe la mitad?*

*Alumno 2: 1,5*

*\*Alumno 1 se levanta y escribe  $1/5$ \**

*Profesora: esos son quintos, ¿cuánto sería la mitad?*

*Alumno 2: ¿la mitad de qué?*

*Profesora: de la unidad*

*\*Alumno 3 se levanta y escribe  $1/50$ \**

*Profesora: a ver, eso quiere decir una parte de cincuenta, ¿vale? ¿Una parte de cincuenta es la mitad?*

*Alumno 2: ¿de qué?*

*Profesora: de la unidad, de la botella, de lo que sea, del entero*

*Alumno 1: ya sé, ya sé*

*\*Alumno 1 se levanta y escribe  $25/50$ \**

*Profesora: muy bien, eso también puede ser, a ver otra manera...*

*\*Alumna 1 escribe  $2,5/5$ \**

*Profesora: esa también vale, venga otra manera más. La más chiquitilla, la más sencilla...*

*\*Alumna 1 escribe  $2/4$ \**

*Profesora: vale, ahora una más sencilla todavía*

\*Alumno 1 escribe 0,2/0,4\*

*Profesora:* caliente, caliente. Si arriba pongo un 1, ¿qué tiene que ir abajo?

*Alumna 1:* un 2

*Profesora:* eso es. La mitad es una parte de dos. Un medio. Esa es la mitad

### ¿Cómo salen o solventan las dificultades y errores?

Como ya hemos visto en la transcripción anterior, de nuevo nos encontramos otra característica del Aprendizaje por Descubrimiento donde la docente hace de guía durante el proceso. En este caso les hace preguntas que los van guiando hasta la respuesta correcta.

Por otro lado, en esta tarea también se ayudan entre los propios compañeros y compañeras. En ocasiones los estudiantes proponen estrategias o lanzan afirmaciones con las que otros de sus compañeros no están de acuerdo. Aquí surge el trabajo en equipo donde se escuchan unos a otros, haciendo que estos se den cuenta de su propio error y lo corrijan.

### ¿Consiguen resolver la tarea correctamente?

Tras las comprobaciones ambos grupos obtuvieron resultados correctos. A continuación, se muestran unas tablas resumen que recogen, tanto los resultados estimados que dijeron los estudiantes, como los resultados después de realizar las medidas.

Cada tabla, correspondiente a cada grupo, se ha dividido en dos columnas principales, donde la que hemos llamado parte 1 se corresponde con la parte de la tarea en la que usan un recipiente de 0,25 litros como unidad y, la parte 2, que se corresponde con la parte de la tarea en la que usan el recipiente de un litro como unidad.

Por otro lado, la división por filas se corresponde con las estimaciones y comprobaciones que hacen con el resto de recipientes, que aquí hemos nombrado como recipiente 1, 2, 3 y 4, siendo el 1 el de 0,25 litros, el 2 es de 0,5 litros, el 3 el de 1 litro y el 4 el de 1,5 litros.

Tabla 1. Respuestas del grupo 1 en la tarea 2

Grupo 1				
Capacidad en unidades				
Parte 1			Parte 2	
	Estimada	Medida	Estimada	Medida
Recipiente 1	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Recipiente 2	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Recipiente 3	4	3	1	1
Recipiente 4	10	6	2	1,5

Tabla 2. Respuesta del grupo 3 en la tarea 2

Grupo 3				
Capacidad en unidades				
Parte 1			Parte 2	
	Estimada	Medida	Estimada	Medida
Recipiente 1	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Recipiente 2	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Recipiente 3	4	4	1	1
Recipiente 4	5	6	1,5	1,5

Cabe mencionar que, durante las comprobaciones, ambos grupos han ido cambiando de opinión con respecto a sus primeras estimaciones a medida que iban viendo cómo se llenaban los recipientes a estimar, y que podían caber más o menos unidades de las que habían dicho. Por ello, a medida que iban llenando los recipientes a estimar, sus estimaciones se iban aproximando más a la medida correcta.

### 5.3. Análisis y resultados tarea 3

Recordamos que en esta tarea los escolares tenían, por un lado, que estimar la capacidad, tanto en litros como en mililitros de cada recipiente y, por otro lado, comprobar sus conjeturas usando un vaso medidor. Por tanto, esas serán las dos partes en las que dividimos el análisis y resultados de esta tarea.

