Las Pruebas PISA como oportunidad para la mejora de la metodología docente

Juan Francisco Romero del Castillo

Máster en Matemáticas

Convocatoria de Septiembre 2016

Dirigido por el Profesor Dr. D José Escoriza López

A mi director, D. José Escoriza, por sus sugerencias y ayuda.

A mi madre y mi hermana, por su apoyo constante.

Y, sobre todo,

a Ainhoa,

Alicia,

Antonio Jesús,

Antonio,

Carmen

Cristina,

Cristina,

Juan Antonio,

Juan Manuel,

Lourdes,

y Rosario

por su ayuda desinteresada y por sus enseñanzas.

Índice

Introducción

Desde que era pequeño tuve claro que quería ser profesor de Matemáticas. Siempre me ha parecido la rama del conocimiento humano más interesante, por ser la clave de la Ciencia, la llave que nos permite conocer, interpretar y comprender el mundo que nos rodea. Desde la interacción de los átomos hasta el movimiento de los planetas, todo está gobernado por sus leyes, que poco a poco han sido desveladas por los grandes genios de las Matemáticas a lo largo de la historia, desde Babilonia hasta nuestros días.

Por ello, me he esforzado durante todos estos años para llegar a ese objetivo. Primero, he cursado la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada y, luego, preparando las pruebas de acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, que aprobé en el año 2008, tras casi dos años como profesor interino.

Durante prácticamente la totalidad de mis años en el mundo de la docencia he desarrollado mi trabajo en la localidad de Macael, en el IES Juan Rubio Ortiz, en el que llevo como profesor desde 2007 de forma ininterrumpida, lo que me ha otorgado el privilegio de desarrollar una metodología de trabajo de forma continuada, pues permanecer tanto tiempo en el mismo centro permite ver, con mejor perspectiva, mi trayectoria como docente, permitiendo potenciar los aspectos que funcionan y corregir los que no.

Asimismo, he desarrollado diferentes responsabilidades, como la de Coordinador de Coeducación, Jefatura del Departamento de Actividades Extraescolares y las que ostento actualmente, Coordinador de Tecnologías de la Información y Comunicación y Jefatura del Departamento de Autoevaluación, Formación e Innovación Docente.

Ha sido a través de esta última responsabilidad que he conocido qué significa el procedimiento de "Autoevaluación" de los centros y, más concretamente, la "Evaluación" de nuestro trabajo. A través de la información proporcionada por la Administración en forma de "Informes de Indicadores Homologados" y el trabajo hecho en el propio centro es como, poco a poco, he ido comprendiendo los procesos de autoevaluación de los centros y su importancia de cara a la mejora de nuestro trabajo. Si bien es cierto que al principio me sentí un poco abrumado y atemorizado ante la cantidad de datos proporcionados en dichos informes, al cabo del tiempo y tras mucho pelearme con ellos, todos esos datos se fueron organizando y cobraron pleno sentido y valor.

Con esta idea en mente, propuse a mi director de Trabajo Fin de Máster, D. José Escoriza López, la posibilidad de desarrollar mis investigaciones en este ámbito, el de los procesos de autoevaluación en los centros educativos. Con buen criterio y mejor idea, él me sugirió que podría investigar sobre la evaluación de las Matemáticas en mi centro, lo que me permitiría, a su vez, "autoevaluarme" en lo anteriormente dicho, potenciar lo que se hace bien y corregir lo mejorable. Me propuso investigar sobre un método estandarizado y globalmente aceptado, como pueden ser las pruebas "PISA", organizadas por la OCDE, y ponerlas en relación con el trabajo que realizo en mi centro, con sus especificidades propias. Asimismo, me proporcionó un guión sobre el que empezar a trabajar y algunas sugerencias para organizarme al comienzo de un trabajo de esta envergadura. Con toda esta información, me puse a investigar, a leer y, en la medida de lo posible, pensar cómo hacer, que es lo más difícil en nuestro trabajo.

Lo primero de todo fue acercarme a PISA 2012, pues es en esa edición la última en la que se prestó especial atención a las Matemáticas. Es, sin duda, un gran choque acercarse a la terminología y metodología de PISA, haciéndose necesario una lectura detenida y profunda de los documentos que detallan el Marco de la prueba, hasta que la amalgama de ideas que están presentes en dichos documentos empieza a tomar forma en la cabeza. Asimismo, también fue interesante consultar los resultados en España y un gran número de artículos sobre competencias, pues me ayudaron a asentar todas las ideas que brotaron de PISA y a decidir una forma de abordar el problema en cuestión.

La segunda parte de la preparación del trabajo fue recopilar un número suficiente pero no excesivo de estímulos PISA, cubriendo los contenidos que quedaban por desarrollar pero sin olvidarlos una vez impartidos, reforzando el carácter compacto de las Matemáticas, entendido como ciencia en la que, en cualquier momento, se pueden necesitar los conocimientos "ya pasados". Por ello, presté en la elección especial atención a los estímulos más cercanos a la Aritmética y al Álgebra, sin olvidar los de Estadística y Probabilidad y los de Funciones. Aunque incluí algunos estímulos relacionados con la Geometría, no pude desarrollarlos por falta de tiempo. Dicha elección se hizo buscando representar los distintos contextos considerados por PISA, personal, profesional, social, científico, procurando además que pudieran ser de interés para el alumno.

Posteriormente, comenzamos el proceso de aplicación de las pruebas, corrección de las mismas, búsqueda de carencias en el alumnado, obtención de conclusiones y posibles variaciones en la metodología de trabajo. Todo este proceso nos llevó desde enero hasta fin de curso. En un principio, los alumnos aceptaron de buen grado la realización de las pruebas pero, luego, se fueron cansando, por lo que debieron ser convenientemente espaciadas.

Con todos estos elementos, comenzamos la redacción del trabajo. En un primer lugar, se quiere situar al lector en el contexto de las competencias, especialmente de la Competencia Matemática, partiendo de su génesis debida al proyecto DeSeCo, hasta su descripción en PISA. También consideramos las publicaciones realizadas en este ámbito por la Unión Europea y la presencia de las competencias en las diferentes leyes educativas en las que aparecen, LOE y LOMCE a nivel nacional y la LEA a nivel autonómico. Hemos de señalar que, siendo la de competencia una idea relativamente nueva, ha experimentado muchos cambios y podríamos decir que aún es un concepto no totalmente asentado.

Posteriormente, abordamos la estructura y metodología de las pruebas PISA, mostrando al lector su origen, su relación con la Competencia Matemática, el estudio y planteamiento que se hace de la misma, así como la metodología aplicada en dichas pruebas. Es especialmente interesante comprobar como muchos elementos del curriculum LOMCE se inspiran en la estructura de PISA, sugiriéndonos que, a día de hoy, se debe prestar atención no solo a los contenidos, sino al porqué de esos contenidos y, por tanto, su aplicabilidad.

Una vez enunciados los objetivos de este trabajo, mostramos las coordenadas del mismo, describiendo el centro y sus características, alumnado con el que se va a trabajar así como la metodología del estudio. A continuación, se exponen los distintos estímulos de PISA realizados por los alumnos, se comentan los resultados obtenidos, su relación con el currículum LOMCE y se enuncian las conclusiones a las que se ha llegado tras este análisis.

Por último, y antes de las conclusiones finales, se exponen las variaciones en la metodología que se han realizado con los alumnos. Dichas variaciones se inscriben en tres ejes: insistir en lo básico, que los alumnos hagan Matemáticas y aprovechar las herramientas tecnológicas. Debemos insistir en lo básico porque cada alumno tiene que contar con un cuerpo de contenidos, conceptos y procedimientos, suficiente para poder desarrollar su Competencia Matemática. Por tanto, es necesario ayudar al alumno a formarlo y consolidarlo, centrándose en lo que es realmente importante y dejando aquello accesorio de lado.

Una buena forma de conseguir eso es hacer. La gran ventaja de las Matemáticas como asignatura es que se aprende haciendo, frente a otras en las que la única manera de aprender es “hincar los codos”. Debemos aprovechar esa ventaja para implicar al alumnado en su aprendizaje, poniendo en práctica aquello ya sabido. Como señalaba Confucio: “*Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí*”.

Tampoco es inteligente dejar de lado las nuevas tecnologías, especialmente estando hoy en día tan cerca de los alumnos. Al igual que las usan para sus comunicaciones personales, hemos de hacerles ver que en su ámbito laboral, los estudios, también pueden ser útiles, especialmente como ayuda en caso de necesidad. Bien es cierto que no debemos consentir que confíen en exceso en ellas, pues un mal uso o un resultado mal interpretado puede ser devastador. Por tanto, siempre debemos fomentar un espíritu crítico en su uso.

Desde un punto de vista personal, este trabajo ha supuesto un viaje fascinante, pues me ha abierto una nueva puerta a trabajar con mis alumnos, dando un paso muy importante en mi trabajo como docente. Esperamos que también el lector pueda acercarse un poco más a la idea de Competencia Matemática, desde su aparición hasta su definición actual y sienta que cada día en la docencia es una nueva oportunidad de mejorar, no solo por nosotros, sino por el futuro representado en nuestros alumnos.

Capítulo I. Competencia Matemática. Su presencia en el currículum. Bases teóricas.

I.1 Definición de competencia básica.

La primera definición de lo que se entiende como competencia aparece en el proyecto DeSeCo, Proyecto para el Desarrollo y Selección de Competencias, auspiciado por la OCDE. En un primer estadio, se planteó la pregunta de si era factible conocer qué tipo de formación deberían haber adquirido los jóvenes al final de su etapa de educación obligatoria para, a partir de ahí, poder evaluarla. Como se puede intuir, la relación con las pruebas PISA es total. Las conclusiones fueron expuestas en las publicaciones de Rychen y Salganik en 2001 y 2003.

Según dicho proyecto, la definición de competencia vendría a ser la siguiente:

"*Vista desde fuera una competencia puede ser definida como la habilidad que permite superar las demandas sociales o individuales, desarrollar una actividad o tarea. Vista desde dentro, cada competencia es construida como una combinación de habilidades prácticas y cognitivas, conocimiento (incluyendo conocimiento tácito), motivación, valores, actitudes, emociones y otros componentes conductuales y sociales que hacen posible la realización de una determinada acción*". (OCDE-DeSeCo, 2002)

A partir de lo anterior, una competencia se identifica, funcionalmente, mediante la resolución acertada de tareas, y estructuralmente, mediante la combinación de aspectos cognitivos y no cognitivos. Asimismo, el proyecto DeSeCo tiene en cuenta las siguientes afirmaciones:

- Las competencias se manifiestan mediante la realización de acciones en contextos o situaciones particulares.
- Se desarrollan mediante el intercambio de estímulos.
- Se desarrollan en contextos formales e informales.

Asimismo, se establecieron las siguientes competencias agrupadas en tres grandes áreas:

Actuar con autonomía	**Habilidad para utilizar de forma interactiva**	**Interactuar en grupos heterogéneos**
Actuar dentro de una perspectiva global. Para definir y llevar a cabo proyectos personales. Para afirmar y defender derechos, intereses, límites y necesidades.	La lengua, los símbolos y los textos. El conocimiento y la información. La tecnología.	Relacionarse bien con otros. Cooperar con otros. Manejar y resolver conflictos.

Cuadro 1.1: Competencias agrupadas por áreas

Queda claro, pues, que las competencias se manifiestan como habilidades, siempre asociadas a acciones. Por tanto, a la hora de integrar las competencias en currículum junto a otros componentes del mismo, éstas resultan ser una forma, es decir, un medio por el que cada individuo configura sus habilidades y esquemas mentales para superar determinadas situaciones. Siguiendo la idea de Perrenoud (2004), las competencias son las *condiciones que hacen posible una ciudadanía activa y responsable*.

En la siguiente tabla podemos ver la comparación entre las Competencias Básicas recogidas por el MEC en 2006 y las propuestas por Perrenoud en 2004.

Competencias básicas como poderes para la ciudadanía	
Competencias como Poderes Perrenoud 2004	Competencias Básicas MEC 2006
Poder identificar, evaluar y defender los recursos, límites y las necesidades del individuo. Poder, de manera individual o grupal, formar y llevar a cabo proyectos así como diseñar estrategias. Poder analizar situaciones, relaciones y campos de fuerza de manera integral. Poder cooperar, actuar en sinergia y participar de un liderazgo colectivo y	Competencia en comunicación lingüística. Competencia matemática. Competencia en el conocimiento con la interacción con el mundo físico. Tratamiento de la información y competencia digital. Competencia social y ciudadana. Competencia cultural y artística.

compartido. Poder construir y operar organizaciones democráticas y sistemas de acción colectiva. Poder manejar y resolver conflictos. Poder jugar, siguiendo las reglas, usarlas y funcionar con base a ellas. Poder construir órdenes negociados por encima de las diferencias culturales.	Competencia para aprender a aprender. Autonomía en iniciativa personal.

Cuadro 1.2: Comparativa entre las competencias establecidas por Perrenoud en 2004 y recogidas por el MEC en 2006

O, retomando la idea de Habermas (1987), podemos definir competencia como "*las condiciones para las que el sujeto participante en el intercambio comunicativo pueda*", entendido como habilidad, "*decir algo racional*".

Las competencias pueden construirse con los saberes configurados tradicionalmente, pero su uso se encuentra en el ámbito social del individuo, que es la clave de la consecución de su éxito. Por tanto, las competencias se adquieren en el ámbito social. Introducirlas en el educativo supone sustituir esos procesos de socialización por otros de educación.

Del análisis de las distintas definiciones de competencia consideradas hasta el momento se puede extraer una conclusión: las competencias pueden ser definidas de forma **semántica**, es decir, teniendo en cuenta los conceptos asociados a ella (como se hace en DeSeCo) y de forma **operativa**, es decir, relacionando competencia y contenidos en el currículum, como se realiza en el Programa de Trabajo "*Educación y Formación 2010*" de la Comisión Europea y que puede consultarse más adelante en este mismo capítulo en lo que se refiere a la competencia matemática. Anteriormente a ello, en el año 2006, se publicó una *Recomendación del Parlamento Europeo y Consejo del 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*, en la que se definieron las competencias como "*una combinación de conocimientos, capacidades y actitudes adecuadas al contexto*". Asimismo, se define competencia clave como "*aquéllas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personales así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo*".

En el citado marco de referencia, se señalan las ocho siguientes competencias

- Comunicación en la lengua materna.
- Comunicación en lenguas extranjeras.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

- Competencia digital.
- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresión culturales.

Por otro lado, la definición que se da de competencia en los distintos reales decretos de enseñanzas mínimas es semántica y no operativa, lo que permite al profesorado hacerse una idea del significado y la intencionalidad de las competencias, pero no da pistas sobre cómo integrarla en la metodología del docente.

