



**UNIVERSIDAD DE ALMERÍA**

FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES

**CONJUNTOS AUTOSIMILARES Y  
DIMENSIÓN FRACTAL**

Trabajo fin de grado realizado por Manuel Jaime Villegas  
Rodríguez para el Grado en Matemáticas por la Universidad  
de Almería.

Convocatoria de junio de 2014

---

Supervisado por:  
Miguel Ángel Sánchez Granero



# INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de los fractales surge de manera intuitiva como una interpretación de los objetos que se encuentran en la naturaleza, en particular, de las estructuras que se repiten a diferentes escalas.

Los primeros estudios relacionados con los fractales en cuanto a concepción y formalización matemática se atribuyen a Mandelbrot en [6], donde los definía como aquellos conjuntos de un espacio métrico donde la dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica.

Un caso particular de fractales que estudiaremos en este trabajo son los *conjuntos autosimilares*, para los que es posible dividir el conjunto en trozos semejantes al conjunto total. Por mencionar algunos, la alfombra y el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el conjunto de Cantor y la esponja de Menger son conjuntos autosimilares. Cada uno de ellos puede ser generado mediante similaridades en un *conjunto de funciones iteradas*, concepto atribuido a John E. Hutchinson en su trabajo [4].

La propiedad más importante de los fractales es su dimensión, ya que se trata de su principal invariante numérico. De hecho, la dimensión fractal es aplicable en cualquier rama científica como la física, la medicina, la biología, la geografía, etc. En estas disciplinas es posible identificar estructuras autosimilares (o estadísticamente autosimilares) y analizar su complejidad.

Por ejemplo, es posible utilizar la dimensión fractal para la identificación por huellas dactilares, detección de tejidos cancerosos y codificación de imágenes. Incluso se ha llegado a analizar la acción de pastoreo intensivo en la flora del parque natural de Cabo de Gata-Níjar (véase [1]).

No obstante, no existe solo una dimensión fractal, sino multitud de ellas. Las más importantes son la dimensión de Hausdorff y la dimensión box-counting, la primera más teórica y la segunda totalmente orientada a la práctica. En el presente trabajo nos centraremos en estas dimensiones estudiando sus propiedades, sus motivaciones y dando condiciones necesarias y suficientes en el caso de que coincidan.

Desde el punto de vista computacional, y con ayuda de *Matlab*, dibujaremos conjuntos autosimilares y desarrollaremos un algoritmo para aproximar la dimensión box-counting dada una imagen de entrada.

En el Capítulo 1 estudiamos como aparece el concepto de *hiperespacio* a partir de un espacio métrico cualquiera  $(X, d)$ . Veremos que tomando los subconjuntos compactos de  $X$  y la distancia de Hausdorff es posible definir un espacio métrico que además será completo (Teorema de Zenor-Morita).

El Capítulo 2 tendrá como objetivo construir los conjuntos autosimilares en el hiperespacio anterior como aplicación del Teorema del punto fijo de Banach. Se definirán los conceptos de *contracción* y *operador de Hutchinson*, así como el de conjunto de funciones iteradas y *atractor* de dicho sistema, el cual será precisamente el conjunto autosimilar.

En el Capítulo 3 implementamos un algoritmo basándonos en los desarrollos teóricos anteriores para representar conjuntos autosimilares en dos y tres dimensiones. Para ello, se introducirán el número de iteraciones, un punto inicial y las similaridades. Mostraremos ejemplos como la alfombra, el triángulo y la pirámide de Sierpinski.

A continuación, en el Capítulo 4, introducimos los conceptos de *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff* y *medida de Hausdorff*, que surgirán como un caso particular de aplicar dos métodos de construcción de medidas de [2]. Veremos también bajo qué tipo de aplicaciones es esta medida invariante y la relación que mantiene con la medida de Lebesgue. Posteriormente, obtendremos razonadamente la *dimensión de Hausdorff* como el valor a partir del cual la medida  $s$ -dimensional da el salto de infinito a 0. Para terminar, veremos las propiedades que cumple esta dimensión (monótona, numerablemente estable, invariante bajo aplicaciones bi-Lipschitz, etc).

La *dimensión box-counting* aparece en el Capítulo 5 fundamentada en una idea bastante intuitiva: contar cajas. La forma en la que se motiva esta dimensión se basa en fragmentar el conjunto, cada vez en trozos más pequeños, y contar el número de fragmentos o “cajas” que tienen puntos del conjunto cuando el diámetro de dichos trozos tiende a 0. Además de estudiar su motivación teórica y sus propiedades, implementaremos un algoritmo para calcular la dimensión box-counting siguiendo el esquema anterior. Y como ejemplo, se lo aplicamos a la alfombra de Sierpinski (Figura 3.1) para discutir el resultado y compararlo con el valor real.

En el Capítulo 6, gracias al Teorema de Moran, veremos como calcular fácilmente la dimensión de conjuntos autosimilares que cumplen la *condición de conjunto abierto* y lo aplicaremos como ejemplo al triángulo de Sierpinski (Figura 3.3) y al Helecho (Figura 3.2).

# Índice general

<b>1. Hiperespacio</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones . . . . .	1
1.2. Teorema de Zenor-Morita . . . . .	5
<b>2. Conjuntos autosimilares</b>	<b>11</b>
2.1. Definiciones . . . . .	11
2.2. Consecuencias . . . . .	13
<b>3. Representamos conjuntos autosimilares</b>	<b>15</b>
3.1. Conjuntos autosimilares en dos dimensiones . . . . .	15
3.2. Conjuntos autosimilares en tres dimensiones . . . . .	19
<b>4. Medida y dimensión de Hausdorff</b>	<b>21</b>
4.1. Medida de Hausdorff . . . . .	21
4.2. Relación entre las medidas de Hausdorff y Lebesgue . . . . .	24
4.3. Dimensión de Hausdorff . . . . .	25
<b>5. Dimensión box-counting</b>	<b>31</b>
5.1. Motivación . . . . .	31
5.2. Algoritmo para la dimensión box-counting . . . . .	34
<b>6. Dimensión de conjuntos autosimilares</b>	<b>39</b>
6.1. Teorema de Moran . . . . .	39
6.2. Ejemplos de cálculo . . . . .	45
<b>7. Conclusiones</b>	<b>49</b>



# Capítulo 1

## Hiperespacio

A partir de un espacio métrico es posible extraer familias de subconjuntos con ciertas propiedades específicas (no vacío, cerrado, compacto, conexo, etc). Si a estos subconjuntos los dotamos de la métrica de Hausdorff surge un espacio métrico que llamaremos hiperespacio.

### 1.1. Definiciones

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se definen los siguientes espacios:

$\mathcal{P}_0(X)$ : todos los subconjuntos no vacíos de  $X$ .

$\mathcal{C}_0(X)$ : todos los subconjuntos cerrados no vacíos de  $X$ .

$\mathcal{K}_0(X)$ : todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ .

Nótese que  $\mathcal{K}_0(X) \subseteq \mathcal{C}_0(X) \subseteq \mathcal{P}_0(X)$ .

A continuación veamos como definir una métrica en  $\mathcal{C}_0(X)$ .

Dado  $x \in X$  y  $A \in \mathcal{P}_0(X)$ , se define la distancia de  $x$  a  $A$  como  $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ , la bola abierta centrada en  $A$  y radio  $\varepsilon > 0$  como  $B(A, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$  y la bola cerrada de centro  $A$  y radio  $\varepsilon > 0$  como  $B[A, \varepsilon] = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ .

Dados  $A, B \in \mathcal{P}_0(X)$ , se definen  $D(A, B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\}$  y la pseudométrica de Hausdorff como  $d_H(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\}$ .

Los siguientes resultados nos ayudarán a probar que  $d_H$  es algo más que una pseudométrica en  $\mathcal{K}_0(X)$ . Como primera toma de contacto probamos una desigualdad triangular de gran utilidad al manipular distancias entre puntos y conjuntos.

**Lema 1.1.1** *Bajo las hipótesis anteriores, sean  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacíos de  $X$ . Entonces, dados  $x \in X$  y  $b \in B$ ,*

$$d(x, A) \leq d(x, b) + d(b, A).$$

**Demostración 1** En efecto, sea  $a \in A$ . Como  $d(x, A)$  es un ínfimo,

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a).$$

De este modo,

$$d(x, A) \leq d(x, b) + d(b, a), \quad \forall a \in A.$$

Y el resultado ya es evidente. ■

**Proposición 1.1.2** La función  $D$  tiene las siguientes propiedades:

- i) Si  $A \subseteq B$  entonces  $D(A, B) = 0$ .
- ii)  $D(A, B) = D(\overline{A}, \overline{B})$ .
- iii) Si  $D(A, B) = 0$  entonces  $A \subseteq \overline{B}$ .
- iv)  $D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$ .

**Demostración 2** i) Como  $A \subseteq B$ ,

$$\begin{aligned} D(A, B) &= \sup\{d(x, B) : x \in A\} = \sup\{\inf\{d(x, y) : y \in B\} : x \in A\} \\ &= \sup\{0\} = 0. \end{aligned}$$

ii) Esto es equivalente a ver que

$$\sup\{d(x, B) : x \in A\} = \sup\{d(x, \overline{B}) : x \in A\} = \sup\{d(x, \overline{B}) : x \in \overline{A}\}.$$

En primer lugar, probemos que

$$d(x, B) = d(x, \overline{B}).$$

Claramente,  $d(x, B) - d(x, \overline{B}) \geq 0$ . Vamos a comprobar que necesariamente se da la igualdad. En efecto, supongamos que  $\varepsilon = d(x, B) - d(x, \overline{B}) > 0$ . Entonces, existe  $\bar{b} \in \overline{B}$  tal que  $d(x, \overline{B}) \leq d(x, \bar{b}) < d(x, B)$ .

Además,  $B(\bar{b}, \frac{1}{n}) \cap B \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ . Así, podemos tomar un  $b \in B$  de modo que  $b \in B(\bar{b}, \frac{1}{n})$ . Esto es,  $d(b, \bar{b}) \leq \frac{1}{n}$ . Usando ahora la desigualdad triangular,

$$d(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, \bar{b}) + d(\bar{b}, b) \leq d(x, \bar{b}) + \frac{1}{n}.$$

Con lo que  $d(x, B) \leq d(x, \bar{b}) + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

De ahí,  $d(x, B) \leq d(x, \bar{b}) < d(x, B)$ , llegando a una contradicción.



En segundo lugar, veamos que

$$\sup\{d(x, \overline{B}) : x \in A\} = \sup\{d(x, \overline{B}) : x \in \overline{A}\}.$$

Como  $A \subseteq \overline{A}$ , la desigualdad  $\leq$  es evidente. Para probar la otra desigualdad, sea  $x \in \overline{A}$ , entonces  $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$ . Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $a \in A$  tal que  $d(x, a) < \varepsilon$ .

Utilizando el Lema 1.1.1,

$$d(x, \overline{B}) \leq d(x, a) + d(a, \overline{B}) \leq \varepsilon + d(a, \overline{B}).$$

Así, como es para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sup\{d(a, \overline{B}) : a \in A\} \geq d(x, \overline{B}), \quad \forall x \in \overline{A}.$$

Con lo que queda demostrado.

iii) Del apartado anterior,  $d(x, \overline{B}) = d(x, B)$ , por lo que

$$\sup\{d(x, \overline{B}) : x \in A\} = \sup\{d(x, B) : x \in A\} = D(A, B) = 0.$$

Dado que  $d(x, \overline{B}) = 0, \forall x \in A$ , podemos utilizar la siguiente caracterización:

$$d(x, B) = 0 \iff x \in \overline{B}.$$

En conclusión,  $A \subseteq \overline{B}$ .

iv) Sea  $x \in A$  y  $c \in C$ . Utilizando el Lema 1.1.1 tenemos,

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq d(x, c) + d(c, B) \\ &\leq d(x, c) + \sup\{d(c, B) : c \in C\} \\ &= d(x, c) + D(C, B). \end{aligned}$$

Y esto es cierto para cualquier  $c \in C$ , por lo que tomando el ínfimo,

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq d(x, C) + D(C, B) \leq \\ &\leq \sup\{d(a, C) : a \in A\} + D(C, B) = D(A, C) + D(C, B). \end{aligned}$$

Lo que se cumple para todo  $a \in A$ , luego tomando ahora el supremo,

$$D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B),$$

llegando a la desigualdad que buscamos. ■

Obsérvese que *i*) y *iv*) implican que  $D$  es una casi-pseudométrica.

**Lema 1.1.3** Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos de  $\mathcal{P}_0(X)$ . Si  $A \subseteq B(C, \varepsilon)$  y  $C \subseteq B(B, \delta)$ , entonces  $A \subseteq B(B, \varepsilon + \delta)$ .

