Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen VII. Número 2 — 30 de enero de 2014

Ilustración de Julese Férat

«Julio Verne y las matemáticas»

¿Quién no conoce a Julio Verne? Parece difícil encontrar una persona que no haya leído alguna de sus novelas o no haya visto una película basada en alguna de sus obras. ¿Quién no recuerda *Viaje al centro de la Tierra*, *Veinte mil leguas de viaje submarino* o *La vuelta al mundo en ochenta días*?

Si bien este autor fue un pionero del género de la ciencia ficción, su obra no está carente de conocimiento científico, en ocasiones anticipando hechos años antes de su descubrimiento.

En esta edición del boletín, José Ramón Sánchez, profesor del *IES Los Ángeles*, nos presenta algunos conceptos matemáticos que aparecen en una de sus obras menos conocidas por el gran público, *Las aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África austral*.

(Artículo completo en la página 8)

Concurso de problemas

Elena Romero Cañabate

En esta edición de nuestro habitual concurso de problemas, la solución correcta que el jurado ha considerado como la mejor elaborada ha sido la enviada por la alumna del *IES Alborán*, Elena Romero Cañabate.

Asimismo, dado el buen nivel de algunas de las soluciones recibidas, se ha decido otorgar dos accésit a las soluciones realizadas por Andrés Mateo Piñol del *IES Bahía de Almería* y Jorge Martín Espinosa del *IES Fuente Nueva* de El Ejido.

¡Enhorabuena a los premiados!

(Solución completa en la página 6)

Editorial

No cabe duda que en los convulsos tiempos que vivimos la necesidad de una formación lo más completa posible es imprescindible para situarse adecuadamente en el mercado laboral. Si bien es cierto que una buena formación académica no garantiza, desgraciadamente, la inmersión laboral; también es cierto que los trabajos que no necesitan formación son cada vez más escasos.

Es conjeturable, pero a su vez cercano a la realidad, que el mercado laboral va a necesitar cada vez más personas cuya formación incluya un máster.

En lo que respecta a los egresados en Matemáticas, la oferta de formación vía máster es amplísima, tanto en España como en el extranjero. En este sentido, la Universidad de Almería ofrece, entre otros, el *Máster Interuniversitario de Matemáticas*, que permite completar la formación matemática adquirida durante el grado y, para todos aquellos interesados en la docencia preuniversitaria, el *Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*.

Las necesidades de los mercados económicos varían, pero un punto fijo será la formación y ésta no acaba al terminar un grado.

Resumen

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Semana de la Ciencia 2013

Cartel anunciador

La edición 2013 de la *Semana de la Ciencia* en la Universidad de Almería se celebró del 4 al 8 de noviembre y en ella han participado más de 1000 alumnos de bachillerato de toda la provincia.

En concreto, se desarrollaron 34 actividades distintas, entre las que hubo talleres, visitas guiadas, conferencias y prácticas de laboratorio. Como es habitual, las matemáticas han estado presentes en este evento de divulgación científica con actividades tales como el taller *Matemáticas en las series de TV*, el *Show de pompas de jabón* del Mago Moebius, la jornada *Soluciones matemáticas para la empresa almeriense* y la conferencia *La estadística y el azar en nuestra vida.*

Entrega del premio al ganador del concurso de problemas

De izquierda a derecha: Juan Jesús Roldán, el alumno premiado y Rafael López

El pasado 15 de noviembre de 2013 se entregó el premio de nuestro concurso correspondiente al problema propuesto en el número de abril de 2013 del Boletín (vol. VI, nº 3). El ganador, Javier Suárez Quero, estudiaba segundo de Bachillerato en el *IES Aguadulce* cuando se presentó al concurso y actualmente estudia el Grado en Matemáticas en la UAL. Este excelente estudiante también ha recibido uno de los premios a los mejores expedientes otorgados por la Universidad de Almería.

El acto de entrega del premio tuvo lugar en la sala de grados del CITE III de la Universidad de Almería.

Javier estuvo acompañado por su familia, los editores del Boletín, Juan J. Moreno Balcázar y Fernando Reche, el vicedecano de la Facultad, Enrique de Amo, y sus profesores de Matemáticas de Bachillerato, Rafael López y Juan Jesús Roldán.

Soluciones matemáticas para la empresa almeriense

El 8 de noviembre de 2013 se celebró en la Universidad de Almería (UAL) la primera jornada *Soluciones matemáticas para la empresa almeriense* en la que se logró poner en contacto un área de investigación básica como las matemáticas con otro aspecto eminentemente aplicado, que es la empresa o el mundo económico.

El impulsor de esta actividad y vicedecano del centro, el profesor Enrique de Amo, resaltó que los matemáticos *«pueden aportar a la empresa capacidad de crítica, organización o búsqueda de soluciones mediante enfoques alternativos».*

Mesa inaugural

Se contó con la presencia de Peregrina Quintela Estévez, catedrática de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, que presentó su trabajo *Soluciones matemáticas para empresas innovadoras.* Además, los catedráticos de la UAL Andrei Martínez Finkelshtein y Blas Torrecillas Jover impartieron las conferencias *Aplicaciones matemáticas en el conocimiento de la visión humana* y *La investigación en matemáticas en la UAL: una perspectiva en el corto, medio y largo plazo*, respectivamente.

La jornada finalizó con la celebración de la mesa redonda *Diálogo empresa y matemáticas en Almería hoy*, en la que intervinieron, junto a los tres ponentes anteriores, Víctor Cruz Medina, director de innovación y competitividad de la *Cámara de Comercio de Almería*, Sergio Arráez Bonilla, presidente de la *Asociación de Jóvenes Empresarios* de Almería y Valentín Tijeras García, director de productos e innovación de *Cosentino.*

En las conclusiones de la jornada se hizo hincapié en que este tipo de encuentros son importantes para los empresarios, para los matemáticos y, sobre todo, para los futuros egresados en matemáticas que *«verán la empresa desde una perspectiva nueva y diferente para ellos».*

Por último, cabe destacar que tras la jornada, varios profesores del Departamento de Matemáticas de la UAL están organizando un equipo, denominado *Centro de Desarrollo y Transferencia*, a través del cual se desarrollarán proyectos de transferencia.

Viernes Científicos

Cartel anunciador

El 22 de noviembre, en el marco de las sesiones de los *Viernes Científicos* y dedicada al *Año de las Matemáticas del Planeta Tierra*, se celebró la conferencia titulada *Modelización y predicción: un paseo matemático por la forma (biológica) y el fondo (estelar)*, impartida por el profesor Juan Soler, catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada.

Las actividades de los *Viernes Científicos* pueden consultarse en *www.viernescientificos.org*.

ISSN 1988-5318

Noticias matemáticas

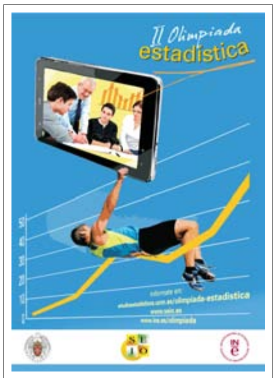
Breakthrough Prize in Mathematics

Zuckerberg (izq.) y Milner

El fundador de los dos premios más grandes del mundo otorgados por logros científicos en los campos de la física fundamental y las ciencias de la vida, el empresario ruso Yuri Milner anunció su intención de, junto con el director de facebook, Marc Zuckerberg, crear un premio similar para los matemáticos, el *Breakthrough Prize in Mathematics* (Premio Progreso en Matemáticas). Con el premio se distinguirá a personas que realicen grandes logros en matemáticas y la dotación será de tres millones de dólares, según publicó *The New York Times* [1].

Por tanto, se trata del mayor premio económico que recibirá un matemático, superando a la *medalla Fields*, al *premio Abel* y al *premio Nobel* (recibido por matemáticos en otras disciplinas). Los primeros laureados serán anunciados en el año 2014.

II Olimpiada Estadística



Cartel anunciador

El *Instituto Nacional de Estadística*, la *Facultad de Estudios Estadísticos* de la Universidad Complutense de Madrid y la *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa* convocan la Segunda Olimpiada Estadística para estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Ciclos Formativos de grado medio.

Se puede encontrar más información en la página web de la actividad [2].

XVI edición de los cursos Thales-CICA

La *SAEM Thales* ha convocado, en su edición de 2014, diferentes cursos de formación a distancia.

El periodo de matriculación finaliza el 6 de febrero de 2014 y el periodo lectivo será desde el 12 de febrero hasta el 21 de junio. Más información en la página web de la sociedad [3].

XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Cartel anunciador

Del 3 al 5 de julio de 2014 se celebrará en Baeza (Jaén) el *XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* cuyo lema en esta edición será: *«El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido»*.

El congreso se realizará en la Universidad Internacional de Andalucía, en la sede Antonio Machado.

La inscripción mediante cuota reducida puede realizarse hasta el 15 de mayo del 2014.

Más información en *thales.cica.es/xvceam*.

Olimpiadas matemáticas en la Universidad de Almería

Participantes en una de las pruebas

La comunidad matemática de la Universidad de Almería, a través de la *división de Ciencias Experimentales* y del *Departamento de Matemáticas*, apoya decididamente la celebración de las olimpiadas matemáticas que existen para alumnado preuniversitario.