Si consideramos ahora la definición utilizada en los diseños curriculares de la enseñanza obligatoria, vemos que ésta consta de tres elementos: su definición semántica, sus implicaciones en el aprendizaje y una aproximación a lo que cada materia puede implicar en el desarrollo de cada competencia. Es decir, aunque se intuya, no existe una definición operativa en sí.

I.2 Las competencias y el currículum

El concepto de competencia ya era conocido en el ámbito de la Formación Profesional, donde era definida como "*el conjunto de conocimientos y capacidades que permiten el ejercicio de la actividad profesional conforme a las exigencias de la producción y el empleo*" (Ley Orgánica de las Cualificaciones Profesionales y la Formación Profesional, 2002)

En un primer momento, las competencias se incorporaron al currículum como un elemento más del mismo, de forma que éstos siguen separados en disciplinas y, en cada una de ellas, se mantienen una serie de objetivos y contenidos.

Esto ha provocado, entre otros, tres problemas, considerados por el profesor Guarro (2008): la presencia de entes radicalmente distintos en el currículo, la posibilidad de crear dos tipos de currículo según la capacidad del alumnado y la aparición de una nueva forma de concebir el aprendizaje.

El hecho de considerar la existencia de las competencias implica, por su propia estructura, la integración de todas las materias de cara a lograr el desarrollo de las anteriores, lo que modifica el concepto de materias "estancas" en el que se había basado el currículo hasta el momento. Armonizar las distintas materias de cara a la consecución de las competencias parece el gran reto de las políticas y profesionales de la educación.

Quizá la forma adecuada de aproximarse a las competencias sea, tal y como señala Moya Otero (2008) mediante una estructura de tareas centradas en el contexto en el que se desarrollan. Por tanto, la búsqueda de tareas que logren un alto grado de consecución de las competencias debe ser elemento transformador de currículum, convirtiéndose en la principal línea de investigación para la transformación del currículum. Según sugiere Moya Otero (2008), se debe buscar una estructura de tareas que logre este aspecto, puesto que las tareas son la base esencial del desarrollo del currículum, pues son las que piden y desarrollan las competencias y, su vez, son las que aportan estabilidad al sistema educativo, pues independientemente de los contenidos, siempre son necesarias para su asimilación.

Es mediante la resolución de tareas la que permite desarrollar esquemas prácticos que, consolidados, les permitirán desarrollar sus competencias, tal y como propuso Vigotsky con su "*zona de desarrollo próximo*" y Leave y Wenger con el "*modelo de aprendizaje situado*".

La integración de las competencias en la práctica docente, como la de cualquier otra innovación en este campo, lleva consigo tres importantes consecuencias: mantener aquello que funciona, modificar lo que no e incorporar elementos nuevos para su posterior valoración y vuelta a empezar. En especial, y siguiendo con lo señalado anteriormente, es preciso incorporar el contexto social del alumnado, pues es ahí donde las competencias se desarrollan. Es decir, hay que integrar los contextos formales, los habituales, e informales, los incorporados por las competencias, de cara a la consecución de las competencias.

En un primer momento, en ninguno de los estudios anteriores se señala la forma concreta para lograr la consecución de las competencias, dada la diversidad de formas con la que se puede lograr dicho objetivo. Queda, parece, a criterio de cada centro y cada docente la búsqueda de impulsar y evaluar su desarrollo, valiéndose, eso sí, de los criterios de evaluación establecidos para cada área y materia así como de las orientaciones metodológicas incluidas, en el caso de nuestro país, en los desarrollos hechos por los decretos de ámbito nacional y de cada una de las autonomías. No debemos olvidar que también los proyectos de centro, los recursos didácticos y elementos tan variados como el funcionamiento de la biblioteca escolar o el Reglamento de Organización y Funcionamiento (ROF), también son factores clave en el desarrollo de las competencias trasversales.

Actualmente, con la consolidación de las competencias clave y los estándares de aprendizaje, resulta algo más asequible evaluar la consecución de las competencias, aunque queda camino todavía por recorrer para su integración en la práctica docente.

I.3 Competencia Matemática en el marco de la UE.

Abordaremos en este apartado las aproximaciones realizadas por parte de la Unión Europea a la definición de competencia matemática, dentro del marco delimitado por DeSeCo.

Según la *Recomendación del Parlamento Europeo y Consejo del 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* se define competencia matemática, que se encuentra asociada a la de ciencia y tecnología, como:

"La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña — en distintos grados — la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)."

Tal y como se dijo anteriormente, se proporcionan también los conocimientos, capacidades y actitudes relacionados con la misma:

"Las capacidades necesarias en el ámbito de las matemáticas incluyen un buen conocimiento de los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones básicas y las representaciones matemáticas básicas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos y un conocimiento de las preguntas a las que las matemáticas pueden dar respuesta."

"Las personas deberían contar con las capacidades necesarias para aplicar los principios y los procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de la vida privada y profesional, así como para seguir y evaluar cadenas argumentales. Las personas deberían ser capaces de razonar matemáticamente, comprender una demostración matemática y comunicarse en el lenguaje matemático, así como de utilizar las herramientas de ayuda adecuadas."

"Una actitud positiva en matemáticas se basa en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez."

Un poco antes de todo lo anterior, en noviembre de 2004 y dentro del documento "*Puesta en Práctica del Programa de Trabajo. Educación y Formación 2010. Grupo de Trabajo B: Competencias Clave*", se establece la definición de competencia clave como:

"*Un paquete multifuncional y transferible de conocimientos, destrezas y actitudes que todos los individuos necesitan para su realización y desarrollo personal, inclusión y empleo. Éstas deberían haber sido desarrolladas para el final de la enseñanza o formación obligatoria, y deberían actuar como la base para un posterior aprendizaje como parte de un aprendizaje a lo largo de la vida.*"

Es, como podemos ver, una definición en la que las competencias se consideran transferibles y duraderas, sometidas siempre a constante renovación.

Además, en este mismo documento, se va más allá, definiendo cada una de las competencias y señalando los contenidos, destrezas y actitudes que las conforman. Si nos centramos en la competencia matemática, podemos ver las consideraciones que se hacen sobre la misma.

Definición	Conocimientos	Destrezas	Actitudes
En los niveles más básicos, la competencia matemática comprende el uso de la suma, resta, multiplicación y división, porcentajes y ratios en cálculo mental y escrito para la resolución de problemas.	El conocimiento completo, la comprensión de números y medidas y la habilidad para usarlos en una variedad de contextos cotidianos es una destreza elemental que comprende los métodos básicos de cálculo y un entendimiento de las formas elementales de matemáticas tales como gráficos, fórmulas y estadísticas.	Habilidad para aplicar los elementos básicos de la alfabetización matemática tales como • suma y resta • multiplicación y división • porcentajes y ratios • pesos y medidas Para enfrentar y solucionar problemas de la vida cotidiana, por ejemplo: • manejo de la economía casera (equiparando ingresos a gastos, planificación para el futuro, ahorro) • compras (comparación de precios, comprensión de pesos y medidas, valor del dinero) • viajes y ocio (relación entre distancias y tiempo que se tarda en realizar el viaje; comparación de divisas y precios).	• Disposición para superar el "miedo a los números". • Voluntad para usar el cálculo numérico con el fin de resolver problemas en el día a día del trabajo y de la vida doméstica.

Según evoluciona la competencia matemática, implica, dependiendo del contexto, la habilidad y disposición para usar diversos tipos de pensamiento matemático (pensamiento lógico y espacial) y de presentación (fórmulas, modelos, constructos, gráficos/cuadros) que tienen aplicación universal a la hora de explicar y describir la realidad	• Conocimiento completo de términos y conceptos matemáticos, incluyendo los teoremas más relevantes de geometría y álgebra. • Conocimiento y comprensión de los tipos de preguntas a las cuales las matemáticas pueden dar una respuesta.	• Habilidad para seguir y evaluar una serie de argumentos, planteados por otros, y para revelar las ideas básicas de un determinado línea de argumentación (especialmente una prueba), etc. • Capacidad para utilizar símbolos y fórmulas matemáticas con el fin de descodificar e interpretar lenguaje matemático y para comprender su relación con el lenguaje natural. Habilidad para comunicar en, con y acerca de matemáticas. • Habilidad para pensar y razonar de forma matemática (dominio de modos de pensamiento matemáticos; abstrayendo y generalizando cuando sea relevante a la cuestión y modelando matemáticamente (por ejemplo, analizando y construyendo modelos) utilizando y aplicando modelos existentes a cuestiones propuestas. • Capacidad para entender y utilizar (descodificar, interpretar y distinguir entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, casos y situaciones, eligiendo y variando entre diversas situaciones en la medida de lo oportuno. • Disposición para el pensamiento crítico; habilidad para distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (entre una afirmación y una asunción, etc.); comprensión de pruebas matemáticas y el alcance y limitaciones de un concepto dado. • Habilidad para usar ayudas y herramientas (incluyendo la informática).	• Respeto a la verdad como base del pensamiento matemático. • Disposición para buscar las razones en las cuales se basan los argumentos propios. • Disposición para aceptar y rechazar opiniones de otros basándose en pruebas y razones válidas (o inválidas).

Cuadro 1.3: Competencia matemática establecida por la CE.

I.4 Las Competencia Matemática en la legislación española y andaluza: LOE, LOMCE, LEA

I.4.1 Las competencias en la LOE

Las primeras aproximaciones al concepto de competencia en la legislación española se remiten a la fase de elaboración previa de la LOE, en torno a los años 2004-2006. En ella, todavía estaban madurándose las aportaciones realizadas por DeSeCo y la Comisión Europea, y fue después de la publicación de la LOE cuando se terminaron de desarrollar todos los trabajos relativos a la definición de las competencias. No obstante, y según señala Tiana en su artículo "*Análisis de las Competencias Básicas como Núcleo Curricular de la Educación Obligatoria Española*", desde las autoridades educativas españolas se tenía plena constancia y se hizo un puntual seguimiento de todo lo establecido por el grupo de trabajo relativo a competencias de la Unión Europea, y fue precisamente en el desarrollo de los Reales Decretos que completaban la LOE, concretamente en los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas de las distintas etapas, cuando se hizo una referencia explícita a las competencias, en los términos siguientes:

- Se hace hincapié en que son saberes que son imprescindibles, desde un punto de vista integrador y de cara a ser aplicados.
- Con las competencias se busca integrar los distintos aprendizajes tanto en materias como en contextos formales e informales.
- Todos y cada uno de los saberes deben permitir el desarrollo de las competencias, puesto que el currículo se estructura en materias, aunque en cada una de ellas se darán referencias explícitas a la forma en la que cada una de ellas contribuye a la adquisición de las distintas competencias.
- Para un correcto desarrollo de las competencias, vistas como elemento integrador, los centros deberán tomar las oportunas medidas organizativas y funcionales.
- Se busca orientar la enseñanza identificando los contenidos y criterios de evaluación considerados esenciales.

Como se puede comprobar, se mantienen, como no puede ser de otra forma, todas las recomendaciones hechas tanto por DeSeCo como por la Unión Europea. En este anexo, además, se fijan las ocho competencias ya indicadas anteriormente. Centrándonos ahora en la competencia matemática, en este anexo se describe como:

"*la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, símbolos y formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos o especiales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral*"

Además, se considera parte de esta competencia

“*la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones*”.

Y también

“*el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana”* y “*la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la resolución de problemas o a la obtención de información*”.

Finalmente, se reconoce la importancia de la competencia matemática para “*la utilización espontánea de elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas prevenientes de situaciones cotidianas y tomar decisiones.*”

I.4.2 Las competencias en la LOMCE

La LOMCE (8/2013 de 9 de diciembre), ley que modifica a la anterior, la LOE, trae modificaciones en la definición y organización de las competencias. Así, las competencias básicas pasan a llamarse competencias clave (quizá por una traducción más literal del inglés “*key competences*”) y una nueva lista, en la que la competencia matemática se une a la de ciencia y tecnología.

Las ocho competencias quedan ahora así reducidas a siete, que son las siguientes:

- Comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresiones culturales.

Esta definición aparece en la orden ECD 65/2015, de 21 de enero, en la que se describen las relaciones entre competencias, contenidos y criterios de evaluación, yendo un poco más allá que en la LOE, puesto que se da una definición no solo semántica sino también operativa.

Por una parte, en lo relativo a las competencias y los objetivos de las distintas etapas, se establece que éstas deberán estar estrechamente vinculadas a aquellos, a la vez que se “*hace necesario diseñar estrategias para promover y evaluar las* *competencias*” en las distintas etapas, “*desde las iniciales e intermedias hasta su posterior consolidación en etapas superiores*”. Además, se sigue insistiendo en la elaboración de actividades integradas “*que permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo*”.

Continuando con las ideas establecidas en la legislación precedente, las competencias deben estar integradas en las distintas materias, así “*como explicitar y desarrollar los resultados de aprendizaje”* que se desean obtener en el alumnado. Pero, afortunadamente, se incluyen indicaciones adicionales, como el hecho de que “*la selección de contenidos y metodologías debe asegurar el desarrollo de las competencias clave a lo largo de la vida académica*” o que *“los criterios de evaluación deben servir de referencia para valorar lo que cada alumno sabe y sabe hacer en cada materia”*, apareciendo el concepto de “*estándar de aprendizaje*” definido como “*los elementos de mayor concreción, observables y medibles, que, vistos en relación con las competencias, permiten saber el grado de desempeño logrado en cada una de ellas*”. A partir de los estándares de aprendizaje, también es posible determinar las materias que implican el desarrollo de una determinada competencia.

Finalmente, se indica cómo han de ser evaluadas las competencias:

- Tanto en la evaluación continua como en las evaluaciones finales debe tenerse en cuenta el grado de dominio de las competencias, que podrá hacerse mediante indicadores de logro, como rúbricas o escalas de evaluación.
- En línea con lo dicho anteriormente, deben establecerse relaciones entre los estándares de aprendizaje evaluables con las competencias que desarrollan.
- La evaluación de las competencias debe estar integrada en la evaluación de contenidos.
- Los instrumentos de evaluación deben ser variados, de cara a la valoración integral del proceso de enseñanza.

Centrándonos ahora en la competencia matemática, esta orden señala que dicha competencia

“*implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto*”.

Además

“*requiere de conocimientos sobre números, las medidas y estructuras así como de las operaciones y las representaciones matemáticas y la comprensión de términos y conceptos matemáticos*”.