**Demostración 3**  $A \subseteq B(C, \varepsilon)$ , entonces, para todo  $a \in A$ , existe  $c \in C$  tal que  $d(a, c) < \varepsilon$ . De forma similar, como  $C \subseteq B(B, \delta)$ , para el mismo  $c \in C$  existirá  $b \in B$  tal que  $d(b, c) < \delta$ . Por tanto,

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c) < \varepsilon + \delta.$$

Así,  $A \subseteq B(B, \varepsilon + \delta)$ . ■

Llegamos por tanto a enunciar la siguiente

**Proposición 1.1.4** La función  $d_H$  tiene las siguientes propiedades:

- i*) Dado  $\varepsilon > 0$ ,  $d_H(A, B) \leq \varepsilon$  si y sólo si  $A \subseteq B[B, \varepsilon]$  y  $B \subseteq B[A, \varepsilon]$ .
- ii*)  $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B[B, \varepsilon] \text{ y } B \subseteq B[A, \varepsilon]\}$ .
- iii*)  $d_H(A, B) = d_H(\overline{A}, \overline{B})$ .
- iv*)  $d_H(A, B) = 0$  si y sólo si  $\overline{A} = \overline{B}$ .
- v*)  $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ .
- vi*)  $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$ .

**Demostración 4** *i*) Es inmediato teniendo en cuenta que, dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sup\{d(x, B) : x \in A\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow d(x, B) \leq \varepsilon, \forall x \in A.$$

*ii*) Se obtiene como consecuencia del apartado *i*).

*iii*) Es trivial a partir de la propiedad *ii*) de la Proposición 1.1.2.

*iv*)  $\Rightarrow$ )  $d_H(A, B) = 0 \Rightarrow D(A, B) = D(B, A) = 0 \Rightarrow A \subseteq \overline{B}$  y  $B \subseteq \overline{A}$ , por lo que  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$  y  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ , luego  $\overline{A} = \overline{B}$ .

$\Leftarrow$ )  $\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow d_H(A, B) = d_H(\overline{A}, \overline{B}) = d_H(\overline{A}, \overline{A}) = 0$ .

*v*) Es evidente por la propia definición de distancia de Hausdorff.

*vi*) Sean  $\varepsilon$  y  $\delta$  números reales positivos tales de que  $d_H(A, C) = \varepsilon$  y  $d_H(C, B) = \delta$ .

Por la propiedad *i*), tenemos por un lado

$$A \subseteq B(C, \varepsilon) \quad \text{y} \quad C \subseteq B(A, \varepsilon)$$

y por otro lado

$$C \subseteq B(B, \delta) \quad \text{y} \quad B \subseteq B(C, \delta).$$

De donde, utilizando el Lema 1.1.3,

$$\begin{cases} A \subseteq B(B, \varepsilon + \delta) \\ B \subseteq B(A, \varepsilon + \delta) \end{cases} \Rightarrow d_H(A, B) \leq \varepsilon + \delta = d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

■

Nótese que la propiedad *iv*) restringe la identidad de los indiscernibles a conjuntos cerrados de  $X$ . Es por ello que  $d_H$  es sólo una pseudométrica en  $\mathcal{P}_0(X)$ .

**Teorema 1.1.5**  $d_H$  es una métrica en  $\mathcal{C}_0(X)$  y en  $\mathcal{K}_0(X)$ .

**Demostración 5** La proposición precedente reúne las propiedades requeridas para que  $d_H$  sea una métrica en  $\mathcal{C}_0(X)$ , y dado que  $\mathcal{K}_0(X) \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ ,  $d_H$  también es una métrica en  $\mathcal{K}_0(X)$ .

■

Llamaremos hiperespacio de  $X$  al espacio métrico  $(\mathcal{K}_0(X), d_H)$ .

## 1.2. Teorema de Zenor-Morita

A continuación vamos a probar que dicho hiperespacio es completo (Teorema de Zenor-Morita), para lo cual demostramos algunos resultados previos.

El primero de ellos pone de manifiesto que la distancia entre un punto y un conjunto del hiperespacio se alcanza, es decir, queda determinada como la distancia entre dos puntos.

**Lema 1.2.1** Sea  $K \in \mathcal{K}_0(X)$  y  $x \in X$ . Entonces existe  $y \in K$  tal que  $d(x, K) = d(x, y)$ .

**Demostración 6** Dado  $x \in X$ ,  $d(x, K) = \inf\{d(x, y) : y \in K\}$ . Entonces, podemos tomar una sucesión  $y_n \in K$  tal que

$$d(x, y_n) \longrightarrow d(x, K)$$

Por ser  $K$  compacto, toda sucesión en  $K$  admite una parcial convergente. Sea pues  $y_{\sigma(n)} \longrightarrow y \in K$ . Evidentemente,  $d(x, y_{\sigma(n)}) \longrightarrow d(x, K)$ .

Por otro lado, vamos a utilizar la siguiente caracterización: Si  $f$  es una función continua y  $x_n \longrightarrow x$ , entonces  $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ .

Tomando  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(y) = d(x, y)$ , claramente  $f$  es continua y

$$d(x, y_{\sigma(n)}) = f(y_{\sigma(n)}) \longrightarrow f(y) = d(x, y).$$

Por unicidad de límite en un espacio métrico  $d(x, y) = d(x, K)$ , por lo que el ínfimo se alcanza, esto es, se trata de un mínimo.

■

A continuación introducimos un lema con el que poder tomar, sin pérdida de generalidad, sucesiones de Cauchy cuya distancia entre términos consecutivos se puede acotar en función del índice.

**Lema 1.2.2** *Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y una sucesión de Cauchy  $(x_n)$ , de elementos de  $X$ , existe una parcial,  $\sigma$ , tal que  $d(x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n-1)}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ .*

**Demostración 7** *Como estamos en un espacio métrico, podemos garantizar que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0(n) : d(x_p, x_q) < \frac{1}{2^n}, \forall p, q \geq n_0(n).$$

*Construimos la parcial  $\sigma$  de la siguiente forma:*

*Tomamos  $\sigma(1) = n_0(1)$ , suponemos que hemos definido  $\sigma(n)$ , y definimos  $\sigma(n+1) = \max\{\sigma(n), n_0(n+1)\}$ .*

*Evidentemente,  $\sigma$  es creciente y  $\sigma(n+1) \geq n_0(n+1)$ . Por tanto,  $\sigma(n) \geq \sigma(n-1) \geq n_0(n-1)$ , y se cumple que  $d(x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n-1)}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ .*

■

Como consecuencia se tiene el siguiente

**Lema 1.2.3** *Sea  $(y_n)$  una sucesión tal que  $d(y_n, y_{n-1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,*

$$d(y_n, y_{n+h}) < \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ para todo } h \in \mathbb{N}.$$

**Demostración 8** *Hacemos uso de la desigualdad triangular,*

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+h}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \cdots + d(y_{n+h-1}, y_{n+h}) \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+h-1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{h-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

■

Finalmente, pasamos a enunciar y demostrar en detalle el resultado principal de esta sección.

**Teorema 1.2.4** (de Zenor-Morita) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $(\mathcal{K}_0(X), d_H)$  es un espacio métrico completo.

**Demostración 9** Sea  $K_n$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{K}_0(X)$ . Podemos suponer en virtud del Lema 1.2.2 que  $d_H(K_n, K_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ .

Definimos  $K$  (el candidato a límite de la sucesión  $K_n$ ) como el conjunto formado por todos los puntos  $x \in X$  tales que existe una sucesión  $(x_n)$  tal que  $x_n \in \bigcup_{m \geq n} K_m$ ,  $x_n \rightarrow x$  y  $d(x_n, x_{n-1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

- Veamos que  $K$  es no vacío.

Cogemos  $x_1 \in K_1$ , suponemos que hemos definido  $x_n \in K_n \subseteq B(K_{n+1}, \frac{1}{2^n})$  y tenemos un punto, al que denominamos  $x_{n+1}$ , de modo que  $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$  y  $x_{n+1} \in K_{n+1} \subseteq \bigcup_{m \geq n+1} K_m$ .

De forma equivalente,

$$d(x_n, x_{n-1}) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

por lo que  $(x_n)$  es de Cauchy y, al ser  $X$  completo,  $x_n \rightarrow x$ . De este modo, se cumplen todas las condiciones de  $K$  y llegamos a que  $x \in K$ .

- Probemos ahora que  $K_n \rightarrow K$  ( $d_H(K_n, K) \rightarrow 0$ ).

Para ello, utilizaremos el apartado i) de la Proposición 1.1.4.

1. En primer lugar, veamos que para todo  $\varepsilon$  positivo existe un  $n_0$  a partir del cual  $K_n \subseteq B[K, \varepsilon]$ . Esto es similar a probar que para todo  $z \in K_n$ ,  $z \in B[K, \varepsilon] = \bigcup_{x \in K} B[x, \varepsilon]$ . Es decir,

$$\forall z \in K_n, \exists x \in K : d(z, x) < \varepsilon.$$

En efecto, dado  $z \in K_n$  definiremos una sucesión  $(y_n)$  convenientemente para que converja al  $x \in K$  que buscamos.

Hasta el término  $n$ -ésimo la hacemos constante,

$$y_i = z \quad \text{con } i \leq n.$$

Nótese que así garantizamos que  $y_i \in K_n \subseteq \bigcup_{m \geq i} K_m$ .

Ahora, realizamos una construcción similar a la de la prueba de que  $K$  es no vacío.

Tenemos que  $y_n \in K_n$  y suponemos que hemos definido  $y_{n+k} \in K_{n+k} \subseteq B(K_{n+k+1}, \frac{1}{2^{n+k}})$ . Entonces, existe un punto, que llamaremos  $y_{n+k+1}$ , tal que  $d(y_{n+k}, y_{n+k+1}) \leq \frac{1}{2^{n+k}}$  y  $y_{n+k+1} \in K_{n+k+1} \subseteq \bigcup_{m \geq n+k+1} K_m$ .

Razonando del mismo modo tenemos que  $(y_{n+k})$  es de Cauchy y, siendo  $X$  completo,

$$(y_{n+k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \in K.$$

Finalmente, dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $n_0$  un natural a partir del cual  $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$ .

Reuniendo todos estos hechos y utilizando el Lema 1.2.3 se tiene que, si  $n \geq n_0$ ,

$$d(y_n, y_{n+k}) < \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow d(y_n, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow d(z, x) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon.$$

2. Una vez demostrada la primera parte, es sencillo ver que  $K \subseteq B[K_n, \varepsilon]$ . Sea  $x \in K$ , entonces existe  $x_n$  tal que  $x_n \in \bigcup_{m \geq n} K_m$ ,  $x_n \rightarrow x$  y

$$d(x_n, x_{n-1}) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así, sea  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $n_1$  cumpliendo que  $\frac{1}{2^{n_1-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$  y de modo que si  $n \geq n_1$ ,  $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por tanto, fijemos  $n \geq n_1$ .

Si  $m \geq n$ , utilizando el Lema 1.2.3,

$$d_H(K_m, K_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n_1-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De hecho,  $K_m \subseteq B(K_n, \frac{1}{2^{n-1}}) \subseteq B(K_n, \frac{1}{2^{n_1-1}}) \subset B(K_n, \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $\forall m \geq n$ .

Y como  $x_n \in \bigcup_{m \geq n} K_m$ , es evidente que  $x_n \in B(K_n, \frac{\varepsilon}{2})$ . Llegando a que

$$d(x_n, K_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilizando la desigualdad triangular probada en el Lema 1.1.1,

$$d(x, K_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, K_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dado que  $\varepsilon$  es arbitrario en todo el razonamiento, concluimos que

$$K_n \longrightarrow K.$$

- Demostremos que  $K \in \mathcal{K}_0(X)$ .

Ahora probaremos que el límite de la sucesión de Cauchy  $K_n$  es un conjunto compacto. Con tal fin, basta demostrar que  $K$  es cerrado y totalmente acotado (estamos en un espacio métrico completo).

1.  $K$  es cerrado si y sólo si  $\overline{K} \subseteq K$ . Vamos a probarlo tomando un elemento de  $\overline{K}$  y viendo que está en  $K$ . Para ello,

$$x \in \overline{K} \iff \text{existe una sucesión } (x_n) \text{ con } x_n \in K \text{ y } x_n \rightarrow x.$$

Para cada  $x_n$  existirán sucesiones:

$$x_1^1 x_2^1 \dots x_k^1 \rightarrow x_1$$

$$x_1^2 x_2^2 \dots x_k^2 \rightarrow x_2$$

$$x_1^n x_2^n \dots x_k^n \rightarrow x_n$$

cumpliendo lo que aparece en la definición de  $K$ .

Vamos a probar que la sucesión  $(x_{n+3}^{n+1})$  converge a  $x$  y cumple todas las condiciones.

En primer lugar, obtengamos la condición

$$d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+2}^n) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

En efecto, utilizando el Lema 1.2.3 sabemos que

$$d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+3+h}^{n+1}) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+1}^{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

De modo similar se obtiene,

$$d(x_{n+2}^n, x_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Además, como  $x \in \overline{K}$  y  $x_n \rightarrow x$  (en particular,  $x_n$  es de Cauchy), podemos tomarnos la sucesión (en virtud del Lema 1.2.2) de modo que

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Utilizando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+2}^n) &\leq d(x_{n+2}^n, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Comprobemos que  $(x_{n+3}^{n+1})$  converge a  $x$ .

