MÁSTER DE MATEMÁTICAS

Aplicaciones lineales que preservan la inversibilidad generalizada entre álgebras de Banach semisimples

Antonio Carlos Márquez García

Almería, 23 de junio 2011

Trabajo de investigación y Fin de Máster realizado en el Área de Análisis Matemático de la Universidad de Almería, bajo la dirección de los profesores D. Amin Kaidi Lhachmi y D. Antonio Morales Campoy, para la obtención del título de Máster Interuniversitario en Matemáticas por la Universidad de Almería.

V° B° de los Directores

Fdo: Amin Kaidi Lhachmi

Fdo: Antonio Morales Campoy

El aspirante

Fdo: Antonio Carlos Márquez García

Agradecimientos

A mi familia y amigos. A mi pareja. A todos los que me han hecho ser quien soy.

A los profesores Amin Kaidi Lhachmi, Antonio Morales Campoy y María Burgos Navarro, sin cuyo apoyo este trabajo no habría sido posible.

Índice general

Introducción

El estudio de los llamados *problemas de invariantes lineales* consiste en caracterizar las aplicaciones lineales entre álgebras de Banach que preservan cierta propiedad de los elementos de dicha álgebra. Veamos un ejemplo: consideremos el álgebra de las matrices cuadradas complejas de orden n, $M_n(\mathbb{C})$. Sean M y N dos matrices tales que $det(MN) = 1$ y sea $\phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ definida por

$$\phi(A) = MAN, \qquad \text{para toda } A \in M_n(\mathbb{C})$$

o bien

$$\phi(A) = MA^tN, \qquad \text{para toda } A \in M_n(\mathbb{C})$$

Es inmediato que toda aplicación de este tipo es lineal y que $det(\phi(A)) = det(A)$ para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$, es decir, es una *aplicación lineal que preserva el determinante* de las matrices. Esta afirmación plantea de manera natural la siguiente pregunta: "¿son éstas todas las aplicaciones lineales que preservan el determinante?". La respuesta es positiva y fue dada por Frobenius, ([20]).

En lo que sigue y salvo que se especifique otra cosa, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serán álgebras de Banach complejas, mientras que $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ será una aplicación lineal entre ambas. En general, los problemas de invariantes lineales se pueden presentar de tres formas:

- Dada una función F sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, determinar las aplicaciones lineales tales que T tales que $F(T(a)) = F(a)$. El caso del determinante que vimos más arriba se corresponde con esta categoría. Algunos ejemplos en álgebras de Banach más generales son el rango numérico, el radio espectral y el ascenso y descenso en operadores.

- Dado un subconjunto $S \subset \mathcal{A}$, determinar las aplicaciones lineales que dejan invariante ese conjunto, es decir, aquellas tales que $T(S) \subset S'$, siendo S' el subconjunto "similar" en el álgebra de llegada $\mathcal{B}$. Por ejemplo, podemos considerar aplicaciones que preservan los elementos inversibles, los operadores inyectivos o sobreyectivos, los idempotentes, etc. Cabe destacar que el problema también puede ser planteado con la condición $T(S) = S'$.

- Dada una relación $\sim$, estudiar las aplicaciones que preservan la relación $\sim$, es decir, aquellas que cumplen que $T(a) \sim T(b)$ siempre que $a \sim b$. Ejemplos son los invariantes de la conmutatividad, ortogonalidad, producto cero, etc. Cuando tenemos la condición $T(a) \sim T(b)$ si, y solamente si, $a \sim b$ se dice que T preserva $\sim$ en ambas direcciones.

Para obtener una visión general más amplia sobre los problemas de invariantes lineales véanse [33] y [37]. En este trabajo nos centraremos en los problemas en los que el invariante es algún tipo de inverso generalizado. Empezaremos esta memoria dando los preliminares y los antecedentes existentes en esta línea de investigación para, posteriormente, incluir las aportaciones que hemos realizado en este tema en colaboración con la profesora María Burgos Navarro de la Universidad de Granada.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección se presentarán algunos conceptos a los que se hará referencia a partir de ahora, así como el célebre teorema de Hua y la conjetura de Kaplansky, objetivo fundamental de muchas líneas de investigación actuales.

1.1. Álgebras de Banach

En primer lugar, definiremos la estructura básica con la que trabajaremos a partir de ahora: el *álgebra de Banach*.

Definición 1.1.1 *Dada un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, diremos que es un álgebra normada si posee una norma $\|\cdot\|$ compatible con el producto de la siguiente manera*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \text{para todo } a, b \in \mathcal{A}$$

Si un álgebra normada, con la distancia que genera la norma, es completa, se dirá que es un ***álgebra de Banach****. Diremos que el álgebra es* ***unital*** *si posee unidad para el producto.*

A lo largo de toda esta memoria las álgebras de Banach utilizadas serán complejas. Una aplicación T es *aditiva* si $T(a + b) = T(a) + T(b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$. Nótese que toda aplicación lineal es aditiva y que toda aplicación aditiva es $\mathbb{Q}$-lineal. Este último hecho se usará en varias ocasiones, tanto en nuestras aportaciones como en sus precedentes. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son unitales y $T(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, T se dice *unital*. Cuando no haya confusión, se denotará por 1 indistintamente a las unidades de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Pasamos a definir los llamados *homomorfismos de Jordan.*

Definición 1.1.2 *Una aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ aditiva es un* ***homomorfismo de Jordan*** *si $T(ab + ba) = T(a)T(b) + T(b)T(a)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$. En particular, si T es biyectiva, se dice que es un* ***isomorfismo de Jordan****.*

El nombre "homomorfismo de Jordan" viene de que estas aplicaciones preservan el llamado *producto de Jordan* $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Este concepto será de vital importancia durante todo el trabajo, ya que a menudo las tesis obtenidas involucrarán este tipo de aplicaciones. Algunas de las propiedades de los homomorfismos de Jordan son las siguientes:

Lema 1.1.3 ([39], Lema 6.3.2) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach y $T : \mathcal{A} \longrightarrow B$ un homomorfismo de Jordan. Entonces se tiene:*

1. *$T(a^2) = T(a)^2$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

2. *$T(a^n) = T(a)^n$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{A}$.*

3. *$T(aba) = T(a)T(b)T(a)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.*

Las dos primeras condiciones son suficientes y la última sólo necesaria.

Proposición 1.1.4 ([41], Proposición 1.3) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitales y $T : \mathcal{A} \in \mathcal{B}$ un homomorfismo de Jordan tal que $1 \in T(\mathcal{A})$. Entonces $T(a^{-1}) = T(a)^{-1}$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

Un elemento e de un álgebra de Banach se dice *idempotente* si $e^2 = e$. A continuación se muestra el comportamiento de los homomorfismos de Jordan con los elementos idempotentes:

Lema 1.1.5 ([39], Lema 6.3.3) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un homomorfismo de Jordan. Si $e \in \mathcal{A}$ es un idempotente y $a \in \mathcal{A}$ es un elemento cualquiera, entonces:*

1. *$T(e)$ es idempotente.*

2. *$ae = ea$ implica $T(e)T(a) = T(a)T(e) = T(ae)$*

3. *$ae = ea = a$ implica $T(e)T(a) = T(a)T(e) = T(a)$*

4. *$ae = ea = 0$ implica $T(e)T(a) = T(a)T(e) = 0$*

En particular, $T(1)$ actúa como unidad en la subálgebra generada por $T(\mathcal{A})$. Si $1 \in T(\mathcal{A})$, entonces T es unital.

Por último, diremos que una aplicación lineal (o aditiva) T entre álgebras de Banach es un *homomorfismo* (respectivamente, *anti-homomorfismo*) cuando cumple $T(ab) = T(a)T(b)$ (respectivamente $T(ab) = T(b)T(a)$), para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$. Es inmediato que los homomorfismos y anti-homomorfismos son, en particular, homomorfismos de Jordan. Recordemos que un álgebra de Banach se dice *prima* si $a\mathcal{A}b = \{0\}$ implica $a = 0$ ó $b = 0$. Si T es un homomorfismo de Jordan sobreyectivo y el álgebra de llegada es prima, T debe ser un homomorfismo o un anti-homomorfismo (véase [23]).

1.2. Inversibilidad generalizada en álgebras de Banach

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Como es usual, diremos que $a \in \mathcal{A}$ es *inversible* si existe $b \in \mathcal{A}$ de manera que $ab = ba = 1$. El inverso de un elemento, en caso de existir, es único. Denotaremos al conjunto de todos los elementos inversibles como $\mathcal{A}^{-1}$. Una importante propiedad de este conjunto es que es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$.

Proposición 1.2.1 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}^{-1}$. Si $\|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ entonces $b \in \mathcal{A}^{-1}$.*

Dado un elemento $a \in \mathcal{A}$, se le puede asociar un subconjunto de $\mathbb{C}$ llamado *espectro* de la siguiente manera:

$$sp(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \notin \mathcal{A}^{-1}\}.$$

El espectro de un elemento es siempre no vacío y compacto. Para más propiedades sobre el espectro y los elementos inversibles véase [2].

Uno de los principales problemas de trabajar con elementos inversibles es que, por su definición, es necesaria la presencia de unidad. A continuación, presentaremos los conceptos de *inversibilidad generalizada*, *inversibilidad Drazin* e *inversibilidad de grupo*, que permiten trabajar en entornos más generales.

Definición 1.2.2 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$. Se dice que b es un* ***inverso generalizado*** *de a si cumple las condiciones:*

$$aba = a \qquad y \qquad bab = b \tag{1.1}$$

A un elemento que tiene inverso generalizado se le llama *von Neumann regular* o simplemente *regular*. Nótese que el hecho de que exista b tal que $aba = a$ es suficiente para que exista inverso generalizado, ya que $b' = bab$ cumple (1.1). Nótese también que, al contrario que el inverso usual, el inverso generalizado no es único en general. De hecho, si $aba = a$, entonces todo elemento de la forma $(b - x + baxab)a(b - x + baxab)$ es un inverso generalizado de a. El conjunto de todos los elementos con inverso generalizado será denotado por $A^{\wedge}$.

Definición 1.2.3 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$. Se dice que b es un* ***inverso Drazin*** *de a si cumple las condiciones:*

$$bab = b, \qquad ab = ba \qquad y \qquad a^k ba = a^k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Esta definición fue introducida por Drazin ([17]) en 1958 y ha resultado ser muy útil en diversos campos, como teoría de matrices, ecuaciones en derivadas parciales, cadenas de Markov, criptografía, métodos iterativos y sistemas dinámicos (véanse [4], [15], [38], [42]). A diferencia del inverso generalizado, el inverso Drazin es único en caso de existir. La unicidad nos permite utilizar la notación $b = a^D$. Sin embargo, este tipo de inverso no es reflexivo en general, es decir, que si b es el inverso Drazin de a, a no tiene por qué ser el inverso Drazin de b. Denotaremos al conjunto de todos los elementos de inversibles Drazin como $\mathcal{A}^D$.

Definición 1.2.4 *Dado $a \in \mathcal{A}$, si existe b que satisface (1.2) para $k = 1$, b se conoce como **inverso de grupo** de a.*

Denotaremos al inverso de grupo de a como $a^\sharp$ y al conjunto de elementos inversibles de grupo por $\mathcal{A}^\sharp$. Obviamente, todo inversible de grupo es invesible Drazin, pero el recíproco no es cierto. De hecho, si antes nos referíamos a la no reflexividad del inverso de Drazin, es obvio que el inverso de grupo es reflexivo. De hecho, Drazin nos mostró en [17] que los únicos inversibles Drazin para los que esta relación es reflexiva son los inversibles de grupo.

Lema 1.2.5 *Sea $a \in \mathcal{A}^D$. Entonces a^D también lo es, con $(a^D)^D = a^2a^D$. En particular, a tiene inverso de grupo si, y solamente si, $a = (a^D)^D$.*

Recordemos que un elemento $a \in \mathcal{A}$ se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k = 0$. Denotaremos el conjunto de los elementos nilpotentes de $\mathcal{A}$ como $N(\mathcal{A})$. Claramente, $N(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^D$.