No debemos olvidar tampoco que

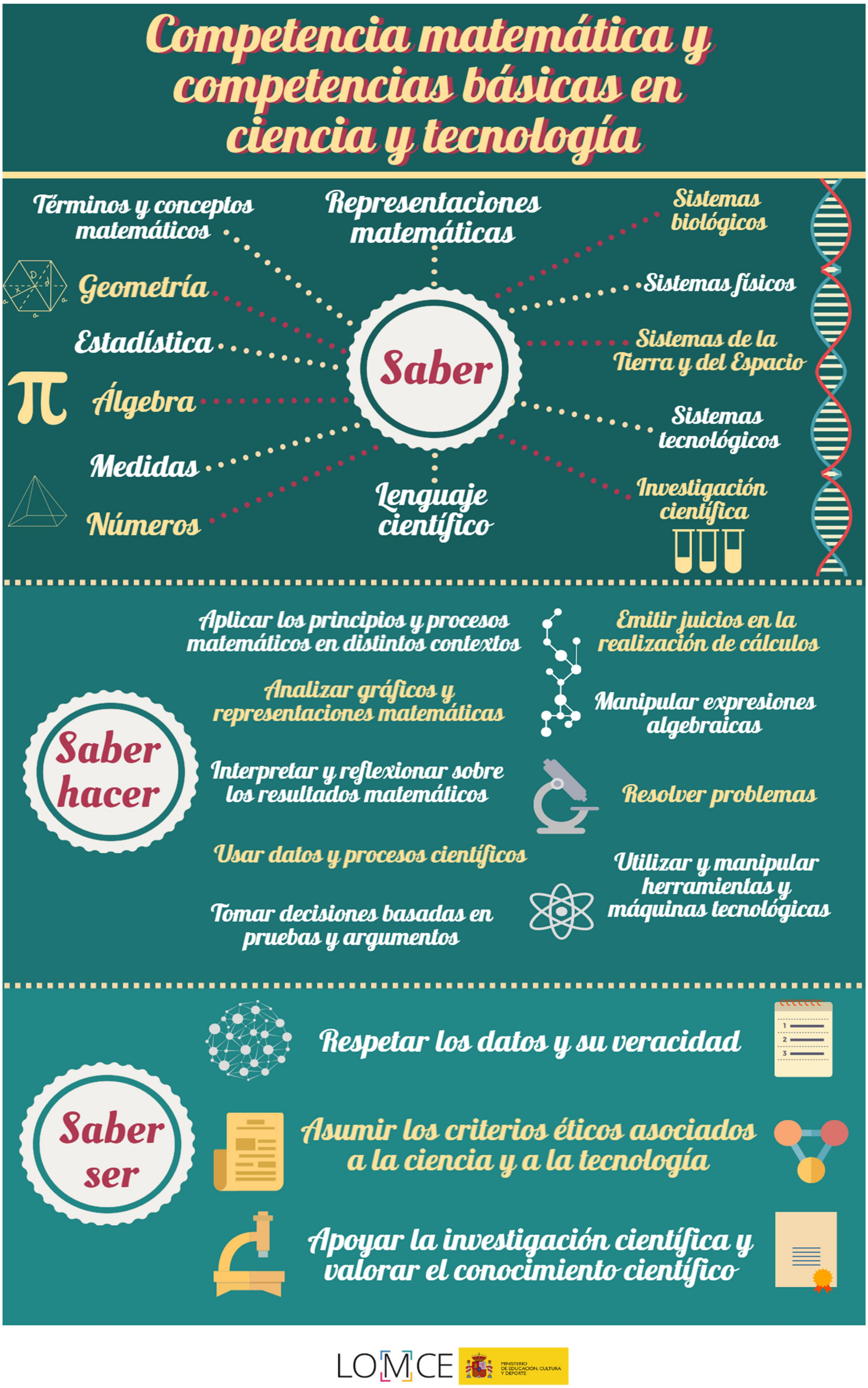
“el uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos”.

Análogamente a lo señalado en anteriores entornos normativos, "*se trata de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos a la resolución de los problemas que puedan surgir en una determinada situación a lo largo de la vida*"

Pero, posiblemente, lo más interesante que aporta esta orden es la distribución en áreas que se hace en este texto de la competencia matemática, concretamente en cuatro:

- Cantidad.
- Espacio y forma.
- Cambio y relaciones.
- Incertidumbre y datos.

De ellas hablaremos, con bastante detenimiento, en el capítulo II, pues son precisamente éstas las áreas en las que divide PISA la evaluación de la competencia matemática.



Cuadro 1.4: Competencia matemática en la LOMCE. Ministerio de Educación

I.4.3 Las competencias en la LEA

La Ley de Educación de Andalucía, LEA (17/2007), fija las competencias básicas a desarrollar en nuestra comunidad autónoma en las ya consideradas por la LOE, sin entrar en más detalles ni consideraciones.

Ha sido en fechas recientes, con la publicación de diversas órdenes y documentos orientativos, cuando se ha incorporado a la legislación autonómica el concepto y lista de competencias a considerar.

Concretamente, en el decreto 111/2016, ya aparece definida competencia como un "*conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias*". Pero apenas se aportan novedades o concreciones con respecto a los documentos estatales mencionados antes. No obstante, sí aparece recogido como elemento a tener en cuenta en la promoción del alumnado el grado de consecución de las competencias.

Por otro lado, en la orden de 14 de julio de 2016, ya aparecen relacionados los criterios de evaluación con cada una de las competencias básicas a las que contribuyen en su desarrollo.

Capítulo II. Las pruebas PISA

II.1 Introducción

En el capítulo anterior, hemos abordado las distintas definiciones de competencia así como su presencia en las distintas leyes y decretos dentro del área de matemáticas.

En el presente capítulo, mostramos las pruebas PISA, exponiendo su utilidad en la evaluación de la competencia matemática. Intentaremos servirnos de ellas como punto de partida para la mejora de los resultados y la adecuación de las enseñanzas en los niveles bajos.

II.2 Definición de PISA. Qué es y qué pretende.

Las pruebas PISA, *Programme for International Students Assessment* en sus siglas en inglés o bien *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos*, es un proyecto puesto en marcha por la OCDE, a partir de, como vimos en el apartado anterior, las conclusiones de los trabajos de DeSeCo, cuyo objetivo es la evaluación del alumnado al finalizar la etapa de enseñanza obligatoria, generalmente a los 15 años, punto en el que el alumnado se encamina hacia una enseñanza post-obligatoria o bien se incorpora al mercado laboral, pero no desde un punto de vista de conocimientos, como puede ser el caso de TIMSS, sino que PISA está diseñado para conocer las habilidades, la pericia y las aptitudes de los alumnos participantes a la hora de analizar y resolver problemas, es decir, hasta qué punto los alumnos son competentes a la hora de realizar ciertas tareas que se pueden dar en su entorno cotidiano o en su futuro como estudiantes, profesionales y ciudadanos reflexivos. Este programa se concibe como una forma de obtener información relevante que permita a los poderes públicos tomar decisiones de cara a la mejora de los niveles educativos en este sentido.

La primera evaluación se realizó en el año 2000 y se repite cada tres años. Generalmente, se cubren tres áreas de interés, Lectura, Matemáticas y Competencia Científica, prestando en cada una de las convocatorias especial interés a alguna de ellas. Generalmente, a la competencia dominante se le atribuye un peso del 66% en la prueba y un 17% a cada una de las dos restantes. En el siguiente cuadro podemos ver, según el año, aquella competencia a la que se le dio especial relevancia:

Año	Competencia relevante
2000	Lectura
2003	Matemáticas
2006	Ciencias
2009	Lectura
2012	Matemáticas
2015	Ciencias

Cuadro 2.1: Distintas convocatorias de las pruebas PISA y la competencia relevante estudiada

Es precisamente este carácter cíclico el permite conocer indicadores sobre las tendencias en las competencias de cada país participante y evaluar las políticas educativas puestas en marcha como respuesta a anteriores convocatorias, facilitando su seguimiento.

En este trabajo, prestaremos especial atención a la convocatoria de 2012, por ser la más reciente en la que se ha estudiado la competencia matemática.

II.3 Estudio de la Competencia Matemática en PISA.

Según lo descrito en el documento "*Marco y Pruebas de Evaluación de PISA 2012, Matemáticas, Lectura y Ciencias*", la competencia matemática se define como:

"*La capacidad del individuo para* ***formular***, ***emplear*** *e* ***interpretar*** *las Matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las Matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.*" (Marco y Pruebas de Evaluación de PISA 2012, Matemáticas, Lectura y Ciencias. MECD. 2013)

En la anterior definición, la competencia matemática se concibe como algo eminentemente práctico, aunando tanto los conocimientos que el alumnado ha ido reuniendo en sus años de estudiante de Matemáticas como las habilidades en la utilización de las mismas, faceta que no siempre se desarrolla en las escuelas. No obstante, vemos destacados tres verbos, formular, emplear e interpretar, que son capitales en el proceso de evaluación de competencias propuesto por PISA.

En este contexto, el verbo **formular** hace referencia a la *habilidad del alumno para buscar oportunidades en las que aplicar y utilizar las Matemáticas*. El verbo **emplear** implica que *el alumno es capaz de aplicar razonamientos matemáticos y puede utilizar conceptos, procedimientos y herramientas para obtener una solución matemática al problema dado*. Por último, el verbo **interpretar** implica que *el alumno es capaz de reflexionar sobre los resultados obtenidos e interpretarlos en el contexto inicial en el que se han planteado.*

Asimismo, esta definición pretende integrar en el concepto de competencia matemática la definición de modelo matemático. Se comprende mejor este procedimiento con el siguiente esquema:

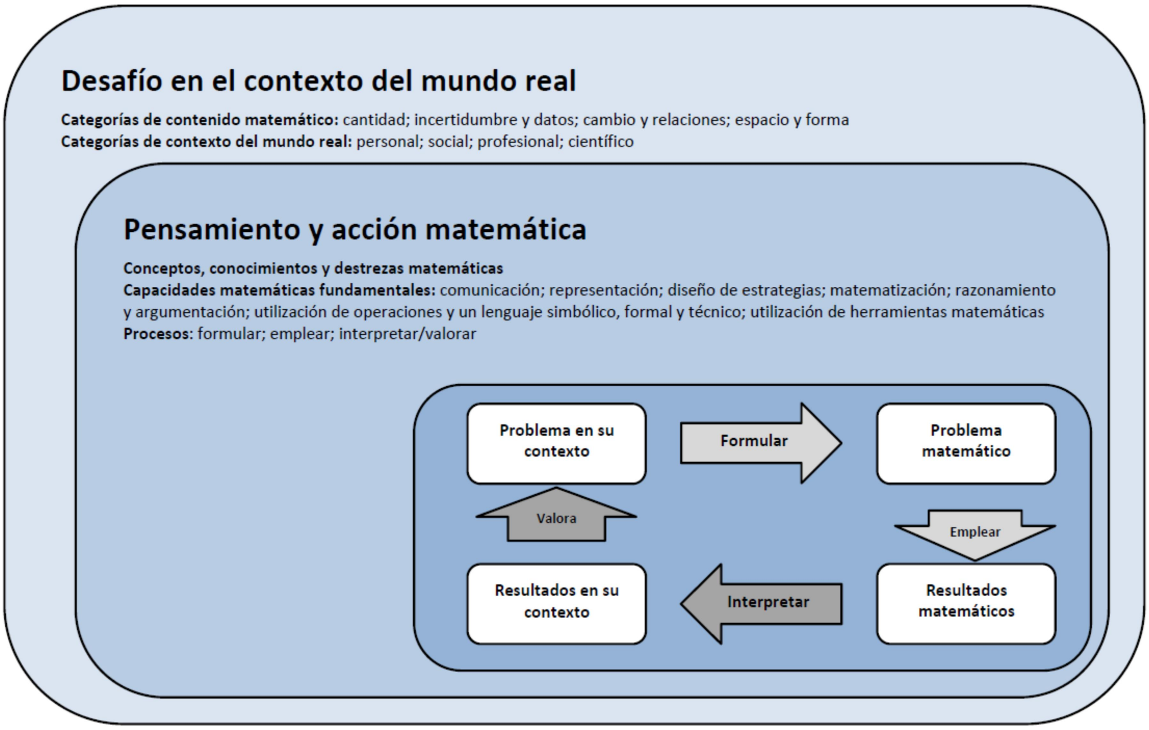


Figura 2.1: Etapas en la resolución de un problema. Marco PISA 2012.

Como podemos observar en el cuadro exterior de la figura 2.1, cualquier problema que active la competencia matemática es porque dicho problema ha sido planteado en el mundo real. A su vez, este problema se caracteriza de dos formas. La primera de ellas es el área de la vida en el que este problema es planteado. Aunque más adelante entraremos en detalles, podemos adelantar los cuatro contextos más usuales considerados en PISA: personal, social, profesional y científico. Por otro lado, hemos de tener en cuenta los conceptos, razonamientos y procesos asociados a la naturaleza matemática subyacente en cada problema: cantidad, incertidumbre y datos, cambio y relaciones y espacio y forma. De nuevo, los analizaremos con detalle más adelante.

De especial interés resulta analizar el cuadro interior de la figura 2.1, puesto que representa el proceso que debe realizar cada alumno a la hora de enfrentarse a un problema determinado. Así, una vez dado un problema en su contexto asociado, el alumno debe identificar las matemáticas que hay en él y debe **formular** en función de los conceptos y relaciones dadas y simplificando hasta adaptarlo a sus conocimientos. Es decir, trasladamos un problema real a su idealización matemática.

Una vez en el mundo matemático, el alumno debe **emplear** sus conocimientos para resolver el problema, poniendo en marcha todo el bagaje matemático acumulado durante todos sus años de estudiante de Matemáticas. Es aquí donde debe demostrar su buen hacer a partir de los conceptos, razonamientos y procedimientos de los que dispone.

Por último, los resultados obtenidos deben **interpretarse** en el concepto inicial, decidiendo si éstos son válidos en el contexto inicial del problema, poniendo en práctica la capacidad “desmatematizadora” de quien ha resuelto el problema.

Como podemos comprobar, los tres verbos señalados en la definición dada en PISA de competencia matemática son claves en la construcción de modelos matemáticos. No obstante, en un tipo de evaluación como PISA, no siempre es necesario considerar todos estos procesos, por la naturaleza de las preguntas planteadas y su distinto nivel de dificultad. Por otro lado, en ocasiones hay que aplicar más de una vez este ciclo, por idénticos motivos.

II.4 Organización de las Matemáticas en PISA

Según nos señala el Marco Pruebas de Evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias, la evaluación busca averiguar hasta qué punto los alumnos de 15 años son capaces de manejar las Matemáticas cuando éstas se presentan en situaciones de la vida cotidiana.

Por tanto, desde el punto de vista de la evaluación, PISA los analiza desde tres aspectos interrelacionados:

- Procesos matemáticos, donde se relacionan el contexto del problema con el área de las matemáticas que lo modeliza y/o resuelve.
- Contenido matemático, donde se explicitan qué matemáticas son necesarias para resolver el problema.

- Contexto, es decir, el ámbito de la vida en el que se inscribe el problema.

Asimismo, trataremos de dar respuesta a tres interrogantes íntimamente asociados a los aspectos anteriores:

- ¿Qué procesos y capacidades se ponen en juego en la resolución de problemas planteados por PISA?
- ¿Qué conocimientos son esperables en el alumnado que realiza las pruebas?
- ¿En qué contextos es posible observar y evaluar la Competencia Matemática?