Evidentemente, como  $x_{n+3}^{n+1} \rightarrow x_{n+1}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe un natural  $n_1$  a partir del cual  $d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Y del mismo modo, existe un natural  $n_2$  a partir del cual  $d(x_{n+1}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sea  $n' = \max\{n_1, n_2\}$ . Si  $n \geq n'$ ,

$$d(x_{n+3}^{n+1}, x) \leq d(x_{n+3}^{n+1}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto,  $(x_{n+3}^{n+1})$  converge a  $x$ .

Finalmente, es obvio que por su propia construcción  $x_{n+3}^{n+1} \in \bigcup_{m \geq n+3} K_m$ , luego se cumplen todas las condiciones de la definición de  $K$  y  $x \in K$ .

2. Para terminar, probamos que  $K$  es totalmente acotado.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como hemos visto que  $d_H(K_n, K) \rightarrow 0$ , existirá un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $K \subseteq B[K_n, \frac{\varepsilon}{2}]$ , y como  $K_n$  es compacto y por tanto, totalmente acotado, puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio  $\frac{\varepsilon}{2}$  como sigue,

$$K_n \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$$

Obsérvese que se ha utilizado el Lema 1.1.3 en la implicación. En consecuencia,  $K$  es totalmente acotado.

En conclusión, hemos visto que dada una sucesión de Cauchy,  $K_n$ , de conjuntos de  $\mathcal{K}_0(X)$ , existe  $K \in \mathcal{K}_0(X)$  tal que  $K_n$  converge a  $K$ .

Esto es,  $(\mathcal{K}_0(X), d_H)$  es un espacio métrico completo. ■



# Capítulo 2

## Conjuntos autosimilares

En este apartado se introducen los conjuntos autosimilares como aplicación del Teorema del punto fijo de Banach al hiperespacio de  $X$ . Intuitivamente, un conjunto autosimilar es aquel que puede dividirse en una serie de trozos o piezas similares al conjunto original. Esta propiedad, que describiremos de manera más precisa posteriormente, permitirá obtener resultados generales para estos conjuntos, de ahí a su interés por estudiarlos.

### 2.1. Definiciones

Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  dos espacios métricos. Se dice que  $g : X \rightarrow Y$  es una *contracción* si existe un número  $c \in [0, 1)$  tal que

$$d'(g(x), g(x')) \leq c d(x, x'), \forall x, x' \in X.$$

Dada una función  $f : X \rightarrow X$ , decimos que  $x$  es un *punto fijo* de  $f$  si  $f(x) = x$ .

**Teorema 2.1.1** (*del punto fijo de Banach*) Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo, y  $f : X \rightarrow X$  una contracción con factor de contracción  $c < 1$ . Entonces, existe un único  $x \in X$ , tal que  $f(x) = x$ . Además, para cualquier  $x_0 \in X$ , se verifica que  $f^n(x_0) \rightarrow x$ .

**Demostración 10** Sea  $x_0 \in X$ . Construimos la sucesión  $(x_n)$  en  $X$  como sigue

$$x_1 = f(x_0), \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad , n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que esta sucesión es de Cauchy, y como  $X$  es completo, converge.

Sea  $n > m$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \leq c d(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq c^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \\
 &\leq c^m d(x_{n-m}, x_0) \leq c^m (d(x_{n-m}, x_{n-m-1}) + \cdots + d(x_1, x_0)) \\
 &\leq c^m (c^{n-m-1} + \cdots + 1) d(x_1, x_0) \\
 &= \frac{c^m (1 - c^{m-n})}{1 - c} d(x_1, x_0) \\
 &\leq \frac{c^m}{1 - c} d(x_1, x_0).
 \end{aligned}$$

Como  $c \in [0, 1)$ ,  $c^m \rightarrow 0$ . Así, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un natural  $n_0$  a partir del cual  $\frac{c^m}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ , por lo que  $(x_n)$  es una sucesión de Cauchy.

Al ser  $X$  completo,  $(x_n)$  converge. Sea  $x$  el límite de la sucesión  $(x_n)$ . Probaremos que para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $d(x, f(x)) < \varepsilon$ . De este modo, se tendrá que  $x$  es un punto fijo de  $f$ .

En efecto, sea  $n_0 > 0$  tal que  $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ , para todo  $n \geq n_0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}
 d(x, f(x)) &\leq d(x, x_{n_0+1}) + d(x_{n_0+1}, f(x)) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + d(f(x_{n_0}), f(x)) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + c d(x_{n_0}, x) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + c \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Mostremos la unicidad; si  $x$  e  $y$  son dos puntos fijos de  $f$ , entonces

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y),$$

lo cual es posible sólo si  $x = y$ .

Nótese que la propia definición de  $(x_n)$  nos garantiza que  $f^n(x_0) \rightarrow x$ .

■

**Proposición 2.1.2** Sea  $\{f_1, \dots, f_m\}$  un conjunto finito de contracciones con factores de contracción  $c_i < 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Entonces la aplicación  $f : \mathcal{K}_0(X) \rightarrow \mathcal{K}_0(X)$ , conocida como operador de Hutchinson y dada por  $f(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$ , es una contracción en el hiperespacio  $(\mathcal{K}_0(X), d_H)$ .

**Demostración 11** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $\mathcal{K}_0(X)$  con  $d_H(A, B) = r$ . Tomemos también un conjunto finito de contracciones  $\{f_1, \dots, f_m\}$  con  $c_i < 1$  y  $1 \leq i \leq m$ .

Por el apartado i) de la proposición 1.1.4 sabemos que  $B \subseteq B(A, r)$ , es decir, para todo  $b \in B$  existe un  $a \in A$  tal que  $d(a, b) < r$ .

Utilizando que las  $f_i$  son contracciones,

$$d(f_i(a), f_i(b)) \leq c_i d(a, b) < c_i r.$$

De este modo, para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$f_i(B) \subseteq B(f_i(A), c_i r) \subseteq B\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A), r \max_{1 \leq i \leq m} c_i\right).$$

Por tanto,

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(B) \subseteq B\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A), r \max_{1 \leq i \leq m} c_i\right).$$

Intercambiando  $A$  por  $B$  se razona de forma similar, obteniéndose

$$d_H(f(A), f(B)) \leq d_H(A, B) \max_{1 \leq i \leq m} c_i.$$

■

## 2.2. Consecuencias

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo, y  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  un conjunto finito de contracciones. Se tiene que:

1.  $(\mathcal{K}_0(X), d_H)$  es un espacio métrico completo.
2. La aplicación  $f : \mathcal{K}_0(X) \rightarrow \mathcal{K}_0(X)$  dada por  $f(E) = \bigcup_{i=1}^m f_i(E)$ , es una contracción con respecto a la métrica de Hausdorff con factor de contracción  $c = \max_{1 \leq i \leq m} c_i$ .
3. Por el Teorema del punto fijo de Banach, existe un único  $K$  tal que  $K = f(K)$ . Entonces existe un único conjunto compacto no vacío  $K$  que es invariante bajo la acción de las  $f_i$ , es decir,  $K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K)$ .

4. Además, si  $E$  es cualquier compacto de  $X$ , entonces la sucesión  $f^k(E)$  converge a  $K$  con respecto a la distancia de Hausdorff.

A  $(X, \{f_1, f_2, \dots, f_m\})$  se le llama *conjunto de funciones iteradas* y a  $K$  *atractor del sistema* de dichas funciones. Cuando las aplicaciones  $f_i$  son similaridades ( $d(f_i(x), f_i(y)) = c_i d(x, y)$ ), se dice que  $K$  es un *conjunto autosimilar*.

Las consecuencias anteriores también permiten construir aproximaciones de un conjunto autosimilar, y por tanto permite hacer un programa para dibujar conjuntos autosimilares. Así, partiendo de cualquier compacto  $E$  (por ejemplo, un punto) y haciendo  $f^n(E)$  se van obteniendo aproximaciones cada vez mejores del conjunto autosimilar.

## Capítulo 3

# Algoritmo para dibujar conjuntos autosimilares

En esta sección, con ayuda de *Matlab*, vamos a implementar un algoritmo mediante el cual es posible visualizar conjuntos autosimilares en dos y tres dimensiones.

El compacto del que partimos será un punto, aunque *Matlab* dispone de varios marcadores (estrellas, cruces, círculos, cuadrados, etc) que también se pueden utilizar.

Como hemos visto en las consecuencias de la sección anterior, solo necesitamos aplicaciones  $f_i$  que sean similaridades. Por ejemplo, en el caso del plano, podemos utilizar isometrías como la traslación y el giro, e incluso añadirle una homotecia, siempre y cuando tenga factor menor que 1.

De este modo, para cada punto  $E$ , obtenemos en cada iteración  $f^n(E)$  una aproximación mejor del conjunto autosimilar  $K$ , pues sabemos que

$$f^n(E) \rightarrow K.$$

### 3.1. Conjuntos autosimilares en dos dimensiones

El algoritmo se llamará **dibuja.m** y constará de tres variables de entrada: el número de iteraciones, un punto inicial y las similaridades.

En primer lugar, implementamos una función llamada **similaridad.m**, con la que se podrá introducir la traslación, el giro y la homotecia.

## 16 CAPÍTULO 3. REPRESENTAMOS CONJUNTOS AUTOSIMILARES

```

1      function [p1]=similaridad(z,a,b,h,alfa)
2          % z es un vector columna de dos elementos (punto
           inicial)
3          % (a,b) es la traslacion
4          % h es la homotecia
5          % alfa es el angulo de giro
6          p1=[a+h*z(1)*cos(alfa)-h*z(2)*sin(alfa) b+h*z(1)*sin(
           alfa)+h*z(2)*cos(alfa)];

```

A partir de este script podemos escribir una función con las similaridades que tenga nuestro conjunto autosimilar.

Por ejemplo, para la alfombra de Sierpinski, se tienen ocho similaridades que se pueden generar con el código anterior.

```

1      function [z]=alfombra(z)
2          p1=similaridad(z,0,0,1/3,0);
3          p2=similaridad(z,1/3,0,1/3,0);
4          p3=similaridad(z,2/3,0,1/3,0);
5          p4=similaridad(z,0,1/3,1/3,0);
6          p5=similaridad(z,2/3,1/3,1/3,0);
7          p6=similaridad(z,0,2/3,1/3,0);
8          p7=similaridad(z,1/3,2/3,1/3,0);
9          p8=similaridad(z,2/3,2/3,1/3,0);
10         z=[p1' p2' p3' p4' p5' p6' p7' p8'];

```

A continuación se presenta el código de **dibuja.m**.

Para realizarlo se utilizarán tres ciclos *for*: el primero contabiliza las iteraciones, el segundo rellena un vector que va acumulando las similaridades y el tercero representa dichas similaridades iteración a iteración.

```

1      function []=dibuja(iter,z,S)
2          % iter es el numero de iteraciones
3          % z=(a,b) es un vector columna de dos elementos (punto
           inicial)
4          % S son las similaridades
5          r=length(S(z));
6
7          w=z; % inicializo el primer punto
8
9          for k=0:(iter-1)
10             j=[];
11                 for i=1:r^k
12                     [j]= [j S(w(:,i))];
13                 end
14             w=j;

```

```

15     figure(k+1)
16     for p=1:r^(k+1)
17         plot(w(1,p),w(2,p))
18         hold on
19     end
20     end

```

Si ejecutamos `dibuja(5,[0;0],@alfombra)` vamos a obtener las primeras cinco iteraciones del proceso, que tenderá a parecerse cada vez más al fractal.