De esta forma, el pasado 17 de enero se celebró en nuestro centro la fase local de la *Olimpiada Matemática* que organiza la *Real Sociedad Matemática Española* para alumnado de bachillerato.

Los numerosos participantes disfrutaron de un agradable día en las instalaciones universitarias y recibieron camisetas y bolígrafos como recuerdo de su participación.

Por otra parte, el próximo 22 de marzo se celebrará la fase provincial de la *XXX Olimpiada Matemática Thales* destinada a alumnado de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se prevé la asistencia de unos 400 estudiantes y la entrega de premios será el 26 de abril.

[1] *www.nytimes.com/2013/12/14/science/3-million-prizes-to-go-to-mathematicians.html?_r=0*.
[2] *www.ine.es/explica/olimpiada2014_inicio.htm*.
[3] *mileto.cica.es/cursos/node/40*.

 ISSN 1988-5318

Nos visitaron. . .

En el transcurso de estos meses nos han visitado numerosos investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: Seidon Alsaody, de la Universidad de Uppsala (Suecia); Driss Bennis, de la Universidad de Rabat (Marruecos); Fernando Corbalán, de la Universidad de Zaragoza; Peregrina Quintela Estévez, de la Universidad de Santiago de Compostela; Constantin Năstăsescu, de la Universidad de Bucarest (Rumanía); Juan Soler, de la Universidad de Granada; María del Carmen Listán García, de la Universidad de Cádiz; Berke Kaleboğaz, de la Hacettepe University (Turquía) y Herbert Alonso Dueñas, de la Universidad Nacional de Colombia.

EXPERIENCIA DOCENTE

Más que matemáticas...

Conchi Majarón
UCMAS Spain (Almería)

No descubrimos nada nuevo cuando afirmamos que en el sistema educativo español tenemos un problema con el aprendizaje de las matemáticas, de hecho, hace poco nos despertábamos con la noticia de que España era la última a nivel europeo en comprensión matemática, y la penúltima en comprensión lectora, según un estudio realizado a adultos de entre 16 y 65 años.

2014 ***en el ábaco***

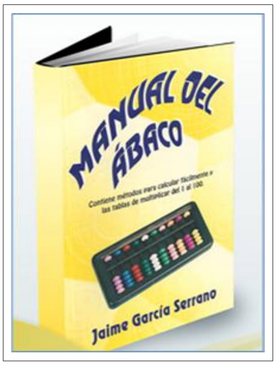
Aunque un *teorema* resulta tener las mismas hipótesis o tesis aquí que en Shanghái, la concepción de cómo enseñar las matemáticas, de cómo transmitir ese *teorema*, varía mucho de un lugar a otro del planeta.

Son muchos los factores que intervienen en la asimilación de un concepto matemático: la concentración, la agilidad mental, el bagaje previo... Existen numerosos estudios, referencias y reportajes sobre este problema que afecta a la mayoría de nuestros alumnos. En general, el bajo rendimiento en muchas asignaturas, no sólo en matemáticas, está relacionado con la falta de atención y concentración. La capacidad de concentración juega un papel primordial a la hora de comprender y posteriormente razonar con lo aprendido, tanto al enfrentarse a nuevos conceptos matemáticos como a otros de cualquier índole.

De todos es sabido que enseñar a alguien a concentrarse no es tarea fácil, tendemos a pensar en esto como si de algo innato se tratase, como una capacidad que algunos tienen más desarrollada por cuestiones genéticas. Pero como cualquier otra habilidad: pintura, escultura, fondo físico, elasticidad... se puede trabajar en ella para optimizar los resultados.

Algo tan simple, antiguo y rudimentario como la práctica de la aritmética con un ábaco puede proporcionar una vía de mejora del rendimiento intelectual de nuestros niños, no solamente en la escuela, sino también fuera de ella.

¿Son sólo matemáticas? Claro que son matemáticas, puesto que con el ábaco representamos los números y hacemos operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división), pero también su uso hace que los niños mejoren sus habilidades matemáticas básicas.



Libro de Jaime García

Hay libros específicos sobre manejo del ábaco, como el del colombiano Jaime García Serrano, y también programas basados en este instrumento, como por ejemplo *UCMAS* [4] (siglas en inglés de *Universal Concept of Mental Arithmetic System*).

Este programa, que está dirigido a niños y niñas entre 5 y 13 años, se basa en la aritmética mental y se sirve del ábaco tradicional japonés como herramienta principal.

Alberto Coto

No se trata de llegar a ser como Jaime García Serrano o el asturiano Alberto Coto García, conocidos como calculadoras humanas y con *récord Guinness* de cálculo mental. Los objetivos del programa *UCMAS* son el desarrollo de habilidades intelectuales, empezando por las habilidades relacionadas con el cálculo aritmético pero, además, trabajando para estimular y potenciar su capacidad de concentración, su creatividad y las memorias visual, auditiva y cenestésica. Desde el inicio del curso 2013, Almería ya cuenta con este programa innovador para toda la provincia.

Referencias

[1] García Serrano, J. *Manual del ábaco*, 2004.

[2] Coto García, A. *Desarrolla tu agilidad mental*, 2011.

■

[4] *www.ucmas.es*.

ISSN 1988-5318

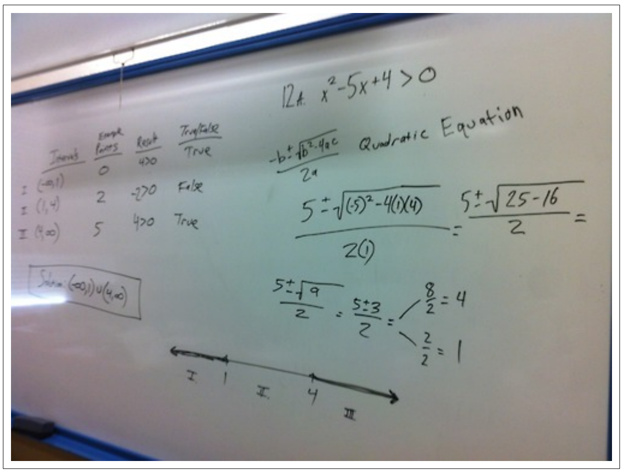
ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Bilingual mathematics

An adventure in numbers and words

Cecilia Jazek
IES Sierra Nevada (Fiñana, Almería)

Is it funny to be using the quadratic equation some 20 years later after I first learned it? Yes, but it's also a lot of fun! And I'm super glad I have the opportunity to study high school math again (and actually get paid to do it).



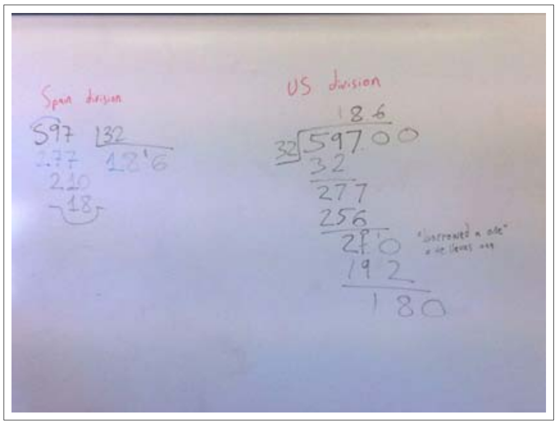
This is my first year as an English language assistant at a bilingual high school located in Fiñana, Almería (a small village of approximately "1000" people in southern Spain). As part of my job, I attend bilingual math classes and help the students with their English. But in helping them practice their English, I also have to relearn a lot of the basic math concepts I've long forgotten. I have to admit, though: I do sometimes cheat and write the equation on my hand since I kept forgetting it.

My favorite math class is with the fourth-years (aged 16) because they can pretty much understand most of what I say in English, so I can actually teach them new math concepts and they can basically follow along. Of course, the actual math teacher follows up and clarifies *"en español"* when they are not understanding something.

In the other years, we're still working on the pronunciation of numbers, etc. First years (aged 12) just starting working with negative numbers. Second years are working on fractions. And third years so far have been working on word problems. Word problems are interesting because the math is very simple (multiplication, addition, subtraction) but first they have to translate the whole problem. So if they have to figure out *"How many apples are left?"*, they have to know that *"left"* doesn't just mean the opposite of *"right"*.

Here are some of the differences I've discovered between Spanish and US math:

- First of, it's *"Maths"*, not *"Math"* (a UK thing). I try to call it *"mathematics"* to avoid complicating things.
- While the quadratic equation is the same, the equation for a straight line is a little different. Ingrained in my memory from my youth is $y = mx + b$, but here they use n as the y-intercept, so I have to remember to write $y = mx + n$ because I do not want to confuse them.
- They say *"minus 7"* instead of *"negative 7"* (also a UK thing, I think. Though sometimes they pronounce it *"meenus"*, which is definitely a Spanish thing).
- They do not use the poundsign (#) as an abbreviation for *"number"*.
- Students generally don't use graphing calculators at the high school level.
- Long division is totally backwards. In general, I think they do things in their head that we write out, and we do things in our head that they write out.