Para álgebras unitales se puede probar la siguiente equivalencia:

Proposición 1.2.6 ([30], Lema 2.1) *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $a \in \mathcal{A}^D$. Entonces $b = a^D$ si, y solamente si*

$$ab = ba, \qquad bab = b \qquad y \qquad a(1 - ab) \in N(\mathcal{A}) \tag{1.3}$$

Koliha generalizó en [30] la definición de inverso Drazin, sustituyendo en (1.3) la nilpotencia por quasinilpotencia. Diremos que un elemento $a \in \mathcal{A}$ es *quasinilpotente* si $sp(a) = \{0\}$. Es de fácil comprobación que todo elemento nilpotente es quasinilpotente. Denotaremos al conjunto de los elementos quasinilpotentes de $\mathcal{A}$ como $QN(\mathcal{A})$.

Definición 1.2.7 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $a \in \mathcal{A}$. Se dice que b es un* ***inverso Koliha-Drazin*** *de a si cumple las condiciones:*

$$bab = b, \qquad ab = ba \qquad y \qquad a(1 - ab) \in QN(\mathcal{A}) \tag{1.4}$$

El inverso Koliha-Drazin sigue siendo único en caso de existir. Así, denotaremos al inverso Koliha-Drazin de a como a^{KD} y al conjunto de elementos inversibles Koliha-Drazin como $\mathcal{A}^{KD}$. Veamos una caracterización de este tipo de elementos.

Proposición 1.2.8 ([30], Teorema 4.2) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $a \in \mathcal{A}$. Entonces $a \in \mathcal{A}^{KD}$ si, y solamente si, 0 no es un punto de acumulación de $sp(a)$.*

La relación entre los distintos tipos de inversos presentados es la siguiente:

$$\mathcal{A}^{-1} \subset \mathcal{A}^{\sharp} \subset \mathcal{A}^{\wedge} \cap \mathcal{A}^{D}$$

$$\mathcal{A}^{-1} \subset \mathcal{A}^{\sharp} \subset \mathcal{A}^{D} \subset \mathcal{A}^{KD}$$

1.3. C^*-álgebras e inversibilidad de Moore-Penrose

Ahora pasemos a definir conceptos en un ambiente más restrictivo: el de las *C*-álgebras*. Éstas nacen de abstraer las propiedades de un tipo de álgebra de Banach muy particular: el álgebra de operadores lineales y continuos sobre un espacio de Hilbert, $\mathcal{B}(H)$.

Definición 1.3.1 *Diremos que $\mathcal{A}$ es una* ***C*-álgebra*** *si es un álgebra de Banach que además cuenta con una involución $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$:*

1. $(a^*)^* = a$
2. $(a + b)^* = a^* + b^*$

3. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

4. $(ab)^* = b^* a^*$

5. $\|aa^*\| = \|a\|^2$

Las cuatro primeras propiedades nos dan estructura de álgebra con involución, mientras que la última, conocida como *axioma de Gelfand-Naimark* (o propiedad estelar) es la condición que diferencia a las C^*-álgebras del resto de álgebras con involución. Estas propiedades son las naturales de la involución de $\mathcal{B}(H)$ consistente en llevar cada operador T a su adjunto T^*.

Atendiendo ahora a las aplicaciones entre C^*-álgebras, y dado que tenemos una nueva operación, es interesante distinguir aquellas que respetan la nueva estructura. Diremos que una aplicación $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es **-invariante* si $T(x^*) = T(x)^*$. A los homomorfismos de Jordan *-invariantes los llamaremos **-homomorfismos de Jordan*.

En esta estructura tenemos algunos elementos distinguidos con los que vamos a trabajar. Diremos que un elemento a de una C*-álgebra $\mathcal{A}$ es:

- **Autoadjunto** si $a^* = a$. Al conjunto de todos los elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ lo denotaremos por $\mathcal{A}_{\text{sa}}$.

- **Isometría parcial** si $aa^*a = a$.

- **Unitario** si $aa^* = a^*a = 1$.

- **Proyección** si $a^2 = a^* = a$. Es decir, las proyecciones son a la vez idempotentes y autoadjuntos. Juegan un papel importante en las C^*-álgebras, en especial en algunos tipos concretos que presentaremos más tarde, con abundancia de las mismas.

Obviamente, las C^*-álgebras nos permiten trabajar también con los tipos de inversibilidad presentados más arriba. Sin embargo, lo interesante es aprovechar la riqueza adicional que nos proporciona este nuevo ambiente. Pasaremos pues a definir el *inverso de Moore-Penrose*.

Definición 1.3.2 *Sea $a \in \mathcal{A}$. Diremos que b es el* ***inverso de Moore-Penrose*** *de a si cumple:*

$$aba = a, \qquad bab = b, \qquad ab = (ab)^* \qquad y \qquad ba = (ba)^* \tag{1.5}$$

En caso de existir, el inverso de Moore-Penrose es único, y se denotará por $a^\dagger$. El conjunto de todos los elementos inversibles Moore-Penrose será denotado por $\mathcal{A}^\dagger$, y es exactamente igual al de los von Neumann regulares, es decir, $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\wedge$ (véase [22]). Este concepto de inverso no es otra cosa que una generalización al caso de C^*-álgebras de la pseudoinversa de Moore-Penrose que apareció para matrices en los años 50 y que cuenta con numerosas aplicaciones, sobre todo en teoría de matrices y análisis numérico.

1.4. Desde el teorema de Hua hasta la conjetura de Kaplansky

El punto de partida del estudio de invariantes lineales referidos a inversibilidad bien puede ser el famoso teorema de Hua (véase [24]), que detallamos a continuación:

Teorema 1.4.1 (Hua) *Toda aplicación aditiva y unital T entre dos anillos de división que cumple $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}$ es un homomorfismo o antihomomorfismo.*

La relación $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}$ es la que servirá de modelo para estudiar muchos tipos de invariantes lineales.

Definición 1.4.2 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas (resp. unitales, C^*-álgebras, en caso de ser necesario). De una aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dirá que:*

- *preserva fuertemente la inversibilidad si $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}$ para todo $x \in \mathcal{A}^{-1}$.*

- *preserva fuertemente la inversibilidad generalizada si $T(x)$ es inverso generalizado de $T(y)$ siempre que x sea inverso generalizado de y.*

- *preserva fuertemente la inversibilidad Drazin si $T(x^D) = T(x)^D$ para todo $x \in \mathcal{A}^D$.*

- *preserva fuertemente la inversibilidad de grupo si $T(x^\sharp) = T(x)^\sharp$ para todo $x \in \mathcal{A}^\sharp$.*

- *preserva fuertemente la inversibilidad de Koliha-Drazin si $T(x^{KD}) = T(x)^{KD}$ para todo $x \in \mathcal{A}^{KD}$.*

- *preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose $T(x^\dagger) = T(x)^\dagger$ para todo $x \in \mathcal{A}^\dagger$.*

En definitiva, el teorema de Hua caracteriza las aplicaciones unitales y aditivas entre anillos de división que preservan fuertemente la inversibilidad. Este esquema es el que ha sido repetido en los últimos años, debilitando hipótesis para obtener resultados más generales y cambiando condiciones para obtener resultados diferentes (véase, por ejemplo, [18]). En esta memoria se enunciarán múltiples resultados de este tipo.

Por otro lado, uno de los problemas abiertos más célebres en el ámbito de invariantes lineales es la llamada *conjetura de Kaplansky*. Recordemos que, dada un álgebra de Banach, se define su *radical de Jacobson* como la intersección de los ideales a izquierda maximales (equivalentemente, de los ideales a derecha maximales). Un álgebra de Banach se dirá *semisimple* si su radical es $\{0\}$ (véase [2]). Un ejemplo de álgebras de Banach semisimples son las C*-álgebras.

La conjetura de Kaplansky dice lo siguiente:

Conjetura 1.4.3 (Kaplansky) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Banach semisimples y $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación lineal, unital y sobreyectiva. Si $T(\mathcal{A}^{-1}) \subset \mathcal{B}^{-1}$ (o, equivalentemente, $sp(T(x)) \subset sp(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$), entonces T es un homomorfismo de Jordan.*

De una aplicación satisfaciendo $T(\mathcal{A}^{-1}) \subset \mathcal{B}^{-1}$ se dirá que preseva la inversibilidad. Nótese que toda aplicación que preserva fuertemente la inversibilidad preserva la inversiblidad y que, tal y como se plantea en [36, Observación 2.9], una posibilidad para responder a la conjetura de Kaplansky pasa por el recíproco.

Desde que el problema fue planteado, ha habido numerosas aproximaciones y resultados parciales con respuesta positiva. Un teorema de Marcus y Purves de 1959 responde positivamente a la cuestión para el caso de álgebras de matrices complejas (véase [35]).

Teorema 1.4.4 (Marcus-Purves) *Sea $T : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ una aplicación lineal que preserva la inversibilidad. Entonces, existen U, V inversibles tales que*

$$T(A) = UAV, \qquad \text{para toda } A \in M_n(\mathbb{C})$$

o bien

$$T(A) = UA^tV, \qquad \text{para toda } A \in M_n(\mathbb{C})$$

En el caso conmutativo el llamado teorema de Glason-Kahane-Zelazko ([21], [27], [45]) da respuesta afirmativa a la conjetura.

En 1996, Sourour dio respuesta afirmativa a la conjetura para aplicaciones biyectivas entre álgebras de operadores lineales y acotados de un espacio de Banach ([41]).

Teorema 1.4.5 (Sourour) *Sean X e Y espacios de Banach complejos y $\phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ una aplicación lineal, biyectiva y unital. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *ϕ preserva la inversibilidad.*

2. *ϕ es un homomorfismo de Jordan.*

3. *ϕ es un isomorfismo o anti-isomorfismo.*

4. *Se cumple una de las dos siguentes condiciones:*

- *Y es isomorfo a X y $\phi(T) = A^{-1}TA$ para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, donde A es un isomorfismo de Y en X.*
- *Y es isomorfo a X^* y $\phi(T) = A^{-1}T^*A$ para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, donde A es un isomorfismo de Y en X^*. En este caso X e Y deben ser reflexivos.*

En el año 2000, Aupetit dio a conocer una respuesta positiva al problema de Kaplansky en álgebras de von Neumann (véase [3]).

Teorema 1.4.6 (Aupetit) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de von Neumann y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y sobreyectiva tal que $sp(T(a)) \subset sp(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Entonces T es un isomorfismo de Jordan.*

En 2003, Bresar, Fosner y Semrl mejoraron el anterior resultado de Sourour, extendiéndolo hasta el caso de álgebras semisimples con zócalo esencial (véase [7]).

Teorema 1.4.7 (Bresar-Fosner-Semrl) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach semisimples con zócalo esencial y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y biyectiva que preserva la inversibilidad. Entonces T es un isomorfismo de Jordan.*

Por último, en 2005 Kovacs mejoró en ([31]) el resultado de Aupetit, situándose en el contexto de las C*-álgebras de rango real cero.

Teorema 1.4.8 (Kovacs) *Sean $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital de rango real cero y $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach unital semisimple. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y sobreyectiva tal que $sp(T(a)) \subset sp(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Entonces T es un isomorfismo de Jordan.*

Nótese que el problema de Kaplansky aún dista de estar resuelto, pues aún no se dispone de respuesta (positiva o negativa) en el caso de C*-álgebras.

En esta memoria trataremos problemas que, si bien no van enfocados directamente hacia la conjetura (como el teorema anterior), aportan información y técnicas que están relacionadas con este problema y con las versiones del teorema de Hua.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo haremos un repaso sobre los resultados aparecidos en los últimos años sobre el tema que nos ocupa. Comenzaremos estudiando las álgebras de operadores (en espacios de Hilbert y espacios de Banach) para después terminar con sus respectivas generalizaciones (C*-álgebras y álgebras de Banach, respectivamente).

2.1. Invariantes en álgebras de operadores

En primer lugar nos centraremos en el problema determinar las aplicaciones aditivas que preservan fuertemente la inversibilidad Drazin en $\mathcal{B}(H)$, el álgebra de operadores lineales y continuos de H en sí mismo, siendo H un espacio de Hilbert real o complejo infinito-dimensional. Este problema fue estudiado por Cui en 2007 ([16]). Su trabajo se puede resumir en dos pasos:

1. Determinar el comportamiento de la aplicación sobre los idempotentes.

2. Usando las bondades de $\mathcal{B}(H)$, aplicar la caracterización de Kuzma (véase [32]) sobre aplicaciones aditivas que preservan idempotentes.