II.4.1 Procesos matemáticos y capacidades matemáticas

Tal y como señalamos anteriormente, los procesos clave en la resolución de problemas, que además vienen señalados explícitamente en la definición de competencia matemática, son formular, emplear e interpretar. Detengámonos, por un momento, en cada uno de ellos.

<u>Formular</u>

Como hemos visto anteriormente, en la definición de competencia matemática, el verbo formular pretende "*reflejar la capacidad del individuo para reconocer e identificar oportunidades para utilizar las Matemáticas y, posteriormente, proporcionar la estructura matemática de forma contextualizada*"*(*Op cit), es decir, se busca que el individuo sea capaz de traducir un problema del mundo real, independientemente del contexto, al mundo matemático, dándole a dicha traducción una "estructura, representación y especificidad" matemáticas. En este proceso de formulación, encontramos actividades como las siguientes:

- Identificación y reconocimiento de los aspectos matemáticos de un problema.
- Simplificación y adaptación a las Matemáticas conocidas de un problema, reconociendo las limitaciones que pudieran aparecer.
- Representación matemática de una situación problemática, en ocasiones de más de una forma.
- Identificar y comprender las relaciones entre el lenguaje de un problema y su modelización matemática.
- Reconocer aspectos conocidos en un problema.

Los resultados dados en este ámbito pretenden indagar sobre la eficacia con la que los alumnos pueden identificar situaciones en las que es necesario el empleo de las Matemáticas y encontrar la estructura matemática que más se acomoda a ese problema.

Emplear

En la definición de Competencia Matemática dada por PISA, el verbo emplear pretende "*conocer la capacidad del individuo para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas formulados matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones matemáticas*" (Op cit), es decir, los alumnos deben poner en juego sus conocimientos acumulados durante sus años de estudiante para obtener una solución matemática al problema, dentro de la representación en la que se ha convertido el problema en la etapa del verbo "formular". En este proceso de empleo, señalamos las siguientes actividades:

- Diseño e implementación de estrategias para encontrar soluciones matemáticas.
- Utilización de las distintas herramientas matemáticas al alcance del alumno: conceptos, algoritmos, reglas, números, Álgebra, gráficas, funciones, estructuras matemáticas…
- Empleo y cambio de los distintos tipos de representaciones asociados a un problema.
- Realización de generalizaciones y razonamientos a partir de los procedimientos empleados en la búsqueda de la solución.

Los resultados en este ámbito pretenden conocer "*el grado de corrección con el que los alumnos pueden realizar cálculos y manipulaciones y aplicar los conceptos y los datos para llegar a una solución matemática en el caso de un problema formulado matemáticamente.*" (Op cit)

Interpretar

En la definición de competencia matemática dada por PISA, el verbo interpretar pretende "*conocer la capacidad del individuo para reflexionar sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas e interpretarlas en el contexto real del problema*" (Op cit). Ello implica traducir de nuevo, pero en sentido inverso, los resultados al contexto del problema y decidir si los resultados son razonables. Implícitamente, el verbo "valorar" también está presente, tal y como se indicaba en la figura 2.1. En este proceso, las actividades asociadas que podemos contemplar son:

- Reinterpretación de un problema en un contexto real.
- Valoración de lo razonable que es la solución obtenida, en el contexto inicial del problema dado.
- Comprender el modo en el que el mundo afecta a los resultados.
- Comprender los límites del modelo proporcionado y de las soluciones matemáticas obtenidas.

Los resultados en este ámbito pretenden conocer "*el grado eficacia con los que los alumnos pueden reflexionar sobre las soluciones o conclusiones matemáticas, interpretarlas en el contexto real del problema y establecer si los resultados y/o conclusiones son razonables.*" (Op cit)

II.4.2 Capacidades matemáticas subyacentes a los procesos matemáticos

Asociadas a los anteriores procesos, existen varias capacidades matemáticas, fijadas en ocho por los trabajos de Mogens Niss en colaboración con sus colegas Jensen y Hojgaard en los años 2002, 2003 y 2011, pero que el Marco PISA 2012 reduce a 7, basándose en los estudios del Grupo de Expertos en Matemáticas (MEG en sus siglas en inglés), atendiendo a las preguntas realizadas en convocatorias anteriores. Estas capacidades matemáticas están ampliamente aceptadas, y podemos señalar las ocho consideradas en los Estándares Estatales Comunes (Common Core State Standards) del año 2010 en EEUU así como las cuatro (representar, analizar, interpretar y valorar y comunicar y reflexionar) del Currículo Nacional de Matemáticas de Inglaterra, del año 2007. Todos estos estudios apuntan a que los individuos poseen estas capacidades, pero está en su mano aprenderlas para resolver problemas, de forma que cuanto más las practique, más evolucionará en el desarrollo de la competencia matemática y, por tanto, en estas capacidades (Turner y Adams, 2012). Por tanto, podemos establecer que el aumento de la dificultad en las preguntas planteadas actúa como acicate para desarrollar dichas capacidades.

En PISA 2012, las capacidades fundamentales consideradas son las siguientes:

- **Comunicación:** Está presente en los aspectos asociados a la comprensión del problema, codificación del mismo y posterior presentación de los resultados obtenidos.
- **Matematización:** Está presente en la transformación y búsqueda de una estructura al problema dado. Implica aquellos procesos estrictamente matemáticos involucrados en el problema.

- **Representación:** Está presente en la traducción de un problema real a su entorno matemático y en la adecuada elección de la forma matemática de dicho problema.
- **Razonamiento y argumentación:** Está presente en los procesos de pensamiento que conectan entre si los conceptos y procedimientos asociados al problema.
- **Diseño de estrategias para resolver problemas:** Está presente en la forma en la que el individuo busca la forma de resolver los problemas planteados.
- **Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico formal y técnico**: la resolución de problemas requiere el manejo del aparataje matemático, más complicado cuanto más se sabe. Se incluye en este punto no solo el manejo de definiciones, sino también de estructuras y algoritmos.
- **Utilización de herramientas matemáticas:** Nos referimos en este apartado al uso de herramientas matemáticas, no solamente las intelectuales sino también las físicas, mecánicas e informáticas.

En la siguiente tabla, podemos ver la relación entre los procesos y las capacidades matemáticas.

	***Formulación* matemática de las situaciones**	***Empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos**	***Interpretación*, aplicación y valoración de los resultados matemáticos**
Comunicación	Leer, descodificar e interpretar enunciados, preguntas, tareas, objetos, imágenes o animaciones (en la evaluación electrónica) para crear un modelo mental de la situación	Articular una solución, mostrar el trabajo asociado a la obtención de la misma y/o resumir y presentar los resultados matemáticos intermedios	Elaborar y presentar explicaciones y argumentos en el contexto del problema
Matematización	Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes al problema del mundo real y formular supuestos de modo que puedan utilizarse	Utilizar la comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de resolución matemático, p. ej., trabajando a un nivel de precisión apropiado al contexto	Comprender el alcance y los límites de una solución matemática que son el resultado del modelo matemático empleado
Representación	Crear una representación matemática de información del mundo real	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema	Interpretar los resultados matemáticos en distintos formatos con relación a una situación o uso; comparar o valorar dos o más representaciones con relación a una situación
Razonamiento y argumentación	Explicar, defender o facilitar una justificación de la representación identificada o elaborada de una situación del mundo real	Explicar, defender o facilitar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática. Relacionar datos para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o elaborar un argumento de varios pasos	Reflexionar sobre la soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado
Diseño de estrategias para resolver problemas	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia para reformular matemáticamente problemas contextualizados	Activar mecanismos de control eficaces y sostenidos en un procedimiento con múltiples pasos conducente a una solución, conclusión o generalización matemática	Diseñar e implementar una estrategia para interpretar, valorar y validar una solución matemática a un problema contextualizado
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilizar variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real empleando un lenguaje simbólico/formal	Comprender y utilizar constructos formales basándose en definiciones, reglas y sistemas formales, así como mediante el empleo de algoritmos	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar esta comprensión para favorecer la interpretación de la solución en su contexto y valorar la viabilidad y posibles limitaciones de la misma
Utilización de herramientas matemáticas	Utilizar herramientas matemáticas para reconocer estructuras matemáticas o describir relaciones matemáticas	Conocer y ser capaz de utilizar adecuadamente distintas herramientas que puedan favorecer la implementación de procesos y procedimientos para determinar soluciones matemáticas	Utilizar herramientas matemáticas para determinar la razonabilidad de una solución matemática y los límites y restricciones de la misma, dado el contexto del problema

Cuadro 2.2: Relación entre procesos y capacidades matemáticas según PISA (Op cit)

II.4.3 Conocimientos de contenido matemático presentes en PISA

Puesto que en las pruebas PISA aquello que se mide no son los conocimientos sino las competencias, es necesario buscar una manera alternativa a la establecida en la evaluación de la enseñanza de las Matemáticas en los centros escolares, basada en área de contenido diseñadas desde el interior de la materia. Para ello, se ha propuesto una estructura basada en la fenomenología matemática, que subyace a los problemas que han dado lugar a los conceptos matemáticos puestos en relieve. Aunque lo pudiera parecer, esta clasificación ya aparece en publicaciones como *On the Shoulders of Giants: New approaches to Numeracy* (Steen, 1990) y también en *Mathematics: the Science of Patterns* (Devlin, 1994)

Las categorías de contenido utilizadas en PISA son:

- Cambio y relaciones.
- Espacio y forma.
- Cantidad.
- Incertidumbre.

Pasemos a describirlas con más detenimiento.

Cambio y relaciones

En nuestro entorno existen gran cantidad de relaciones, temporales y permanentes, entre los objetos que las conforman, en las que muchas ocasiones existen cambios, bien por efecto del tiempo o de las propias interrelaciones. En algunos casos, esos cambios son continuos. Otras veces, discontinuos. Incluso esas relaciones pueden ser invariables. Esto nos sugiere modelizar, utilizando herramientas matemáticas, los cambios y las relaciones pertinentes, además de proporcionar una representación de dichos cambios y su traducción y retrotraducción desde el mundo en el que se originan al mundo matemático y viceversa.

Ejemplos de esta categoría pueden ser el crecimiento de los organismos, la música, las relaciones físicas como la velocidad, etcétera.

Espacio y forma

Bajo esta categoría se engloban gran cantidad de fenómenos que se encuentran en nuestro mundo cotidiano: patrones, características, posiciones y representaciones de objetos, codificación de la información… En esta categoría la protagonista es la Geometría, pero teniendo en cuenta que también existe en ella espacio para el Álgebra y la Aritmética. (Geometría Analítica)

Ejemplos de esta categoría son las actividades en las que se pone de relieve el estudio y comprensión de la perspectiva, la elaboración y lectura de mapas, transformaciones y muchas otras.

Cantidad

El ámbito de contenido relativo a cantidad quizá sea el más importante y extendido, debido al funcionamiento de nuestro mundo. De hecho, esta categoría incorpora la cuantificación de los atributos de los objetos, las relaciones, situaciones y entidades del mismo. Participar en esta categoría supone comprender las mediciones, cálculos, magnitudes, unidades, relaciones relativas y absolutas entre los objetos...

Ejemplos de esta categoría los encontramos en la construcción de modelos de situaciones, el examen los cambios y las relaciones, la descripción y manipulación del espacio y la forma, en la organización e interpretación de datos, medida y evaluación de la incertidumbre…

Incertidumbre y datos

En nuestro entorno cotidiano, la incertidumbre está siempre presente. Por ello, ésta debe formar parte de cualquier análisis matemático que se realice, especialmente ligado a nuestra vida diaria. La Estadística y la Probabilidad se han establecido para dar respuesta a este tipo de problemas. En esta categoría también podemos incluir los errores en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. El conocimiento de la Aritmética y el Álgebra también son importantes en esta área de conocimiento.

Ejemplos de incertidumbre son los resultados electorales, la predicción meteorológica, los modelos económicos, calificaciones de exámenes, etcétera. Tampoco debemos olvidar la importancia del azar en muchas de las actividades recreativas de la que participa el ser humano.

Estas cuatro categorías sirven de base para la confección de las pruebas aunque, como se ha visto, existen fuertes interrelaciones entre todas ellas.

II.4.4 Contextos

Por último, hemos de tener en cuenta que los problemas matemáticos se encuentran asociados a situaciones dentro de un contexto. La elección de cómo resolver un problema está muchas veces condicionada por el contexto en el que dicho problema se ha planteado. Pasemos a desarrollar los cuatro contextos antes mencionados.

- Personal: son aquellos problemas planteados en el entorno individual, familiar o de su grupo de iguales.
- Social: se trata de aquellos problemas que surgen del ámbito comunitario del individuo, en una especie de contexto suprapersonal.
- Profesional: concerniente a los problemas en el ámbito laboral.
- Científico: son los referidos al uso de las matemáticas en el mundo natural o de las ciencias y la tecnología.

Se puede comprobar que los contextos utilizados en las pruebas parten del ámbito cercano al alumno, en función de su relevancia, intereses y exigencias que tendrán que resolver en su vida adulta. Además, se procura que cada una de los estímulos pertenezca al mismo contexto, aunque en cada una de las preguntas se traten diferentes contenidos, capacidades o procesos, obteniéndose la gradación de dificultad que sirva para clasificar la competencia matemática de cada alumno participante en PISA

II.5 Metodología PISA.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, abordamos ahora la estructura y metodología de la prueba de competencia matemática de PISA 2012, último año en el que dicha competencia fue la relevante en dichas pruebas.

II.5.1 Diseño de la muestra

La muestra que se utiliza para las pruebas PISA procede de un muestreo estratificado de conglomerados en dos etapas, siendo la primera etapa proporcional al tamaño. Las unidades primarias de muestreo son los centros donde se realiza la prueba y las secundarias los alumnos de cada escuela. La elección efectiva de la misma se lleva a cabo mediante un procedimiento sistemático con intervalo de muestreo.

Este tipo de muestreo lleva asociado un complejo proceso de determinación de pesos muestrales debido a, por ejemplo, la no realización de la prueba por parte de algunos alumnos o bien para prevenir influencias no deseadas de algún conjunto de centros o estudiantes.

En caso de que algún país desee más información de alguna de sus regiones, como puede suceder en España, se tendrá que ampliar la misma. Algunas comunidades autónomas, como Castilla León, ya lo han hecho.

II.5.2 Elección de las preguntas y distribución según procesos, conocimientos y contexto.

Como hemos tratado ya, las preguntas de evaluación están inscritas en un contexto y requieren la puesta en práctica de los conceptos y procedimientos apropiados al nivel que se supone a un alumno de 15 años. Por ello, se busca un equilibrio entre los distintos componentes listados en el apartado anterior.