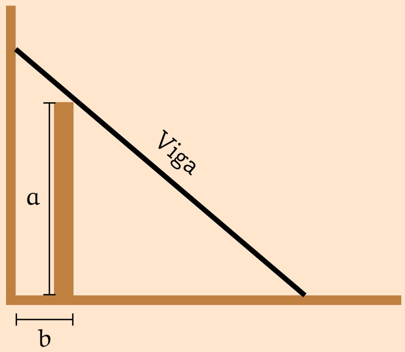
- The decimal is a comma and a comma is a decimal. For example, 6.378 is six thousand three hundred and seventy-eight. And 6,25 is six and a quarter. So it is entirely likely to see a number this like: 6.345.903,44 (Weird, huh?)
- Most importantly, they write their "1" with a cap on top instead of just a straight line. This requires that you write your "7" with a dash or cross-hatch through it, lest they mistake your "7" for a "1". This is kind of a tough habit for me to break. Many of my 7's are mistaken for 1's, which can definitely lead to problems in a math class.

And I am sure there are other differences that I will discover along the way. While math is sometimes called the universal language, there are certainly a few differences that can prove to be a little tricky for bilingual students who are navigating english and math lessons at the same time. Though it's difficult at times, it's been a very interesting exercise for all of us. And, at the end of the day, I do think it's really helping to integrate the english language into their daily lives. And me, I am having a great time! ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Calcula la longitud mínima de una viga que queremos utilizar para apuntalar un muro apoyándola en el suelo, y que tiene que superar una columna paralela al mismo de a metros de alta que está a b metros del muro tal y como se aprecia en la figura.



Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un ***iPod shuffle*** y un regalo relacionado con las matemáticas.

¡La solución más elegante u original tiene premio!

Para participar, sólo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es ***antes del 18 de abril***. Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior

En esta edición del concurso, el jurado ha decidido conceder el premio a Elena Romero Cañabate, estudiante del *IES Alborán* de Almería.

Además, dada la calidad de sus soluciones, se ha decidido otorgar dos accésit a las enviadas por Andrés Mateo Piñol del *IES Bahía de Almería* y a Jorge Martín Espinosa del *IES Fuente Nueva* de El Ejido.

Problema propuesto en el número anterior

Dada la sucesión:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Se pide

a) Dar una relación de recurrencia para el término general a_n de esta sucesión.

b) Sabiendo que $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es finito, calcular el valor de ℓ.

A continuación presentamos la solución al problema planteado enviada por la ganadora.

Solución del problema:

De la sucesión $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ se puede observar que cada término es el resultado de la suma de los dos anteriores. Por ello, teniendo $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, para $n \geq 3$ la fórmula general es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

El valor de ℓ en $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ se puede calcular «jugando» con dicha expresión y se obtiene así:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \end{aligned}$$

De lo que se deduce que

$$\ell = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{1}$$

 ISSN 1988-5318

Además, podemos observar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}}. \qquad (2)$$

Puesto que tanto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ como $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ son cocientes de un término y su anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell,$$

y, por lo tanto, de (2) deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{\ell}.$$

Por ello, volviendo a la expresión (1), tenemos que

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = \ell + 1 \Rightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0,$$

ecuación cuyas soluciones son:

$$\ell_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \ell_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Al ser una sucesión de términos positivos, se desecha la solución negativa ℓ_2, por lo que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que coincide con Φ, el número de oro. ∎

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Leonardo de Pisa

Discreto y sabio Maestro

Antonio Rosales Góngora
IES Bahía de Almería (Almería)

Leonardo de Pisa

La matemática inició un fuerte desarrollo con la traducción al latín de los *Elementos* de Euclides, de las obras de aritmética y álgebra de Al-Khwarizmi, del *De mesura circuli* de Arquímedes, del *Liber trium fratrum* de geometría greco árabe del siglo IX. Renace la matemática con un espíritu nuevo, casi anti griego, no siendo ya fin en sí misma y disfrute espiritual para el *otium* del filósofo, sino deliberadamente práctica. En este ambiente intelectual utilitario de finales del siglo XII se formó matemáticamente Leonardo de Pisa, el hijo de Bonaccio.

Leonardo nació alrededor de 1170. En el prefacio de su primer libro, el *Liber abaci*, 1202, informa sobre sus orígenes matemáticos. De pequeño, su padre, que estaba al frente de la oficina de aduanas establecida por la *Orden Mercatorum* de Pisa en Bugia (Argelia), le hizo seguir un curso sobre el cálculo posicional hindú. Así empezó su afición, que se incrementó con sus viajes por Egipto, Siria, Sicilia, Grecia y que aprovechó para trabar discusiones y certámenes (*disputationis didici conflictum*) y para estudiar los *Elementos* de Euclides que tuvo siempre como modelo de rigor.

Así nace, entre contratos, cuentas y viajes, el *Liber abaci*, primer e insuperado modelo de *summa matemática* medieval en el que el autor pone todo cuanto sabía de aritmética y álgebra *«a disposición de la gens latina, de manera que fuese bien poco lo que de tal temática pudiese quedar fuera del libro»*. El título quizás sea desacertado si recordamos que, para griegos y romanos, el ábaco era un instrumento de cálculo. Leonardo reserva la denominación de ábaco para designar, en general, la aritmética–álgebra aplicada.

Extracto de Liber abaci

Quizás la actividad matemática de Leonardo habría concluido con el *Liber abaci* de no ser por la intervención del Maestro Doménico, un filósofo de la Corte de Federico de Suabia, que le animó a componer su segunda *«summa»*, la *Practica geometrie*. La obra se completó en 1220 y constituye un corpus de excepcional valor didáctico. El autor pretende ofrecer un *«perfectum documentum»* válido para los aficionados por las *«subtilitates»* como para los prácticos.

A la obra de fray Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* queda confinado el recuerdo de la obra de Leonardo. A Pacioli le interesa un problema considerado en ella, *«Hállame un número cuadrado que, sustraída de él cierta cantidad, siga siendo cuadrado, y añadiéndosele la misma cantidad aún sea cuadrado»*.

Traducido a una doble ecuación, quedaría:

$$y^2 - c = x^2,$$
$$y^2 + c = z^2,$$

siendo, según la terminología de Pacioli (retomada después por Tartaglia y Cardano), c el número congruente e y^2 el cuadrado congruo. Afirma Pacioli que, pese a todos los esfuerzos de Leonardo, las soluciones del problema del congruo se conviene que hay que buscarlas por tanteos (*Hoc opus, his labor est*).

El binomio Diofanto–Leonardo ha aparecido a menudo entre los historiadores al preguntarse por las fuentes de

 ISSN 1988-5318

Fibonacci; pero la diversidad de los procedimientos seguidos por ambos para resolver problemas similares así como la amplitud de estos en Diofanto y lo limitados, aunque geniales, en Leonardo confirma la originalidad e independencia de Leonardo respecto a Diofanto.

Al descubrirse en 1853 en la *Biblioteca Ambrosiana* de Milán los originales de los libros escritos por Leonardo, el mundo científico se llenó de sorpresa y admiración pues no se imaginaba que un geómetra del siglo XIII hubiese superado hasta tal punto a Diofanto y a los árabes como para no ser superado hasta el siglo XVII por Fermat.

Leonardo es conocido entre los matemáticos por Fibonacci y, más que por su obra, por la serie recurrente $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ puesta por Leonardo al margen del texto del problema de los conejos: *«¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año, si comenzamos con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su vez a los dos meses de vida?»*

Se han descubierto importantes propiedades de la serie conocida como *serie de Fibonacci* y sus elementos como *«números de Fibonacci»*, pero lo cierto es que el apellido Fibonacci nunca lo tuvo en vida. El motivo del nombre es la contracción de *Filius Bonacci*.

El apellido Fibonacci le ahorró en todo caso el uso del de Bigollo, bastante menos respetable, aunque más legal, y que ha supuesto algún mal entendido pues en un principio se pensaba que era un apodo que significaba holgazán, gandul.

En realidad Bigollo no era un mote y los pisanos no solo apreciaban a Leonardo sino que se sentían orgullosos de su capacidad, honrándole con el titulo de *«Magister»* que enaltecía a los doctos de la Corte Imperial.

En 1228 Leonardo se dedicó a redactar de nuevo el *Liber Abaci*, inducido una vez más por las insistencias de un filósofo cortesano, Miguel Escoto, el mago astrólogo traductor de Aristóteles, al que Dante gratificará con el Infierno. ■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Julio Verne y las matemáticas

José Ramón Sánchez García
IES Los Ángeles (Almería)

Julio Verne

Hace nueve años tuvimos la oportunidad de conmemorar el cuarto centenario de la primera edición del Quijote, por cuyo motivo todo tipo de instituciones, con la RAE a la cabeza, desplegaron una variedad de actividades que incluyeron numerosos seminarios, ediciones especiales de la obra, ensayos y títulos relacionados con la misma. Recordemos que la FESPM (Federación Española de Profesores de Matemáticas) no fue ajena a los fastos, y también aportó su grano de arena publicando un cuadernillo de actividades que tenían como denominador común el texto cervantino.

Pero en ese mismo año, en 2005, también se conmemoraba otro centenario que pasó mucho más desapercibido, el de la muerte de Julio Verne (1828-1905). Y desde la óptica de la divulgación de la ciencia en general, y las matemáticas en particular, la obra del autor francés merece un reconocimiento de deuda permanente.