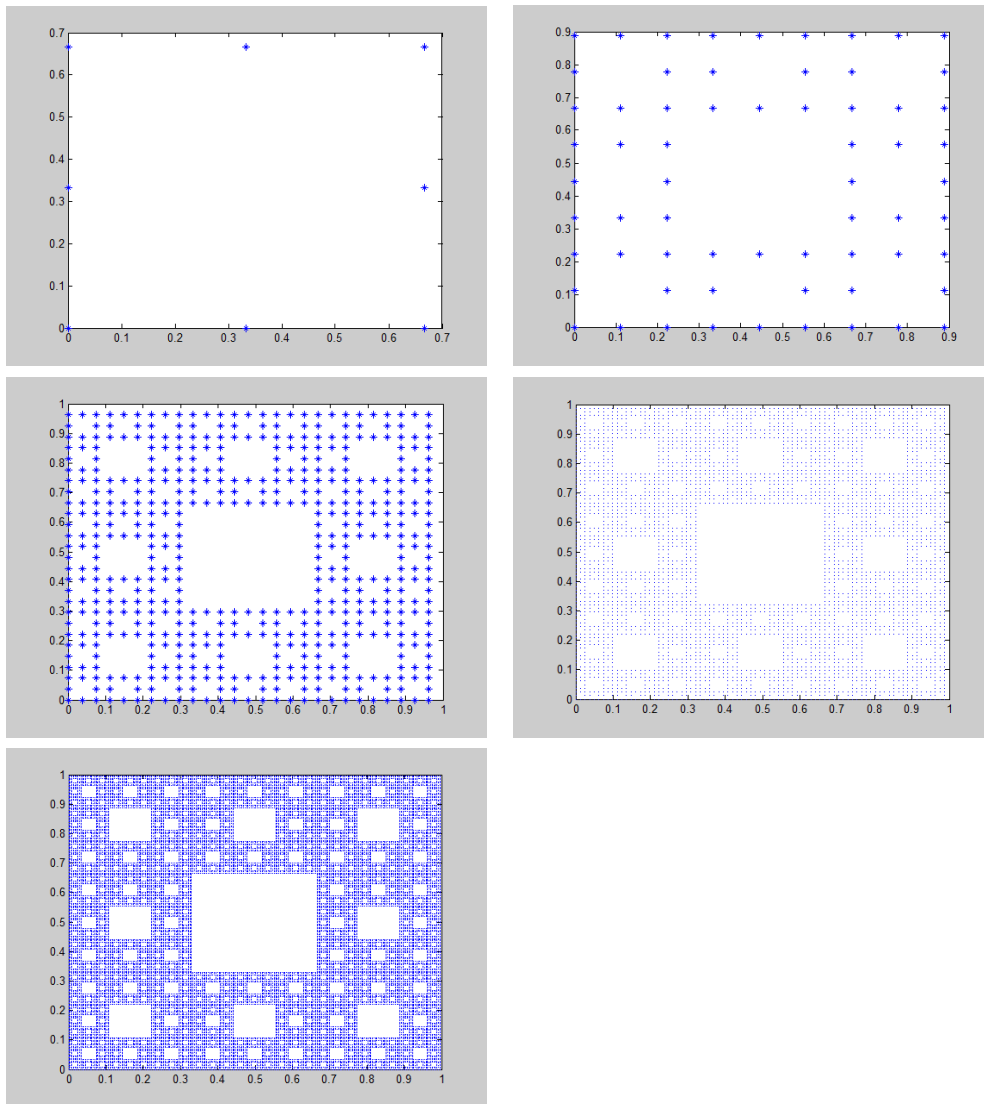


Figura 3.1: Imágenes de las cinco primeras iteraciones, donde las tres primeras cuentan con un marcador estrellado para su mejor visualización.

### 18 CAPÍTULO 3. REPRESENTAMOS CONJUNTOS AUTOSIMILARES

Téngase en cuenta que en la iteración  $k$ -ésima se están calculando  $8^k$  puntos, por lo que el coste computacional crece exponencialmente.

Incluso es posible probar con las similaridades para llegar a figuras con formas conocidas. El siguiente script recibe el nombre de **helecho.m** y se genera con

```
1      function [z]=helecho(z)
2      p1=similaridad(z,1/3,1/3,2/3,0);
3      p2=similaridad(z,1/4,1/4,1/3,pi/2);
4      p3=similaridad(z,5/8,1/4,1/3,-pi/2);
5      z=[p1' p2' p3'];
```

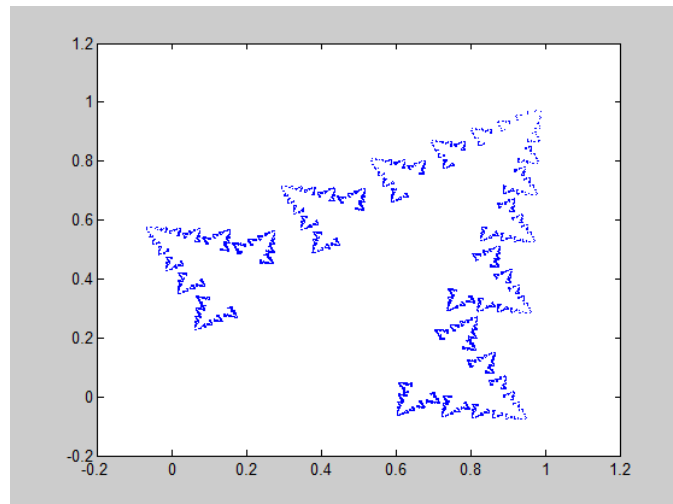


Figura 3.2: Novena iteración en el helecho.

Además de utilizar la función **similaridad.m**, cabe la posibilidad de definir las similaridades directamente.

En el siguiente ejemplo se obtiene el triángulo de Sierpinski de esta manera.

```
1      function [z]=trianguloSierpinski(z)
2      p1=[0.5*z(1) 0.5*z(2)];
3      p2=[0.5*z(1)+0.5 0.5*z(2)];
4      p3=[0.5*z(1)+0.25 0.5*z(2)+0.5];
5      z=[p1' p2' p3'];
```



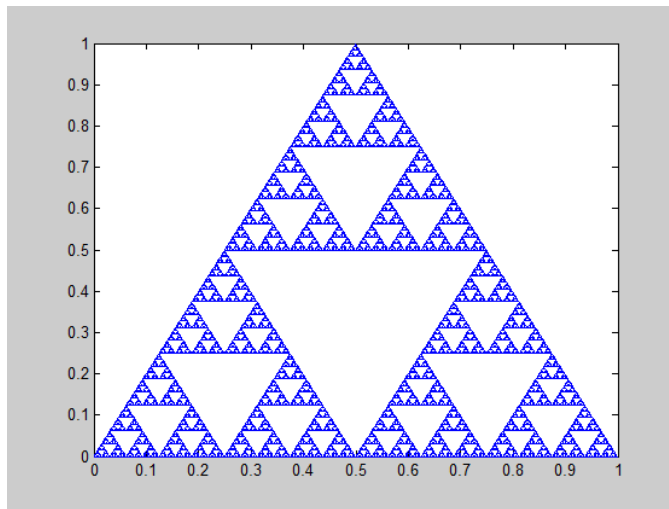


Figura 3.3: Novena iteración en el triángulo de Sierpinski.

## 3.2. Conjuntos autosimilares en tres dimensiones

Para generar estos conjuntos tridimensionales vamos a introducir las similitudes como en el caso del triángulo de Sierpinski en la sección anterior. Además, para visualizarlos, bastará con modificar varios detalles evidentes del código **dibuja.m**.

Así, construimos **dibuja3D.m**:

```

1  function []=dibuja3D(iter ,z ,S)
2  % iter es el numero de iteraciones
3  % z=(a,b,c) es un vector columna de tres elementos (
4  % punto inicial)
5  % S son las similaridades
6
7  [~,r]=size(S(z));
8  w=z; % inicializo el primer punto
9
10 for k=0:(iter-1)
11     j=[];
12     for i=1:r^k
13         [j]=[j S(w(:,i))];
14     end
15     w=j;
16     figure(k+1)
17     for p=1:r^(k+1)
18         plot3(w(1,p),w(2,p),w(3,p))

```

```

18             hold on
19             end
20         end

```

Como ejemplo, vamos a aplicar este programa a las similaridades del tetraedro de Sierpinski, dadas por:

```

1     function [z]=tetraedroSierpinski(z)
2     p1=[0.5*z(1) 0.5*z(2) 0.5*z(3)];
3     p2=[0.5*z(1)+0.5 0.5*z(2) 0.5*z(3)];
4     p3=[0.5*z(1)+0.25 0.5*z(2)+0.17677669 0.5*z(3)
5         +0.35355339];
6     p4=[0.5*z(1)+0.25 0.5*z(2)+sqrt(3)/4 0.5*z(3)];
7     z=[p1' p2' p3' p4'];

```

Ejecutando `dibuja3D(8,[0;0;0],@tetraedroSierpinski)` veremos las ocho primeras iteraciones.

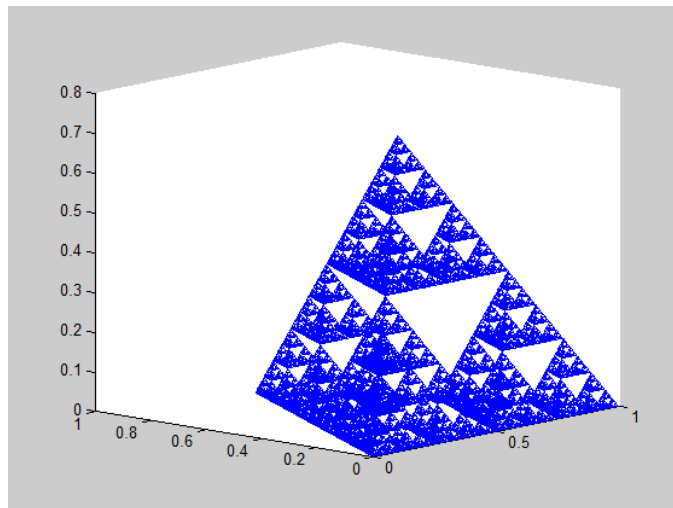


Figura 3.4: Octava iteración en el tetraedro de Sierpinski.

En las próximas secciones vamos a estudiar la geometría que hay detrás de estos conjuntos, y en particular, su dimensión.

# Capítulo 4

## Medida y dimensión de Hausdorff

Dentro de las distintas formas que existen de definir la dimensión de un conjunto fractal, la versión de Hausdorff (1919) es la más importante. Sus estudios se basaron en construcciones realizadas por Carathéodory en 1914, de donde obtuvo la idea para definir una medida a través de recubrimientos de conjuntos.

### 4.1. Medida de Hausdorff

La forma en la que vamos a construir esta medida está basada en el capítulo 5 de [2]. Los dos métodos que utilizaremos son muy útiles para construir medidas exteriores de un conjunto dado. Principalmente, la medida de Hausdorff se puede definir a partir de ellos como un caso particular bastante sencillo.

Dado un conjunto no vacío  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , definimos su *diámetro* como

$$\text{diam}(U) = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Si ahora  $B$  es cualquier conjunto de  $\mathbb{R}^n$ , consideremos una familia de conjuntos numerable,  $\{U_i\}$ , tal que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{y} \quad 0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \delta, \quad \forall i.$$

Decimos entonces que  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $B$ .

Dado  $s \geq 0$ , definimos la función  $C : \{U_i\} \rightarrow [0, \infty]$  dada por

$$C(U_i) = \text{diam}(U_i)^s, \quad \forall U_i \in \{U_i\}.$$

El *método I* o teorema de construcción de medidas exteriores (véase la sección 5.2 de [2]) nos permite definir, para cada  $\delta > 0$ , una medida exterior en  $B$  tal que

$$\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} C(U_i) : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } B \right\}.$$

Esta medida exterior recibe el nombre de *medida de Hausdorff de  $B$* .

Obsérvese que a medida que  $\delta$  es más pequeño, el número de posibles recubrimientos es menor. Por tanto, el valor de  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  se ve incrementado. Por el contrario, si  $\delta$  crece,  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  disminuye. Es por ello que tiene sentido hablar del límite cuando  $\delta$  tiende a 0.

Así, utilizando el *método II* (sección 5.4 de [2]), dada la medida exterior  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  y la aplicación  $C$ , definimos

$$\mathcal{H}^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(B),$$

que se denomina *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de  $B$* .

Como esta medida está definida con el *método II*, utilizando el Teorema 5.4.2 de [2] se tiene que  $\mathcal{H}^s$  es una medida exterior métrica.

Ahora, usamos el Teorema 5.2.6 de [2], que nos garantiza que dada una medida exterior métrica en un espacio métrico todo conjunto de Borel es medible.

Y finalmente, mediante el Teorema 5.2.3 de [2], tenemos que los conjuntos medibles forman una  $\sigma$ -álgebra donde  $\mathcal{H}^s$  es numerablemente aditiva.

Con todo esto, deducimos que la  $\sigma$ -álgebra de Borel está contenida en la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles y, por tanto, la medida exterior  $\mathcal{H}^s$  definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel es una medida.

Vamos a ver como se comporta la medida de Hausdorff de un conjunto con el producto por un escalar.

**Lema 4.1.1** Sean  $c > 0$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $cB = \{cx : x \in B\}$ , entonces

$$\mathcal{H}^s(cB) = c^s \mathcal{H}^s(B).$$

**Demostración 12** *Probamos primero la desigualdad  $\leq$ .*

Como  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $B$ ,  $\{cU_i\}$  será un  $c\delta$ -recubrimiento de  $cB$ . De este modo,

$$\mathcal{H}_{c\delta}^s(cB) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(cU_i)^s = c^s \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s.$$

Con lo cual, tomando el ínfimo,  $\mathcal{H}_{c\delta}^s(cB) \leq c^s \mathcal{H}_{\delta}^s(B)$  para todo  $\delta$ -recubrimiento  $\{U_i\}$ .

Haciendo el límite cuando  $\delta$  tiende a 0 se obtiene la desigualdad buscada.

Para llegar a la desigualdad  $\geq$  basta con reemplazar  $c$  por  $1/c$  y  $B$  por  $cB$  en la que ya hemos probado. ■

También es posible relacionar esta medida con la imagen de un conjunto mediante una aplicación (bajo ciertas hipótesis que veremos ahora). Con ello, se podrá estudiar como se comporta frente a movimientos en el plano.