Idealmente, las preguntas de Matemáticas pueden asignarse a uno de los tres procesos conocidos: formulación, empleo de datos, procedimientos y razonamientos matemáticos e interpretación, aplicación y valoración de los resultados, otorgando porcentajes del 25%, 50% y 25% respectivamente a cada uno de ellos. La idea es otorgar el mismo peso a los procesos matemáticos y a los procesos de modelización y "desmodelización" matemática. Obviamente, cada una de las preguntas de cada categoría deben tener distintos niveles de dificultad.

En lo que respecta al contenido, se busca una distribución lo más equitativa posible entre los cuatro grupos considerados: Cambio y Relaciones, Espacio y Forma, Cantidad, Incertidumbre y Datos. Lo mismo podemos decir de la relación de las preguntas con el contexto, siendo las categorías las ya listadas: Personal, Profesional, Social y Científico.

Por otro lado, y en lo que respecta a la dificultad de las preguntas, éstas se distribuyen en distintos niveles de dificultad, desde las que son fácilmente asumibles para cualquier alumno de 15 años hasta aquellas que planteen retos a los alumnos más avanzados

II.5.3 Estructura de la prueba

Los cuadernos de ejercicios ofertados a los alumnos que pasan las pruebas PISA no son iguales para todos. Generalmente, en lo que a la evaluación de la competencia matemática se refiere, se proponen a los distintos países participantes un total de 270 minutos de material específico de Matemáticas, distribuidos en nueve grupos de preguntas de una duración estimada de 30 minutos. En estos nueve grupos encontramos tres grupos compuestos por preguntas de convocatorias pasadas, cuatro de preguntas nuevas con distintos niveles de dificultad y dos grupos de preguntas "fáciles" o dos adicionales del grupo anterior, de forma que cada país elige, de entre todos estos grupos, un examen de 120 minutos de duración, es decir, cuatro bloques de los grupos anteriormente citados.

La duración total del examen es de dos horas. En las últimas ediciones se ha ofrecido a los distintos países participantes la posibilidad de utilizar herramientas informáticas para pasar algunas preguntas de las pruebas y, de alguna forma, testar la competencia del alumnado en la utilización de elementos básicos de ordenadores, como teclado, ratón…

La valoración de la competencia matemática en las pruebas PISA se compone de unidades de evaluación que comprenden un estímulo verbal y otro tipo de información de naturaleza típicamente matemática, como tablas, gráficos, mapas así como preguntas asociadas a dichos estímulos. Asimismo, se vela por la independencia dentro de las distintas preguntas, de forma que no responder a alguna de ellas no condicione la respuesta de otras. Por otro lado, siempre se intenta garantizar que las preguntas que se planteen estén asociadas a distintos contextos anteriormente descritos para no sesgar las posibilidades de respuesta del alumnado según sus intereses.

II.5.4 Selección de preguntas

Las preguntas seleccionadas para su inclusión en PISA responden a la idea de cubrir las distintas capacidades del alumnado participante en ellas. Aparte de las categorías de la evaluación (contenido, contexto y proceso) se intentan representar los distintos niveles de dificultad, para medir los distintos niveles del alumno dentro de la competencia matemática.

No debemos olvidar uno de los factores más importantes en el éxito de las pruebas: el nivel de competencia lectora. Este factor es relevante, pues condiciona el desarrollo de las pruebas por lo que se busca sencillez y naturalidad en su redacción, de forma que sea asequible a la mayor parte posible del alumnado que toma parte en las pruebas. Para evitar este tipo de problemas, se verifican las traducciones realizadas a los idiomas de los países participantes, a cargo de expertos locales.

II.5.5 Tipología de preguntas y respuestas

Los exámenes constan de combinaciones de distintos tipos de preguntas. Las respuestas pueden ser de tres tipos: respuesta de tipo construida abierta, respuesta de tipo construida cerrada y de elección. En la elaboración de los cuestionarios, se busca que haya equilibrio entre estos tipos de preguntas.

En las del primer tipo, normalmente se le pide al alumno que ofrezca un razonamiento de por qué se llega a esa solución. Dada la naturaleza de las mismas, se hace necesaria la codificación manual por parte de correctores cualificados. En el segundo tipo, las respuestas permiten una codificación más sencilla, pues ofrecen un contexto más claro de cara a la corrección, siendo su respuesta habitual un número de un solo dígito. En las preguntas de respuesta seleccionada, hay que elegir entre una o varias opciones. En este tipo de preguntas, sus respuestas suelen codificarse de forma automática, por lo que apenas hay dificultad en este aspecto.

En cada pregunta, se facilitan criterios de corrección que permite calificar de forma total o, en su caso, parcial las respuestas, en función del grado de acierto en la respuesta, de cara a una homogénea valoración posterior de los resultados.

II.5.6 Empleo de materiales de apoyo

Si bien el empleo de la calculadora está permitido en las pruebas PISA, siempre que no entre en contradicción con la política educativa de cada país, se procura la realización de las mismas no la requiera de forma expresa.

II.5.7 Cuestionarios de contexto

Aparte de todo lo anterior, el alumnado participante también debe rellenar unos cuestionarios en el que se tienen que responder a preguntas sobre ellos y sus hogares, los llamados "cuestionarios de contexto". En dichos cuestionarios se recoge la información relativa a las circunstancias económicas, sociales y culturales de los participantes, así como información sobre su estilo de vida, actitud hacia su "profesión" como estudiante y su ambiente familiar. Además, desde la dirección del centro, también se realiza otro cuestionario para recoger información sobre los recursos materiales y humanos del centro del alumno. Todo esto permite poner los resultados obtenidos en PISA en las características en las que se han llevado a cabo y que puede dar sentido a dichos resultados.

A parte de para lo anterior, los cuestionarios de contexto también sirven para definir los subgrupos de los que se obtendrá la muestra y para estimar los valores posibles dentro de los resultados del estudio.

II.5.8 Actitudes hacia las Matemáticas

Las actitudes y las emociones de los alumnos hacia las Matemáticas desempeñan un papel importantísimo en la atención y uso que los alumnos hacen de las mismas. Es lógico que aquellos alumnos que se sientan más seguros en su manejo identifiquen más oportunidades de usarlas que aquellos que no se encuentran en la misma disposición o que experimentan emociones negativas, como ansiedad o inseguridad.

Un aspecto de la enseñanza de las Matemáticas que debe incluirse es que el alumnado desarrolle actitudes y emociones para aplicarlas en su día a día. En los cuestionarios de contexto se incluyen preguntas que intentan poner luz en este aspecto.

Además, el interés en las Matemáticas también depende de la necesidad de su uso en un futuro.

II.6 Clasificación en niveles de la Competencia Matemática

Una vez corregidos los exámenes y codificadas sus respuestas, llega el momento de asignar una puntuación a cada uno de los participantes. Para ello se realiza una transformación lineal de forma que las calificaciones se dan en una variable de media 500 y desviación típica 100. A partir de ahí, se obtienen seis niveles de puntuación, de forma que cada individuo pertenece a uno de ellos y se entiende que es más probable que sea capaz de llevar a cabo con éxito las tareas del nivel al que pertenece y los niveles inferiores y es menos probable que realice las de grupos superiores. Así, la descripción de cada uno de los niveles vendría dada por la tabla siguiente:

Nivel	**Habilidades**
6	Los integrantes de este nivel saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones y problemas complejos. Relacionan distintas fuentes de información y las traducen de forma flexible. Aplican sus conocimientos, dominan las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollan nuevos enfoques para abordar nuevas situaciones. Pueden formular y comunicar sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones y argumentos.
5	Los integrantes de este nivel saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, evaluar y comparar distintas estrategias para resolver problemas complejos relativos a estos modelos. Además, pueden trabajar utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas así como representaciones relacionadas con dichas situaciones. Asimismo, pueden reflexionar y comunicar sus acciones.
4	Los integrantes de este nivel pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas, que pueden contar con condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden integrar distintos tipos de

	representaciones, asociándolas directamente al mundo real. Por otro lado, saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y cierto ingenio en estos contextos.
3	Los integrantes de este nivel saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluso aquellos que necesitan etapas secuenciadas. Pueden aplicar estrategias de resolución a problemas sencillos. Saben interpretar y usar representaciones basadas en distintas fuentes de información y razonar a partir de ellas. Asimismo, son capaces de elaborar escritos con sus conclusiones
2	Los integrantes de este nivel saben interpretar y reconocer situaciones en contextos reconocibles mediante una inferencia directa. Saben extraer información de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Además, son capaces de utilizar algoritmos, fórmulas y procedimientos elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	Los integrantes de este nivel saben responder a preguntas de contextos que les son conocidos, con toda la información presente y las preguntas claramente definidas. Son capaces de llevar a cabo procesos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, así como realizar acciones sugeridas por el contexto presentado.

Cuadro 2.3: Niveles en la escala de la Competencia Matemática definidos por PISA

II.7 Críticas a PISA.

Una de las críticas más directas que, como docente en Enseñanza Secundaria, pueda hacerse a este método de evaluación es la motivación del alumnado de cara a su realización. El saber que dicha prueba no va a tener ninguna consecuencia “práctica” en sus calificaciones hace que el alumnado no se tome tan en serio su resolución.

Desde el punto de vista técnico, algunos autores como Piers en 2003 han expuesto sus dudas sobre la elección de la muestra basada en edades y no en curso académico.

Por otro lado, PISA no tiene en cuenta los currículos de los distintos países participantes, por lo que algunas cuestiones planteadas podrían requerir de unos conocimientos no desarrollados en algunos países, lo que podría llevar a pensar en una falta de neutralidad en las pruebas (Goldstein, 2004). Además, a pesar de tener en cuenta el contexto, generalmente con bastante mimo, algunos autores apuntan a que quedan fuera algunos aspectos de índole psicológica y cultural (Bempechat, Jiménez, Boulay, 2002)

Tampoco debemos olvidar el impacto que estas pruebas tienen en las políticas educativas de los distintos países participantes. En la carta abierta remitida por Heinz Dieter Meyer, y firmada por muchos otros expertos, a Andreas Schleicher, director del programa PISA, en mayo de 2014, una de las principales críticas hechas a las pruebas PISA, señala que los gobiernos están centrando las políticas educativas en la búsqueda de soluciones a corto plazo y el diseño de pruebas estandarizadas para escalar puestos en la clasificación dada por PISA, olvidando que los cambios en educación tardan años en diseñarse, implementarse, testarse y aplicarse. Sin ir más lejos, ya vimos el en el capítulo anterior la lectura que hace la LOMCE de las Matemáticas, considerando los mismos bloques de contenido valorados por PISA.

Además, en esta misma carta, se critica a la ODCE, promotora de las pruebas, por el hecho de centrarse en los aspectos económicos relativos a la educación, olvidando facetas como el desarrollo moral, artístico, ético y cívico. Incluso se llega a denunciar la falta de elementos de participación en la toma de decisiones dentro de la OCDE para el diseño de las pruebas. Asimismo, se acusa a la OCDE de firmar acuerdos de colaboración con empresas privadas, que obtienen beneficios por la comercialización y aplicación de dichas pruebas. De hecho, tal y como se publica en la web http://pisaparacentroseducativos.es/faq.html, el coste de participación de un centro en dichas pruebas es de 3700€ más IVA.

La respuesta a esta carta abierta, bastante más fácil de encontrar que la carta que originó el intercambio epistolar, puede consultarse en http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/OECD-response-to-Heinz-Dieter-Meyer-Open-Letter.pdf

II. 8 El PISA andaluz. Las Pruebas de Evaluación Diagnóstica.

Siguiendo la estela de las pruebas PISA, la Consejería de Educación propuso, mediante la orden de 27 de octubre de 2009, BOJA 230 de 25 de noviembre de 2009, un esquema de evaluación similar, en el que todo el alumnado de 2º de ESO, salvo aquel que tenía algún tipo de adaptación curricular, debía participar. Estas pruebas son la continuación de las Pruebas de la Evaluación de Diagnostico, establecidas por la orden de 28 de junio de 2006, BOJA nº 150 del 4 de agosto de 2006.

Al igual que con las pruebas PISA, existe un marco teórico asociado a las mismas, que se puede consultar en: http://www.redes-cepalcala.org/inspector/PED/PED%202006-2007/MARCO%20TEORICO.pdf

Las PED pretendían evaluar las competencias adquiridas por el alumnado, haciendo especial énfasis en las Competencias Lingüística y Matemática y añadiendo una tercera rotatoria cada curso. En dos ocasiones se evaluaron la Competencia de

Interacción con el Mundo Físico, en otras dos la Competencia Social y Ciudadana y en una ocasión la Competencia Artística.

El proceso de aplicación de las pruebas, regulado por esta orden, era similar a PISA, así como su aplicación y corrección, realizada por los departamentos involucrados. Además, el alumnado debía rellenar un cuestionario de contexto, que permitía calcular el ISC (Índice Socio-Económico y Cultural), así como el director del centro, que permitía entender los datos en la realidad social del centro, y los tutores de los grupos evaluados.

Las PED fueron realizadas en el curso 2012/2013 por última vez. Actualmente, solo se realiza una evaluación de diagnóstico en primaria, las pruebas ESCALA.

Capítulo III. Objetivos del trabajo.

Tras analizar toda la información aparecida en los capítulos anteriores, enunciamos ahora el objetivo general del este trabajo, acompañado de otros objetivos específicos

III.1 Objetivo General

Mejorar el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos en los niveles bajos de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en 3º de ESO.

III2. Objetivos específicos

Analizar el desempeño de los alumnos en los niveles bajos de Matemáticas utilizando las pruebas PISA.

Desarrollar una metodología que permitan mejorar el rendimiento en la materia y la competencia matemática de dichos alumnos.

Capítulo IV. Contexto de aplicación del estudio. Metodología. Análisis de resultados

IV1. Introducción

En este capítulo, expondremos el trabajo realizado con los alumnos en clase. Para ello, comenzaremos situando al centro y sus características, describiremos el grupo de alumnos con el que se ha trabajado, tanto en general como en particular. Posteriormente, analizaremos las distintas pruebas trabajadas con los alumnos, para ver su desempeño. Para ello, mostraremos las pruebas, los resultados obtenidos, analizaremos las respuestas y expondremos la relación de cada una de las pruebas con el currículo establecido por la LOMCE para los contenidos de cada prueba.

IV.2 Contexto del centro

Nuestro centro se encuentra en la localidad de Macael, con una población cercana a los 6000 habitantes, en la Sierra de los Filabres, en una comarca en la que el modelo productivo es, únicamente, el derivado de la extracción y procesamiento del mármol, que es la fuente de riqueza de la zona. Los años de las crisis han azotado duramente a la comarca, registrándose porcentajes de paro cercanos al 50%. Previamente al estallido de la "burbuja inmobiliaria", se rozaba el pleno empleo ya que una salida fácil para aquellos que no disponían de estudios era trabajar en las múltiples empresas de extracción de mármol de la comarca.