Por mencionar sólo algún ejemplo, en *La vuelta al mundo en 80 días* es fundamental para el desenlace la relación entre la medida del tiempo y la posición del sol; y en *De la Tierra a la Luna* nos detalla las características de velocidad y orientación que debería tener el hipotético proyectil, razonando, con argumentos geográficos perfectamente rigurosos y con 100 años de antelación (fue escrita en 1865), por qué el lugar ideal para lanzar un cohete a nuestro satélite debería ser la península de La Florida, donde se encuentra actualmente el *Cabo Cañaveral* de la NASA. Pero hay una novela de Verne que tiene un trasfondo matemático realmente importante, aunque no sea de las más populares, la que lleva por título *Aventuras de tres rusos y tres ingleses en el África austral* (1872).

El hilo argumental de esta novela es el trabajo de investigación que han de realizar 6 científicos (los que dan título a la obra), con el objetivo de determinar la longitud del meridiano terrestre y, por ende, definir con la mayor exactitud posible la medida real del metro. Por aquel entonces esta no era cuestión baladí, ya que el *Sistema Métrico Decimal* daba sus primeros pasos y era necesario contar con una definición rigurosa de la unidad de longitud.

En el Capítulo 4 el autor hace un repaso a los intentos de la humanidad de establecer una medida de longitud universal e invariable: desde Eratóstenes y Aristóteles (que definió el estadio como la cienmilésima parte de la distancia del polo al ecuador) hasta Picard, quien en 1669 comenzó a emplear los métodos más rigurosos para la medición del grado terrestre, determinando la longitud del arco entre París y Amiens (curiosamente, la ciudad donde moriría Julio Verne): 57 060 toesas (unos 111 210 metros). A partir de ahí continúa con los científicos que se fueron encargando de la tarea: Cassini, Lahire, Lacaille y Méchain, que obtuvieron la medida de 57 027 toesas (111 146 metros) para el valor medio de un arco de 1° en Francia.

Pero fue en 1790, tras la Revolución Francesa, cuando la Asamblea Constituyente decreta que sea la Academia de Ciencias la encargada de inventar el modelo para todas las medidas y todos los pesos. A propuesta de científicos de la talla de Lagrange, Laplace, Monge y Condorcet, se estableció por primera vez la definición del metro como la *«diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano»*. Ahora bien, esa definición también tenía sus inconvenientes, y es que como la forma del planeta no es uniforme, el grado terrestre en Laponia, por ejemplo, no medía lo mismo que en Perú. A pesar de eso, Julio Verne nos da la información más actualizada que tenía en aquella época, y nos cuenta que al cuadrante terrestre se le adjudicaba una medida de 10 000 856 metros.

Uno de los metros patrón de mármol instalados en París

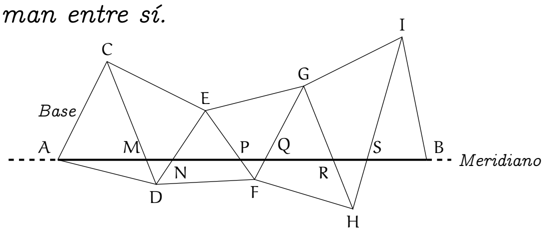
A partir de entonces gran parte de los países tomaron la determinación de reconocer la superioridad del nuevo sistema de medidas, y por tanto lo adoptaron oficialmente (España, Bélgica, Grecia, Holanda, las antiguas colonias españolas, etc.), casi todos... excepto Inglaterra. Según cuenta Verne, el Gobierno inglés quiso cerciorarse por sus propios científicos mediante nuevas operaciones geodésicas, de modo que entabló conversaciones con el Gobierno ruso (en situación parecida) y resolvieron formar una comisión formada por tres científicos ingleses (el coronel Everest, sir John Murray y William Emery), y tres rusos (Mathieu Strux, Nicolás Palander y Michel Zorn).

Y aquí empiezan las aventuras propiamente dichas. Sin reparar en todas las tribulaciones que acompañaron a estos científicos, lo interesante es el método que siguieron. Merece la pena reproducir parte del Capítulo 7 por su valor pedagógico:

> *«La medición de uno o más grados, directamente, por medio de reglas metálicas unidas entre sí por sus extremos sería un trabajo absolutamente irrealizable desde el punto de vista de la exactitud matemática (...) es posible proceder de una manera más exacta dividiendo todo el terreno que debe atravesar la línea de un meridiano en cierto número de triángulos aéreos, cuya determinación es relativamente poco difícil.*
>
> *»Estos triángulos se obtienen apuntando, por medio de instrumentos precisos, el teodolito y el círculo repetidor, a señales naturales o artificiales, tales como campanarios, torres, faroles, postes y cosas similares. A cada señal encaja un triángulo, cuyos ángulos son dados por los instrumentos mencionados, con una precisión matemática.(...) Ahora bien, según un principio geométrico, un triángulo cualquiera es enteramente conocido, cuando se conoce uno de sus lados y dos de sus ángulos, puesto que se puede sacar inmediatamente el valor del tercer ángulo y la longitud de los otros dos lados. Por consiguiente, tomando por base de un nuevo triángulo un lado de los triángulos ya formados, y midiendo los ángulos adyacentes a esta base, se tendrán así nuevos triángulos que serán sucesivamente llevados hasta el límite exacto del arco que se ha de medir.*
>
> *»Por este método se obtienen, por lo tanto, las longitudes de todas las rectas comprendidas en la red de triángulos y por una serie de cálculos trigonométricos se puede fácilmente determinar la magnitud del arco meridiano que atraviesa la red entre las dos estaciones terminales...»*

La edición con la que yo leí esta novela es de la Editorial Molino, Barcelona, 1956. En ella, en el Capítulo 8, aparece una nota al pie que paso a reproducir a continuación por lo que tiene de didáctica. Son unas líneas de *Nuevas lecciones de Cosmografías*, de M.H. Garcet:

> *«Sea* AB *el arco del meridiano cuya longitud se trata de hallar. Se mide con el mayor cuidado una base* AC*, yendo de la extremidad* A *del meridiano a una primera estación* C*. Luego se toma de un lado y otro del meridiano, otras estaciones* D, E, F, G, H, I, *etc., desde cada una de las cuales pueden verse las estaciones vecinas y se miden con el teodolito los ángulos de cada uno de los triángulos* ACD, CDE, EDF, *etc., que forman entre sí.*



> *»Esta primera operación permite resolver esos diversos triángulos, toda vez que en el primero se conoce* AC *y los ángulos y se puede calcular el lado* CD*; en el segundo, se conoce* CD *y los ángulos, pudiéndose asimismo calcular el lado* DE*; (...) y así sucesivamente. Luego se determina en* A *la dirección del meridiano por el procedimiento ordinario, y se mide el ángulo* MAC *que esta dirección hace con la base* AC*; por lo*

ISSN 1988-5318

> *tanto, se conoce en el triángulo* ACM *el lado* AC *y los ángulos adyacentes y se puede calcular el primer fragmento* AM *del meridiano. Se calcula, al mismo tiempo, el ángulo* M *y el lado* CM*; se conoce, pues, en el triángulo* MDM *[querrá decir* MDN*] el* DM *(*CD − CM*) y los ángulos adyacentes, y se puede calcular el segundo trozo* MN *del meridiano, el ángulo* N *y el lado* DN*.*
>
> *»Se conoce entonces también el triángulo* NEP*, el lado* EN *(*DE − DN*), y los ángulos adyacentes y se puede calcular el tercer fragmento* NP *del meridiano y así sucesivamente. Es fácil comprender que de este modo se podrá determinar por partes la longitud del arco total* AB*».*

Esquemáticamente, este es el *modus operandi* de la expedición durante todo el periplo. Como resultado final obtuvieron que un grado de meridiano en el África austral medía 11 765 113 metros, que comparado con los datos de Lacaille de 1751, la diferencia era de una toesa (1949 m), o lo que es lo mismo, un error relativo inferior a dos diezmilésimas.

Un ejemplo más de que las matemáticas y la literatura no están en orillas opuestas como algunos pretenden hacernos creer, sino que forman parte de un mismo conocimiento humano.

Referencias

[1] Verne, J. (1956). *Aventuras de tres rusos y tres ingleses.* 3ª edición, Barcelona, Editorial Molino.

■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Emmy Noether

El eslabón olvidado en la teoría de la relatividad

Mercedes Siles Molina
Universidad de Málaga

De todos es conocido que existe una *teoría de la relatividad*, incluso que hay una *teoría de la relatividad general.* También se nos viene a la mente la fórmula $E = mc^2$, de tantas maneras explotada, y la imagen de Albert Einstein, no siempre a la altura de lo que sus investigaciones supusieron para el conocimiento humano. Lo que ya no es tan popular es que el descubrimiento de estas teorías significó un triunfo de las matemáticas, un discurrir codo con codo de física y matemáticas para explicar la naturaleza, una carrera de egos masculinos, y un quehacer suave pero contundente aportado por una de las personas más espléndidas que ha conocido la ciencia: Emmy Noether.


Emmy Noether

Ella ha sido una de las personas más eminentes en la historia de las matemáticas. Porque con su brillante visión puso orden en algunos ámbitos de la ciencia en estrecha conexión con las matemáticas, y en las matemáticas mismas. Porque creó una escuela que ha ido dejando su huella desde que ella comenzó su andadura como investigadora y a través de los años. Porque aún pervive en el quehacer de las matemáticas; también en el de la física.