Cabe añadir que durante esta tarea los estudiantes cuentan con la hoja o tabla en la que fueron anotando los datos obtenidos en las tareas anteriores.

## Estrategias durante la estimación

### a) Estrategias comunes

#### 1. Usar referentes ya conocidos

Ayudándose de la tabla de la pizarra o, en el caso del grupo 1, de la hoja donde van anotando los datos, los integrantes del grupo establecen equivalencias para obtener los resultados.

Aquí vemos, una vez más, otro tipo de referente al que recurren y que es una estrategia propia de la estimación (Moreno et al., 2015).

### b) Estrategias propias del grupo 1

#### 1. Estimación visual (por dimensiones)

Esta estrategia consiste en colocar el recipiente a estimar al lado del vaso medidor (figura 9) y ver hasta dónde llega con respecto a la altura y, según la cantidad que marque, esa es la capacidad que consideran.



*Figura 9.* Alumno del grupo 1 llevando a cabo la estrategia mencionada

### c) Estrategias propias del grupo 3

#### 1. Hacer uso de las conversiones de unidades

Se da el caso de que algunos alumnos recuerdan, en cierta medida, las reglas de conversión y las utilizan para pasar de litros a mililitros.

A continuación, vemos en una transcripción la situación donde se dio esta estrategia:

*Profesora:* si un litro son mil mililitros, ¿medio litro cuántos son?

*Alumno 2:* 500

*Profesora:* ¿y la mitad de 500, que sería  $\frac{1}{4}$ , cuánto es?

*Alumno 1:* seño, yo lo he hecho de otra manera

*Profesora:* a ver tú cómo lo haces

*Alumno 1:* yo divido 0,25 entre 1000

*Profesora:* ¿divides 0,25 entre 1000?

*Alumno 1:* no, 1000 entre 0,25. Bueno, es que no lo ordeno bien, pero bueno hazte a la idea

\*Alumno 1 escribe en la pizarra  $0,25:1000$ \*

*Alumno 1:* y como tiene tres ceros, pues le muevo la coma un, dos, tres (mueve la coma hacia la izquierda tres lugares en la cifra 0,25), entonces va aquí (antes del 0), pero como no tengo nada aquí, ponemos un cero y es 0,025.

*Profesora:* eso no es lo que has dicho antes, tú has dicho 250

*Alumno 2:* ¡se multiplica!

*Profesora:* ¿se multiplica por cuánto?

*Alumno 2:* se multiplica por mil

*Profesora:* ¿en vez de dividirlo por mil, lo multiplicas por mil?

*Alumno 2:* porque estamos pasando a mililitros

*Profesora:* ¿eso lo sabéis por la tabla esa o la escalera esa de conversión o porque lo has pensado tú?

*Alumno 2:* lo he pensado yo

*Profesora:* ¿esto no lo habéis dado en clase? ¿lo de pasar de litros a mililitros?

*Varios alumnos:* no

### Estrategias durante la comprobación (usando vaso medidor)

#### a) Estrategias propias del grupo 1

1. Llenar el recipiente a estimar y transvasarlo al vaso medidor para comprobar su capacidad en mililitros
2. Llenar el vaso medidor con la cantidad de líquido que se cree que contiene un determinado recipiente para, posteriormente transvasarlo a dicho recipiente y ver si su conjetura es cierta

### Dificultades y errores que se dan durante la tarea 3

Durante el desarrollo de esta tarea podemos apreciar que se dan dificultades que se encuentran dentro del grupo que hemos llamado “dificultades asociadas a la unidad de medida” descritas por González (2015). Aquí incluíamos aquellas dificultades asociadas a las conversiones con el Sistema Métrico decimal, puesto que, como hemos visto en la transcripción, se dan errores al discernir entre multiplicar y dividir, aunque también cabe mencionar que el movimiento de la coma si lo hacen correctamente.