Veamos con más detalle el trabajo de Cui:

Lema 2.1.1 *Sea $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad Drazin, con H y K espacios de Hilbert de dimensión infinita. Entonces, para todo idempotente $P \in \mathcal{B}(H)$ se tiene:*

1. $\phi(I)\phi(P) = \phi(P)\phi(I)$

2. $\phi(P) = \phi(P)^2\phi(I) = \phi(P)\phi(I)^2$

En $\mathcal{B}(H)$ es usual trabajar con idempotentes, ya que estas álgebras presentan una muy interesante propiedad: todo elemento en $\mathcal{B}(H)$, con H infinito-dimensional, se puede escribir como suma de un número finito de idempotentes (véase [40]). Esto hace que, trabajando siempre con aditividad, podamos controlar todos los elementos del álgebra conociendo el comportamiento sobre los idempotentes.

De un idempotente p en un álgebra $\mathcal{A}$ diremos que es *minimal* si $p\mathcal{A}p = \mathbb{C}p$. Combinando el teorema principal y el corolario 3.3 en [32], se tiene:

Teorema 2.1.2 (Kuzma) *Sean H y K espacios de Hilbert reales o complejos infinito-dimensionales y $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ una aplicación aditiva que preserva idempotentes. Supongamos además que la imagen de ϕ contiene a todos los idempotentes minimales de $\mathcal{B}(K)$. Entonces ϕ anula a todos los idempotentes minimales o bien existe una biyección lineal o conjugado lineal continua $A : H \to K$ tal que*

$$\phi(T) = ATA^{-1} \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

o bien

$$\phi(T) = AT^{tr}A^{-1} \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

donde T^{tr} denota al operador transpuesto de T respecto de una base ortonormal arbitraria, pero fija.

A partir de la hipótesis de que la imagen de ϕ contiene a todos los idempotentes minimales y de las identidades del lema anterior, Cui llega a que ϕ o $-\phi$ preservan idempotentes, lo que le permite aplicar el teorema de Kuzma para llegar a su teorema principal:

Teorema 2.1.3 (Cui) *Sean H y K espacios de Hilbert reales o complejos infinito-dimensionales y $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad Drazin. Supongamos además que la imagen* *de ϕ contiene a todos los idempotentes minimales de $\mathcal{B}(K)$. Entonces ϕ anula a todos los idempotentes minimales o bien existe una biyección lineal o conjugado lineal continua $A : H \to K$ tal que*

$$\phi(T) = \xi ATA^{-1} \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

o bien

$$\phi(T) = \xi AT^{tr}A^{-1} \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

donde $\xi \in \{-1, 1\}$ y T^{tr} denota al operador transpuesto de T respecto de una base ortonormal arbitraria, pero fija.

En nuestro trabajo ([12]) caracterizamos las aplicaciones aditivas entre álgebras de Banach que preservan fuertemente la inversibilidad Drazin.

A continuación veremos el aporte de Nadia Boudi y Mostafa Mbekhta en este ambiente. En este caso el resultado se refiere a inversibilidad generalizada. La demostración sigue el camino de Cui, donde identidades concernientes a los idempotentes se pueden "subir" a todos los elementos. Los siguientes resultados se encuentran en [6].

Proposición 2.1.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitales y $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada tal que $\phi(1)$ conmuta con la imagen de ϕ. Entonces $\phi(1)\phi$ es un homomorfismo de Jordan.*

Proposición 2.1.5 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitales y $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Entonces, para cada idempotente $e \in \mathcal{A}$ se tiene*

$$\phi(1)\phi(e) = \phi(e)\phi(1) = (\phi(e))^2 \ \textit{y} \ (\phi(1))^2\phi(e) = \phi(e)$$

En particular, $\phi(1)\phi$ preserva idempotentes.

La combinación de las dos proposiciones anteriores junto con la propiedad relativa a sumas de idempotentes en $\mathcal{B}(H)$ nos lleva directos al siguiente resultado:

Teorema 2.1.6 (Boudi-Mbekhta) *Sean H un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital. Si $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{A}$ es aditiva y preserva fuertemente la inversibilidad generalizada, entonces $\phi(1)\phi$ es un homomorfismo de Jordan y $\phi(1)$ conmuta con la imagen de ϕ.*

Respecto a la inversibilidad de Moore-Penrose en $\mathcal{B}(H)$, Mbekhta llegó al siguiente resultado:

Teorema 2.1.7 ([37], Teorema 5.3) *Sea $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ una aplicación lineal, biyectiva y unital. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *ϕ preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose.*

2. *Existe un operador unitario $U \in \mathcal{B}(H)$ tal que ϕ puede expresarse como*

$$\phi(T) = UTU^* \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

o bien

$$\phi(T) = UT^{tr}U^* \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{B}(H)$$

donde T^{tr} denota al operador transpuesto de T respecto de una base ortonormal arbitraria, pero fija.

De hecho, las aplicaciones que aparecen en (2) son todos los *-homomorfimos de Jordan isométricos en $\mathcal{B}(H)$ como consecuencia de un teorema de Kadison ([26]).

En el caso más general del álgebra de los operadores lineales y continuos de un espacio de Banach complejo X no podemos generar el espacio a partir de los idempotentes como ocurría en el caso anterior. Sin embargo, $\mathcal{B}(X)$ aún posee características que lo hacen un ambiente cómodo, como la semisimplicidad y la bondad de su zócalo.

En este contexto, veremos un teorema que aparece como corolario en [6], pues es una particularización a $\mathcal{B}(X)$ de un teorema más general que veremos más adelante.

Teorema 2.1.8 (Boudi-Mbekhta) *Sean X e Y espacios de Banach complejos y $\phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ una aplicación lineal y biyectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *ϕ preserva fuertemente la inversibilidad generalizada.*

2. *ϕ preserva fuertemente la inversibilidad de grupo.*

3. *ϕ preserva fuertemente la inversibilidad Drazin.*

4. *ϕ preserva fuertemente la inversibilidad.*

5. *Existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tal que se cumple una de las dos siguentes condiciones:*

    - *Y es isomorfo a X y $\phi(T) = \lambda A^{-1}TA$ para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, donde A es un isomorfismo de Y en X.*
    - *Y es isomorfo a X^* y $\phi(T) = \lambda A^{-1}T^*A$ para todo $T \in \mathcal{B}(X)$, donde A es un isomorfismo de Y en X^*. En este caso X e Y deben ser reflexivos.*

De hecho, las aplicaciones que aparecen en (5) son todos los isomorfimos de Jordan en $\mathcal{B}(X)$.

2.2. Invariantes en álgebras de Banach

En esta sección trataremos los invariantes lineales (y aditivos) de los distintos tipos de inversibilidad generalizada en álgebras de Banach unitales. Para ello, nos centraremos en el trabajo de Nadia Boudi y Mostafa Mbekhta ([6]).

A lo largo del capítulo incluiremos las demostraciones de numerosos lemas y teoremas, debido a que apenas necesitan conocimientos previos y pueden seguirse fácilmente, además de ser reveladoras de las técnicas empleadas. Una propiedad que juega un papel crucial tanto en el trabajo de Boudi y Mbekhta como en el nuestro es la llamada identidad de Hua.

Proposición 2.2.1 (Identidad de Hua) *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b \in \mathcal{R}$. Si a, b y $a - b^{-1}$ son inversibles, entonces*

$$\left[a^{-1} - \left(a - b^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1} = a - aba$$

En primer lugar, los autores nos proveen de una versión del teorema de Hua para el caso de álgebras de Banach.

Teorema 2.2.2 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva. Entonces T preserva fuertemente la inversibilidad si, y solamente si, $T(1)T$ es un homomorfismo de Jordan y $T(1)$ conmuta con la imagen de T.*

Demostración La implicación hacia la izquierda es inmediata. Para la implicación a la derecha, nótese que al ser $1^{-1} = 1$, entonces $(T(1))^{-1} = T(1)$ y, por tanto, $T(1)^2 = 1$. Sean ahora $x \in \mathcal{A}$ arbitrario y $\lambda, \mu \notin sp(x)$ con $\lambda \neq \mu$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ (la existencia está garantizada por ser el espectro un compacto de $\mathbb{C}$). Llamemos $a = x - \lambda$, $b = (\mu - \lambda)^{-1}$. Es obvio que a, b y $a - b^{-1} = x - \mu$, $T(a) = T(x - \lambda)$, $T(b) = (\mu - \lambda)^{-1} T(1)$ y $T(a) - T(b)^{-1}$ son inversibles, así que podemos aplicar la identidad de Hua por separado tanto a los tres primeros como a los tres últimos, para obtener:

$$a - aba = \left[a^{-1} - \left(a - b^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1} \tag{2.1}$$

y

$$T(a) - T(a)T(b)T(a) = \left[T(a)^{-1} - \left(T(a) - T(b)^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1} \tag{2.2}$$

Aplicando T a la igualdad (2.1) y teniendo en cuenta que T es aditiva y preserva fuertemente la inversibilidad, obtenemos:

$$\begin{aligned} T(a) - T(aba) &= T\left(\left[a^{-1} - \left(a - b^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right) \\ &= \left[T(a)^{-1} - \left(T(a) - T(b)^{-1}\right)^{-1}\right]^{-1} \end{aligned}$$

De esta última identidad y de (2.2), obtenemos que $T(aba) = T(a)T(b)T(a)$, lo que nos lleva a que:

$$T\left((x - \lambda)^2\right) = \left(T(x) - \lambda T(1)\right) T(1) \left(T(x) - \lambda T(1)\right)$$

y así

$$T(x^2) = T(x)T(1)T(x)$$

Por tanto, para todo $x \in \mathcal{A}$ se tiene $T(1)T(x^2) = T(1)T(x)T(1)T(x) = (T(1)T(x))^2$, es decir, $T(1)T$ es un homomorfismo de Jordan.

Para terminar, veamos que $T(1)$ conmuta con la imagen de T. Para ello, tomemos $x \in \mathcal{A}$ arbitrario y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ tales que $\lambda \neq 0$ y $\lambda, \lambda+\mu \notin sp(x)$. Entonces $a = x - (\lambda + \mu)$, $b = (x - \mu)^{-1}$, $a - b^{-1} = -\mu$ son inversibles, así como sus respectivas imágenes por T. Aplicando el procedimiento anterior, llegamos de nuevo a que $T(aba) = T(a)T(b)T(a)$. De aquí, $T((x - \lambda)^{-1}) = T(1)T((x - \lambda)^{-1})T(1)$ y, teniendo en cuenta que $(T(1))^2 = 1$, deducimos $T(1)T(x) = T(x)T(1)$, lo que completa la prueba. ■

Pasamos ahora a tratar el problema de la inversibilidad generalizada. En primer lugar, hemos de remarcar una propiedad que utilizaremos de ahora en adelante. Si una apliación T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada y $a \in \mathcal{A}$ es un elemento inversible tal que $T(a)$ es inversible, entonces es de fácil comprobación que $T(a^{-1}) = (T(a))^{-1}$. Utilizando esta propiedad, Boudi y Mbekhta lograron adaptar la demostración del teorema anterior al caso de inversibilidad generalizada. Sus resultados principales fueron los siguientes:

Teorema 2.2.3 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación unital y aditiva. Entonces T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada si, y solamente si, T es un homomorfismo de Jordan.*

La hipótesis de unitalidad de la aplicación se puede rebajar de las dos maneras que siguen a continuación:

Teorema 2.2.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva tal que $1 \in Im(T)$. Entonces T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada si, y solamente si, $T(1)T$ es un homomorfismo de Jordan y $T(1)$ conmuta con la imagen de T.*

Teorema 2.2.5 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva tal que $T(1)$ es inversible. Entonces T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada si, y solamente si, $T(1)T$ es un homomorfismo de Jordan y $T(1)$ conmuta con la imagen de T.*

Para la demostración de los teoremas, necesitaremos un par de lemas.