No habríamos de contar que era una mujer. Al menos, no habríamos de detenernos demasiado en este detalle. Para la inteligencia, para la ciencia, para la cultura en definitiva, no habría de ser sustancial el sexo de quien a ellas hace sus aportaciones. Sin embargo, no se puede comprender la vida de Emmy Noether sin destacar esta circunstancia.

Nació el 23 de marzo de 1882 en la ciudad alemana de Erlangen. Su padre era matemático y su madre de familia rica. Estos hechos fueron sustanciales en su vida; el primero porque, seguramente de esta manera, se acercó a la ciencia a la que se dedicó; el segundo porque sin dinero ni se era nada entonces, ni se podía aspirar a una carrera relevante; menos aún siendo mujer. De hecho, Emmy Noether pudo sobrevivir gracias a la fortuna familiar, jamás por un salario digno justamente ganado.

En aquella época, a las mujeres no se les permitía ir a la universidad, se consideraba que podían subvertir el orden establecido; mucho menos dar clase, y se estimaba que su cerebro no era apto para la ciencia.


Felix Klein

Emmy Noether fue instruida en las mismas labores que el resto de las niñas de su clase social. Se la encaminó para que diera clases de inglés y de francés. Sin embargo, quiso asistir como oyente en la Universidad de Erlangen y entre 1900 y 1902 comenzó a preparar una prueba de madurez que era requisito previo para acceder a la universidad. Pasó el examen en 1903, en Núremberg; ahora el problema era que alguna universidad la admitiera. Gracias a la amistad de su padre con Klein pudo asistir como oyente en Gotinga. Aquí, sólo cursó asignaturas de matemáticas, impartidas por un elenco difícil de superar.

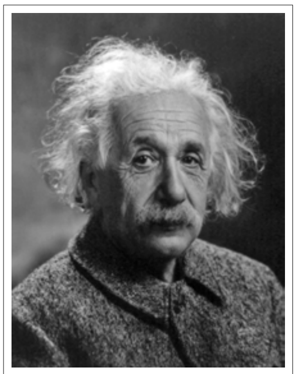
Para hacerse una idea del ambiente de la época, las

ISSN 1988-5318

siguientes palabras del marido de la matemática Grace Chisholm, miembro del *Club de Matemáticas de Gotinga*, a la propia esposa (juntos hicieron 220 artículos), pueden ser ilustrativas: *«Lo cierto es que ambos deberíamos firmar nuestros artículos, pero si así fuera, ninguno de los dos se vería beneficiado. No. Para mí los laureles ahora, y el conocimiento. Para ti, solo el conocimiento. En la actualidad no puedes desarrollar una carrera pública. Yo puedo, y lo hago»*.

Durante muchos años, Emmy Noether estuvo trabajando en el *Instituto Matemático de Erlangen*, sin tener un puesto oficial, y sin cobrar ningún salario; no importaron sus grandes logros, el reconocimiento con el que contaba (en 1908 ingresó en el *Círculo Matemático de Palermo*, y en 1909 fue admitida en la *Asociación Alemana de Matemáticos*). En la primavera de 1915, ya habiendo hecho el famoso teorema que lleva su nombre, recibe una invitación de Hilbert y Klein para ir a Gotinga. La razón es que la guerra ha dejado fábricas, minas y universidades vacías de hombres que las hagan funcionar.

Cuando contaba con 37 años de edad, después de haber sido docente más de diez años, y de haber dirigido varias tesis, había alcanzado el nivel más bajo de reconocimiento académico, un grado que la mayoría de profesores lograba en la veintena, al comenzar su carrera. No sería hasta el otoño de 1919 que daría un curso anunciado sólo con su nombre, sin la coletilla de asistente de nadie. No sería hasta los 41 años de edad que cobraría su primer sueldo, sin derecho a pensión.



Albert Einstein

En 1912, Einstein se esforzaba por obtener la teoría de la relatividad general; reconocía que jamás había trabajado tan intensamente y que nunca hubiera pensado que dicha teoría de la relatividad necesitara de una sofisticada tecnología matemática. Él fue el primer sorprendido por el necesario aporte de las matemáticas, él, que había considerado los aspectos más sutiles de las matemáticas como «un mero lujo».

Emmy Noether entró a formar parte de un equipo de matemáticos dedicados de manera intensiva a resolver la teoría de la relatividad general. Einstein por un lado, Hilbert liderando por otro, adquirían conocimientos matemáticos el primero, de física el segundo, y se contaban sus avances mientras competían por el preciado logro. Ambos pensaron que lo habían encontrado, y ambos se dieron cuenta de que sus argumentos contenían errores. En este ambiente frenético fue en el que se integró Emmy Noether, en Gotinga. Y fue de manera casi inesperada que encontraría el significado imprevisto de la relatividad general: la conservación de la energía estaba en conexión con la simetría. Sus resultados fueron presentados en 1918 por Felix Klein y demostraron ser fundamentales para la teoría general de la relatividad. Einstein escribiría a Hilbert, al conocer los resultados de Noether: *«Estoy impresionado de que alguien pueda comprender estos asuntos desde un punto de vista tan general. No le haría ningún daño a la vieja guardia de Gotinga si aprendiese de ella un par de cosas»*.

A los 35 años Emmy Noether contaba con el reconocimiento de los científicos más eminentes de su época y había demostrado uno de los resultados más profundos de la física matemática: el *teorema de Noether*. Sus dos grandes pasiones fueron la investigación y la dedicación a sus estudiantes. Había en ella gran entrega y creatividad, aunque esta descripción que hacían de ella sus allegados nos parece raquítica, dada la altura de sus logros, entre los que también se cuenta la creación de la llamada álgebra moderna.

Fue a finales del XIX que se inició la especialización, separando, como si de disciplinas inconexas se tratara, las matemáticas y la física, así como otras. Es a partir de entonces que se piensa en Emmy Noether como en algebrista, que se olvida su fundamental contribución a la física.

De grandes olvidos se nutre la ciencia, se nutren los hombres. Mucha ha de ser la grandeza de una mujer para que su voz siga perviviendo. Tal es el caso de Emmy Noether, a quien hemos querido rendir un pequeño tributo.

Su historia habría de servirnos para no olvidar los aspectos éticos de la ciencia. Tratemos de ser capaces de desarrollar nuestro espíritu crítico, nuestro sentido de la ética, de inculcárselo a nuestros alumnos. Para reconocer los méritos a quien los tiene, para elevar el papel de las chicas, reconocer sus capacidades y apoyarlas, lo mismo que ellas han apoyado y apoyan. Hagamos que este sea el tiempo de ellas. Todos nos enriqueceremos. ■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Contribución de las redes bayesianas a la gestión sostenible del suelo agrícola

Ana Devaki Maldonado
Estudiante de doctorado (Universidad de Almería)

En el estudio de las Ciencias Ambientales es habitual encontrar problemas complejos de regresión, donde la meta es conocer el valor de una variable de interés (variable objetivo) dados los valores de otras variables observadas (variables descriptoras). Este tipo de problemas ha sido resuelto tradicionalmente mediante modelos de *regresión*

 ISSN 1988-5318

lineal múltiple, aunque recientemente se están aplicando con éxito los modelos gráficos probabilísticos conocidos como *redes bayesianas*.

Un caso de estudio de aplicación de las redes bayesianas es la vinculación entre la concentración de nitrato de las aguas superficiales (variable objetivo) y los usos del suelo agrícola circundante (variables descriptoras), ya que la agricultura es considerada uno de los principales contribuyentes de la contaminación de las aguas debido al uso de fertilizantes.

Una vez construido el modelo a partir de datos reales (*escenario a priori*), las redes bayesianas permiten conocer el tipo de relación que existe entre las variables y contestar a la pregunta ¿qué usos agrícolas presentan una relación directa/inversa con la concentración de nitrato? Además, debido a que las redes bayesianas son capaces de resolver problemas de regresión, se pueden plantear escenarios futuros de evolución del territorio, conocidos como *escenarios a posteriori*, para realizar predicciones, como por ejemplo ¿qué ocurrirá con la concentración de nitrato si aumenta la superficie de cultivo del olivar en un x %?

La estructura del modelo de red bayesiana construido para nuestro caso de estudio se muestra en la Figura 1, donde se observa que está formado por 7 variables de tipo continuo: una variable objetivo (*Nitrato*, en mg/L) de la que parten un conjunto de variables descriptoras (seis *Usos agrícolas*, en %).

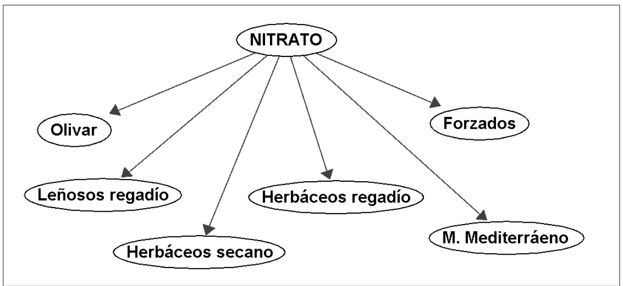


Figura 1. ***Estructura del modelo de Red Bayesiana, formada por 1 variable objetivo (Nitrato) y 6 variables descriptoras (Olivar, Leñosos en regadío, Herbáceos en secano, Herbáceos en regadío, Mosaico Mediterráneo y cultivos Forzados)***

El modelo obtenido estableció que todas las variables *Uso agrícola* presentan una relación directa con el *Nitrato*, excepto *Mosaico Mediterráneo*, cuya relación es inversa. Es decir, las aguas superficiales están sujetas a contaminación por nitratos en función del tipo de uso agrícola adyacente.