Por otro lado, se dan dificultades que hemos clasificado dentro del grupo llamado “dificultades derivadas de la comparación”. Dentro de estas dificultades tenemos aquellas asociadas a la forma del recipiente que quieren medir, puesto que antes de realizar la comprobación con líquido llevan a cabo una estimación comparando las dimensiones de ambos recipientes (vaso medidor y recipiente que se quiere estimar). De forma que tenemos dificultades asociadas a la visualización (González, 2015; Belmonte et al., 2001) que dan lugar al uso erróneo de los sentidos (Chamorro y Belmonte, 2000).

Asimismo, se aprecian también dificultades asociadas a la incorrecta utilización del instrumento (Belmonte et al., 2001) que dan lugar a una carencia de estrategias para efectuar la media (Chamorro y Belmonte, 2000; Belmonte et al., 2001) y que recogemos dentro del grupo que hemos denominado “dificultades derivadas del acto de medición”.

#### ¿Cómo salen o solventan las dificultades y errores?

Durante el desarrollo de esta tarea, el principal apoyo es la docente que está constantemente haciendo preguntas guía a los escolares. Sin embargo, también se pueden apreciar algunas aportaciones de los compañeros y compañeras, como la que hemos visto en la transcripción anterior, que hacen que ellos mismos se den cuenta de sus errores y se corrijan.

#### ¿Consiguen resolver la tarea correctamente?

El grupo 1 consigue resolver el problema correctamente gracias a las comprobaciones, pero hay que destacar que durante el desarrollo de la fase de comprobación sus estimaciones iniciales iban cambiando.

El grupo 3, por su parte, finalmente consigue resolver esta tarea apoyándose, principalmente, en la tabla de la pizarra donde aparecen los resultados de las tareas anteriores.

Finalmente, concluimos con las siguientes tablas que recogen, por un lado, las estrategias utilizadas por los escolares durante el desarrollo de las diferentes tareas y, por otro, las dificultades y errores que manifiestan.

Tabla 3. Estrategias utilizadas por los escolares

TAREAS		ESTRATEGIAS	
Tarea 1	Parte 1. Ordenación sin comprobación (sin transvases)	“Tomar las dimensiones como referente”	
		“Proporcionalidad de dimensiones”	
		“Comparación por pares”	
		“Comparar recipientes parecidos”	
Tarea 1	Parte 2. Ordenación con comprobación (con transvases)	“Tomar su propio cuerpo como referente”	
		“Empezar por los recipientes más grandes”	
Tarea 2	Estrategias durante la estimación	“Repetir transvases a la inversa”	
		“Establecer proporcionalidades teniendo en cuenta los resultados de la parte anterior”	
		“Medida por iteración usando el recipiente unidad como referente”	
		“Usar su cuerpo como referente”	
	Tarea 2	Estrategias durante la comprobación (medida de la cantidad)	“Uso de unidades de medida convencionales”
			“Obviar comprobaciones innecesarias”
			“Seleccionar de entre los recipientes equivalentes tomados como unidad el que más cómodo resulte para realizar los transvases”
			“Usar todos los recipientes equivalentes a la unidad en la comprobación para ir más rápido”
			“Estimación visual”
			“Transvase a la inversa para comprobar la conjetura”
Tarea 3	Estrategias durante la estimación	“Uso de recipientes ya conocidos como referentes”	
		“Usar referentes ya conocidos”	
		“Estimación visual (por dimensiones)”	
	Tarea 3	Estrategias durante la comprobación (usando vaso medidor)	“Hacer uso de las conversiones de unidades”
			“Llenar el recipiente a estimar y transvasarlo al vaso medidor para comprobar su capacidad en mililitros”
		“Llenar el vaso medidor con la cantidad de líquido que se cree que contiene un determinado recipiente para, posteriormente transvasarlo a dicho recipiente y ver si su conjetura es cierta”	