Lema 2.2.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Si $Im(T) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$ entonces $T(1) \neq 0$.*

Esta propiedad se puede probar rebajando la condición $Im(T) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$ a que T no sea idénticamente nula.

Lema 2.2.7 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva. Si T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada entonces*

$$(T(1))^2 = 1 \Leftrightarrow T(1) \textit{ es inversible } \Leftrightarrow T(\mathcal{A}^{-1}) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$$

Además, si $x \in T(\mathcal{A}^{-1}) \cap \mathcal{B}^{-1}$ (es decir, si x y $T(x)$ son inversibles) entonces

$$T(x) = T(1)T(x)T(1) \tag{2.3}$$

$$2T(x^2) = T(1)(T(x))^2 + (T(x))^2T(1) \tag{2.4}$$

Demostración En primer lugar, al ser 1 inverso generalizado de sí mismo, $T(1)$ también es inverso generalizado de sí mismo y, por tanto, $(T(1))^3 = T(1)$. Así, la primera equivalencia del lema queda probada. La implicación hacia la derecha de la segunda equivalencia es trivial, así que falta por probar que, supuesto $T(\mathcal{A}^{-1}) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$, se tiene que $T(1)$ es inversible. Sabemos que $T(1) \neq 0$. Sea u inversible tal que $T(u)$ es inversible. Podemos tomar δ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$ con $|\lambda| < \delta$ entonces $a = u + \lambda$, $b = \lambda^{-1}u$, $a - b^{-1} = u + \lambda(1 - u^{-1})$, $T(a) = T(u)$, $T(b)$ y $T(a) - T(b)^{-1} = T(u) - \lambda T(u)^{-1}$ son inversibles. La identidad de Hua y el carácter de T nos da $T(aba) = T(a)T(b)T(a)$. Es decir:

$$T(u^3) + 2\lambda T(u)^2 + \lambda^2 T(u) =$$

$$= T(u)^3 + \lambda T(u)^2T(1) + \lambda T(1)T(u)^2 + \lambda^2 T(1)T(u)T(1)$$

Agrupando coeficientes tenemos que, para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$ con $|\lambda| < \delta$:

$$\begin{aligned} 0 &= T(u^3) - T(u)^3 \\ & +\lambda \left(2T(u)^2 - T(u)^2T(1) - T(1)T(u)^2\right) \\ & +\lambda^2 \left(T(u) - T(1)T(u)T(1)\right) \end{aligned}$$

Por tanto, los coeficientes del polinomio en λ deben ser 0. En particular, tenemos:

$$T(u) = T(1)T(u)T(1) \quad \text{y} \quad 2T(u^2) = T(u)^2T(1) + T(1)T(u)^2$$

Para terminar, es claro que

$$1 = T(u)T(u)^{-1} = T(1)T(u)T(1)T(u)^{-1}$$

y

$$1 = T(u)^{-1}T(u) = T(u)^{-1}T(1)T(u)T(1)$$

Por tanto, $T(1)$ es inversible, como se quería probar. ■

Ahora podemos demostrar los teoremas enunciados más arriba.

Demostración del Teorema 2.2.5 Supongamos que T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Tomemos $u \in \mathcal{A}^{-1}$ tal que $T(u) \in \mathcal{B}^{-1}$. Entonces por 2.3 y 2.4, se tiene que $T(u) = T(1)T(u)T(1)$ y $2T(u^2) = T(u)^2T(1) + T(1)T(u)^2$. Teniendo en cuenta que $T(1)^2 = 1$, multiplicando a la izquierda la primera ecuación por $T(1)$ obtenemos

$$T(1)T(u) = T(u)T(1)$$

Esto nos lleva, junto con la segunda igualdad de arriba, a que

$$T(1)T(u^2) = (T(1)T(u))^2$$

Ahora, tomado $x \in \mathcal{A}$ arbitrario, se puede tomar $\lambda \in \mathbb{Q}$ suficientemente grande para que tanto $x + \lambda$ como $T(x + \lambda) = T(x) + \lambda T(1)$ sean inversibles. Así, podemos afirmar que $T(1)T(x+\lambda) = T(x+\lambda)T(1)$ y, por tanto, $T(1)T(x) = T(x)T(1)$. Por otra parte, de la igualdad $T(1)T((x+\lambda)^2) = (T(1)T(x+\lambda))^2$

se obtiene fácilmente que $T(1)T(x^2) = (T(1)T(x))^2$, con lo que concluye la prueba de la implicación hacia la derecha.

La implicación hacia la izquierda se comprueba de forma directa. ■

Demostración del Teorema 2.2.4 Supongamos que $1 = T(u) \in Im(T)$ y sea λ un racional no nulo tal que $x = u - \lambda$ sea inversible y $\lambda^{-1} \notin sp(T(1)) \subset \{-1, 0, 1\}$ (dado que $T(1)^3 = T(1)$). En estas condiciones, tanto x como $T(x) = T(u) - \lambda T(1) = -\lambda(T(1) - \lambda^{-1}T(u))$ son inversibles. Por tanto, $T(\mathcal{A}^{-1}) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$ y el lema anterior nos asegura que $T(1)$ es inversible, lo que coloca en la situación del Teorema 4.2.3. ■

Demostración del Teorema 2.2.3 El caso unital se puede deducir directamente de cualquiera de los dos anteriores. ■

Los autores se preguntan si la condición $T(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$ se podría rebajar a $T(\mathcal{A}^{-1}) \cap \mathcal{B}^{-1} \neq \emptyset$, es decir, que haya un elemento inversible en la imagen de $\mathcal{A}$. La respuesta a esto es positiva en caso de que $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$ sean de dimensión finita módulo su radical de Jacobson. No se conoce respuesta en el caso general.

Por último, utilizando las mismas técnicas con la inversibilidad Drazin y la inversibilidad de grupo, los autores finalizan con un teorema que reúne todos los conceptos trabajados.

Teorema 2.2.8 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras de Banach complejas unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal. Si T es unital (resp. $T(1)$ inversible, $1 \in Im(T)$), las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada.*
2. *T preserva fuertemente la inversibilidad Drazin.*
3. *T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo.*
4. *T preserva fuertemente la inversibilidad.*
5. *T (resp. $T(1)T$) es un homomorfismo de Jordan unital y $T(1)$ conmuta con la imagen de T.*

2.3. Aplicaciones que preservan fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose en C*-álgebras

A continuación veremos los resultados conocidos que se refieren a aplicaciones lineales que preservan fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose. Los resultados que recogemos aparecen en [36] y [37].

Proposición 2.3.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C*-álgebras unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva y unital que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose. Entonces:*

1. *T es un homomorfismo de Jordan.*
2. *T preserva las proyecciones.*

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, no nos resulta extraño cómo probar que la aplicación T es un homomorfismo de Jordan. La información sobre el comportamiento de T respecto a la involución de la C*-álgebra viene recogida en el segundo apartado.

Demostración de (2) Sea e un idempotente tal que $e = e^*$. En particular $e = e^\dagger$, luego $T(e) = T(e^\dagger) = T(e)^\dagger$. Además, dado que T es un homomorfismo de Jordan, $T(e)$ es un idempotente y, puesto que $T(e)T(e)^\dagger$ es una proyección, obtenemos

$$T(e) = T(e)T(e)^\dagger = (T(e)T(e)^\dagger)^* = T(e)^*$$

■

En cierta clase de C*-álgebras la propiedad (2), con continuidad, es suficiente para asegurar que la aplicación es *-invariante. Nos referimos a las *C*-álgebras de rango real cero* (véase [8]).

Definición 2.3.2 *Un C*-álgebra se dice de rango real cero si el conjunto formado por las combinaciones lineales reales de proyecciones ortogonales es denso en el conjunto de los elementos autoadjuntos. Es decir, todo autoadjunto se puede aproximar por combinaciones lineales reales de proyecciones ortogonales.*

Toda *álgebra de von Neumann* (C*-álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es el dual de otro espacio), y en particular, $B(H)$, tiene rango real cero.

Esto nos permite, suponiendo la continuidad de la aplicación, subir algunas identidades desde las proyecciones hasta los autoadjuntos para, teniendo en cuenta que todo elemento es combinación lineal de autoadjuntos, poder llevar las identidades a todo el espacio. En el siguiente resultado la continuidad no se expresa explícitamente como hipótesis, aunque se deduce del resto de ellas en conjunción con la proposición anterior.

Teorema 2.3.3 *Sean $\mathcal{A}$ una C*-álgebra unital de rango real cero y $\mathcal{B}$ una C*-álgebra unital prima. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal, sobreyectiva y unital. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose.*

2. *T es un *-homomorfismo o un *-anti-homomorfismo.*

El hecho de que $\mathcal{B}$ sea prima permite afirmar que todo homomorfismo de Jordan sobreyectivo es homomorfismo o anti-homomorfismo, de modo que en el teorema anterior bien puede eliminarse esta hipótesis sobre $\mathcal{B}$ y reemplazar (2) por " T es *-homomorfismo de Jordan".

Por último el autor lanza la siguiente conjetura:

Conjetura 2.3.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C*-álgebras unitales y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva, unital y sobreyectiva. Equivalen:*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose.*

2. *T es un *-homomorfismo de Jordan.*

Capítulo 3

Contribuciones a la teoría de invariantes lineales

En este capítulo profundizaremos en las aportaciones que hemos realizado en el campo sobre el que trata esta memoria. En el momento de entrega de esta memoria, algunas de las referencias que aparecerán en esta sección son trabajos en preparación ([11] y [12]).

3.1. Aplicaciones lineales que preservan fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose

Sea $\mathcal{A}$ una C*-álgebra. Un elemento x de A se dice *finito* (respectivamente, *compacto*) en $\mathcal{A}$, si el operador $x \wedge x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, dado por $x \wedge x(a) = xax$, es un operador de rango finito (respectivamente, compacto) en $\mathcal{A}$. Es conocido que el ideal $\mathcal{F}(A)$ de los elementos de rango finito de $\mathcal{A}$ coincide con $\mathrm{soc}(A)$, el *zócalo* de $\mathcal{A}$, es decir, la suma de todos los ideales minimales a derecha (equivalentemente, a izquierda) de $\mathcal{A}$, y que $\mathcal{K}(A) = \overline{\mathrm{soc}(A)}$ es el ideal de los elementos compactos de $\mathcal{A}$. El zócalo de $\mathcal{A}$, coincide con la expansión lineal de las proyecciones minimales de $\mathcal{A}$. Una C*-álgebra se dice *dual* o *compacta* si $A = K(A)$. En [5], [1] and [43] se pueden encontrar conceptos y resultados básicos sobre el zócalo y las C*-álgebras duales. Por último, diremos que el zócalo de $\mathcal{A}$ es *esencial* si tiene intersección no trivial con todos los ideales de $\mathcal{A}$ (equivalentemente, si $a\ \mathrm{soc}(\mathcal{A}) = 0$ fuerza que $a = 0$).

Dos elementos a, b en una C*-álgebra $\mathcal{A}$ se dicen *ortogonales*, y se denota $a \perp b$, si $ab^* = b^*a = 0$. Diremos que una aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos C*-álgebras *preserva la ortogonalidad* si $T(x) \perp T(y)$ siempre que $x \perp y$. En primer lugar veremos que todo aplicación que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose también preserva la ortogonalidad de elementos regulares.