Para plantear los *escenarios a posteriori*, se introducen nuevos valores en algunas de las variables descriptoras, es decir, se alteran los porcentajes de uso agrícola, con la finalidad de observar la respuesta de la variable objetivo (Nitrato) ante esos cambios. Los dos escenarios planteados (Tabla 1) son:

1. Intensificación agrícola.
2. Incremento de la heterogeneidad.

Escenarios	Oli	L.Reg	H.Sec	H.Reg	M.Med	For
Intensificación agrícola	▲	▲	▲	▲	▼	▲
Incremento heterogeneidad	▲	▲	▲	▲	▲	▼

Tabla 1. ***Variables involucradas en cada escenario a posteriori. Los triángulos hacia arriba (verde) indica que aumenta el % de ocupación del uso agrícola, mientras que los triángulos hacia abajo (rojo) indica que disminuye***

La Figura 2 muestra la respuesta de la variable *Nitrato* ante cada escenario propuesto, en forma de funciones de densidad. Los resultados muestran que si sucede el *Escenario de Intensificación agrícola*, habrá una mayor probabilidad de hallar altas concentraciones de nitrato en aguas superficiales; mientras que si se produce el *Escenario de Incremento de la heterogeneidad*, habrá una mayor probabilidad de hallar bajas concentraciones de nitrato en aguas superficiales.

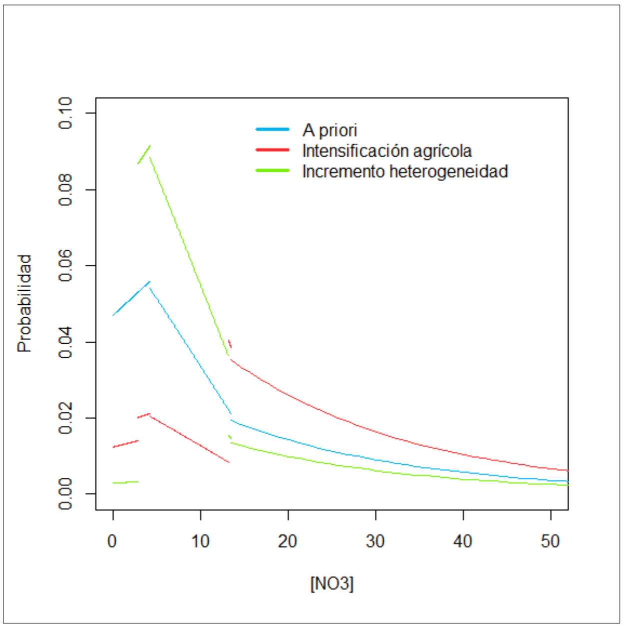


Figura 2. ***Resultados de la regresión por red bayesiana. Las funciones de densidad representan la probabilidad de que la variable Nitrato tome un valor determinado en cada uno de los escenarios: a priori (línea azul) y a posteriori (líneas roja y verde).***

Estos resultados, que son acordes con numerosos estudios, presentan la ventaja de ser más precisos, ya que las redes bayesianas proporcionan funciones de densidad en lugar de valores concretos.

Los escenarios propuestos ponen de manifiesto que la gestión del suelo agrícola es clave en la protección de las aguas superficiales. De este modo, las redes bayesianas pueden ayudar al desarrollo de políticas agrarias respetuosas con el medio ambiente, como el fomento de los sistemas agrícolas heterogéneos. ■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Siguiendo a Fermat

Antonio Serafín Andújar Rodríguez
Universidad de Almería

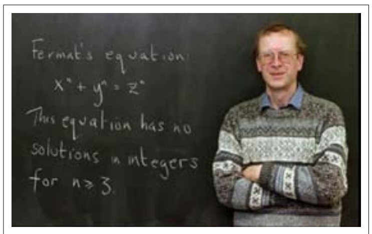
Pierre de Fermat

Puede argumentarse acerca de la utilidad de los juegos y pasatiempos matemáticos; algunos piensan que esto es una pérdida de tiempo; no obstante, este tipo de cuestiones para otros muchos constituye una auténtica diversión o un entrenamiento de las habilidades matemáticas.

En este artículo presentamos brevemente algunas ideas girando alrededor de la más conocida conjetura de Fermat, en principio sin utilidad aparente, que reza como sigue:

Para todo natural $n > 2$*, no existen* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *que verifiquen la igualdad*

$$a^n + b^n = c^n. \tag{3}$$



Andrew J. Wiles

Si nos atenemos al puro interés material, Andrew J. Wiles, que demostró su veracidad en el año 1995, sí que obtuvo utilidad: el premio en metálico establecido en su testamento por el matemático Paul Wolfskehl.

En una línea parecida, en el artículo *Matemáticas y Google*, que apareció en el número 1 del volumen II de este Boletín, se recoge como *Google* propuso acertijos matemáticos en carteles en las autopistas para seleccionar personal.

Además, la búsqueda de la demostración del que ya se puede llamar con propiedad *«último teorema de Fermat»*, contribuyó al desarrollo de importantes teorías matemáticas en años posteriores. Poco podía imaginar Fermat que lo que sólo era uno más entre varios ejercicios de aritmética daría que hablar hasta el siguiente milenio.

Otros muchos matemáticos de renombre dedicaron parte de su tiempo a «divertirse» con juegos matemáticos (Mersenne, Euler, Bernouilli,...).

Por ejemplo, Euler construyó su genial cuadrado mágico con connotaciones ajedrecísticas que puede verse en el artículo *El salto del caballo*, publicado en este boletín en el número 3 del volumen VI. Formaba parte de un estudio que presentó a la *Academia de las Ciencias* de Berlín, por el que habría ganado un importante premio en metálico, pero renunció al mismo por motivos éticos dado que ejercía de Director de Matemáticas de dicha Academia.

Es muy posible que los juegos y pasatiempos matemáticos sean casi tan antiguos como las matemáticas. Hay referencias a problemas aislados de este tipo en distintos pueblos de la antigüedad, aunque parece ser que el primer libro dedicado a recreaciones matemáticas es el *Lilavāti*, escrito por el matemático hindú Bhāskara II en el siglo XII, dedicado a su hija.

Volviendo a Fermat, hay que reseñar que no todas sus conjeturas llegaron a buen puerto. Por ejemplo, conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ eran primos. El propio Euler probó la falsedad de esta afirmación pues $2^{2^5} + 1$ no es primo (note que con los medios técnicos actuales hubiera sido inmediato comprobar esto y de hecho, Fermat no habría lanzado tal afirmación de haber dispuesto de ellos).

Leonhard Euler

Sin embargo, Euler estuvo interesado en demostrar o refutar el teorema (3) llegando a encomendar un registro en la casa de Fermat en busca de la demostración, parece ser que con poco éxito [5].

Lo cierto es que las ideas de Fermat y su relanzamiento por Euler han dado pie a que muchos matemáticos hicieran variaciones o ampliaciones. Aún hoy, hay bastantes conjeturas «ampliadas» no resueltas. Un aspecto bastante atractivo es que cualquier aficionado a los pasatiempos matemáticos puede trabajar sobre ellas —sin necesidad de ser especialista—; por supuesto con más facilidad buscando contraejemplos que demostraciones de certeza. Veamos algunas básicas.

Ternas pitagóricas

Un problema clásico es el de hallar ternas de enteros positivos verificando que $a^2 + b^2 = c^2$.

Hay varias formas de construir ternas pitagóricas distintas. Por ejemplo, a partir de una conocida $\{a, b, c\}$, las ternas $\{ka, kb, kc\}$, con $k \in \mathbb{N}$, forman una colección infinita de números pitagóricos, aunque no aportan variedad, solo constatan la homogeneidad de la fórmula.

Para evitar las multiplicidades, nos preguntamos por las ternas que empiecen por un número primo (mayor que 2).

Si ponemos la relación como $c^2 - b^2 = a^2$ o, equivalentemente, $(c+b)(c-b) = a^2$, y hacemos que $a > 2$ recorra el conjunto de números primos en orden creciente, sólo cabe una opción para esta descomposición en factores:

 ISSN 1988-5318

$$\left.\begin{array}{l} c+b=a^2 \\ c-b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-1}{2} \\ c=\dfrac{a^2+1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, para cada primo $a>2$ hay una terna que, además, es única. Esto nos da también una colección infinita de ternas más variadas que las anteriores. Véase la Tabla 1, con las ternas que empiezan con un número primo (por columnas).

a	3	5	7	11	...
b	4	12	24	60	...
c	5	13	25	61	...

Tabla 1

Hay más opciones, de hecho hay un método general para hallar todas las ternas pitagóricas [3].

Para el caso $n=2$, ¿pueden considerarse más de dos sumandos?