COMUNES 

GRUPO 1 

GRUPO 3 

Tabla 4. Dificultades y errores manifestados por los escolares

TAREAS	DIFICULTADES	ERRORES
Tarea 1. Comparar y ordenar	Dificultades en la transitividad	Errores en la ordenación
	Dificultades asociadas a la forma del recipiente	Errores de los sentidos
	Dificultades asociadas al uso incorrecto del instrumento de medida	Errores en el transporte del instrumento
		Errores de precisión
Tarea 2. Establecer un recipiente como unidad	Dificultades asociadas al uso incorrecto del instrumento de medida	
	Dificultades durante la iteración	
	Dificultades asociadas a la relación inversa entre tamaño de la unidad y número de unidades	
	Dificultades relacionadas con el vocabulario	
Tarea 3. Cantidad de litros y mililitros de cada recipiente	Dificultades asociadas a las conversiones con el Sistema Métrico decimal	Errores al discernir entre multiplicar y dividir
	Dificultades asociadas a la forma del recipiente	Errores de los sentidos
	Dificultades en la visualización	
	Dificultades asociadas a la incorrecta utilización del instrumento	

- Dificultades asociadas a la conservación de cantidad**
- Dificultades derivadas de la comparación**
- Dificultades asociadas a la unidad de medida**
- Dificultades derivadas del acto de medición**

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo que perseguía la presente investigación era analizar y describir el desarrollo de una propuesta didáctica en forma de taller para la adquisición del sentido de la medida en la magnitud capacidad en dos grupos de escolares de 5° de Educación Primaria. Para ello, se han estudiado y analizado las estrategias que han presentado los escolares durante el desarrollo de dicho taller, además de las dificultades a las que se enfrentaban y los errores en los que incurrían durante el proceso de resolución.

Una vez expuesto el análisis de datos y los resultados en el apartado anterior, podemos observar que, en lo referente a la estimación, se dan estrategias propias de esta.

Como hemos visto en el marco teórico, según Moreno et al. (2015) existen tres estrategias propias de la estimación, tales como el uso de referentes, el fraccionamiento y el troceado. En este caso, se puede apreciar el uso repetido de la primera estrategia mencionada. En el análisis se aprecia que los escolares hacen uso de referentes muy diversos, desde su propio cuerpo, hasta los propios recipientes ya conocidos o incluso una hoja de datos que ellos mismo han ido elaborando durante las diferentes tareas.

Sin embargo, estrategias como el troceado o el fraccionamiento no han sido muy visibles durante el desarrollo de este taller. Esto se debe a que las tareas en sí no han necesitado de este tipo de estrategias, ya que, por ejemplo, el troceado consistiría en estimar la capacidad total de un recipiente dividiendo este en pequeñas partes más fáciles de manejar. Sin embargo, en las tareas 2 y 3, en las cuales se les pide a los estudiantes estimar cantidades, ya se parte de una unidad establecida (tarea 2) o, en el caso de la tarea 3, se opta por resolverla usando referentes como estrategia.

En el caso del fraccionamiento, en un primer momento se podría prever que se usase durante la tarea 3, donde tienen que darse cantidades expresadas en unidades estándar. Pero, al contar los estudiantes con un apoyo como la tabla donde iban apuntando los resultados obtenidos, no se hace necesario el dividir la capacidad de un recipiente grande en parte iguales para estimar su capacidad total.

Siguiendo con las estrategias utilizadas durante las tareas, destacar que el grupo 1 se centra más en aspectos visuales, es decir, estimaciones a ojo, mientras que el grupo 3 se decanta más por usar referentes en la estimación.

Además, las estrategias manifestadas por ambos grupos se relacionan con las componentes que se adquieren para el desarrollo del sentido de la medida y que hemos descrito en el marco teórico. Así, las estrategias de estimación visuales, proporcionalidad de dimensiones y uso de cualquier referente, las podemos relacionar con uno de los conocimientos descritos por Moreno et al. (2015) llamado “reconocimiento de cualidades comparables y medibles”. Cuando ya se dan estrategias de la medición propiamente dicha como el uso de la iteración o trabajar con unidades convencionales, podemos decir que se está poniendo de manifiesto el conocimiento que, de nuevo, Moreno et al. (2015) denominan “comprensión del proceso de medir”.

Con el anterior análisis de las diferentes estrategias que ponen en práctica los escolares, concluimos que estos son capaces de percibir una magnitud, en este caso la capacidad y sus propiedades, también hemos podido ver que identifican y trabajan con las unidades de medida propias de esta. Además, han llevado a cabo procedimientos de medida mediante el transvase con los distintos recipientes y han sido capaces de dar solución al problema que se les planteaba. Estos son los objetivos que, según González (2015) los escolares deben alcanzar en la adquisición del sentido de la medida y que se relacionan con las componentes expuestas por Moreno et al. (2015).