Dado  $B \subset \mathbb{R}^n$ , se dice que una función  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  cumple la *condición de Hölder de exponente  $\alpha$*  si

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)^\alpha, \quad \forall x, y \in B,$$

siendo  $\alpha$  y  $c$  valores positivos.

Nótese que  $f$  es, en particular, continua.

**Proposición 4.1.2** *Bajo las hipótesis anteriores,*

$$\mathcal{H}_{\alpha}^s(f(B)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(B), \quad \forall c \in \mathbb{R}^+.$$

**Demostración 13** *Sea  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $B$ . Por la condición de Hölder tenemos que*

$$\text{diam}(f(B \cap U_i)) \leq c \text{diam}(B \cap U_i)^\alpha \leq c \text{diam}(U_i)^\alpha \leq c\delta^\alpha.$$

Por otro lado, sabemos que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \iff B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B \cap U_i \Rightarrow f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(B \cap U_i).$$

Esto nos dice que  $\{f(B \cap U_i)\}$  es un  $c\delta^\alpha$ -recubrimiento de  $f(B)$ . Finalmente, elevando a  $\frac{s}{\alpha}$  y sumando se llega a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(f(B \cap U_i))^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s.$$

De ahí,

$$\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(B)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(f(B \cap U_i))^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s.$$

Y como se tiene para todo  $\delta$ -recubrimiento  $\{U_i\}$ ,

$$\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{\frac{s}{\alpha}}(f(B)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

El resultando se obtiene al tomar límites cuando  $\delta$  tiende a 0. ■

Como caso particular, si  $f$  es una isometría ( $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ) se tiene que

$$\mathcal{H}^s(f(B)) = \mathcal{H}^s(B),$$

lo que nos lleva a deducir que los movimientos del plano que conservan las distancias (traslación, giro y reflexión) son invariantes con respecto a la medida de Hausdorff.

## 4.2. Relación entre las medidas de Hausdorff y Lebesgue

Si en la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de un conjunto  $B$  de Borel nos encontramos con un valor de  $s$  entero positivo, se puede demostrar que la medida de Hausdorff no es más que la medida  $s$ -dimensional de Lebesgue (denotada por  $\mathcal{L}^s(B)$ ), multiplicada por cierta constante:

$$\mathcal{H}^s(B) = k_s \mathcal{L}^s(B), \quad \text{donde } k_s = \frac{2^s (\frac{1}{2}s)!}{\pi^{\frac{1}{2}s}}.$$

Dicha constante es el recíproco del volumen de una bola  $s$ -dimensional de diámetro unidad.

En los casos donde  $B$  sea un paralelepípedo o, al menos, un conjunto cuyo volumen  $s$ -dimensional se pueda determinar de manera elemental,

$$\mathcal{L}^s(B) = \text{vol}^s(B),$$

donde  $\text{vol}^s(B)$  denota el volumen  $s$ -dimensional de  $B$ .

Por ejemplo,  $\mathcal{H}^0(B)$  nos da los puntos de  $B$ ,  $\mathcal{H}^1(B)$  la longitud de la curva diferenciable dada por  $B$  y  $\mathcal{H}^2(B)$  se trata de  $\frac{4}{\pi} \text{vol}^2(B)$ , es decir, una constante por el área de la superficie diferenciable representada por  $B$ .

Gracias a este vínculo entre ambas medidas podremos extraer diversas propiedades de la dimensión de Hausdorff, la cual veremos a continuación.

### 4.3. Dimensión de Hausdorff

Una aplicación inmediata de la medida de Hausdorff es, sin duda alguna, su dimensión. Aunque su cálculo sea en ocasiones demasiado tedioso, su fundamento en la teoría de la medida proporciona ciertas propiedades que facilitan su estudio.

Dado  $B \subset \mathbb{R}^n$  y  $\delta < 1$  fijo, es evidente que  $\mathcal{H}_\delta^s(B)$  decrece conforme  $s$  se incrementa. Por tanto,  $\mathcal{H}^s(B)$  también es decreciente.

Además, si  $t > s$  y  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $B$ , tenemos que

$$\text{diam}(U_i)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \quad \forall i.$$

Y del hecho de que  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^t = \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^{t-s} \text{diam}(U_i)^s$  llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s.$$

Ahora, tomando el ínfimo,

$$\mathcal{H}_\delta^t(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s,$$

por lo que

$$\mathcal{H}_\delta^t(B) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Obsérvese que para  $t > s$ , cuando  $\delta$  tiende a 0,  $\mathcal{H}^t(B) = 0$ . Siempre y cuando  $\mathcal{H}^s(B)$  sea finito para no incurrir en indeterminaciones.

De este modo, podemos ver como existe un valor de  $s$  a partir del cual  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ . A este valor de  $s$  se le denomina como *dimensión de Hausdorff de  $B$* , y se denota con  $\dim_H B$ .

Para valores anteriores a esta dimensión  $\mathcal{H}^s(B) = \infty$ , pues no puede ser ni finito ni 0.

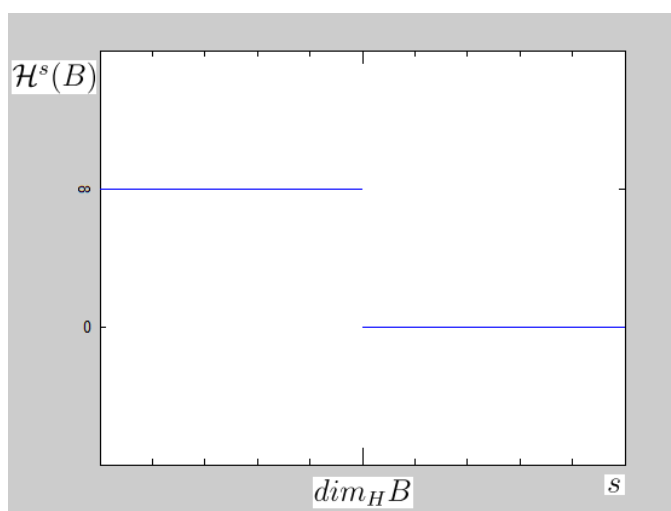


Figura 4.1: Representación de  $\mathcal{H}^s(B)$  frente a  $s$ . El valor de la dimensión se alcanza en el salto de infinito a 0.

Así,

$$\mathcal{H}^s(B) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H B \\ 0 & \text{si } s > \dim_H B \end{cases}$$

Si  $s = \dim_H B$ ,  $\mathcal{H}^s(B)$  puede ser 0, infinito o

$$0 < \mathcal{H}^s(B) < \infty.$$

Esta última posibilidad es la más interesante de estudiar.

**Proposición 4.3.1** *La dimensión de Hausdorff cumple las siguientes propiedades:*

- i) Si  $B_1 \subseteq B_2$  entonces  $\dim_H B_1 \leq \dim_H B_2$ .



ii) Si  $\{B_i\}$  es una familia numerable de conjuntos entonces

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H B_i\}.$$

iii) Si  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto entonces  $\dim_H B = n$ .

iv) Si  $B$  es un conjunto numerable,  $\dim_H B = 0$ .

**Demostración 14** i) Por su condición de medida exterior, tenemos que si  $B_1 \subseteq B_2$  entonces  $\mathcal{H}^s(B_1) \leq \mathcal{H}^s(B_2)$ , para cada  $s$ . Por tanto, es inmediato que  $\dim_H B_1 \leq \dim_H B_2$ .

ii) Es evidente que, para cada  $i$ ,  $B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ , luego utilizando el apartado anterior obtenemos la desigualdad  $\geq$ . Para la recíproca, sea  $s > \dim_H B_i$  para cada  $i$ . Tenemos entonces que  $H^s(B_i) = 0$  para cada  $i$ .

Por tanto, dados  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$ , existe  $\delta_i < \delta$  tal que

$$H_{\delta_i}^s(B_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

De aquí, existe  $\{U_j^i\}_{j \in J_i}$ ,  $\delta_i$ -recubrimiento de  $B_i$ , tal que  $\sum_{j \in J_i} \text{diam}(U_j^i)^s < \frac{\varepsilon}{2^i}$ , por lo que  $\{U_j^i : j \in J_i \text{ y } i \in \mathbb{N}\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ .

Ahora utilizamos un resultado de análisis para la serie  $\sum_{i \in \mathbb{N}, j \in J_i} \text{diam}(U_j^i)^s$ .

Por ser una serie absolutamente convergente (los diámetros son positivos) se tiene que es reordenable (véase [5]). Con lo que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}, j \in J_i} \text{diam}(U_j^i)^s = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j \in J_i} \text{diam}(U_j^i)^s \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

De aquí tenemos que  $H_{\delta}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \varepsilon$ , y en el límite cuando  $\delta$  tiende a 0

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario,  $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$ .

En definitiva, si  $s > \dim_H B_i$  para cada  $i$ ,  $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$ . Luego

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \leq \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H B_i\}.$$

iii) En efecto, todo conjunto abierto  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  cumple que  $B \subseteq [-k, k]^n = C_n$ , para algún  $k > 0$ . Ahora bien, si recubrimos este cubo  $n$ -dimensional con una malla de cubos  $U_i$  de lado  $\delta$ , tenemos que para  $s > n$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s = \sum_{\text{cubos}} (\delta\sqrt{n})^s = \left(\frac{2k}{\delta}\right)^n (\delta\sqrt{n})^s = 4k^2 (\sqrt{n})^s \delta^{s-n}.$$

De este modo,  $H_{\delta}^s(C_n) \leq 4k^2 (\sqrt{n})^s \delta^{s-n}$ .

Cuando  $s > n$  y  $\delta$  tiende a 0,  $H^s(C_n) = 0$ , luego  $\dim_H(C_n) \leq n$ . Y como  $B \subseteq C_n$ , deducimos del apartado i) que  $\dim_H B \leq n$ .

Por otro lado,  $B$  es un conjunto de Borel, luego podemos relacionar su medida de Hausdorff con la de Lebesgue multiplicada por cierta constante  $c > 0$ ,

$$\mathcal{H}^n(B) = c \mathcal{L}^n(B).$$

Además, como  $B$  es abierto y contiene una bola  $n$ -dimensional, sabemos que  $\mathcal{L}^n(B) > 0$  (pues el volumen  $n$ -dimensional de una bola es positivo). De aquí, deducimos que  $\dim_H B \geq n$ .

iv) Sea  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$  una unión numerable de puntos  $B_i$ . Como cada punto puede recubrirse por él mismo, y puesto que su diámetro es 0, obtenemos que si  $s > 0$  entonces  $\mathcal{H}^s(B_i) = 0$ . Obsérvese que esto nos dice que  $\dim_H B_i = 0$ , para cada  $i$ .

Utilizando el apartado ii) tenemos que

$$\dim_H B = \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H B_i\} = \sup_{1 \leq i < \infty} \{0\} = 0.$$

■

**Proposición 4.3.2** Si  $B \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  cumple la condición de Hölder entonces

$$\dim_H f(B) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H B.$$

**Demostración 15** *En efecto, la Proposición 4.1.2 nos garantiza bajo las mismas hipótesis que*

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{c}}(f(B)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(B), \quad \forall c, \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

*Si tomamos un valor  $s > \dim_H B$  es evidente que  $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{c}}(f(B)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(B) = 0$ . De aquí deducimos que  $\dim_H f(B) \leq \frac{s}{\alpha}$ , para  $s > \dim_H B$ . En particular se obtiene lo que buscamos.*

■

**Corolario 4.3.3** *Dado  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,*

*i) Si  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lipschitziana, es decir, si existe  $c > 0$  tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in B,$$

*entonces  $\dim_H f(B) \leq \dim_H B$ .*

*ii) Si  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación bi-Lipschitz, esto es, si  $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$  tal que*

$$k_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq k_2 d(x, y), \quad \forall x, y \in B,$$

*entonces  $\dim_H f(B) = \dim_H B$ .*

**Demostración 16** *i) Basta con tomar  $\alpha = 1$  en la Proposición 4.3.2.*

*ii) La desigualdad  $\leq$  nos la garantiza el apartado anterior. Para la contraria, nótese que si  $f(x) = f(y)$  entonces  $x = y$  para aplicaciones bi-Lipschitz, luego  $f$  es inyectiva y podemos considerar la inversa sobre su imagen. Por tanto, intercambiando  $x$  e  $y$  por  $f^{-1}(x)$  y  $f^{-1}(y)$  respectivamente en la primera desigualdad, tenemos que*

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \frac{1}{k_1} d(x, y) \quad \forall x, y \in B.$$

*De este modo  $f^{-1}$  es lipschitziana, así que utilizando el apartado i),*

$$\dim_H f^{-1}(f(B)) \leq \dim_H f(B).$$

*Solamente se ha intercambiado  $B$  por  $f(B)$ , con lo que concluimos que  $\dim_H B \leq \dim_H f(B)$ . Y esto nos da la igualdad.*

■

El corolario precedente pone de manifiesto una propiedad muy importante de la geometría fractal, y es que la dimensión de Hausdorff es invariante bajo aplicaciones bi-Lipschitz. De forma equivalente, si existe una aplicación bi-Lipschitz entre dos conjuntos entonces éstos tienen la misma dimensión de Hausdorff.