Proposición 3.1.1 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C*-álgebras. Toda aplicación aditiva $T : A \to B$ que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose preserva la ortogonalidad de elementos regulares.*

Demostración Sea $a, b \in \mathcal{A}^\dagger$ con $a \perp b$. Para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es fácil ver que $(a + \alpha b)^\dagger = a^\dagger + \alpha^{-1} b^\dagger$. Por hipótesis

$$(T(a) + \alpha T(b))(T(a)^\dagger + \alpha^{-1} T(b)^\dagger)(T(a) + \alpha T(b)) = (T(a) + \alpha T(b))$$

que nos lleva a

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} T(a) T(b)^\dagger T(a) &+ (T(a)T(b)^\dagger T(b) + T(b)T(b)^\dagger T(a)) \\ &+ \alpha(T(b)T(a)^\dagger T(a) + T(a)T(a)^\dagger T(b)) \\ &+ \alpha^2 T(b)T(a)^\dagger T(b) = 0 \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Por tanto,

$$T(a)T(b)^\dagger T(b) + T(b)T(b)^\dagger T(a) = 0$$

Multiplicando la última ecuación a derecha e izquierda, respectivamente, por $T(b)^\dagger$ es claro que

$$T(a)T(b)^\dagger = -T(b)T(b)^\dagger T(a)T(b)^\dagger \tag{3.1}$$

$$T(b)^\dagger T(a) = -T(b)^\dagger T(a)T(b)^\dagger T(b) \tag{3.2}$$

Al ser

$$(T(a)^\dagger + \alpha^{-1} T(b)^\dagger)(T(a) + \alpha T(b))(T(a)^\dagger + \alpha^{-1} T(b)^\dagger) = (T(a)^\dagger + \alpha^{-1} T(b)^\dagger)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ obtenemos

$$T(b)^{\dagger}T(a)T(b)^{\dagger} = 0. \tag{3.3}$$

De las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) se sigue que $T(a)T(b)^{\dagger} = 0$ y $T(b)^{\dagger}T(a) = 0$ lo que es equivalente a $T(a)T(b)^* = 0$ y $T(b)^*T(a) = 0$, es decir, $T(a) \perp T(b)$, como queríamos. ■

La siguiente proposición se puede probar de la misma forma en la que se prueba [6, Proposición 3.10]. Nótese que si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose y $T(1)$ conmuta con $T(\mathcal{A})$ entonces $\mathcal{B}' = T(1)^2\mathcal{B}T(1)^2$ es una C^*-álgebra con unidad $T(1)^2$, $S = T(.)T(1)^2$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}'$, preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose y $S(1)$ es inversible (en $\mathcal{B}'$).

Proposición 3.1.2 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras con $\mathcal{A}$ unital y $T : A \to B$ una aplicación aditiva tal que $T(1)$ conmuta con la imagen de T. Si T preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose entonces $T(1)T$ es un homomorfismo de Jordan.*

Recordemos que en una C*-álgebra todo elemento es **-cancelable*, esto es, que de la igualdad $a^*ax = 0$ se obtiene $ax = 0$. Una reformulación sencilla de esta propiedad es que $a^*ax = a^*ay$ implica $ax = ay$. Esta propiedad será utilizada en el siguiente lema, que nos dice cómo se comportan estas aplicaciones con las proyecciones de la C*-álgebra (compárese con el Lema 2.1.5).

Lema 3.1.3 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras con $\mathcal{A}$ unital. Sean $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose y $h = T(1)$. Para toda proyección $p \in \mathcal{A}$, se verifica:*

1. *$T(p)h^* = hT(p)^*$ y $h^*T(p) = T(p)^*h$*
2. *$T(p) = T(p)h^2$*
3. *$T(p)h = hT(p) = (T(p)h)^*$*

Demostración Sea p una proyección no nula en $\mathcal{A}$. Como $p \perp (1 - p)$ y T preserva la ortogonalidad de elementos regulares, entonces $T(p) \perp h - T(p)$, es decir, $T(p)h^* = T(p)T(p)^*$ y $h^*T(p) = T(p)^*T(p)$. En particular, $T(p)h^* = hT(p)^*$ y $h^*T(p) = T(p)^*h$. Puesto que $h = h^\dagger$ es claro que $h^3 = h$, y $h^2 = (h^2)^*$ (de hecho, para cualquier proyección p se tiene $T(p)^3 = T(p)$ y $T(p)^2 = (T(p)^*)^2$). Por tanto

$$\begin{aligned} T(p)^*T(p)h^2 &= h^*T(p)h^2 = T(p)^*hh^2 = T(p)^*h \\ &= h^*T(p) = T(p)^*T(p) = T(p)^*T(p)T(p)^2. \end{aligned}$$

Por cancelación $T(p)h^2 = T(p)T(p)^2 = T(p)$. De la misma forma también se obtiene $h^2T(p) = T(p)$. También,

$$\begin{aligned} T(p)h &= h^2T(p)h = h^*h^*T(p)h = h^*T(p)^*h^2 = h^*T(p)^* \\ &= (T(p)h)^*. \end{aligned}$$

De forma análoga, $(hT(p))^* = hT(p)$.

Por último,

$$\begin{aligned} T(p)(hT(p)h)T(p) &= T(p)hh^*T(p)^*T(p) = T(p)hh^*h^*T(p) \\ &= T(p)hT(p) = T(p)T(p)^*h^* = T(p)(h^*)^2 = T(p). \end{aligned}$$

Claramente, $(hT(p)h)T(p)(hT(p)h) = hT(p)h$ y dado que $T(p)hT(p)h = h^*T(p)^*T(p)h = h^*h^*T(p)h = h^2T(p)h = T(p)h$ y $hT(p)hT(p) = hT(p)$ son autoadjuntos, obtenemos $hT(p)h = T(p)^\dagger = T(p)$ por la unicidad del inverso de Moore-Penrose. Por tanto $hT(p) = h(hT(p)h) = h^2T(p)h = T(p)h$, lo que completa la prueba. ■

3.1.1. C*-álgebras con zócalo no nulo

Es conocido que todo elemento en el zócalo de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es regular y que $A^\dagger + \mathrm{soc}(A) \subset A^\dagger$. Este hecho, junto con la Proposición 3.1.1 nos permite utilizar técnicas de ortogonalidad en C^*-álgebras con zócalo para determinar la estructura de las aplicaciones lineales que preservan fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose. El siguiente lema está inspirado en [9]. En los siguientes resultados utilizaremos la notación $\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$, cuyo origen precisaremos más adelante.

Lema 3.1.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras, $\mathcal{A}$ unital con zócalo no nulo. Sean $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose y $h = T(1)$. Para todo $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \operatorname{soc}(\mathcal{A})$, se tienen las siguientes identidades:*

1. $T(ax+xa)h^* = T(a)T(x^*)^*+T(x)T(a^*)^*$ *y* $h^*T(ax+xa) = T(x^*)^*T(a)+T(a^*)^*T(x)$.

2. $T(x)h^*T(a) = T(x)T(a^*)^*h$ *y* $T(a)h^*T(x) = hT(a^*)^*T(x)$.

3. $T(x)hT(a) = T(x)T(a^*)^*h^*$ *y* $T(a)hT(x) = h^*T(a^*)^*T(x)$.

4. $\{T(x)\,T(a)\,T(x)\} = T(\{x\,a\,x\})h^*h$.

Demostración Teniendo en cuenta el Lema 3.1.3, al ser todo elemento del zócalo combinación lineal de proyecciones minimales, se sigue que $T(x)h^* = hT(x^*)^*$, $h^*T(x) = T(x^*)^*h$, $T(x)h = hT(x) = h^*T(x^*)^* = T(x^*)^*h^*$ y $T(x) = T(x)h^2$ para todo $x \in \operatorname{soc}(\mathcal{A})$.

Sean p, q proyecciones minimales en $\mathcal{A}$. Es claro que qp y $(1-q)(1-p) = 1-p-q+qp(\in A^\dagger + \operatorname{soc}(A))$ son regulares. La relación $qp \perp (1-q)(1-p)$ implica que $T(qp) \perp T(1-q-p+qp)$, y dado que $q(1-p) \perp (1-q)p$, tenemos $T(q-qp) \perp T(p-qp)$. Por tanto

$$T(qp)h^* - T(qp)T(q)^* - T(qp)T(p)^* + T(qp)T(qp)^* = 0,$$

y

$$T(q)T(p)^* - T(q)T(qp)^* - T(qp)T(p)^* + T(qp)T(qp)^* = 0.$$

Con estas ecuaciones y puesto que $\operatorname{soc}(\mathcal{A})$ está linealmente generado por las proyecciones minimales, se puede probar que

$$T(yx + xy)h^* = T(y)T(x^*)^* + T(x)T(y^*)^*, \tag{3.4}$$

para todo $x, y \in \operatorname{soc}(\mathcal{A})$ (véase [10, Teorema 14]). Además, dada p proyección minimal en $\mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}^{-1}$, al ser $p \perp (1-p)a(1-p)$, con $(1-p)a(1-p) =$

$a - ap - pa + pap \in A^\dagger + \mathrm{soc}(A) \subset A^\dagger$, la ecuación (3.4) lleva a

$$\begin{aligned} T(ap+pa)h^* &= T((ap+pa)p + p(ap+pa) - 2pap)h^* \\ &= T(ap+pa)T(p)^* + T(p)T(a^*p+pa^*)^* \\ &\quad -T(pap)T(p)^* - T(p)T(pa^*p)^* \\ &= T(ap+pa-pap)T(p)^* + T(p)T(a^*p+pa^*-pa^*p) \\ &= T(a)T(p)^* + T(p)T(a^*)^*. \end{aligned}$$

Como $T(p)T(p)^* = T(p)h^*$, dado $a \in \mathcal{A}$ y α tal que $a - \alpha \in A^{-1}$ de la última ecuación se obtiene $T(ap+pa)h^* = T(a)T(p)^* + T(p)T(a^*)^*$.

Por tanto,

$$T(ax+xa)h^* = T(a)T(x^*)^* + T(x)T(a^*)^* \qquad (a \in A, x \in \mathrm{soc}(\mathcal{A})). \quad (3.5)$$

La otra igualdad de (1) se puede obtener de forma similar.

Finalmente, como $p \perp (1-p)a(1-p)$, para todo $a \in \mathcal{A}^{-1}$ y toda proyección minimal p en $\mathcal{A}$, $T(p) \perp T(a+ap+pa-pap)$ asegura que

$$\begin{aligned} T(p)h^*T(a) &= T(p)T(p)^*T(a) = T(p)T(p)^*T(ap+pa-pap) \\ &= T(p)h^*T(ap+pa-pap) = T(p)T((ap+pa-pap)^*)^*h \\ &= T(p)T(a^*)^*h. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(p)hT(a) &= h^*T(p)^*T(a) = h^*T(p)^*T(ap+pa-pap) \\ &= T(p)hT(ap+pa-pap) = T(p)T((ap+pa-pap)^*)^*h^* \\ &= T(p)T(a^*)^*h^*. \end{aligned}$$

Esto es,

$$T(x)h^*T(a) = T(x)T(a^*)^*h \qquad (x \in \mathrm{soc}(\mathcal{A}), a \in \mathcal{A}), \quad (3.6)$$

y

$$T(x)hT(a) = T(x)T(a^*)^*h^* \quad (3.7)$$

Las otras relaciones de (2) y (3) se pueden obtener de forma similar. Sean $x \in \mathrm{soc}(\mathcal{A})$ y $a \in \mathcal{A}$. Por la últimas afirmaciones probadas, se tiene:

$$\begin{aligned}
T(\{x\,a\,x\})h^*h &= 2T((x \circ a^*) \circ x)h^*h - T((x^2) \circ a^*)h^*h \\
&= (T(x \circ a^*)T(x^*)^* + T(x)T(x^* \circ a)^*)h \\
&\quad -\frac{1}{2}(T(x^2)T(a)^* + T(a^*)T((x^2)^*)^*)h \\
&= (T(x \circ a^*)h^*T(x) + T(x)h^*T(x \circ a^*) \\
&\quad -\frac{1}{2}(T(x^2)h^*T(a^*) + T(a^*)T((x^2)^*)^*h) \\
&= \frac{1}{2}((T(x)T(a)^* + T(a^*)T(x^*)^*)T(x) \\
&\quad +T(x)(T(x^*)^*T(a^*) + T(a)^*T(x))) \\
&\quad -\frac{1}{2}((T(x)T(x^*)^*T(a^*) + T(a^*)T(x^*)^*T(x)) \\
&= \{T(x)\,T(a)\,T(x)\}.
\end{aligned}$$

Observación 3.1.5 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras, $\mathcal{A}$ unital con zócalo no nulo. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose. Por el lema, es claro que $T(x)h = (T(x^*)h)^*$ y*

$$T(x^2)h = (h^*)^2T(x^2)h = h^*T(x^*)^*T(x)h = (T(x)h)^2,$$

para todo x en el zócalo de $\mathcal{A}$. Esto muestra que la aplicación $x \mapsto T(x)h$ es un *-homomorfismo de Jordan de $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{B}$. Por tanto, todo aplicación lineal y continua que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose de una C^*-álgebra dual es un *-homomorfismo de Jordan multiplicado por un elemento regular que conmuta con la imagen de la aplicación.