Por tanto, podemos decir que los escolares que han participado en el taller han desarrollado en gran parte su sentido de la medida, siendo este uno de los grandes propósitos de la realización de dicha propuesta didáctica.

En cuanto a las dificultades y errores, tras el análisis podemos destacar que no se dan ningún tipo de dificultades relacionadas con el grupo que, en el marco teórico, hemos clasificado como “dificultades asociadas a la conservación de la cantidad”, es decir, los escolares conciben la idea de que, aunque varíe la forma de dos recipientes con la misma capacidad, dichos recipientes mantienen esa equivalencia en capacidad.

Sin embargo, sí que se dan dificultades relacionados con los otros tres grupos restantes. Por un lado, del grupo denominado “dificultades derivadas de la comparación” nos encontramos dificultades en la transitividad y dificultades asociadas a las dimensiones (por no tener en cuenta todas las del recipiente a estimar) que se dan principalmente en la tarea 1 y que, conllevan errores en la ordenación de los recipientes.

Con respecto a las dificultades del grupo de “dificultades asociadas a la unidad de medida”, podemos ver que se dan dificultades en la reiteración de la unidad (González, 2015) y dificultades con el Sistema Métrico Decimal, más concretamente en la realización de conversiones.

En cuanto a las dificultades que se encuentran dentro del grupo nombrado como “dificultades derivadas del acto de medición”, se dan, sobre todo, aquellas que tienen que ver con el mal uso del instrumento, de este modo deriva en una mala colocación de este y, como consecuencia, los escolares obtienen resultados difusos de los que no están del todo seguros.

Acabamos de nombrar las dificultades que se han dado durante el taller y que coinciden con las que se exponen en la literatura por los diversos autores. Sin embargo, cabe añadir que se ha manifestado una dificultad que no aparece en la literatura. Esta ha aparecido, de forma espontánea, en la tarea 2, en relación a las fracciones. Hemos constatado que existen dificultades para asociar la expresión oral de una cantidad, como la mitad de un litro, con su expresión escrita equivalente, tanto en forma decimal como fraccionaria, puesto que ambos grupos han dejado ver errores en este procedimiento y su recíproco.

Consideramos de gran interés investigar la procedencia de dichas dificultades y errores. Una de las causas podríamos decir que es, coincidiendo con Belmonte et al. (2001), la falta de prácticas reales y en contextos diferentes con respecto a las distintas magnitudes y su medida. Además, consideramos que esta es una de las principales causas, puesto que para el desarrollo del sentido de la medida se requiere de experiencias, por parte de los escolares, en las que se lleven a cabo estimaciones reales, clasificaciones, ordenaciones, etc. (Chamorro y Belmonte, 2000).

Por ello, consideramos esta cuestión como algo esencial para una futura línea de investigación que se centre en la causa de dichas dificultades y cómo proceder para erradicarlas.