El Instituto fue creado en el año 1975, como centro de Formación Profesional, pasando a ser IES a finales de los años noventa. Desde entonces, se han impartido enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Programas de Cualificación Profesional y sus sucesivos equivalentes, actualmente Formación Profesional Básica, y Ciclos de Grado Medio y Superior, algunos de ellos en virtud de acuerdos firmados entre la Consejería de Educación y la empresa Cosentino S.A.

Nuestra investigación se va a desarrollar en 3º de ESO. En nuestro centro, los alumnos están divididos en Lengua y Matemáticas en niveles. Esta medida de atención a la diversidad se puso en marcha en el curso 2009/2010. Con ella, se pretendía adaptar la materia a las capacidades y aptitudes del alumnado.

La clasificación inicial por niveles se realiza en virtud de las pruebas iniciales y rendimiento en cursos anteriores, o según los informes que se pasen del colegio si ingresan en el centro ese año, aunque luego se corrige, si es necesario, en el transcurso de los primeros meses de curso, teniendo en cuenta el rendimiento del alumno en su trabajo y las observaciones que realiza el profesor de la materia. De hecho, los grupos son plenamente flexibles: un alumno puede subir o bajar de nivel dependiendo de lo mencionado anteriormente. Este cambio de nivel puede hacerse en cualquier momento, no es necesario esperar a las juntas de evaluación o a una reunión del Equipo Educativo, basta con comunicarlo al alumno y al tutor, para que tenga constancia y lo comunique a las familias. De dicho cambio queda constancia con un documento en el Departamento correspondiente.

IV.3 Descripción del grupo en su conjunto.

Durante el curso 2015/2016 he impartido, entre otras materias, Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas, en el nivel III de 3º de ESO. El grupo está formado por 11 alumnos, tras un reajuste en el que bajó una alumna a mi nivel y subió otro al nivel II. Se trata de alumnos a los que les “tradicionalmente” les cuestan las Matemáticas. Tienen actitudes hacia la materia que no suelen ser positivas, bien porque se les da mal o porque tienen aprensión a la misma. Digamos que tendrían una baja “autoestima matemática” después de mucho tiempo de resultados malos o que, según su criterio, no se corresponden con el trabajo que realizan para superar la asignatura. Incluso cuando algún ejercicio es resuelto correctamente, ellos se empeñan en que no es así, se desaniman y refuerzan esa percepción negativa de las Matemáticas.

Durante el curso pasado, tuve en clase a 4 de esos alumnos, lo que me permite conocer cuáles son sus puntos fuertes y sus flaquezas y me ayuda a orientar la asignatura. Creo que es una buena práctica docente mantener el mismo grupo de alumnos, siempre que sea posible, lo que sin duda es algo favorecido por la clasificación realizada por niveles.

Otro punto positivo es la homogeneidad que presentan, lo que me permite simplificar las explicaciones al grupo en general. Por otro lado, esa homogeneidad les ayuda a sentirse más libres de preguntar aquellas dudas que tengan, puesto que, en algunas ocasiones, pueden sentir vergüenza por preguntar aquello que no saben en un grupo-clase más amplio o con alumnos “más listos” que ellos, pues temen ser “reprendidos” por sus compañeros. Este hecho, en ocasiones, se sienten contentos cuando llega la hora de la clase de Matemáticas, porque se sienten en un grupo de iguales y valoran más el apoyo que reciben, tanto del profesor como el que puedan recibir de un compañero.

No debemos olvidar que, en este tipo de grupos, el número tan reducido de alumnos ayuda a mantener una relación de confianza entre cada uno de ellos y el profesor. Al final, uno los acaba conociendo, lo que permite una tutorización más personalizada. Esto es especialmente interesante porque, por regla general, este tipo de alumnado no dispone de un apoyo fuera de clase que les ayude con los deberes. Por ello, normalmente, aunque empiezo siempre proponiendo tarea para casa, al cabo del tiempo y, por la dificultad creciente e intrínseca de la materia, me plantean siempre muchas dudas en la sesión siguiente y muy pocos traen hechos los ejercicios, limitándose a copiar los enunciados. Por eso, en este tipo de niveles, prefiero trabajar con ellos en clase, resolviendo en ese momento las dudas que puedan tener, dejando para casa que refuercen los ejercicios repitiéndolos de nuevo y la preparación de los exámenes, cosa que no siempre ocurre porque muchos de ellos no tienen hábitos de estudio asentados. En este aspecto, un punto importante es la utilización de la libreta, pues es en ella donde deben plasmar su trabajo diario, siendo la fuente de la que deben estudiar pues, normalmente y aunque se trabaje en clase, las explicaciones de los libros suelen quedar un poco confusas, ya que a la dificultad de la materia se suele añadir la poca práctica que tienen en leer Matemáticas, y prefiero que copien las explicaciones y ejemplos que se dan en la pizarra. En ellas, se intenta ir siempre a lo fundamental, desproveyéndolas de adornos superfluos para concentrar la atención y los esfuerzos de aprendizaje en lo importante.

Afortunadamente para ellos, y para el profesor, se trata de un grupo con un buen ambiente de trabajo, sin ningún alumno que rompa el orden en clase, aunque es cierto que no siempre están "deseosos" de trabajar y hay que buscar la manera de llevarlos de nuevo al "redil", lo que algunas veces resulta más difícil que explicar Matemáticas.

Todos los alumnos, salvo tres, viven en la misma localidad donde se ubica el centro. Los que no, lo hacen en localidades más pequeñas cercanas. Estos alumnos están perfectamente integrados en el centro. Una de ellas está en el centro por primera vez, pues en su localidad de residencia el colegio imparte enseñanzas hasta 2º de ESO.

IV.4 Descripción del alumnado individualmente

Los alumnos han sido numerados del 1 al 21, usando números impares. La explicación a esto es el número de orden del cuaderno del profesor. Como hemos dicho anteriormente hay 11 alumnos, de los cuales 4 son chicos y 7 chicas.

Alumna nº 1

Es una de los cuatro alumnos con los que trabajé el año pasado. Tiene buena actitud hacia las matemáticas, aunque tiene tendencia a desanimarse cuando algo se le resiste. Normalmente es consciente de sus errores cuando los ve o se le sugieren y, el algunas ocasiones, hasta puede anticiparse a mis correcciones en este sentido. Es participativa. Este año la he visto menos despierta en la asignatura que el año pasado. En lo referente a su futuro, oscila entre la psicología y la biología.

Alumno nº 3

Este alumno es nuevo para mí. Tiene dislexia y suele cometer faltas de ortografía. Tiene muy buena disposición a trabajar, no suele quejarse de las tareas que propongo. Es participativo. A veces es algo persistente en los errores que comete y no siempre es capaz de resolverlos por sí mismo. Le gustaría estudiar medicina.

Alumna nº 5

Esta es otra de las alumnas con las que trabajé el año pasado. Es un ejemplo de alumna que no molesta en clase, pero que no suele atender por regla general. Muestra más predisposición a tareas que se salgan de la rutina de una clase de matemáticas. No participa en clase y se niega a salir a la pizarra. En el futuro, le gustaría ser tatuadora.

Alumna nº 7

Esta alumna puede considerarse una de las mejores. Suele hacer las tareas, pregunta, sale a la pizarra, aunque siempre que puede intenta engañarme para trabajar otra asignatura en clase, lo que me ha llevado más de una vez a darle un toque de atención. Su libreta está perfectamente ordenada y muy limpia. En los exámenes, habitualmente, siempre necesita algo más de tiempo para hacer los ejercicios. Le encanta la biología.

Alumno nº 9

Este alumno es, posiblemente, el más problemático del grupo en lo que a comportamiento se refiere, pues siempre está intentando hacer gracias pero, por motivos desconocidos y contrariamente a lo habitual con otros profesores de otras materias, no ha resultado demasiado complicado redirigirlo. Ha estado expulsado del centro en un par de ocasiones y, durante un tiempo, estuvo llegando tarde a clase hasta que un día lo dejé en el pasillo toda la hora. Suele trabajar poco en clase pero, cuando es capaz de concentrarse y se aplica en lo que tiene que hacer, suele ser brillante y, si se equivoca, es capaz de ver su error rápidamente.

Alumno nº 11

Este es otro de los alumnos “graciosillos” y con el que, en alguna ocasión, he tenido algún roce por ello, pero sin trascendencia, eso sí. Cuando no está en su mundo, es capaz de razonar bien. A veces es capaz de averiguar por donde se puede resolver un problema que no se ha visto anteriormente. Tampoco es infrecuente que me plantee preguntas de tipo “existencial”, que provocan algún comentario jocoso en sus compañeros, especialmente de las chicas. Quiere hacer el módulo de automoción, que se imparte en el centro.

Alumna nº 13

Esta alumna tiene una buena disposición en clase de matemáticas. Suele trabajar, salir a la pizarra y preguntar las dudas. La diferencia con algunos de sus compañeros es que, normalmente, no es capaz de darse cuenta de los errores, siendo bastante persistente en ellos. También suele necesitar bastante tiempo en realizar los exámenes. Al igual que algunos de sus compañeros, suele tener miedo a equivocarse en público.

Alumno nº 15

Este alumno suele atender en clase, aunque es más reacio a veces a trabajar. Necesita, como todos ellos, supervisión constante y alguna “regañina” para seguir adelante en el trabajo en clase. Suele tener buena actitud en lo que a participación y salir a la pizarra se refiere. Sus errores podríamos calificarlos como “pasivos” porque, siendo consciente de que se equivoca, no siempre parece que le “apetece” corregir sus fallos. Es uno de los tres alumnos que no vive en la localidad donde se ubica el centro.

Alumna nº 17

Esta alumna suele estar bastante distraída y, cuando atiende, uno es perfectamente consciente de que no se está enterando de nada, cosa que abiertamente reconoce. Suele trabajar poco en clase y necesita mi constante ayuda precisamente por eso. Creo que tiene un problema de falta de atención y concentración. Aunque, cuando se pone y con un poco de ayuda, es capaz de afrontar contenidos sencillos, adaptados al nivel de clase. Es la segunda alumna que no vive en la localidad donde se ubica el centro. Madruga bastante para coger el transporte y quizá eso le puede afectar en el rendimiento. El año pasado también trabajé con ella y su actitud era bastante parecida. Al menos este año no está pendiente de alguno de los chicos del grupo.

Alumna nº 19

Esta alumna experimenta un gran rechazo hacia las matemáticas. Cualquier concepto o procedimiento que se imparte tras las definiciones iniciales de las unidades didácticas es considerado como “muy difícil”, cerrándose a cualquier ayuda, lo que provoca que se distraiga y distraiga, a su vez, a las alumnas nº 1 y 7, por lo que tengo que estar encima de ella, tanto para controlarla como para ayudarla a la hora de hacer ejercicios. Muchas veces, al igual que otros compañeros, me pregunta por la utilidad de los contenidos que se imparten. Se equivoca constantemente y, rara vez, es consciente y corrige sus errores si no se le indican.

Alumna nº 21

Esta alumna tiene una muy buena predisposición a las matemáticas, tanto en la participación en clase como en el trabajo, siendo la primera que acaba las tareas propuestas, de forma que le propongo ejercicios de consolidación, aunque suele equivocarse y no siempre es capaz de darse cuenta por sí misma, lo que hace que, en ocasiones, el mismo ejercicio lo tenga que repetir dos o tres veces hasta que lo completa correctamente. Siempre que puede, ayuda a la alumna nº 17. Es de origen extranjero, lo que explicaría los problemas de comprensión lectora que a veces manifiesta. Es la tercera alumna que vive en distinta localidad a la que se ubica el centro. Le gustaría hacer arquitectura.

IV.5 Metodología general de trabajo en clase

Normalmente, se comienza con la introducción del tema, leyendo en clase las primeras definiciones de los conceptos básicos del tema. Posteriormente, pasamos a desarrollar los distintos procedimientos, procurando simplificarlos al máximo y buscando un adecuado número de ejercicios, de forma que los alumnos aprendan pero tampoco se cansen, pues entonces se puede experimentar cierto rechazo al trabajo que se hace. En ocasiones, resulta complicado encontrar el punto justo, sobre todo cuando algo se les resiste y hay que seguir insistiendo.

Esta forma de trabajar se desarrolla a lo largo del tema y, al final y tras unos ejercicios de repaso, se hace el examen de la unidad.

En la calificación de la asignatura no solamente se tiene en cuenta la nota del examen, sino que también se tienen en cuenta otros elementos como la libreta, la participación, las actividades TIC…

IV.6 Metodología del estudio.

Tras todo lo anterior, y con la sugerencia de mi director de Trabajo Fin de Máster y para complementar el desarrollo del programa de la asignatura, nos marcamos el siguiente programa.

Centraremos nuestro estudio en los siguientes aspectos relacionados con PISA, señalados en la tabla de la página 35, aunque no todos esos elementos se estudien en todas y cada una de las actividades propuestas.

Prestaremos especial atención a las capacidades formular y emplear, aunque no dejemos de lado la capacidad de interpretar, considerando especialmente los procesos de **matematización** de la realidad y **diseño de estrategias para resolver problemas**. Evidentemente, estas procesos y capacidades matemáticas no excluyen otras, como el proceso inverso al de matematización, en el cual el alumno debe saber si la solución tiene o no sentido dentro de su problema, o la de representación, puesto que en cada momento se debe elegir los métodos y herramientas más adecuadas a nuestro problema, pero creemos que, dentro de los contenidos del curso y las características del grupo, los anteriores procesos son los que pueden ser más complicados y precisan de un mayor trabajo tanto por parte del alumnado como por parte del profesor. Como se puede comprobar, son las tres acciones asociadas a la definición de competencia en PISA.

Para estudiar los anteriores procesos, nos centraremos en las siguientes unidades y aspectos. En el tema de Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones, dentro del bloque de Álgebra y especialmente en la resolución de problemas en los que intervengan ecuaciones, prestaremos atención a los procesos de comunicación, representación matematización, así como una inteligente elección y diseño de estrategias para resolver problemas. En la unidad de Funciones, retomaremos estos mismos procesos, intentando profundizar en el estudio de funciones matemáticas que modelizan elementos cotidianos de la vida del alumno. En la unidad de Estadística, intentaremos desarrollar el proceso completo, desde el planteamiento del problema a la obtención de una solución. Primero, conociendo los distintos estadios del método estadístico, posteriormente desarrollando los conceptos básicos de la misma, así como el cálculo de las medidas estadísticas más significativas. Plantearemos una encuesta como forma de dar cuerpo a este tema.

Para ello, en las correspondientes unidades didácticas, realizaremos lo siguiente:

1. Pasar varios estímulos de las distintas áreas de PISA (Cambio y Relaciones, Espacio y Forma, Cantidad, Incertidumbre y Datos) al alumnado del grupo para tratar de determinar el grado de adquisición de competencias y tratar de conocer las carencias en su desarrollo.