Proposición 3.1.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras, $\mathcal{A}$ unital con zócalo no nulo. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación biyectiva que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose. Entonces*

$$T^{-1}(T(a)h - hT(a))\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \{0\}$$

y

$$T^{-1}(T(a)h - h^*T(a^*)^*)\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \{0\}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

En particular, si $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$ es esencial entonces $T(.)h$ es un $*$-homomorfismo de Jordan, y h conmuta con la imagen de T.

Demostración Sean $x \in \mathrm{soc}(\mathcal{A})$ y $a \in \mathcal{A}$. De (4.) del anterior lema, multiplicando a derecha por hh^*

$$\begin{aligned} T(\{x\,a\,x\}) &= T(x)T(a)^*T(x)hh^* = T(x)T(a)^*hT(x)h^* \\ &= T(x)T(a)^*h^2T(x^*)^* = T(x)T(a)^*T(x^*)^*. \end{aligned}$$

Además, dado que $T(\{x\,a\,x\})h^*h = hh^*T(\{x\,a\,x\})$ obtenemos (multiplicando por la izquierda por h^*h)

$$T(\{x\,a\,x\}) = h^*T(x)hT(a)^*T(x) = T(x^*)^*h^2T(a)^*T(x) = T(x^*)^*T(a)^*T(x).$$

Así,

$$\begin{aligned} \{T(x)\,(T(a)h)\,T(x)\} &= T(x)h^*T(a)^*T(x) = hT(x^*)^*T(a)^*T(x) \\ &= hT(\{x\,a\,x\}) = T(\{x\,a\,x\})h = T(x)T(a)^*T(x^*)^*h \\ &= T(x)T(a)^*h^*T(x) = \{T(x)\,(hT(a))\,T(x)\}, \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathrm{soc}(\mathcal{A})$. Por la sobreyectividad de T, dado $a \in \mathcal{A}$ arbitrario, pero fijo, existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $T(b) = T(a)h - hT(a)$. Las últimas identidades aseguran que $0 = \{T(x)\,T(b)\,T(x)\} = T(\{x\,b\,x\})h^*h$, luego $T(\{x\,b\,x\}) = 0$. Por la inyectividad de la aplicación, $\{x\,b\,x\} = 0$. De aquí se obtiene $bSoc(A) = \{0\}$, es decir:

$$T^{-1}(T(a)h - hT(a))\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \{0\}. \tag{3.8}$$

Del lema 3.1.4, (3.), se sigue

$$\begin{aligned} \{T(x)\,(T(a)h)\,T(x)\} &= T(x)h^*T(a)^*T(x) \\ &= T(x)T(a^*)hT(x) \\ &= \{T(x)\,(h^*T(a^*)^*)\,T(x)\} \end{aligned}$$

Razonando como antes, se tiene

$$T^{-1}(T(a)h - h^*T(a^*)^*)\mathrm{soc}(\mathcal{A}) = \{0\}. \tag{3.9}$$

Si $\mathrm{soc}(\mathcal{A})$ es esencial, la ecuación (3.8) nos da que h conmuta con $T(\mathcal{A})$, y por la Proposición 3.1.2, $S = T(.)h$ es un homomorfismo de Jordan. Además $T(a)h = h^*T(a^*)^* = (T(a^*)h)^*$, para todo $a \in \mathcal{A}$ lo que muestra que S es autoadjunta. ■

3.1.2. C*-álgebras de rango real cero

Como vimos más arriba, en las C*-álgebras de rango real cero es posible extender propiedades desde las proyecciones a todos los elementos. Así, los lemas anteriores nos llevan de forma inmediata, en presencia de continuidad, a una descripción de las aplicaciones lineales que preservan fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose cuando el álgebra de partida tiene rango real cero.

Teorema 3.1.7 *Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital de rango real cero y $\mathcal{B}$ una C^*-álgebra. Sean $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y continua que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose y $h = T(1)$. Entonces:*

1. *h conmuta con la imagen de T.*
2. *Th es un $*$-homomorfismo de Jordan.*

Demostración Por el Lema 3.1.3, al ser T continua y $\mathcal{A}$ de rango real cero, es claro que

$$T(x)h = hT(x) = (T(x^*)h)^* \qquad T(x) = T(x)h^2 \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Además, de forma similar al Lema 3.1.4, se puede probar que

$$T(yx + xy)h^* = T(y)T(x^*)^* + T(x)T(y^*)^*$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Multiplicando por h^*h obtenemos $T(x^2)h = T(x)hT(x)h$, para todo $x \in \mathcal{A}$, que nos dice que $S = T(.)h$ es un (*-)homomorfismo de Jordan (lo que también se puede obtener usando la Proposición 3.1.2). ∎

Para terminar, recordemos que Mbekhta probó que una aplicación lineal, sobreyectiva y unital entre una C*-álgebra unital de rango real cero y una C*-álgebra unital prima preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose si, y solamente si, es un *-homomorfismo o un *-anti-homomorfismo. Dado que todo *-homomorfismo de Jordan preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose, podemos llegar a la siguiente caracterización sin asumir sobreyectividad ni unitalidad.

Corolario 3.1.8 *Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unital de rango real cero y $\mathcal{B}$ una C^*-álgebra. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose.*
2. *$h^\dagger = h$, $T = Sh = hS$ con S un $*$-homomorfismo de Jordan.*

3.2. Aplicaciones lineales que preservan fuertemente la inversibilidad generalizada en C*-álgebras

En primer lugar, presentaremos una clase más amplia que la de las C*-álgebras en la que tiene sentido el siguiente tipo de inverso que vamos a estudiar. Nos referimos a la clase de los *JB^*-triples*.

Definición 3.2.1 *Un JB*-triple es un espacio de Banach complejo E junto con un producto triple continuo $\{.,.,.\} : E \times E \times E \to E$, que es conjugado lineal en la variable interior y simétrico y lineal en las variables exteriores, tal que:*

1. $L(a,b)L(x,y) = L(x,y)L(a,b) + L(L(a,b)x,y) - L(x,L(b,a)y)$, *donde $L(a,b)$ es el operador en E dado por $L(a,b)x = \{a,b,x\}$;*
2. *$L(a,a)$ es un operador autoadjunto con espectro no negativo;*
3. $\|L(a,a)\| = \|a\|^2$.

Esta definición fue introducida por Kaup en [28]. Para cada x en un JB*-triple E, $Q(x)$ denotará al operador conjugado lineal en E dado por $y \mapsto Q(x)y = \{x,y,x\}$. También se utilizará la notación $x^{[3]} := \{x,x,x\}$. Por último, diremos que una aplicación T entre JB*-triples es un triple homomorfismo si preserva el producto triple, es decir, si $T\{x,y,z\} = \{Tx,Ty,Tz\}$ para cualesquiera $x,y,z \in E$.

Definición 3.2.2 *Sean E un JB*-triple y $a \in E$. Diremos que b es un inverso generalizado de a si cumple:*

$$Q(a)(b) = a, \qquad Q(b)(a) = b \qquad y \qquad Q(a)Q(b) = Q(b)Q(a) \tag{3.10}$$

donde la tercera igualdad debe entenderse como que $Q(a)$ y $Q(b)$ conmutan como operadores.

El inverso generalizado de un elemento es único en caso de existir, así que podemos usar la notación $b = a^{\wedge}$. El conjunto de elementos con inverso generalizado se denota por $E^{\wedge}$. En [14], [19], [29] y [34] se pueden consultar resultados básicos sobre inversiblidad generalizada en JB*-triples.

Toda C*-algebra puede verse como JB*-triple a través del producto triple siguiente:

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x), \tag{3.11}$$

Si partimos de una C*-álgebra $\mathcal{A}$, denotaremos por $E_{\mathcal{A}}$ al JB*-triple asociado a $\mathcal{A}$ con el producto descrito en (3.11). En esta situación, un elemento de $a \in \mathcal{A}$ tiene inverso de Moore-Penrose si, y solamente si, a tiene inverso generalizado en $E_{\mathcal{A}}$, en cuyo caso, se tiene la relación $a^{\wedge} = (a^{\dagger})^*$.

Recordemos que un *álgebra de Jordan* es un álgebra no asociativa J con un producto $\circ$ que verifica

$$a \circ b = b \circ a \qquad \text{y} \qquad (a \circ b) \circ a^2 = a \circ (b \circ a^2)$$

para cualesquiera $a, b \in J$. Un *álgebra de Jordan-Banach* es un álgebra de Jordan equipada con una norma compatible con el producto de Jordan que además es completa.

Para toda álgebra de Jordan podemos definir el llamado *producto triple de Jordan* como $[x, y, z] = x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z) + z \circ (x \circ y)$. Un elemento a en un álgebra de Jordan-Banach unital $J = (J, \circ)$ es inversible con inverso b si $a \circ b = 1$ y $a^2 \circ b = a$, equivalentemente U_a es inversible con inverso U_b, donde

$U_a(x) = 2a\circ(a\circ x) - a^2\circ x$. Si a es inversible entonces su inverso es único y se denota, como es usual, a^{-1}. La clave de este trabajo es la identidad de Hua para álgebras de Jordan: si a y b son elementos inversibles en el álgebra de Jordan J tales que $a - b^{-1}$ es también inversible, entonces $a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}$ es también inversible y además

$$\left((a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\right)^{-1} = a - [a, b, a] \tag{3.12}$$

(véase [25, (11)]).

Lema 3.2.3 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C*-algebras, $\mathcal{A}$ unital y T una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Entonces $T(u^{[3]}) = T(u)^{[3]}$, para todo $u \in \mathcal{A}^\wedge$.*

Demostración Sea $u \in \mathcal{A}^\wedge \setminus \{0\}$. Entonces existe una única isometría parcial e, tal que u es autoadjunto e inversible en el álgebra de Jordan ee^*Ae^*e, con inverso $u^\wedge$(véase [29]). Para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$ con $0 < |\lambda| < ||u^\wedge||^{-2}$, el elemento $u - \lambda u^\wedge$ es inversible en ee^*Ae^*e. Recíprocamente, si $x \in ee^*Ae^*e$ es inversible con inverso y, entonces x tiene inverso generalizado $x^\wedge = y$ en E_A. Por tanto, los inversos de $u - \lambda u^\wedge$ y $u^\wedge - (u - \lambda u^\wedge)^\wedge$ en ee^*Ae^*e son son sus inversos generalizados en E_A. Por la identidad de Hua (3.12) obtenemos

$$u - \lambda^{-1}u^{[3]} = \left(u^\wedge - (u - \lambda u^\wedge)^\wedge\right)^\wedge.$$

Sea $u \in A^\wedge$, con $T(u) \neq 0$ (de otra forma el resultado es trivial). Como T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada, $T(u)^\wedge = T(u^\wedge)$ y así, para $\lambda \in \mathbb{Q}$ con $0 < |\lambda| < \text{mín}\{||u^\wedge||^{-2}, ||T(u)^\wedge||^{-2}\}$, obtenemos

$$T(u) - \lambda^{-1}T(u)^{[3]} = \left(T(u)^\wedge - (T(u) - \lambda T(u)^\wedge)^\wedge\right)^\wedge.$$

Puesto que T es aditivo y preserva fuertemente la inversibilidad generalizada, deducimos que

$$\begin{aligned} T(u) - \lambda^{-1}T(u)^{[3]} &= (T(u^\wedge) - T(u - \lambda u^\wedge)^\wedge)^\wedge \\ &= T(u^\wedge - (u - \lambda u^\wedge)^\wedge)^\wedge = T((u^\wedge - (u - \lambda u^\wedge)^\wedge)^\wedge) \\ &= T(u - \lambda^{-1}u^{[3]}) = T(u) - \lambda^{-1}T(u^{[3]}). \end{aligned}$$

Así que $T(u^{[3]}) = T(u)^{[3]}$, como se quería. ■

Proposición 3.2.4 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras con $\mathcal{A}$ unital y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Denotamos $h = T(1)$. Entonces*

1. $h^*T(x) = T(x^*)^*h$, *y* $T(x)h^* = hT(x^*)^*$, *para todo* $x \in \mathcal{A}$.
2. $T(x) = hh^*T(x) = T(x)h^*h = hT(x^*)^*h$, *para todo* $x \in \mathcal{A}$.
3. $T(x^2)h^* = T(x)T(x^*)^*$, *para todo* $x \in \mathcal{A}$.