Por otro lado, a pesar de las dificultades y errores manifestados por los estudiantes. Podemos apreciar que, finalmente, ambos grupos terminan por resolver las tareas de forma adecuada y correcta. También gracias a la ayuda prestada tanto por la docente, como por la colaboración y cooperación entre iguales. Esto hace que, efectivamente, esta propuesta se enmarque en la metodología de Aprendizaje por Descubrimiento y que sirva como solución al problema de la metodología tradicional expuesto por Chamorro (2000) en el que predomina el aprendizaje memorístico y con escaso sentido.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- Angulo, F., y Vázquez, R. (2003). Los estudios de caso. Aproximación teórica. En R. Vázquez y F. Angulo (Eds.), *Introducción a los Estudios de Casos. Los primeros contactos con la investigación etnográfica* (pp. 15-51). Áljibe.
- Badilla, L. (2006). Fundamentos Del Paradigma Cualitativo En La Investigacion Educativa. *Pensar en Movimiento: Revista de Ciencias del Ejercicio y la Salud*, 4(1), 42-51. <https://doi.org/10.15517/pensarmov.v4i1.411>
- Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Innovación Y Experiencias Educativas*, 40, 1-11. [https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero\\_40/ALEJANDRA\\_BARO\\_1.pdf](https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_40/ALEJANDRA_BARO_1.pdf)
- Barrón, A. (1993). Aprendizaje por Descubrimiento: Principios y aplicaciones adecuadas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 11(1), 3-11. <https://doi.org/10.5636/jgg.38.1331>
- Belmonte, J. M., Bolon, J., Chamorro, M. C., D'amore, B., Ruiz, L., Sánchez, M. V., Vecino, F. y Vergnaud, G. (2001). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Aulas de verano.
- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- Callís, J. (2002). *Estimación de medidas longitudinales rectilíneas y curvilíneas. Procedimientos, recursos y estrategias* [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Recuperado de [https://docplayer.es/77540368-Tesis-doctoral-tesis-doctoral.html%0Ahttp://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:Filologia-Mileon/LEON\\_AXELSSON\\_MercedesIdalith\\_Tesis.pdf](https://docplayer.es/77540368-Tesis-doctoral-tesis-doctoral.html%0Ahttp://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:Filologia-Mileon/LEON_AXELSSON_MercedesIdalith_Tesis.pdf)
- Cebreiro, B. y Fernández, M. C. (2004). Estudio de casos. En F. Salvador, J. L. Rodríguez y A. Bolívar (Eds.), *Diccionario enciclopédico de didáctica* (pp. 652-675). Aljibe.
- Chamorro, C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.
- Chamorro, C., y Belmonte, J. M. (2000). *El problema de la medida*. *Didáctica de las*

*magnitudes lineales* (Tercera ed). Síntesis.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor.

Domínguez, M. (1990). El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 1991(7), 39-42.

[http://revistasuma.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/7/SUMA\\_7.pdf](http://revistasuma.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/7/SUMA_7.pdf)

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Pirámide.

García, J. A. (1993). Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría verbal del aprendizaje significativo. En C., Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Coord.), *Desarrollo psicológico de la educación II. Psicología de la educación* (pp. 81-92). Alianza.

González, M. J. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las magnitudes y su medida. En P. Flores y L. Rico (Coords). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 281-306). Pirámide.

González, M. J., y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Universidad de los Andes.

González, M. J. y Gómez, P. (2016). Magnitudes y medidas. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (p. 351-374). Pirámide.

Inskeep, J. E. (1976). Teaching measurement to elementary school children. En NCTM (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook*. (pp. 60 -86 )VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. En J. Kilpatrick, W. G., Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). NCTM.  
<http://geometryandmeasurement.pbworks.com/f/measurementarticle.pdf>

- Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 147-168). Pirámide.
- OECD (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Segundo borrador. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>
- Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*. Andalucía, 17 de marzo de 2015, núm. 60, pp. 9-696.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., y Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405-435. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002>
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 28 de febrero de 2014, núm. 52, pp. 19349-19420.
- Reibelo, J. (1998). Método de Enseñanza: Aprendizaje para la Enseñanza por Descubrimiento (I). *Aula Abierta*, 71, 123-147. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=45424>
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo en matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 69-108). ICE-Horsori. <http://funes.uniandes.edu.co/522/>.
- Rist, R. (1977). On the relations among educational research paradigms: from disdain to détente. *Anthropology and Education*, 8(2), 42-50. <https://anthrosource.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1525/aeq.1977.8.2.05x1394p>
- Segovia, I., y de Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, e I. Segovia (Eds.), *Investigación en*

*Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-51). Editorial Comares.

Segovia, I., Castro, E., Molina, M. y Castillo, J. J. (2015). Evaluación del sentido de la medida. *Revista Uno*, 70, 21-30 <https://www.grao.com/es/producto/evaluacion-del-sentido-de-la-medida>

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Ice-Horsori. <https://doi.org/10.31819/9783964565464-004>.

Taylor, S. J., y Bogdan, R. (1992). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós. <http://mastor.cl/blog/wp-content/uploads/2011/12/Introduccion-a-metodos-cualitativos-de-investigaci%C3%B3n-Taylor-y-Bogdan.-344-pags-pdf.pdf>

Trianes, V. (2012). *Psicología de la educación y del desarrollo en contextos escolares*. Ediciones Pirámide.