En la práctica, es complicado calcular la dimensión de Hausdorff mediante algoritmos generales que se puedan implementar en un ordenador. Por esto, surge a principios del siglo XX la idea intuitiva de “contar cajas”.

# Capítulo 5

## Dimensión box-counting

Existen multitud de definiciones que se basan en este fundamento y se pueden aplicar a diferentes clases de conjuntos. No obstante, aunque la dimensión Box-Counting sea muy utilizada computacionalmente, no comparte todas las propiedades deseables que hemos atribuido a la dimensión de Hausdorff. Veremos estas limitaciones e implementaremos un algoritmo para calcular la dimensión box-counting de cualquier conjunto fractal, en especial, de conjuntos autosimilares.

### 5.1. Motivación

Sea  $B$  cualquier conjunto y  $\delta > 0$ . Denotemos por  $N_\delta(B)$  al menor número de conjuntos de diámetro como mucho  $\delta$  que cubran a  $B$ .

Con ello, la idea consistirá en obtener  $N_\delta(B)$  cuando  $\delta$  tienda a 0.

La relación que encontramos entre  $\delta$  y  $N_\delta(B)$  es fácilmente reconocible en casos sencillos, como por ejemplo, un segmento de longitud uno, donde  $N_\delta(B) = \frac{1}{\delta}$ , o también en un cuadrado unidad, para el que  $N_\delta(B) = \frac{1}{\delta^2}$ .

No obstante, en casos más generales, debemos agregar un valor  $k > 0$ , con el que

$$N_\delta(B) = k \frac{1}{\delta^s}.$$

Tomando logaritmos,

$$\log(N_\delta(B)) = s \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \log(k),$$

y dividiendo entre  $\log(\frac{1}{\delta})$ ,

$$\frac{\log(N_\delta(B))}{\log(\frac{1}{\delta})} = s + \frac{\log(k)}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Tomando finalmente límites, deducimos que

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(B))}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Este valor, si existe, recibe el nombre de *dimensión box-counting* de  $B$  y se denota por  $dim_b B$ .

Si por el contrario no existe tal límite,  $dim_b B$  se puede aproximar con los límites superior e inferior, esto es,

$$\overline{dim}_b B = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(B))}{\log(\frac{1}{\delta})} \quad y$$

$$\underline{dim}_b B = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(B))}{\log(\frac{1}{\delta})},$$

respectivamente. No obstante, esta definición es meramente formal. En la práctica, suelen estudiarse los fractales cuya dimensión box-counting existe explícitamente.

Por otro lado, podemos variar de forma conveniente la forma en la que tomamos  $N_\delta(B)$  como:

- i) Menor número de bolas de radio  $\delta$  que cubren a  $B$ .
- ii) Menor número de cubos de lado  $\delta$  que cubren a  $B$ .
- iii) Número de cubos en la malla de lado  $\delta$  que intersecan a  $B$ .
- iv) Mayor número de bolas disjuntas de radio  $\delta$  con centros en  $B$ .

La demostración de este resultado se puede encontrar en [3].

**Proposición 5.1.1** *La dimensión de box-counting, si existe, tiene las siguientes propiedades:*

- i) Si  $B_1 \subseteq B_2$  entonces  $dim_b B_1 \leq dim_b B_2$ .

ii)  $\dim_b B$  es finitamente estable, es decir,

$$\dim_b(B_1 \cup B_2) = \max\{\dim_b B_1, \dim_b B_2\}.$$

iii) Si  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lipschitziana entonces  $\dim_b f(B) \leq \dim_b B$ .

iv) Si  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación bi-Lipschitz entonces  $\dim_b f(B) = \dim_b B$ .

v) Si  $\bar{B}$  denota el cierre de  $B$ ,

$$\dim_b \bar{B} = \dim_b B.$$

**Demostración 17** i) Es evidente que  $N_\delta(B_1) \leq N_\delta(B_2)$  por la propia definición del operador  $N_\delta$ . Ahora bien, del hecho de que la función logaritmo es monótona creciente, deducimos que

$$\frac{\log(N_\delta(B_1))}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log(N_\delta(B_2))}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Obsérvese que al dividir entre  $\log(\frac{1}{\delta})$  podemos dividir entre un número negativo, no obstante, como solo nos interesan valores pequeños de  $\delta$ , se mantiene la desigualdad. Por tanto, en el límite cuando  $\delta$  tiende a 0 se obtiene la monotonía de la dimensión box-counting.

ii) En efecto, sabemos que tanto  $B_1$  como  $B_2$  están en la unión de ambos. Por tanto, basta con aplicar la monotonía de la dimensión box-counting para obtener que  $\max\{\dim_b B_1, \dim_b B_2\} \leq \dim_b(B_1 \cup B_2)$ . Por otro lado, tenemos que

$$N_\delta(B_1 \cup B_2) \leq N_\delta(B_1) + N_\delta(B_2) \leq 2 \max\{N_\delta(B_1), N_\delta(B_2)\}.$$

Tomando logaritmos,

$$\frac{\log(N_\delta(B_1 \cup B_2))}{\log(\frac{1}{\delta})} \leq \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{\delta})} + \frac{\log(\max\{N_\delta(B_1), N_\delta(B_2)\})}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo de un máximo es igual al máximo de los logaritmos, si hacemos que  $\delta$  tienda a 0 se obtiene  $\dim_b(B_1 \cup B_2) \leq \max\{\dim_b B_1, \dim_b B_2\}$ .

iii) Sea  $\{U_i\}_{i=1}^n$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $B$  de modo que  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$  y  $N_\delta(B) = n$ . Por tanto,  $f(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$ . Aplicando ahora que  $f$  es lipschitziana,  $\text{diam}(f(U_i)) \leq c\delta$ . Con lo que  $N_{c\delta}(f(B)) \leq n = N_\delta(B)$ . Desde aquí, basta con volver a tomar logaritmos y hacer el límite cuando  $\delta$  tiende a 0 para llegar al resultado.

- iv) Una desigualdad nos la garantiza el apartado precedente. La otra se razona del mismo modo que en el Corolario 4.3.3 ii).*
- v) Dado un conjunto  $B$ , es claro que por la monotonía de la dimensión box-counting  $\dim_b B \leq \dim_b \overline{B}$ . Por otro lado, supongamos que  $B$  puede ser recubierto por  $N_\delta(B)$  conjuntos de diámetro como mucho  $\delta$ . Por tanto, para recubrir a  $\overline{B}$  nos basta con los mismos conjuntos pero tomándolos cerrados. De este modo,  $N_\delta(\overline{B}) \leq N_\delta(B)$  y el resultado ya es evidente.*

■

Observamos que, como ocurría con la dimensión de Hausdorff, la dimensión box-counting también es invariante bajo aplicaciones bi-Lipschitz. Sin embargo, a continuación se observa una limitación importante:

Del apartado *iv)* de la proposición anterior se deduce que  $\dim_b(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$ , pues el cierre de este conjunto es todo el intervalo  $[0, 1]$  y  $\dim_b[0, 1] = 1$ .

No obstante, la dimensión box-counting de cada punto de  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  es 0, por lo que no es cierto en general que si  $\{B_i\}$  es una familia numerable de conjuntos entonces

$$\dim_b \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_b B_i\}.$$

De este modo, si consideramos conjuntos numerables es posible que su dimensión no sea nula. A pesar de ello, existen modificaciones de la dimensión box-counting que solventan este problema, pero teniendo en cuenta ciertas nociones de la dimensión de Hausdorff que vuelven a complicar su cálculo.

Es por ello que no vamos a entrar en detalle en tales redefiniciones. De hecho, el programa que desarrollamos a continuación tomará conjuntos finitos de puntos.

## 5.2. Programa para calcular la dimensión box-counting

La dimensión box-counting nos da la oportunidad de calcular computacionalmente una dimensión fractal de forma sencilla e intuitiva.

En nuestro caso, pretendemos crear un algoritmo que, dada una imagen de entrada, nos devuelva el valor de su dimensión box-counting. Y para ello,



utilizaremos la definición equivalente siguiente:  $N_\delta(B)$  será el número de cuadrados en la malla de lado  $\delta$  que intersecan a  $B$ .

Teóricamente, vimos en la sección anterior que

$$\log(N_\delta(B)) = s \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \log(k).$$

Obsérvese que se trata de la ecuación de una recta cuya pendiente,  $s$ , es la dimensión box-counting. Por tanto, si hacemos una representación a escala logarítmica ( $\log - \log$ ) para distintos valores de  $\delta$  obtendremos una serie de puntos con los que conseguir una recta de regresión.

La pendiente de la recta será una aproximación de la dimensión box-counting de la imagen.

Ahora bien, para evitar variar  $\delta$  aleatoriamente realizaremos subdivisiones iguales de la imagen como potencias de base dos, esto es, tomaremos que  $\delta = \frac{1}{2^n}$ . De esta manera, en la primera iteración la imagen se dividirá en 4 partes iguales, en la segunda tendremos 16, en la tercera 64, etcétera. Evidentemente este proceso es finito, y además, deberemos ajustar la imagen para que sus dimensiones sean potencias de base 2. Con esto nos garantizamos llegar en la última iteración al mínimo número de píxeles.

Téngase en cuenta que este reajuste no afecta a la dimensión box-counting de la imagen, dado que se trata de una aplicación afín bi-Lipschitz.

A continuación, mostramos el código de **dimensionBC.m**:

```

1      function []= dimensionBC(imagen)
2 % RECONOCIMIENTO DE IMAGEN
3      I=imread(imagen);
4      ImagenBinaria=im2bw(I);
5 % Para visualizar la imagen, imshow(ImagenBinaria)
6      [a1,b1]=size(ImagenBinaria);
7 % TRANSFORMACION AFIN AL NUEVO RECINTO
8      a2=2^(fix(log2(a1)));
9      b2=2^(fix(log2(b1)));
10     M=zeros(a2,b2);
11     for i=1:a1
12         for j=1:b1
13             if ImagenBinaria(i,j)==0
14                 x=i*(a2/a1);
15                 y=j*(b2/b1);
16                 M(round(x),round(y))=1;
17         end

```

```

18         end
19     end
20     %Ahora el valor 1 es negro y el 0 es blanco
21 %RECUENTO DE CAJAS
22     for n=1:log2(min(a2,b2))
23         I=2^(log2(a2)-n)*ones(1,2^n);
24         J=2^(log2(b2)-n)*ones(1,2^n);
25         Bloques = mat2cell(M,I,J);
26         vectorBloques=reshape(Bloques,1,numel(Bloques));
27         contador=0;
28         for i=1:numel(vectorBloques)
29             if isequal(vectorBloques{i},zeros(2^(
30                 log2(a2)-n),2^(log2(b2)-n))))==0;
31                 contador=contador+1;
32             end
33         end
34         nCajas(n)=contador;
35     end
36 %REPRESENTACION Y RECTA DE REGRESION
37     figure(1)
38     u=1:length(nCajas);
39     v=log2(nCajas);
40     plot(u,v,'*');
41     xlabel('n')
42     ylabel('Logaritmo en base 2 del numero de cajas para
43         cada n')
44     title('AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS')
45     %Recta de ajuste por minimos cuadrados
46     recta=polyfit(u,v,1);
47     %recta(1)=pendiente
48     %recta(2)=ordenada en el origen
49     r=corrcoef(u,v);
50     coefcorrelacion=r(2,1);
51     hold on
52     plot(u,recta(1)*u+recta(2),'r');
53     text(2,3,sprintf('Coeficiente = %f',coefcorrelacion))
54     dimensionBoxCounting=recta(1)

```

Analicemos el código:

1. **Reconocimiento de imagen.** Al principio, utilizamos **imread** para introducir la imagen como una matriz tridimensional con sus coordenadas de posición y su color en formato RGB. Posteriormente, con **im2bw** se obtiene la imagen en blanco y negro (matriz de unos y ceros donde uno es blanco y cero es negro). Para nosotros, el color no tendrá ningún papel en el cálculo de la dimensión.
2. **Transformación afín al nuevo recinto.** Definimos una matriz de ce-

ros con las dimensiones ya ajustadas (como potencia de base 2). Ahora, con la aplicación `afín`, desplazamos tan solo los puntos negros hasta su nueva posición en dicha matriz. En estas posiciones, su valor pasará a ser uno.

3. **Recuento de cajas.** Este apartado se basa en el uso de `mat2cell`. Este comando permite dividir una matriz en celdas de cualquier tamaño. Las definiciones de I y J se realizan convenientemente para que en cada iteración se divida cada bloque en 4 del mismo tamaño. Con `reshape` se colocan los bloques en un vector para acceder mejor a cada bloque y posteriormente se compara con matrices nulas de las mismas dimensiones para contar aquellas que no tengan ceros, es decir, que no estén vacías.
4. **Representación y recta de regresión.** Esta es la parte más sencilla. Dado el vector con el número de cajas con elementos en cada iteración ( $nCajas$ ), representamos  $n$  frente a  $\log_2(nCajas)$ . Finalmente, se obtiene la recta de regresión con `polyfit` y se toma su pendiente y su coeficiente de regresión.