2. Obtener conclusiones de dichas pruebas, que nos permitan:

> 3. Desarrollar el contenido de cada unidad, prestando especial atención a la metodología empleada, las actividades propuestas, los recursos empleados, dando respuesta a las conclusiones obtenidas en el apartado 2.
>
> 4. Observar los resultados de lo hecho en el apartado 3.
>
> 5. Evaluar todo lo anterior y proponer mejoras para ser incluidas en la metodología en las siguientes unidades.

6. Volvemos al apartado 1.

IV.7 Previsibles dificultades.

Una de las posibles dificultades que podría entrañar el cambio de metodología es la reacción del alumnado. Hay que tener en cuenta que, si alguien “sabe” de profesores son los alumnos, puesto que estamos expuestos a ellos durante seis horas cinco días a la semana. Uno de mis miedos es cómo reaccionarán ante las posibles alteraciones que se hagan a lo largo del tiempo en el que se desarrolle el estudio.

Otro de mis temores es el trabajo en casa. Por mucho que se trabaje en clase, es importante reforzar en casa lo que se ha hecho, sobre todo de cara a los exámenes. Por ello, se hace necesario tener esta variable controlada, por lo que tendré que elaborar estrategias para trabajar este aspecto con ellos.

El tercero de mis miedos es el choque que pueda suponer la forma de los problemas de PISA, puesto que, habitualmente, el tipo de problemas y cuestiones a los que están acostumbrados difiere completamente de la forma de los enunciados de PISA. Ello conllevará un tiempo de adaptación y el conveniente desarrollo de estrategias para incorporarlos a la práctica docente.

El trabajo de investigación se ha llevado a cabo entre enero y junio de 2016.

IV.8 Análisis de resultados de las pruebas PISA

A continuación, exponemos los distintos estímulos PISA a los que se han enfrentado los alumnos. Se incluye una descripción de la pregunta atendiendo a las características señaladas en el capítulo III, un análisis de los resultados obtenidos así como aquellos aspectos más notables de las respuestas proporcionadas con los alumnos. Por otro lado, se concluye, para cada estímulo, qué sería necesario corregir y se relaciona con el currículo de 3º de ESO.

Estímulo nº 1: Los líquenes.

Como consecuencia del calentamiento global del planeta, el hielo de algunos glaciares se está derritiendo. Doce años después de que el hielo haya desaparecido, empiezan a crecer en las rocas unas plantas diminutas, llamadas líquenes.

Los líquenes crecen aproximadamente en forma de círculo.

La relación entre del díametro de este círculo y la edad del líquen se puede expresar aproximadamente mediante la fórmula $d = 7{,}0 \times \sqrt{t - 12}$ *para* $t \geq 12$*, siendo d el diámetro de este círculo en milímetros y "t" el número de años transcurridos desde que el hielo ha desaparecido.*

Pregunta 1

Aplicando la fórmula, calcular el diámetro que tendrá un liquen 16 años después de que el hielo haya desaparecido.

Muestra tus cálculos.

Bloque	Aritmética y Álgebra
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Utilización de herramientas matemáticas.

Bloque de contenido	Cambio y relaciones. Espacio y forma.
Contexto	Científico
Tipo de respuesta	Abierta

Calificación

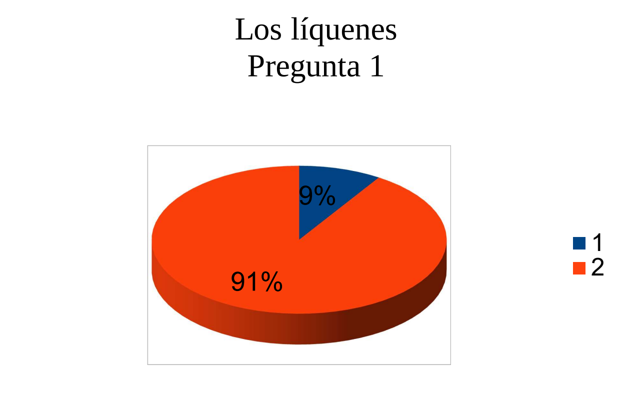
2	1	0	9
14 (mm)	• Soluciones parciales / incompletas. • Sustitución correcta pero respuesta incorrecta. • Respuestas incompletas.	Respuesta incorrecta.	Sin respuesta.

Cuadro 4.2: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Los líquenes”

En esta pregunta, se pretende que el alumnado sustituya directamente en la fórmula para obtener la solución. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
1	1	9,09%
2	10	90,91%



Cuadro 4.3: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Los líquenes”

Como podemos comprobar, el 91% de los alumnos son capaces de sustituir correctamente en la fórmula dada y solamente uno comete un error de cálculo en la sustitución, obteniendo una respuesta parcial. La pregunta es, por tanto, fácilmente resuelta por prácticamente toda la clase.

<u>Pregunta 2</u>

Ana midió el diámetro de un liquen y obtuvo 35 cm. ¿Cuántos años han transcurrido desde que el hielo desapareció de ese lugar? Muestra tus cálculos

Bloque	Aritmética y Álgebra
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matemátización. Razonamiento y argumentación. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.

	Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones. Espacio y forma
Contexto	Científico
Tipo de respuesta	Abierta
Calificación	

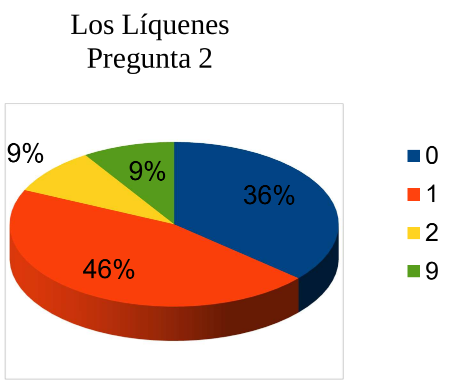
2	1	0	9
37 (años)	• Variables correctamente sustituidas pero con solución incorrecta.	Respuesta incorrecta.	Sin respuesta.

Cuadro 4.4: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Los líquenes”

En esta pregunta, los alumnos deben, de nuevo, aplicar una fórmula, pero yendo un paso más allá que en la pregunta anterior, pues tienen que resolver una ecuación. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	4	36,36%
1	5	45,45%
2	1	9,09%
9	1	9,09%



Cuadro 4.5: Resultados de la pregunta 2 del estímulo “Los líquenes”

En esta segunda pregunta vemos que el incremento en la dificultad ha comportado una variación en el abanico de respuestas. Así, vemos que un alumno no ha dado ninguna respuesta, cuatro dan respuestas erróneas, cinco soluciones parciales y solo uno la respuesta correcta.

Estos resultados nos hacen ver la dificultad que tienen estos alumnos para poner en marcha procesos inversos a los de sustitución, es decir, que tienen lagunas en la resolución de ecuaciones.

Si bien es cierto que las ecuaciones con radicales quedan fuera del alcance de estos alumnos, por no formar parte de los contenidos mínimos de este curso, para resolver una ecuación como la que plantea el problema es necesario conocer el concepto de raíz cuadrada y dominar los procesos de despeje de incógnitas, que son herramientas que ya conocen de cursos anteriores y que, de alguna manera, ya tienen incorporadas porque la mitad del grupo, las respuestas 1 y 2, totalizan un 54%. La combinación de los dos anteriores conceptos es suficiente para intuir de qué manera se puede llegar a la solución. Aunque en este tipo de alumnado es difícil que se lleguen a combinar estos procesos de la forma adecuada, creemos que podría ser interesante al menos mostrarles el camino.

Conclusiones del estímulo nº 1:

- Consolidar los conceptos básicos relativos a raíces y resolución de ecuaciones.
- Reforzar los procedimientos de resolución de ecuaciones.

Los contenidos curriculares fijados para las Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas que se pueden relacionar con este estímulo son los siguientes:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque II: Números y álgebra		
Raíces cuadradas. Jerarquía de operaciones. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo ynotación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida. 2. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones deprimer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando	1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos. 1.9. Calcula el valor de expresiones numéricas de números enteros, decimales y fraccionarios mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente entero aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones. 1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución. 4.1. Formula algebraicamente una

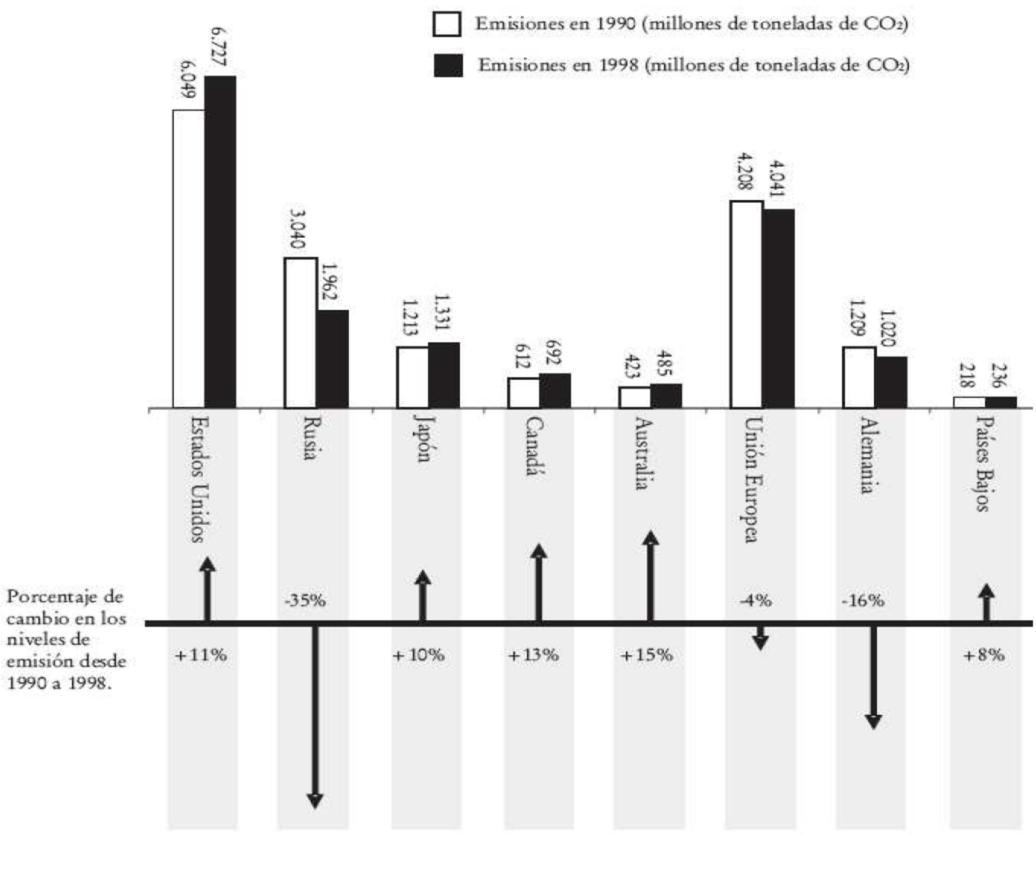
	técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
Bloque IV: Funciones		
Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado	2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Cuadro 4.6: Contenidos curriculares del estímulo “Los líquenes”

Estímulo nº 2: Los niveles de CO2

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO_2 en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático.

El diagrama siguiente muestra los niveles de emisión de CO_2 en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes)



Pregunta 1

En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO2 en EEUU del año 1990 al año 1998 fue del 11%.

Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene ese 11%.

<table>
<tr><td>Bloque</td><td>Aritmética y Álgebra</td></tr>
<tr><td>Proceso matemático</td><td>Formular. Emplear</td></tr>
<tr><td>Capacidad matemática subyacente</td><td>Comunicación.
Matematización.
Representación.
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.
Utilización de herramientas matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Bloque de contenido</td><td>Cantidad</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td>Científico</td></tr>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td>Abierta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calificación
<table>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Resta correcta y cálculo correcto del porcentaje.</td><td>Error en la resta y cálculo correcto del porcentaje.</td><td>Otras respuestas</td><td>Sin respuesta</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

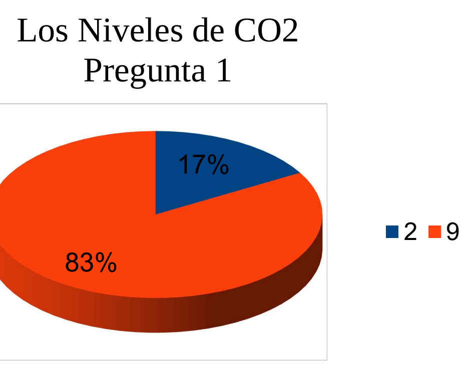
Cuadro 4.7: Análisis de la pregunta 1 del estímulo "Los niveles de CO2"

Los resultados obtenidos para esta pregunta fueron los siguientes:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
2	1	16,67%
9	5	83,33%

Gráfico



Cuadro 4.8: Resultados de la pregunta 1 del estímulo "Los niveles de CO2"

Esta prueba, que sólo fue realizada por 6 alumnos, presentó en su desarrollo la gran dificultad de leer el gráfico. Precisamente por ello, solamente un alumno fue capaz de hallar el porcentaje de aumento de CO2. El resto ni siquiera llegó a pensar los cálculos que había que hacer. Evidentemente, el fallo en la capacidad de comunicación hizo que no se pudiera llevar a cabo la pregunta. Nos queda la duda de si, con la información correctamente obtenida, habrían aplicado los procedimientos de cálculo de porcentajes que se les suponen sabidos, pues son éstos el contenido fundamental de este estímulo. En esta primera pregunta se pide el cálculo de uno de ellos y en las demás, razonamientos utilizándolos.

Pregunta 2

Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la UE (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".

¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Bloque	Aritmética y Álgebra
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación.
Bloque de contenido	Cantidad
Contexto	Científico
Tipo de respuesta	Abierta

Calificación

1	0	9
No, con una explicación correcta.	Otras respuestas.	Sin respuesta.

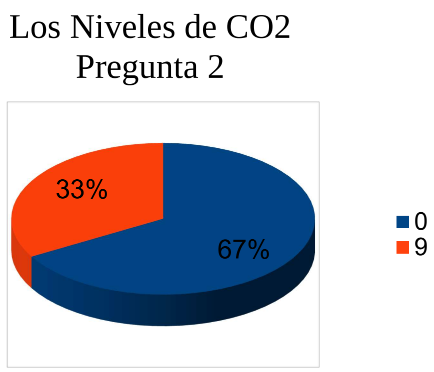
Cuadro 4.9: Análisis de la pregunta 2 del estímulo "Los niveles de CO2"

Los resultados obtenidos en esta ocasión fueron los siguientes:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	4	66,67%
9	2	33,33%

Gráfico



Cuadro 4.10: Resultados de la pregunta 2 del estímulo "Los niveles de CO2"

De nuevo, un mal resultado en esta pregunta. Dos alumnos no la hacen y, los que sí, dan respuestas equivocadas. Llama la atención el hecho de que uno de ellos acuda a razones geográficas en vez de matemáticas, “*Alemania está en la UE*”, aunque otros se quedan cerca de la respuesta, pues dicen que el aumento es independiente del país, pero no lo relacionan con el hecho de que, si bien Alemania ha bajado un 16% sus niveles de CO2, Países Bajos ha aumentado un 8% luego que la UE, en su conjunto, baje un 4% es posible por ser la suma de varios países, con porcentajes positivos y negativos, si bien es cierto que en el gráfico no se dispone de datos de todos los países, quedando así algo lejos poder inferir esta respuesta.