Demostración Sean $u \in \mathcal{A}^{-1}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\alpha| < ||u^{-1}||^{-1}$. Entonces $u + \alpha \in \mathcal{A}^{-1}$, y por el lema anterior, sabemos que $T(u^{[3]}) = T(u)^{[3]}$, $h = h^{[3]}$ y $T((u+\alpha)^{[3]}) = T(u+\alpha)^{[3]}$. Esto es

$$\begin{aligned} &\{u+\alpha, u+\alpha, u+\alpha\} = \\ &\qquad u^{[3]} + \alpha^3 + 2\alpha\{u,u,1\} + 2\alpha^2\{1,1,u\} + \alpha\{u,1,u\} + \alpha^2\{1,u,1\} \\ &\qquad\qquad = u^{[3]} + \alpha^3 + \alpha(uu^* + u^*u) + 2\alpha^2 u + \alpha u^2 + \alpha^2 u^*, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\{T(u)+\alpha h, T(u)+\alpha h, T(u)+\alpha h\} = \\ &\qquad T(u)^{[3]} + \alpha^3 h + 2\alpha\{T(u),T(u),h\} + 2\alpha^2\{h,h,T(u)\} \\ &\qquad\qquad + \alpha\{T(u),h,T(u)\} + \alpha^2\{h,T(u),h\}. \end{aligned}$$

Uniendo estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} &T(uu^* + u^*u) + 2\alpha T(u) + T(u^2) + \alpha T(u^*) = \\ &\qquad 2\{T(u),T(u),h\} + 2\alpha\{h,h,T(u)\} \\ &\qquad\qquad + \{T(u),h,T(u)\} + \alpha\{h,T(u),h\}, \end{aligned}$$

for all $\alpha \in \mathbb{C}$ con $0 < |\alpha| < ||u^{-1}||^{-1}$. Esto muestra que

$$2T(u) + T(u^*) = 2\{h,h,T(u)\} + \{h,T(u),h\}, \tag{3.13}$$

y

$$T(uu^* + u^*u) + T(u^2) = 2\{T(u),T(u),h\} + \{T(u),h,T(u)\}. \tag{3.14}$$

para todo elemento inversible $u \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\alpha| < ||u^{-1}||^{-1}$.

Dado $x \in \mathcal{A}$, sea $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $u = x + \mu$ es inversible. De la ecuación (3.13), al ser T lineal y $h^{[3]} = h$, es claro que

$$2T(x) + T(x^*) = 2\{h, h, T(x)\} + \{h, T(x), h\}.$$

Sea $x \in A_{\mathrm{sa}}$. Entonces

$$3T(x) = 2\{h, h, T(x)\} + \{h, T(x), h\}. \tag{3.15}$$

Además, dado que $\{h, \{h, h, T(x)\}, h\} = \{h, T(x), h\}$, deducimos

$$\{h, T(x), h\} = \{h, \{h, T(x), h\}, h\},$$

o equivalentemente

$$hT(x)^*h = hh^*T(x)h^*h$$

Ahora multiplicamos esta ecuación por h^* a izquierda y derecha, respectivamente, para obtener

$$h^*hT(x)^*h = h^*T(x)h^*h,$$

y

$$hT(x)^*hh^* = hh^*T(x)h^*.$$

Además, multiplicando (3.15) a izquierda y derecha por h^*, y teniendo en cuenta las dos últimas ecuaciones obtenemos, respectivamente

$$\begin{aligned} h^*T(x) &= h^*T(x)h^*h = h^*hT(x)^*h \\ &= (h^*T(x))^* = T(x)^*h, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(x)h^* &= hh^*T(x)h^* = hT(x)^*hh^* \\ &= (T(x)h^*)^* = hT(x)^*. \end{aligned}$$

Linealizando estas expresiones, tenemos

$$h^*T(x) = T(x^*)^*h \qquad T(x)h^* = hT(x^*)^* \tag{3.16}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Las ecuaciones (3.15) y (3.16) implican

$$T(x) = hh^*T(x) = T(x)h^*h = hT(x^*)^*h, \tag{3.17}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. En particular, si u es autoadjunto e inversible $\mathcal{A}$, las ecuaciones (3.14) y (3.16) implican

$$T(u^2) = T(u)T(u)^*h = hT(u)^*T(u) = T(u)h^*T(u).$$

Así, dados $j \in A_{\rm sa}$, y $\mu \in \mathbb{C}$ tales que $u = j + \mu$ es inversible, dado que $h^{[3]} = h$ y T es lineal, la igualdad anterior aplicada a $u = j + \mu$ nos lleva a

$$T(j^2) = T(j)T(j)^*h = hT(j)^*T(j) = T(j)h^*T(j). \tag{3.18}$$

Por tanto, para cualesquiera j, k autoadjuntos de $\mathcal{A}$, la ecuación (3.18) garantiza que

$$\begin{array}{rcl} T(jk + kj) & = & T(j)T(k)^*h + T(k)T(j)^*h \\ & = & hT(j)^*T(k) + hT(k)^*T(j) \\ & = & T(j)h^*T(k) + T(k)h^*T(j). \end{array}$$

Luego

$$2T(j \circ k)h^* = T(j)T(k)^* + T(j)T(k)^*. \tag{3.19}$$

Como T es lineal, de las ecuaciones (3.18) y (3.19) se decuce que

$$T(x^2)h^* = T(x)T(x^*)^*$$

para todo $x \in \mathcal{A}$, con lo que concluye la prueba. ■

La proposición anterior nos conduce directamente hacia la continuidad de la aplicación.

Corolario 3.2.5 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C^*-álgebras con $\mathcal{A}$ unital y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Entonces T es continua.*

Demostración De la tercera afirmación de la proposición anterior es claro que la aplicación lineal $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $S(x) := T(x)h^*$, es positiva, y por tanto, continua (dado $a \in A^+$, existe $x \in A_{sa}$ tal que $a = x^2$. Entonces $S(a) = T(x^2)h^* = T(x)T(x)^* \geq 0$).

Finalmente, para todo $x \in A_{sa}$,

$$\|T(x)\|^2 = \|T(x)T(x)^*\| = \|S(x^2)\| \leq \|S\|\|x\|^2,$$

lo que implica que T es acotada en elementos autoadjuntos, luego es continua. ■

Es claro que toda aplicación aditiva entre C*-álgebras que preserva fuertemente la inversibilidad generalizada (en particular, cualquier aplicación autoadjunta que preserva fuertemente la inversibilidad de Moore-Penrose) preserva isometrías parciales. Recordemos que, por [44, Teorema 3.1], una aplicación lineal acotada entre C*-algebras es un triple homomorfismo si y sólo si preserva isometrías parciales. Por tanto, por el corolario anterior es claro que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un triple homomorfismo siempre que preserve fuertemente la inversibilidad generalizada. Pasamos ahora al resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ C*-álgebras con $\mathcal{A}$ unital y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada.*

2. *h es una isometría parcial y $T = Sh$ para un $*$-homomorfismo de Jordan $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, con $Shh^* = hh^*S$.*

3. *T es un triple homomorfismo.*

Demostración (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que T preserva fuertemente la inversibilidad generalizada. Entonces $h^{[3]} = h$ y por la Proposición 3.2.4 la aplicación lineal $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por $S(x) = T(x)T(1)^*$ es un *-homomorfismo de Jordan, con $T(x) = S(x)h$ y $S(x)hh^* = S(x) = hh^*S(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $x \in A$, entonces

$$\begin{aligned} T(x^{[3]}) &= S(x^{[3]})h = S(x)^{[3]}h^{[3]} \\ &= S(x)S(x)^*S(x)hh^*h = S(x)S(x^*)hh^*S(x)h \\ &= S(x)hh^*S(x^*)S(x)h = S(x)hh^*S(x)^*S(x)h \\ &= T(x)T(x)^*T(x) = T(x)^{[3]}, \end{aligned}$$

lo que muestra que T es un triple homomorfismo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Es suficiente tener en cuenta que b es el inverso generalizado de a si, y solamente si, $Q(a)(b) = a$ y $Q(a)(b^{[3]}) = b$. ■

3.3. Aplicaciones aditivas que preservan fuertemente la inversibilidad Drazin en álgebras de Banach

En la presente sección caracterizamos las aplicaciones aditivas que preservan fuertemente la inversibilidad Drazin, así como la de grupo, en álgebras de Banach sin más hipótesis que la unitalidad del álgebra de partida.

Como consecuencia de la identidad de Hua, tenemos el siguiente hecho. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $a \in \mathcal{A}^{-1}$. Para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$ con $0 \leq |\lambda| \leq ||a^{-1}||^{-2}$, es claro que $b = \lambda^{-1}a$, y $a - b^{-1} = a - \lambda a^{-1}$ son elemento inversibles en $\mathcal{A}$. Por tanto:

$$(a^{-1} - (a - \lambda a^{-1})^{-1})^{-1} = a - a(\lambda^{-1}a)a = a - \lambda^{-1}a^3$$

Lema 3.3.1 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad de grupo. Entonces $T(u^3) = T(u)^3$ para todo $u \in \mathcal{A}^\sharp$.*

Demostración Sean $u \in \mathcal{A}^\sharp$, con inverso de grupo $u^\sharp$ y $p = uu^\sharp = u^\sharp u$ el idempotente asociado. Entonces $p\mathcal{A}p$ es un álgebra de Banach unital (con unidad p) y $u \in p\mathcal{A}p$ es inversible con inverso $u^\sharp \in p\mathcal{A}p$. Por tanto, para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$ with $0 \leq |\lambda| \leq ||u^\sharp||^{-2}$, es claro que $u - \lambda u^\sharp$ es un elemento inversible en el álgebra local $p\mathcal{A}p$. Además, si $x \in p\mathcal{A}p$ es inversible en $p\mathcal{A}p$ con inverso $y \in p\mathcal{A}p$, entonces x tiene inverso de gurpo y en $\mathcal{A}$. Así que el inverso de $u - \lambda u^\sharp$ visto como elemento de $p\mathcal{A}p$ es su inverso de grupo en $\mathcal{A}$. De forma similar, el inverso de $u^\sharp - (u - \lambda u^\sharp)^\sharp$ en $p\mathcal{A}p$ es su inverso de grupo en $\mathcal{A}$. De acuerdo con el comentario previo al lema, obtenemos

$$u - \lambda^{-1}u^3 = (u^\sharp - (u - \lambda u^\sharp)^\sharp)^\sharp.$$

Podemos asumir que $T(u) \neq 0$ (de no ser así, el resultado es trivial). Como T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo, sabemos que $T(u)$ tiene inverso de grupo $T(u)^\sharp$. Dado $\lambda \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq |\lambda| \leq \text{mín}\{||u^\sharp||^{-2}, ||T(u)^\sharp||^{-2}\}$, los argumentos anteriores aplicados a $T(u)$ nos llevan a

$$T(u) - \lambda^{-1}T(u)^3 = (T(u)^\sharp - (T(u) - \lambda T(u)^\sharp)^\sharp)^\sharp.$$

Dado que T es aditiva (por tanto, $\mathbb{Q}$-lineal) y preserva fuertemente la inversibilidad de grupo, se tiene:

$$\begin{aligned} T(u) - \lambda^{-1}T(u)^3 &= (T(u^\sharp) - T(u - \lambda u^\sharp)^\sharp)^\sharp \\ &= T(u^\sharp - (u - \lambda u^\sharp)^\sharp)^\sharp = T((u^\sharp - (u - \lambda u^\sharp)^\sharp)^\sharp) \\ &= T(u - \lambda^{-1}u^3) = T(u) - \lambda^{-1}T(u^3). \end{aligned}$$

Luego $T(u^3) = T(u)^3$, como se pretendía probar. ■

Proposición 3.3.2 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva que preserva fuertemente la inversibilidad de grupo. Para todo $x \in \mathcal{A}$ se tiene:*

1. $3T(x) = h^2T(x) + T(x)h^2 + hT(x)h.$
2. $3T(x^2) = T(x)^2h + hT(x)^2 + T(x)hT(x).$

Demostración Sean $u \in \mathcal{A}^{-1}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq |\alpha| \leq ||u^{-1}||^{-1}$. Entonces $u + \alpha \in \mathcal{A}^{-1}$, así que por el lema anterior sabemos que $T(u^3) = T(u)^3$, $h = h^3$ y $T((u+\alpha)^3) = T(u+\alpha)^3$. Como T es aditiva, combinando estas tres igualdades se obtiene

$$\begin{aligned} 3T(u^2) + 3\alpha T(u) &= T(u)^2h + \alpha h^2T(u) + T(u)hT(u) \\ &\quad + \alpha T(u)h^2 + hT(u)^2 + \alpha hT(u)h \end{aligned}$$

(para todo $u \in \mathcal{A}^{-1}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 \leq |\alpha| \leq ||u^{-1}||^{-1}$). Desde aquí es fácil ver que

$$3T(u) = h^2T(u) + T(u)h^2 + hT(u)h, \tag{3.20}$$

y

$$3T(u^2) = T(u)^2h + hT(u)^2 + T(u)hT(u), \tag{3.21}$$

para todo elemento inversible u in $\mathcal{A}$.