Veamos un ejemplo. Para la Figura 1 (alfombra de Sierpinski) se genera la siguiente gráfica:

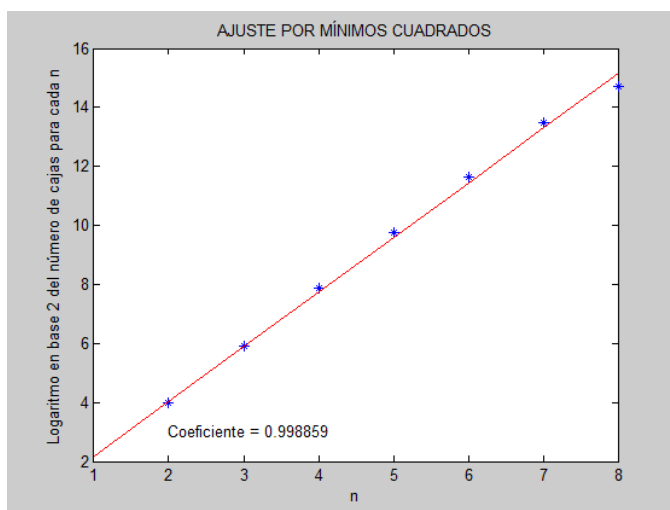


Figura 5.1: Recta de regresión para la alfombra de Sierpinski cuya pendiente es igual a 1,8512.

Dado que la dimensión real de este conjunto es  $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,8928$  y el coeficiente de correlación es cercano a 1, la aproximación es bastante buena (error

de  $|1,8512 - 1,8928| = 0,04$ ). No cabe duda de que si con el programa **di-buja.m** hiciéramos más iteraciones de la alfombra, este valor debe tender al real. Aún así, si observamos con más detalle la gráfica anterior, vemos como el último valor empeora la aproximación. Esto se debe a que ampliamos demasiado el conjunto y desde tan cerca se pierde su comportamiento autosimilar (recuérdese que los conjuntos que generamos son finitos).

Por tanto, veamos que ocurre si representamos la gráfica sin el último valor (basta con ejecutar el programa con `nCajas(end)=[];`)

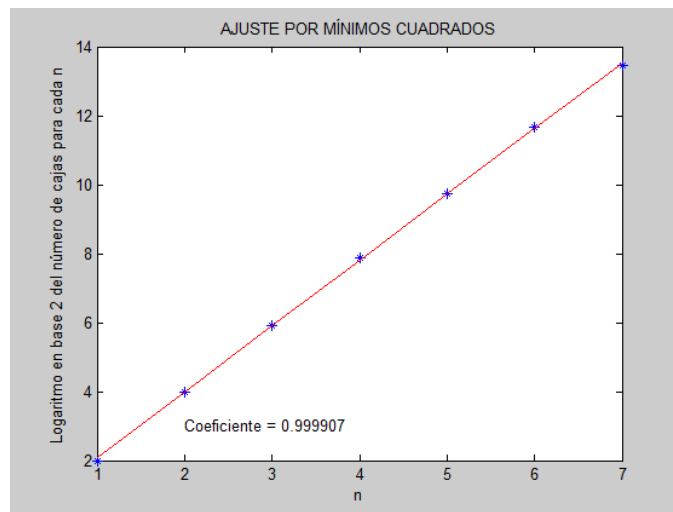


Figura 5.2: Recta de regresión sin el último valor, la pendiente ahora es 1,912.

En esta ocasión la aproximación es obviamente mejor. El coeficiente de correlación es más próximo a 1 y el error se reduce a  $|1,912 - 1,8928| = 0,019$ .

# Capítulo 6

## Dimensión de conjuntos autosimilares

En esta sección reuniremos los conocimientos adquiridos anteriormente para demostrar un resultado esencial y muy práctico que relaciona la dimensión de Hausdorff y la de box-counting para conjuntos autosimilares: el teorema de Moran (1946).

Este resultado consigue caracterizar la dimensión de estos fractales a partir de sus factores de contracción.

### 6.1. Teorema de Moran

La Sección 2.2 nos decía que un conjunto autosimilar  $K$  es aquel tal que

$$K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K),$$

donde las aplicaciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son similaridades, es decir,

$$d(f_i(x), f_i(y)) = c_i d(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Utilizando el Lema 4.1.1 y que los  $f_i(K)$  no se solapan “demasiado”, tendríamos que

$$\mathcal{H}^s(K) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(f_i(K)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(K),$$

téngase en cuenta que  $\mathcal{H}^s$  es una medida. Con lo cual,

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Observemos que este razonamiento es válido cuando  $\mathcal{H}^s(K)$  sea finito, en cuyo caso,  $s = \dim_H K$ .

Ahora bien, con el teorema de Moran podemos formalizar el hecho de que las  $f_i(K)$  no se superpongan en exceso. Para ello, ha de existir un conjunto abierto no vacío y acotado  $V$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(V) \subset V,$$

con la unión disjunta. Esta propiedad recibe el nombre de *condición de conjunto abierto*.

Los próximos resultados preparan el terreno para demostrar el teorema de Moran. El primero de ellos, es un resultado puramente geométrico.

**Lema 6.1.1** *Sea  $\{V_i\}$  una familia de abiertos disjuntos de  $\mathbb{R}^n$  de modo que cada  $V_i$  contiene una bola de radio  $\alpha r$  y está contenida en otra bola de radio  $\beta r$ . Entonces, toda bola  $B$  de radio  $r$  corta como mucho a  $(1 + 2\beta)^n \alpha^{-n}$  cierres  $\overline{V}_i$ .*

**Demostración 18** *Es evidente que puede ocurrir que  $B$  no interseque a ningún  $\overline{V}_i$ , pero como lo que buscamos es una cota superior, supongamos que existe algún  $i$  para el cual  $B \cap \overline{V}_i \neq \emptyset$ . De este modo, como cada  $V_i$  está contenido en una bola de radio  $\beta r$ , existirá algún punto de  $B$  para el cual  $\overline{V}_i$  está contenido en una bola con centro en dicho punto y radio  $(1 + 2\beta)r$ . Ahora bien, si hay  $u$  cierres  $\overline{V}_i$  que cortan a  $B$  podemos considerar el volumen de las bolas de radio  $\alpha r$  para llegar a que*

$$u(\alpha r)^n \leq (1 + 2\beta)^n r^n.$$

Por tanto,  $u \leq (1 + 2\beta)^n \alpha^{-n}$ . ■

**Proposición 6.1.2** *Dado cualquier subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ ,*

$$\dim_H K \leq \underline{\dim}_b K.$$

**Demostración 19** *Sea  $U_1, \dots, U_n$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $K$  con  $N_\delta(K) = n$ . De aquí,  $\mathcal{H}_\delta^s(K) \leq \sum_{i=1}^n \text{diam}(U_i)^s \leq \sum_{i=1}^n \delta^s = \delta^s N_\delta(K)$ .*

*Queremos comparar la dimensión de Hausdorff con la dimensión inferior de box-counting, luego existe una subsucesión  $\delta_n$  de tal modo que  $\frac{\log N_{\delta_n}(K)}{-\log \delta_n}$*

converge a  $\underline{\dim}_b K$ . De este modo, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un natural  $n$  a partir del cual

$$\left| \frac{\log N_{\delta_n}(K)}{-\log \delta_n} - \underline{\dim}_b K \right| < \varepsilon.$$

De forma equivalente,  $\underline{\dim}_b K - \varepsilon < \frac{\log N_{\delta_n}(K)}{-\log \delta_n} < \underline{\dim}_b K + \varepsilon$ . Y realizando algunos cálculos sencillos llegamos a

$$\frac{1}{\delta_n^{\underline{\dim}_b K - \varepsilon}} < N_{\delta_n}(K) < \frac{1}{\delta_n^{\underline{\dim}_b K + \varepsilon}}.$$

Ahora bien, si  $s > \underline{\dim}_b K$  y tomamos que  $\underline{\dim}_b K + \varepsilon < s$  deducimos que

$$\mathcal{H}_{\delta_n}^s(K) \leq \delta_n^s \frac{1}{\delta_n^{\underline{\dim}_b K + \varepsilon}} = \delta_n^{s - \underline{\dim}_b K - \varepsilon}.$$

En el límite cuando  $\delta_n$  tiende a 0, para todo  $s$  mayor que la dimensión box-counting  $\mathcal{H}^s(K) = 0$ . Por tanto,  $\dim_H K \leq \underline{\dim}_b K$ , y en el caso de que exista dicha dimensión,  $\dim_H K \leq \underline{\dim}_b K$ . ■

Para el siguiente resultado debemos tener en cuenta que una medida  $\mu$  de cualquier subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  donde  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  recibe el nombre de *distribución de masa*, y pensaremos en  $\mu(A)$  como la masa del conjunto  $A$ .

**Teorema 6.1.3** *Sea  $\mu$  una distribución de masa en  $K$  y  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $K$ .*

*Si existe un  $s$  tal que  $\mu(U_i) \leq c \text{diam}(U_i)^s$  para cada  $i$  (con  $c > 0$ ), entonces*

$$\mathcal{H}^s(K) \geq \mu(K)/c \quad \text{y} \quad s \leq \dim_H K \leq \underline{\dim}_b K \leq \overline{\dim}_b K.$$

**Demostración 20** *Dada una distribución de masa  $\mu$ , tenemos que por ser una medida*

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s,$$

para todo  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $K$ . En particular, se cumple para el ínfimo  $\mathcal{H}_\delta^s(K)$ . Así, en el límite cuando  $\delta$  tiende a 0,

$$0 < \mu(K) \leq c \mathcal{H}^s(K).$$

La cadena de desigualdades ya es evidente utilizando la Proposición 6.1.2.



Procedemos ya a enunciar y demostrar el teorema de Moran, por el cual, se podrá calcular la dimensión de conjuntos autosimilares de forma rápida y sencilla.

**Teorema 6.1.4** (de Moran) Sean  $f_1, \dots, f_m$  similaridades sobre  $\mathbb{R}^n$  con factores de contracción  $c_1, \dots, c_m$  y cumpliendo la condición de conjunto abierto. Entonces, si  $K$  es el conjunto invariante y tal que  $K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K)$ , entonces

$$\dim_H K = \dim_b K = s,$$

donde  $s$  es la solución de  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ . Además, para dicho valor de  $s$   $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ .

**Demostración 21** Sea  $s$  cumpliendo que  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ . Encontremos una cota superior para la medida de Hausdorff.

En primer lugar, dado un conjunto  $B$ , denotamos a  $B_{i_1, \dots, i_k}$  como la composición  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(B)$  de las similaridades hasta el nivel (o iteración)  $k$ . Para simplificar, denotamos por  $J_k$  a las secuencias  $(i_1, \dots, i_k)$  con  $1 \leq i_j \leq m$ . Como  $K$  es invariante bajo la acción de las similaridades, se tiene que

$$K = \bigcup_{J_k} K_{i_1, \dots, i_k}.$$

La similaridad dada por la composición  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$  tiene por factor de contracción al producto  $c_{i_1} \dots c_{i_k}$  con lo que

$$\begin{aligned} \sum_{J_k} \text{diam}(K_{i_1, \dots, i_k})^s &= \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k}) \text{diam}(K)^s = \\ &= \left( \sum_{i_1} c_{i_1}^s \right) \dots \left( \sum_{i_k} c_{i_k}^s \right) \text{diam}(K)^s = \text{diam}(K)^s, \end{aligned}$$

pues  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ . Ahora, dado  $\delta > 0$ , tomemos un nivel  $k$  de modo que

$$\text{diam}(K_{i_1, \dots, i_k})^s \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta,$$



esto significa que hacemos tantas iteraciones hasta que el diámetro del conjunto resultante elevado a  $s$  no sobrepase a  $\delta$ . Entonces ya tenemos un recubrimiento de diámetro menor que  $\delta$ , por lo que  $\mathcal{H}_\delta^s(K) \leq \text{diam}(K)^s$  y en el límite  $\mathcal{H}^s(K) \leq \text{diam}(K)^s < \infty$ .

Una vez que sabemos que la medida de Hausdorff es finita, probemos que es no nula.

Por el teorema del encaje de Cantor en  $\mathbb{R}^n$  (que es completo), tomando una sucesión de cerrados encajados de forma que los diámetros converja a 0, la intersección es un punto. Con este fin, podemos tomar las combinaciones infinitas de índices  $I = \{(i_1, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ . Además, definimos  $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, t_{k+1}, \dots) : 1 \leq t_j \leq m\}$  como las sucesiones infinitas que coinciden hasta el término  $i_k$ . Para hacernos una idea, se trata de ver cada punto del conjunto como el límite de una sucesión infinita (no tiene por qué ser única) de modo que en cada nivel reducimos el diámetro hasta hacerlo tender a 0. Y es que existe una equivalencia sobreyectiva entre  $I$  y  $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1, \dots, i_n}$ . De este modo, si por ejemplo estamos en el triángulo de Sierpinski estas sucesiones nos llevan en cada nivel  $k$  a triángulos de diámetro  $\frac{1}{2^k}$ .