Es decir, nos preguntamos si, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $n>2$, existen números naturales $\{p_1,p_2,\dots,p_n,q\}$ tales que

$$p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2=q^2.$$

Para probar que esta conjetura es cierta, construimos la Tabla 2 con la primera columna igual que en la Tabla 1 ($a_1=3, b_1=4, c_1=5$). A partir de ahí, el primer elemento de cada columna es el último de la anterior ($a_i=c_{i-1}, i>1$) y los otros dos deben cumplir $c_i^2-b_i^2=a_i^2$. Así, la tercera columna verifica: $c_3^2-b_3^2=13^2$, o bien, $(c_3-b_3)(c_3+b_3)=13^2$, de donde la única solución es $b_3=84, c_3=85$.

Para la cuarta tendríamos: $c_4^2-b_4^2=85^2 \Rightarrow (c_4-b_4)(c_4+b_4)=85^2=5^2\cdot 17^2$. Ya no están determinados unívocamente b_4 y c_4, pues hay varias posibilidades para elegir los factores. Recordando que b_4 y c_4 deben ser positivos, las opciones son:

$$\begin{aligned} c_4+b_4&=85^2, & c_4+b_4&=5\cdot 17^2,\\ c_4-b_4&=1. & c_4-b_4&=5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4+b_4&=17^2, & c_4+b_4&=5^2\cdot 17,\\ c_4-b_4&=5^2. & c_4-b_4&=17. \end{aligned}$$

Los cuatro sistemas tienen soluciones enteras. Si decidimos, por ejemplo, tomar sistemáticamente la descomposición en que $c_i-b_i=1$ tenemos, en este caso, $b_4=3612$, $c_4=3613$.

a_i	3	5	13	85	...
b_i	4	12	84	3612	...
c_i	5	13	85	3613	...

Tabla 2

Se comprueba fácilmente que

$$\begin{aligned} 3^2+4^2&=5^2,\\ 3^2+4^2+12^2&=13^2,\\ 3^2+4^2+12^2+84^2&=85^2,\\ &\vdots \end{aligned}$$

Ahora, definiendo:

$$\begin{aligned} p_0&=3,\\ p_i&=b_i,\ \text{si } i\geq 1, \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} p_0&=3,\ p_1=4,\\ p_{i+1}&=\frac{(p_i+1)^2-1}{2},\ \text{si } i>0 \end{aligned}$$

se obtiene una solución al problema planteado:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i^2 \ = \ (p_n+1)^2.$$

Generalizaciones de Euler

Ya sabemos que la suma de dos cubos no es otro cubo perfecto pero, si hacemos coincidir el número de sumandos y el exponente de la potencia, ¿se cumplirá? Es decir, *¿existirán cuatro números enteros positivos* a,b,c,d *tales que* $a^3+b^3+c^3=d^3$*?*

Sin esfuerzo, se obtiene rápidamente la relación: $3^3+4^3+5^3=6^3$. Curiosamente, sigue un paralelismo con la primera suma de dos cuadrados ($3^2+4^2=5^2$).

Surge de forma lógica una generalización, conjeturada por Euler:

Para cualquier $n\in\mathbb{N}$*, existen números enteros positivos distintos* $\{a_1,a_2,...,a_n,b\}$*, tales que*

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n=b^n. \tag{4}$$

Comprobamos que la supuesta facilidad de construcción desaparece. Para $n=4$, no se consigue ninguna relación rápida al estilo de los cuadrados o los cubos. Ni siquiera entre los primeros 100 enteros positivos, encontramos solución.

Sin embargo, para $n=5$, se tienen varios conjuntos de números menores o iguales que 100 verificando la relación (4). Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 7^5+43^5+57^5+80^5+100^5&=107^5,\\ 19^5+43^5+46^5+47^5+67^5&=72^5. \end{aligned}$$

Volviendo al caso de exponente 4, pusimos a trabajar a MATLAB® buscando entre los primeros 1000 números naturales y encontramos resultados, eso sí, bastante menos atractivos:

$$\begin{aligned} 30^4+120^4+272^4+315^4&=353^4,\\ 240^4+340^4+430^4+599^4&=651^4. \end{aligned}$$

Hasta 1911 no se encontró una de estas quintuplas, concretamente la primera de las de arriba, descubierta por R. Norrie.

Buscando una relación con la expresión (3), Euler conjeturó que no debían de existir enteros positivos a,b,c,d,e

 ISSN 1988-5318

que cumpliesen: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ ni tampoco $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$ y, así sucesivamente.

Sin embargo, fue refutada, en 1967, para $n = 5$ por Lander y Parkin:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5,$$

y para $n = 4$, en 1988, cuando Noam Elkis construyó un método para hallar infinitos contraejemplos, empezando por el siguiente [2]:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Hay muchas alternativas aún por demostrar o refutar, por lo que animamos al lector a comprobar otros valores de n, variar el número de sumandos de modo que no coincida con el exponente, etc. Las referencias [1] y [4] contienen información reciente de variantes sin comprobar.

Hay varias formas de plantear un algoritmo de búsqueda. Algunos pueden ser muy ineficientes e, incluso, agotar la memoria. Los archivos preparados para comprobar las conjeturas que aquí se han mencionado están a disposición de cualquier lector interesado.

Referencias

[1] Gerbicz, Robert et al.: *All solutions of the Diophantine equation* $a^6 + b^6 = c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6$*, for* $a, b, c, d, e, f, g < 250000$ *found with a distributed Boinc project*, 2011 [5].

[2] López Pellicer, Manuel: *El último teorema de Fermat: un enigma entre Cálculo e ideas desde* 1630 *a* 1994, Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat., Vol. 103, 2, 2009.

[3] Perelman, Yakob: *Álgebra recreativa*, Editorial Mir, 1978.

[4] Piezas III, Titus: *Euler's Extended Conjecture and* $a^k + b^k + c^k = d^k$ *for* $k > 4$, 2005 [6].

[5] Torrecillas Jover, Blas: *Fermat, el mago de los números*, Editorial Nívola, 2003.

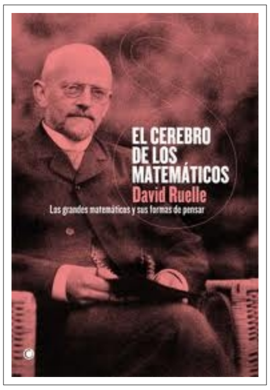
■

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

El cerebro de los matemáticos.

Los grandes matemáticos y sus formas de pensar.

David Ruelle.



Ficha Técnica
Editorial: Antoni Bosch.
Colección Conjeturas.
203 páginas.
ISBN: 978-84-95348-48-7.
Año: 2012.

David Ruelle es un físico matemático conocido entre otras cosas por sus aportaciones a la *teoría del caos*. En este libro, que está dirigido a lectores de cualquier nivel de experiencia en matemáticas, trata de arrojar alguna luz sobre el proceso creativo que siguen los matemáticos a la hora de elaborar sus teorías. La distribución del libro en 23 breves capítulos hacen que su lectura sea ágil, dejando a la elección del lector el profundizar en sus contenidos con las notas que aparecen al final del libro.

El autor alterna por un lado algunas reflexiones sobre el proceso matemático de creación, que en algunos casos pueden llegar a ser polémicas, y por otro, algunos detalles biográficos de investigadores que han pasado a la historia de las matemáticas: Felix Klein, Alan Turing, Kurt Gödel, Isaac Newton, el colectivo Boubarki,... En algunos casos no sólo se examinan sus aportaciones, sino que se intenta explicar cómo sus personalidades han influido en su labor investigadora.

De entre todos los matemáticos que aparecen en este libro destacamos a Alexander Grothendieck que fue durante años compañero del autor en el IHES de París. Este matemático realizó numerosas e importantes aportaciones a diversas ramas de las matemáticas, sobre todo a la geometría algebraica, hasta su prematuro retiro de la vida académica.

Son múltiples y variados los temas que se abordan en este libro (similitudes entre el cerebro y los ordenadores, uso de la lógica en la fundamentación de la matemáticas,...), pero cada uno de ellos sirve para aclarar algún aspecto de la investigación matemática.

En definitiva, el resultado es un libro muy interesante que contiene aspectos novedosos, incluso para los matemáticos profesionales, explicados por alguien sabedor de que la investigación científica en ocasiones está más relacionada con la personalidad de los investigadores que con los métodos propios de cada disciplina.

Antonio Morales Campoy
Universidad de Almería

[5] *arxiv.org/pdf/1108.0462v1.pdf.*
[6] *www.oocities.org/titus_piezas/Timeline1.htm.*

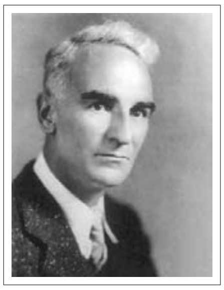
ISSN 1988-5318

Citas Matemáticas

«Todos los asuntos humanos se basan en las probabilidades, y esa verdad se da en todas partes.»

Charles Sanders Peirce (1839–1914), filósofo y físico estadounidense.

«"Obvio" es la palabra más peligrosa en matemáticas.»



Eric Temple Bell (1883–1960), matemático y escritor escocés.