Dado $x \in A$, sea $\mu \in \mathbb{Q}$ tal que $u = x + \mu$ es inversible. Al ser $h^3 = h$ y T aditiva ($\mathbb{Q}$-lineal), la afirmación (1) se sigue directamente de la ecuación (3.20). Además, tomando $u = x + \mu$ en la ecuación (3.21) y reordenando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 3T(x^2) + 3\mu^2 h + 6\mu T(x) &= T(x)^2 h + hT(x)^2 + 3\mu^2 h^3 \\ &\quad +2\mu(h^2 T(x) + T(x)h^2 + hT(x)h) \\ &\quad +T(x)hT(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1) y el hecho de que $h = h^3$, la afirmación (2) se puede deducir de forma directa. ■

Pasamos a probar nuestro resultado principal.

Teorema 3.3.3 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach. Sea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación aditiva. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *T preserva fuertemente la inversibilidad Drazin.*
2. *T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo.*
3. *$h = h^3$ y $T = Sh$ para un homomorfismo de Jordan $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que h conmuta con la imagen de S.*

Demostración Supongamos que T preserva fuertemente la inversibilidad Drazin. Recordemos que si x es un elemento inversible Drazin, se tiene $(x^D)^D = x$ si, y solamente si, x es inversible de grupo. Por tanto, para todo elemento inversible de grupo $u \in \mathcal{A}$ se tiene $T(u) = T((u^D)^D) = T(u^D)^D = (T(u)^D)^D$, lo que implica que $T(u)$ tiene inverso de grupo $T(u)^\sharp = T(u)^D = T(u^D) = T(u^\sharp)$. Esto es, T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo.

Supongamos ahora que T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo. Por la proposición anterior sabemos que

$$3T(x) = h^2 T(x) + T(x)h^2 + hT(x)h, \tag{3.22}$$

y

$$3T(x^2) = T(x)^2h + hT(x)^2 + T(x)hT(x), \tag{3.23}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$.

Multiplicando a izquierda y derecha por h y teniendo en cuenta que $h^3 = h$ deducimos

$$hT(x)h = h^2T(x)h^2,$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Multiplicando otra vez por h llegamos a

$$h^2T(x)h = hT(x)h^2, \tag{3.24}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. También se obtiene de la ecuación (3.22) (multiplicando por h a izquierda y derecha, respectivamente) y la ecuación (3.24) que

$$2hT(x) = hT(x)h^2 + h^2T(x)h = 2hT(x)h^2$$

y

$$2T(x)h = h^2T(x)h + hT(x)h^2 = 2hT(x)h^2.$$

Esto es

$$T(x)h = hT(x) \tag{3.25}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Teniendo en cuenta esta última ecuación, junto con (3.22) y (3.23) deducimos

$$T(x) = h^2T(x) = T(x)h^2, \tag{3.26}$$

y

$$T(x^2) = T(x)^2h, \tag{3.27}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Así, $S(x) = T(x)h$ define un homomorfismo de Jordan y $T(x) = S(x)h = hS(x)$, para todo $x \in A$.

Finalmente, tómese T con $h = h^3$ y $T = Sh$ para algún homomorfismo de Jordan $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que h conmuta con la imagen de S. Como S es un homomorfismo de Jordan, preserva fuertemente la inversibilidad Drazin (véase [36, Teorema 2.1]). Sean $a \in \mathcal{A}^D$ y $b = a^D$, esto es $ab = ba$, $bab = b$ y $b^k = b^kab$. Ya que S es un homomorfismo de Jordan, $h = h^3$ y h conmuta con la imagen de S, es claro que $T(a)T(b) = T(b)T(a)$ y

$$\begin{aligned} T(b) &= T(bab) = S(bab)h = S(b)S(a)S(b)h = S(b)S(a)S(b)h^3 \\ &= S(b)hS(a)hS(b)h = T(b)T(a)T(b). \end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}T(b)^k &= S(b)^k h^k = S(b)^k S(a) S(b) h^k = S(b)^k h^k S(a) h S(b) h \\ &= T(b)^k T(a) T(b).\end{aligned}$$

Queda pues probado que T preserva fuertemente la inversibilidad Drazin. ■

Por [30, Teorema 5.4], si a tiene inverso de Koliha-Drazin, entonces $(a^{KD})^{KD} = a^2 a^{KD}$, luego a tiene inverso de grupo si, y solamente si, $a = (a^{KD})^{KD}$. Por tanto, si $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una aplicación aditiva entre álgebras de Banach unitales que preserva fuertemente la inversibilidad de Koliha-Drazin, los mismos argumentos empleados en (1) $\Rightarrow$ (2) en el Teorema 3.3.3 muestran que T preserva fuertemente la inversibilidad de grupo, luego tiene la forma descrita en (3).

Bibliografía

[1] J. C. Alexander, *Compact Banach algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **18**, 1-18 (1968).

[2] B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory* Springer-Verlag, (1991).

[3] B. Aupetit, *Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, J. London Math. Soc. **62**, 917-924 (2000).

[4] A. Ben-Israel, T. T.E. Greville, *Generalized inverses: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York (2003).

[5] B. A. Barnes, G. J. Murphy, M. R. F Smyth, T.T. West *Riesz and Fredholm theory in Banach algebras*, London. Pitman (1982).

[6] N. Boudi, M. Mbekhta, *Additive maps preserving strongly generalized inverses*, J. Operator Theory **64**, 117-130 (2010).

[7] M. Bresar, A. Fosner, P. Semrl. *A note on invertibility preservers on Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **131**, 3833-3837 (2003).

[8] L. G. Brown, G. K. Pedersen, *C*-algebras of real rank zero*, J. Funct. Anal. **99**, 131-149 (1991).

[9] M. Burgos, *A note on orthogonality preserving maps on C^*-algebras*, preprint.

[10] M. Burgos, J. Garcés, and A. M. Peralta, *Automatic continuity of biorthogonality preservers between compact C*-algebras and von Neumann algebras*, J. Math. Anal. Appl. **376**, 221-230 (2011).

[11] M. Burgos, A. C. Márquez García, A. Morales Campoy, *Linear maps preserving strongly Moore-Penrose invertibility*, Preprint

[12] M. Burgos, A. C. Márquez García, A. Morales Campoy, *Additive maps strongly preserving generalized invertibility in Banach algebras and C*-algebras*, Preprint.

[13] M. Burgos, F. J. Fernández-Polo, J. J. Garcés, J. Martínez Moreno, A. M. Peralta, *Orthogonality preservers in C*-algebras, JB*-algebras and JB*-triples*, J. Math. Anal. Appl., Volume **348**, 220-233 (2008).

[14] M. Burgos, A. Kaidi, A. Morales, A. M. Peralta, and M. Ramírez, *von Neumann regularity and quadratic conorms in JB*-triples and C*-algebras*, Acta Math. Sinica, **24** 185-200 (2008).

[15] S.L. Campbell, *Recent Applications of Generalized Inverses*, Academic Press, New York (1982).

[16] J. Cui, *Additive Drazin inverse preservers*, Linear Algebra and Applications **426**, 448-453 (2007).

[17] M.P. Drazin, *Pseudo-inverse in associative rings and semigroups*,Amer. Math. Monthly **65**, 506-514 (1958).

[18] H. Essannouni, A. Kaidi, *Le théoreme de Hua pour les algebres artiniennes simples*, Linear Alg. Applic. **297**, 9-22 (1999).

[19] A. Férnandez López, E. García Rus, E. Sánchez Campos, M. Siles Molina, *Strong regularity and generalized inverses in Jordan systems*, Comm. Alg. **20**(7), 1917-1936 (1992).

[20] G. Frobenius, *Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch Linear Substitutionen*, Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, 994-1015 (1897).

[21] A.M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math. **19** 171-172 (1967).

[22] R. Harte, and M. Mbekhta, *On generalized inverses in C*-algebras.* Studia Math. **103**, 71-77 (1992).

[23] I. N. Herstein, *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. **81**, 331-341 (1956).

[24] L.K. Hua, *On the automorphisms of a sfield*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **35** 386-389 (1949).

[25] N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Coll. Publ. **39**, Providence, Rhode Island (1968).

[26] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. Math. **54**, 325-338 (1951).

[27] J. P. Kahane, W. Zelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. **29** 339-343 (1968).

[28] W. Kaup, *A Riemann Mapping Theorem for bounded symmentric domains in complex Banach spaces*, Math. Z. **183**, 503-529(1983).

[29] W. Kaup, *On Grassmannians associated with JB.-triples*, Math. Z., **236**, 567-584 (2001).

[30] J.J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Math. J. **38** 367-381 (1996).

[31] I. Kovacs,*Invertibility-preserving maps of C*-algebras with real rank zero*, Abstr. Appl. Anal. Volume 2005, Number **6** (2005), 685-689.

[32] B. Kuzma, *Additive idempotence preservers*, Linear Algebra Appl., **355** 103-117 (2002).

[33] CK. Li, Stephen Pierce, *Linear Preserver Problems*, Amer. Math. Monthly **108** 591-605 (2001).

[34] O. Loos, *Jordan Pairs*, Lecture Notes in Math., vol. **460**, Springer-Verlag, Berlin, (1975).

[35] M. Marcus, R. Purves, *Linear transformations on algebras of matrices: the invariance of the elementary symmetric functions*, Canad. J. Math. **11**, 383-396 (1959).

[36] M. Mbekhta, *A Hua type theorems and linear preserver strongly problems*, Proc. Roy. Irish Acad. **109A** (2), 109-121 (2009).

[37] M. Mbekhta, *A survey on linear (additive) preserver problems*, Preprint.

[38] C.D. Meyer Jr., J.M. Shoaf, *Updatind finite Markov chains by using techniques of group inverse*, J. Statist. Comput. Simulation **11** 163-181 (1980).

[39] Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras Vol. 1*, Cambridge University Press, (1994).

[40] C. Pearcy, D. Topping, *Sums of small numbers of idempotents*, Michigan Math. J. **14** 453-465 (1967).

[41] A. R. Sourour, *Invertibility preserving linear maps on* $\mathcal{L}(X)$, Trans. Amer. Math. Soc. **348** 13-30 (1996).

[42] B. Simeon, C. Fhrer, P. Rentrop, *The Drazin inverse in multibody system dynamics*, Numer. Math. **64** 521-539 (1993).

[43] K. Ylinen, *Compact and finite-dimensional elements of normed algebras*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, No. **428**, (1968).

[44] N. Wong, *Triple homomorphisms of* C^**-algebras*, Southeast Asian Bull. Math. **29**, 401-407 (2005).

[45] W. Zelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math. **30**, 83-85 (1968).