Ahora, vamos a construir una distribución de masa en  $I$  que nos ayudará a dar una cota inferior de la medida de Hausdorff. En efecto, sea  $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ . Observemos que esto se asemeja mucho a una probabilidad. Por ejemplo, en la primera iteración del triángulo de Sierpinski tenemos que la probabilidad de tomar cada triángulo es  $\mu(I_{i_1}) = (\frac{1}{2})^s = \frac{1}{3}$ , en la siguiente  $\mu(I_{i_1, i_2}) = (\frac{1}{4})^s = \frac{1}{9}$ , y así sucesivamente. En este caso son equiprobables, algo que no ocurre en general.

Un hecho importante en la definición de  $\mu$  es que

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i}),$$

y esto se debe a que  $\sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \sum_{i=1}^m c_i^s = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$ . Por esto llegamos a que  $\mu(I) = 1$ , algo evidente en el caso de probabilidades y que nos dice que la masa de  $I$  es finita.

Una vez vista la definición de  $\mu$  en dicho conjunto, vamos a extenderla a una distribución de masa  $\bar{\mu}$  en  $K$  de forma natural de la siguiente manera: dado  $A$  cualquier subconjunto de  $K$  definimos

$$\bar{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{i_1, \dots, i_j}) : A \cap K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i_1, \dots, i_j} \right\}.$$

Si  $A = K$ , es evidente que  $\bar{\mu}(K) = \mu(I) = 1$ .

Veamos si se cumplen las hipótesis del Teorema 6.1.3.

Sea  $V$  cumpliendo la condición de conjunto abierto. Entonces,  $f_i(V) \subseteq V$  y  $f_i(\bar{V}) \subseteq \overline{f_i(V)} \subseteq \bar{V}$  por ser cada  $f_i$  continua. Con esto, si  $f$  es el operador

de Hutchinson tenemos que  $\bigcup_{i=1}^m f_i(\bar{V}) = f(\bar{V}) \subset \bar{V}$ , que es compacto por ser cerrado y acotado. Por tanto,  $f^k(\bar{V})$  converge a  $K$ .

Como  $K \subset \bar{V}$  se tiene que  $K_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$  para cada sucesión  $(i_1, \dots, i_k)$ . Tomemos  $B$  cualquier bola de radio  $r < 1$ . Vamos a calcular  $\bar{\mu}(B)$  considerando los conjuntos  $V_{i_1, \dots, i_k}$ . Para ello, buscaremos un valor de  $k$  para que los diámetros de estos conjuntos sean comparables con el de  $B$  y sus cierres intersequen a  $K \cap B$ .

Para cada sucesión (infinita) de  $I$  nos quedamos con el primer valor de  $k$  tal que

$$c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r,$$

y sea  $\mathcal{Q}$  el conjunto formado por todas las sucesiones finitas obtenidas de esa manera. Nótese que de aquí se obtiene que  $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{k-1}} > r$ , y por consiguiente,  $(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_{k-1}}) c_k > r$   $c_k \geq (\min_i c_i) r$ .

Para cada sucesión infinita  $(i_1, i_2, \dots)$  existirá un valor  $k$  tal que

$$(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}.$$

Como  $V_1, \dots, V_m$  son disjuntos, también lo son  $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$  para cada  $(i_1, \dots, i_k)$ . Por tanto, utilizando este hecho de forma anidada, tenemos que la familia  $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$  es disjunta. Además,  $K \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} K_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ .

Sean ahora  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $V$  contiene una bola de radio  $\alpha$  y está contenido al mismo tiempo en una bola de radio  $\beta$ . Entonces, por lo que hemos visto,  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contiene una bola de radio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} \alpha$  y por tanto una de radio  $(\min_i c_i) \alpha r$ , además de estar contenido en una bola de radio  $c_{i_1} \dots c_{i_k} \beta$  y con ello en una bola de radio  $\beta r$ .

Denotaremos por  $\mathcal{Q}_1$  a las sucesiones infinitas de  $\mathcal{Q}$  para las que  $B$  corta a  $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ . Utilizando el Lema 6.1.1 hay como mucho  $u = (1+2\beta)^n \alpha^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$  sucesiones en  $\mathcal{Q}_1$ . De este modo,

$$\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(K \cap B) \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{\mathcal{Q}_1} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \leq r^s u,$$

puesto que tenemos que  $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r$  para los elementos de  $\mathcal{Q}_1$  por construcción.

Como todo conjunto  $U$  está contenido en una bola de radio  $\text{diam}(U)$ , lo anterior nos garantiza que  $\bar{\mu}(U) \leq \text{diam}(U)^s u$  y con esto hemos probado que

se cumplen las hipótesis del Teorema 6.1.3.

Si lo aplicamos, tenemos que  $\mathcal{H}^s(K) \geq u^{-1} > 0$ . Así que sabemos que la dimensión de Hausdorff de  $K$  es no nula y finita (por lo probado anteriormente), luego  $\dim_H K = s$ .

Dado que  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ , por inducción se llega a que  $\sum_{\mathcal{Q}} (c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})^s = 1$ . Además, si tomamos  $\mathcal{Q}$  de modo que  $(\min_i c_i) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} \leq r$ , llegamos a que  $\sum_{\mathcal{Q}} (\min_i c_i)^s r^s \leq 1$  y deducimos que  $\mathcal{Q}$  contiene como mucho  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  sucesiones, para las cuales  $\text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}) = c_{i_1} \dots c_{i_k} \text{diam}(\bar{V}) \leq r \text{diam}(\bar{V})$ .

Con todo esto, para cada  $r < 1$  tenemos que  $K$  puede ser cubierto por  $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$  conjuntos con diámetro menor o igual que  $r \text{diam}(\bar{V})$ , con lo que

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_b K &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(K)}{-\log \delta} \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log((\min_i c_i)^{-s} r^{-s})}{-\log(r \text{diam}(\bar{V}))} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s(-\log(\min_i c_i) - \log r)}{-\log r - \log \text{diam}(\bar{V})} \\ &= s. \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.1.3 llegamos finalmente a que  $s = \dim_H K \leq \overline{\dim}_b K \leq \underline{\dim}_b K \leq s$ , con lo que queda demostrado el resultado. ■

La condición de conjunto abierto utilizada en la demostración nos garantiza que las dimensiones son iguales a dicho valor de  $s$ . No obstante, se puede demostrar que sin tener en cuenta esta propiedad  $\dim_H K = \dim_b K \leq s$ .

Este teorema es una herramienta muy útil para calcular la dimensión de conjuntos autosimilares.

## 6.2. Ejemplos de cálculo

**Ejemplo 1** Sean  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $i = 1, 2, 3$  tres similaridades tales que  $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ ,  $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}, 0) + f_1(x, y)$  y  $f_3(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + f_1(x, y)$ . En efecto, se trata del triángulo de Sierpinski, el cual generamos con el programa de la sección 3.1.

En la iteración inicial comenzamos con un triángulo equilátero. Posteriormente, dividimos este triángulo en cuatro triángulos iguales y retiramos el

del interior, y así sucesivamente. Como se suele utilizar en gran parte de conjuntos, tomaremos como  $V$  el interior de la primera iteración, con lo que se satisface la condición de conjunto abierto. Así pues, tenemos que  $\sum_{i=1}^3 (c_i)^s = \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$ , por el Teorema de Moran. Resolviendo esta ecuación obtenemos  $s = \frac{\log 3}{\log 2}$ .

En el caso donde los factores de contracción sean iguales (como lo son los más famosos), es decir,  $c_i = c$  para todo  $i$ , el valor de  $s$  resulta de

$$\sum_{i=1}^m (c_i)^s = m c^s = 1.$$

Despejando se tiene que  $s = -\frac{\log m}{\log c}$ , donde  $m$  es el número de similaridades.

Así, en la alfombra de Sierpinski  $s = -\frac{\log 8}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 8}{\log 3}$ . O también, para la esponja de Menger  $s = -\frac{\log 20}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 20}{\log 3}$ .

**Ejemplo 2** Consideremos ahora el helecho de la Figura 7. En este caso los factores (homotecias) no son iguales. Además, no parece tan sencillo obtener un  $V$  con el que conseguir la condición de conjunto abierto (pues no nos basta con el interior de la primera iteración). En la siguiente imagen vemos como obtener  $V$  gráficamente como la envolvente convexa de todos los puntos del conjunto. Del mismo modo se puede obtener un recubrimiento de  $f_1(V)$ ,  $f_2(V)$  y  $f_3(V)$ .

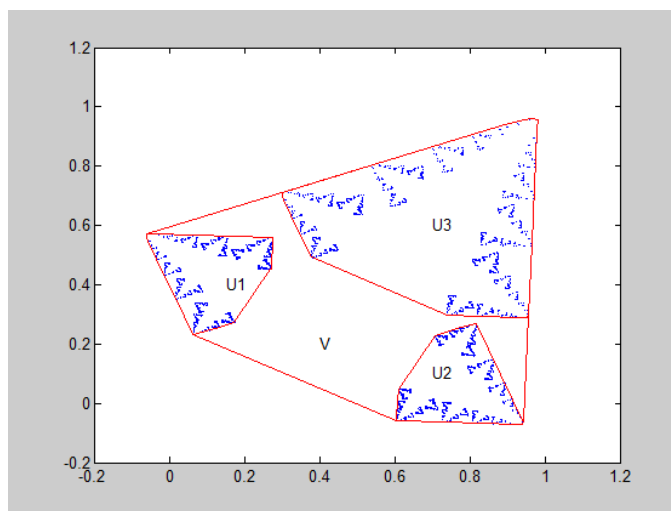


Figura 6.1: Obtención gráfica de  $V$  y de las  $f_i(V) = U_1, U_2, U_3$  con  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente.

Como  $f_1(V) \cup f_2(V) \cup f_3(V) \subseteq V$  y las  $f_i(V)$  son disjuntas dos a dos, podemos garantizar que el helecho cumple la condición de conjunto abierto para el  $V$  elegido.

Con lo cual, aplicando el teorema de Moran

$$\sum_{i=1}^3 (c_i)^s = \left(\frac{2}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Lo que nos da la aproximación  $s = 1,395$ .

Dado que este valor coincide con las dimensiones de Hausdorff y box-counting, podemos comparar este resultado con el del algoritmo desarrollado en la sección 5.2 para la Figura 7, donde la dimensión alcanza un valor aproximado de 1,345.



# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se han puesto en práctica los conocimientos adquiridos en geometría, topología, análisis matemático, teoría de la medida y programación vistos en el grado para aplicarlos en la construcción de conjuntos autosimilares y en el cálculo de la dimensión fractal tanto teórica como computacionalmente.

Estos conjuntos son un caso particular de fractales que han surgido al aplicar el Teorema del punto fijo de Banach al hiperespacio de cualquier espacio métrico. Para esto, ha sido esencial probar que dicho hiperespacio es completo (Teorema de Zenor-Morita).

Como aplicación de los resultados teóricos expuestos, hemos implementado un algoritmo en *Matlab* para dibujar conjuntos autosimilares como la alfombra y la pirámide de Sierpinski.

Por otro lado, se ha estudiado la teoría de dimensión fractal, en particular, las dimensiones de Hausdorff y box-counting. Además, se ha realizado otro programa para calcular la dimensión box-counting de un subconjunto del plano (imagen). En concreto, se han introducido imágenes de los conjuntos autosimilares generados con el programa inicial comparando los resultados obtenidos con los reales.

Aunque en general las dimensiones de Hausdorff y box-counting no tienen por qué coincidir, si ocurre esto cuando nos referimos a conjuntos autosimilares estrictos (cumpliendo la condición de conjunto abierto), hecho que nos ha sido garantizado por el Teorema de Moran. Este resultado, con el que hemos calculado la dimensión de algunos ejemplos, prepara el terreno para continuar investigando en el campo de la dimensión fractal, sus relaciones con la topología y su extensión a espacios fractales generalizados.

## Bibliografía

- [1] C.L. ALADOS, Y. PUEYO, M.L. GINER, T. NAVARRO, J. ESCOS, F. BARROSO, B. CABEZUDO, J.M. EMLLEN, *Quantitative characterization of the regressive ecological succession by fractal analysis of plant spatial patterns*, Ecological Modelling 163 (2003), pp. 1-17.
- [2] G.A. EDGAR, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] K. FALCONER, *Fractal Geometry*, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990.
- [4] J. HUTCHINSON, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. J. Math. 30 (1981), pp. 713-747.
- [5] E. LINÉS, *Principios de Análisis Matemático*, Reverté, Madrid, 1988.
- [6] B.B. MANDELBROT, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, San Francisco: W. H. Freeman & Co, 1982
- [7] N.A. SECELEAN, *Countable Iterated Function Systems*, LAP Lambert Academic Publishing, 2013.
- [8] [http://www.fisicanet.com.ar/matematica/limites/ap10\\_limites.php](http://www.fisicanet.com.ar/matematica/limites/ap10_limites.php)
- [9] <http://www.mathworks.es/es/help/>