Páginas web de interés

Matemática básica para la vida

clinicadematematica.com

A un gran número de personas les interesa la matemática que se puede aplicar en la vida real, en el día a día. Este tipo de matemáticas, especialmente a nivel básico y de Educación Secundaria, puede apreciarse en la dirección *clinicadematematica.com*. Los autores son los licenciados en matemáticas Hilario Donato y Guillermina Tacuri. Fomentan la competencia de trabajo autónomo y provocan que el lector se divierta aplicando o comprobando cómo se pueden aplicar las ideas básicas de esta ciencia a los problemas cotidianos.

Se hace especial hincapié en temas estadísticos tales como distribuciones de frecuencias o interpretaciones y construcciones de diferentes gráficos y en temas de representación geométrica en el plano o en el espacio como el estudio de posiciones relativas de puntos, rectas y planos o bien los diferentes movimientos de figuras en el espacio.

Para ilustrar las diferentes figuras geométricas o situaciones problemáticas se usan construcciones arquitectónicas reales tales como modernos edificios o milenarias pirámides. La herramienta permite comentar a los lectores los distintos aspectos que consideren interesantes y se puede seguir a través de las redes sociales.

Para cada tema existe una seleccionada batería de problemas propuestos y resueltos, casi siempre con alguna curiosidad histórica o utilidad práctica. Además, se contemplan diversas sesiones de aprendizaje para distintos conceptos apoyadas en amenos vídeos tutoriales que hacen más interactiva la página. Para cada tema hay distintos niveles de profundización. En definitiva, es una buena oportunidad de acercar las matemáticas a la sociedad.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

ISSN 1988-5318

Acertijos

En el país de las naranjas

El cura y su hermana, el médico y su mujer, repartieron nueve naranjas y tocaron a tres.

¿Es esto posible?

(En el próximo número aparecerá la solución).

Solución al acertijo del número anterior

Se trataba de calcular la relación existente entre la masa del planeta *Kepler-22b* y la masa de la Tierra suponiendo que ambos cuerpos tienen la misma densidad. Sean M_T, V_T y R_T la masa, el volumen y el radio de la Tierra, respectivamente. De forma análoga, M_K, V_K y R_K denotarán la masa, el volumen y el radio de *Kepler-22b*. De acuerdo con los datos que aportaba el enunciado del problema $R_K = 2{,}4R_T$. Por otra parte, la (supuesta) igualdad entre las densidades de ambos planetas nos dice que

$$\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_K}{V_K}.$$

De este modo,

$$\frac{M_k}{M_T} = \frac{V_k}{V_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_K^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{(2{,}4R_T)^3}{R_T^3} = 13{,}824$$

o, equivalentemente, $M_K = 13{,}824 M_T$. La masa de *Kepler-22b* sería, si su densidad coincide con la terrestre, 13,824 veces la masa de la tierra, exactamente la misma relación que existe entre sus volúmenes. Hemos de señalar, no obstante, que la densidad de este planeta extrasolar es por ahora desconocida y el dato que acabamos de obtener sobre su masa probablemente no se corresponde con la realidad.

CURIOSIDAD MATEMÁTICA

La invasión zombi matemática

Irene Morales Martín
María Dolores Sánchez García
Estudiantes de Matemáticas de la UAL

En la asignatura de Cálculo Numérico (Licenciatura de Matemáticas) impartida por el profesor Juan José Moreno Balcázar, nos propusieron un ejercicio con un modelo matemático que nos llamó mucho la atención. En este modelo, sacado de un artículo de Munz et al. [1], se predice qué ocurriría en una invasión zombi. A continuación vamos a explicar el modelo.

Partimos de los siguientes grupos de poblaciones:

- $h(t)$ es el número de humanos.
- $z(t)$ es el número de zombis.
- $r(t)$ es el número de «zombis muertos».

La relación entre estos grupos es la siguiente: un zombi puede convertir a un humano en zombi; los humanos no pueden matar a un zombi, pero pueden mandarlo temporalmente a la clase de «zombis muertos».

El modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} h'(t) = -\beta h(t)z(t), \\ z'(t) = -\alpha h(t)z(t) + \beta h(t)z(t) + \mu r(t), \\ r'(t) = \alpha h(t)z(t) - \mu r(t), \end{cases}$$

donde α es la proporción de zombis eliminados cuando se encuentran con humanos, β la proporción de humanos que se convierten en zombis y μ la proporción de zombis muertos que pasan a zombis.

Veamos qué ocurriría en una invasión zombi. Consideramos una población de 200 personas, a la que llegan 50 zombis y el tiempo t se mide en meses. Tomando los datos $\alpha = 0{,}005$, $\beta = 0{,}01$ y $\mu = 0{,}02$; y utilizando el *método de Adams-Bashforth* de 2 pasos en el intervalo $[0, 10]$, obtenemos la Figura 1.

Hemos utilizado este método porque es con el que habíamos trabajado, pero podríamos haber utilizado cualquier otro, como por ejemplo las órdenes *ode* del programa MATLAB®.

A la vista de estos resultados, podemos concluir que la población humana será invadida por los zombis antes de 5 meses y desaparecerá. Finalmente convivirán los zombis con los zombis muertos hasta que llegue un momento en el que toda la población sea zombi.

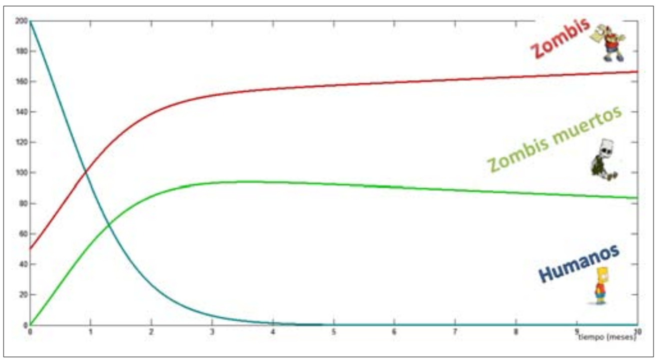


Figura 1: Evolución de las poblaciones en el tiempo

Como comentario final, tenemos que decir, que al modelo podríamos añadirle algunas mejoras.

Por un lado, no tiene en cuenta los nacimientos y muertes de los humanos. También asume que las personas se contagian instantáneamente, en este caso podríamos considerar un periodo de latencia (por ejemplo de 24 horas). En otro caso, añadiríamos un grupo de cuarentena en el que los zombis que estén en dicho grupo, no pueden infectar a humanos. Incluso, si se encontrara una cura podrían tenerse en cuenta otras variaciones del modelo en las que, o bien, al curarte pudieras volver a infectarte, o bien, pudieras ser inmune al ataque de los zombis.

Estos cambios aparecen detallados en el artículo [1]. Se basan en los modelos de predicción de enfermedades SIR y sus mejoras.

Referencias

[1] Munz, P, Hudea, I, Imad, J, Smith, R.J. *When zombies attack!: Mathematical Modelling of an Outbreak of Zombie Infection.* Nova Science Publishers (2009) 133-150.

■

Responsables de las secciones

- Actividad Matemática en la UAL
  - *Actividades organizadas*: Pedro Martínez (pmartine@ual.es).
  - *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno (balcazar@ual.es) y Fernando Reche (freche@ual.es).
  - *Foro abierto y preguntas frecuentes*: María Gracia Sánchez-Lirola (mgsanche@ual.es).
- De la Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria:
  - *Experiencias docentes*: Eva Acosta (evagavilan1@yahoo.es), Nuria Pardo (penuria@gmail.com), Miguel Pino (mpinomej@gmail.com) y Tomás Ruiz (targ53@hotmail.com).
  - *Enseñanza bilingüe en Matemáticas*: María del Carmen Castro (mccastroalferez@gmail.com).
- Divulgación Matemática
  - *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo (edeamo@ual.es), Florencio Castaño (fci@ual.es) y Blas Torrecillas (btorreci@ual.es).
  - *Problemas de interés*: Alicia Juan (ajuan@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez (misanche@ual.es).
  - *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez (mgamez@ual.es), Juan Antonio López (jlopez@ual.es), Francisco Luzón (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón (asalmero@ual.es).
  - *Mujeres y matemáticas*: Isabel Ortiz (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez (mramirez@ual.es).
  - *Cultura y Matemáticas*: José Luis Rodríguez (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez (jramon_sg@hotmail.com).
  - *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales (amorales@ual.es) y Fernando Reche (freche@ual.es).
  - *Páginas web de interés*: José Carmona (jcarmona@ual.es) y José Escoriza (jescoriz@ual.es).
  - *Citas matemáticas*: Juan Cuadra (jcdiaz@ual.es) y Alicia Juan (ajuan@ual.es).
  - *Pasatiempos y curiosidades*: Antonio Andújar (andujar@ual.es) y José Antonio Rodríguez (jarodrig@ual.es).
  - *Acertijos*: Juan Carlos Navarro (jcnav@ual.es).
- Territorio Estudiante: Alicia Cabrerizo (aliciacl92@gmail.com), José Gálvez (josegal-2@hotmail.com), Laura Martín (lmartinvalverde@gmail.com), Beatriz Navarro (beatriznavic@gmail.com) y Paula Pérez (perezlopezpau@gmail.com).

 ISSN 1988-5318