<u>Pregunta 3</u>

Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) obtuvo el mayor aumento en emisiones de CO2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama.

Da dos posibles respuestas “correctas” a esta pregunta y explica cómo se puede obtener cada una de esas respuestas.

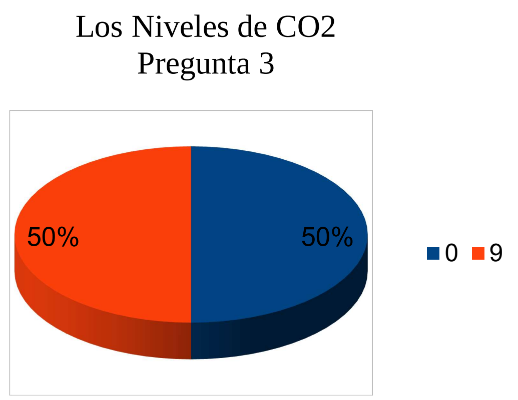
<table>
<tr><td>Bloque</td><td colspan="3">Aritmética y Álgebra</td></tr>
<tr><td>Proceso matemático</td><td colspan="3">Interpretar</td></tr>
<tr><td>Capacidad matemática subyacente</td><td colspan="3">Comunicación.
Matematización.
Representación.</td></tr>
<tr><td>Bloque de contenido</td><td colspan="3">Cantidad</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="3">Científico</td></tr>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td colspan="3">Abierta</td></tr>
<tr><td colspan="4">Calificación</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Identificación de aumento absoluto y relativo</td><td>Identificación de aumentos absolutos o relativos independientemente, o nombra países equivocados</td><td>Otras respuestas</td><td>Sin respuesta</td></tr>
</table>

Cuadro 4.11: Análisis de la pregunta 3 del estímulo “Los niveles de CO2”

Los resultados de esta pregunta son los siguientes.

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	3	50,00%
9	3	50,00%



Cuadro 4.12: Resultados de la pregunta 3 del estímulo “Los niveles de CO2”

En esta pregunta, los tres alumnos que la hicieron dieron respuestas variadas. Uno de ellos, sí señaló a Australia como país con mayor incremento relativo. Otro lo relaciona con áreas geográficas y el tercero nombra a EEUU y la Unión Europea, a pesar de que Canadá y Australia tienen un mayor porcentaje de aumento, De nuevo, el problema parece ser la lectura del gráfico.

Conclusiones del estímulo nº 2:

- Reforzar la lectura de gráficos, para buscar la información que se necesita para resolver la(s) pregunta(s) que se le(s) plantean.

Por último, mostramos los contenidos del currículo relativos a esta pregunta

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que

		aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque II: Números y álgebra		
Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones. Jerarquía de operaciones. Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas.Error absoluto y relativo.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.	1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales), distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período. 1.6. Distingue y emplea técnicas adecuadas para realizar aproximaciones por defecto y por exceso de un número en problemas contextualizados, justificando sus procedimientos.
Bloque IV: Estadística y probabilidad		
Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas.	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad	3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación

Cuadro 4.13: Contenidos curriculares del estímulo “Los niveles de CO2”

Estímulo nº 3: Pago por superficie

Los habitantes de un edificio de dos pisos deciden comprar el edificio. Pondrán el dinero entre todos de modo que cada uno pague una cantidad proporcional al tamaño de su piso.

Por ejemplo, una persona que viva en un piso que mida la quinta parte de la superficie total de todos los pisos, deberá pagar la quinta parte del precio total del edificio.

Pregunta 1

Para cada una de las siguientes afirmaciones, encierra en un círculo la palabra Correcto o Incorrecto.

Afirmación	Correcto / Incorrecto
La persona que vive en el piso más grande pagará más dinero por cada metro cuadrado de su piso que la persona que vive en el piso más pequeño.	Correcto / Incorrecto
Si se conocen las superficies de dos pisos y el precio de uno de ellos, entonces se puede calcular el precio del otro.	Correcto / Incorrecto
Si se conoce el precio del edificio y cuánto pagará cada propietario, entonces se puede calcular la superficie total de todos los pisos.	Correcto / Incorrecto
Si el precio total del edificio se redujera en un 10%, cada uno de los propietarios pagaría un 10% menos.	Correcto / Incorrecto

Bloque	Aritmética y Álgebra
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Representación.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones
Contexto	Social
Tipo de respuesta	Elección múltiple compleja

Calificación

2	0	9
Incorrecto / Correcto / Incorrecto /Correcto	Otras respuestas	Sin respuesta

Cuadro 4.14: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Pago por superficie”

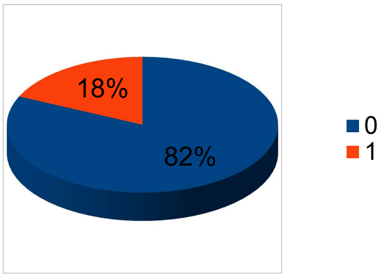
En este estímulo, se pide que respondan mediante el método de elección múltiple a diversas cuestiones para conocer si los alumnos tienen claro el concepto de reparto proporcional, contenido que ya han visto en cursos anteriores. Se definen dos variables, superficie y precio y, a partir de ellas, se definen relaciones entre ellas. El alumno debe determinar si las relaciones que se les dan en cada uno de los apartados son o no correctas.

Como primera dificultad a la hora de resolver esta pregunta podemos señalar la redacción de la misma. Muchas veces, los alumnos que están en el nivel bajo de

Matemáticas también lo están en el de Lengua, lo que complica la comprensión de los enunciados de los problemas si no están demasiado claros. A veces, un exceso de información puede ser letal para comenzar a resolver un problema, como ya hemos visto en el estímulo anterior.

Los resultados obtenidos en esta pregunta son los siguientes:

<table>
<tr><th>Porcentajes</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Respuesta</td><td>Frecuencia</td><td>%</td></tr>
<tr><td>0</td><td>9</td><td>81,82%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>18,18%</td></tr>
</table>
</td><td>
Pago por superficie
Pregunta 1



</td></tr>
</table>

Cuadro 4.15: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Pago por superficie”

Si desagregamos por respuestas, tenemos la siguiente tabla:

Apartado	C	I	%C	%I
a	8	3	73%	27%
b	10	1	91%	9%
c	3	8	27%	73%
d	8	3	73%	27%

En este caso, de nuevo, los resultados no son buenos. Tan sólo hay dos alumnos que responden correctamente a la pregunta, obteniendo la máxima puntuación. El resto, salvo uno que falla las cuatro respuestas, oscilan entre los 2 y 3 aciertos, siendo más frecuente acertar 3. La pregunta complicada y, por tanto, en la que ha habido el mayor número de errores, ha sido la primera, en la que se establece que la persona que ocupe el piso más grande pagará más por metro cuadrado que la que ocupe la más pequeña. Muy posiblemente ha pasado desapercibida la expresión “*por cada metro cuadrado*”, pues el coste por metro cuadrado es el mismo para todos los pisos del edificio pero, evidentemente, será más caro el más grande. De nuevo, pequeños detalles que pasan desapercibidos a la hora de leer los ejercicios.

No debemos obviar, tampoco, el efecto “lotería” o “patrón” que suele presentarse en este tipo de preguntas. Muchas veces, los alumnos responden a este tipo de preguntas sin pensar las alternativas, siguiendo lo dicho anteriormente. Tampoco es desdeñable el hecho de que se puedan copiar, al ser las respuestas fácilmente visibles desde lejos. En este caso, no lo creo posible, pues los alumnos contaban con separación suficiente entre ellos, pero con mayor número de alumnos examinándose en el mismo espacio, esta es una alternativa factible y a tener en cuenta. Será la pericia y habilidad del examinador la que lo determine.

<u>Pregunta 2</u>

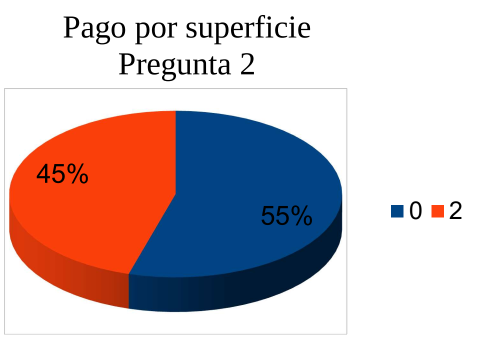
Hay tres pisos en el edificio. El mayor de ellos, el piso 1, tiene una superficie total de 95m^2. Los pisos 2 y 3 tienen superficies de 85 m^2 y 70 m^2, respectivamente. El precio de venta del edificio es de 300000 zeds.

¿Cuánto deberá pagar el propietario del piso 2? Muestra tus cálculos.

<table>
<tr><td>Bloque</td><td>Aritmética y Álgebra</td></tr>
<tr><td>Proceso matemático</td><td>Formular. Emplear</td></tr>
<tr><td>Capacidad matemática subyacente</td><td>Comunicación.
Matematización.
Representación.
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.
Utilización de herramientas matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Bloque de contenido</td><td>Cantidad</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td>Social</td></tr>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td>Abierta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calificación
<table>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>102000 zeds, con o sin cálculos</td><td>Método correcto, con errores de cálculo</td><td>Otras respuestas</td><td>Sin respuesta</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Cuadro 4.16: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Pago por superficie”

Los resultados de esta pregunta son los siguientes:

<table>
<tr><th>Porcentajes</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Respuesta</td><td>Frecuencia</td><td>%</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>54,55%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td><td>45,45%</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Cuadro 4.17: Resultados de la pregunta 2 del estímulo “Pago por superficie”

En este caso, por tratarse de una pregunta en la que los datos están más claros, los resultados son mejores, pues 5 alumnos fueron capaces de resolverla correctamente. De los que no, dos de ellos hicieron dibujos para intentar aclarar la situación, estrategia que habitualmente se les sugiere. Otros, establecieron coste total y superficie total, pero no fueron capaces de relacionar dichas cantidades para establecer el valor, pues o no supieron seguir o, en vez de calcular la relación €/m^2, hicieron la relación inversa m^2/€. Otro de ellos señaló que no había suficientes datos para responder a la pregunta.

Conclusiones del estímulo nº 3

- Las preguntas deben estar lo menor influenciadas que sea posible por la redacción, pues el déficit en la comprensión lectora (comunicación) influye en la respuesta que se da.
- Definir relaciones entre variables dadas, intentando conectarlas con su contexto cercano. Por ejemplo, el precio de los pisos se da en €/m^2, no en m^2/€.
- Conectada con la anterior, fomentar el sentido crítico a la hora de establecer estrategias para resolver problemas.

Por último, mostramos los contenidos del currículo relativos a esta pregunta:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

Bloque II: Números y Álgebra		
Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones. Jerarquía de operaciones. Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas Error absoluto y relativo.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo ynotación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.	1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros, racionales),indica el criterio utilizado para su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos.
Bloque IV: Funciones		
Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado	2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Cuadro 4.18: Contenidos curriculares del estímulo “Pago por superficie”

Estímulo nº 4: Estatura

En una clase hay 25 chicas. La estatura media de las chicas es de 130 cm

Pregunta 1

Explica cómo se calcula la estatura media

Bloque	Estadística descriptiva
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación.
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Profesional (Educativo)
Tipo de respuesta	Abierta

Calificación

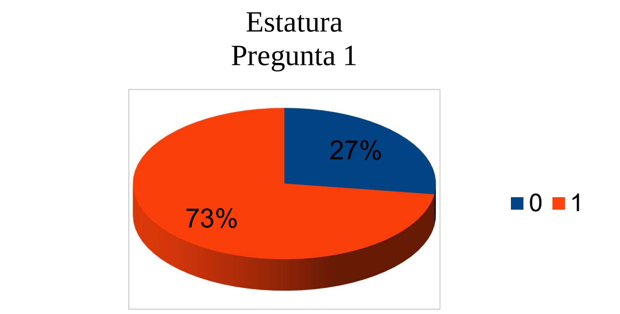
1	0	9
Se proporciona una argumentación correcta.	Otras respuestas, con o sin razonamientos matemáticos, erróneas.	Sin respuesta.

Cuadro 4.19: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Estatura”

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	3	27,27%
1	8	72,73%



Cuadro 4.20: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Estatura”

Como podemos comprobar, los alumnos tienen el concepto de media y el procedimiento para el cálculo de la misma bastante claro. De hecho, es un contenido matemático muy cercano a su contexto como alumnos: saben que las calificaciones de las asignaturas se hacen mediante medias y son capaces de calcular, aunque sea por ensayo-error, la nota que necesitan para superar algún examen suspenso y poder aprobar la asignatura. Incluso preguntan a partir de qué nota los profesores hacemos media. No debe extrañarnos, pues, que la forma de hallarla sea ya un procedimiento incorporado a su bagaje matemático. No obstante, entre aquellos que no respondieron bien, llama la atención respuestas como “*Todas las estaturas entre el número de personas*”, en la que parece intuirse que hay que sumar, pero dicha operación no se cita de forma expresa, o “*El número de chicas que miden esa medida entre la medida en sí*”, donde no queda claro exactamente a qué se refiere. De nuevo, se falla en la forma de comunicar matemáticas. También es habitual confundir la media y la mediana, ya que una de las respuestas es, precisamente, la forma de calcularla.

Pregunta 2

Rodea con un círculo *Verdadera* o *Falsa* para cada una de las siguientes afirmaciones.

Afirmación	Verdadera o Falsa
Si una de las chicas de la clase mide 132 cm, tiene que haber una chica de 128 cm de estatura.	Verdadera / Falsa
La estatura de la mayoría de las chicas es de 130 cm.	Verdadera / Falsa
Si se ordenan las chicas de la más baja a la más alta, entonces la estatura de la que ocupa la posición central tiene que ser igual a 130 cm.	Verdadera / Falsa
La mitad de las chicas de la clase deben medir menos de 130 cm, y la otra mitad deben medir más de 130 cm.	Verdadera / Falsa

<table>
<tr><td>Bloque</td><td colspan="2">Estadística descriptiva</td></tr>
<tr><td>Proceso matemático</td><td colspan="2">Interpretar</td></tr>
<tr><td>Capacidad matemática subyacente</td><td colspan="2">Comunicación.
Matematización.
Razonamiento y argumentación.</td></tr>
<tr><td>Bloque de contenido</td><td colspan="2">Incertidumbre</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="2">Profesional (Educativo)</td></tr>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td colspan="2">Elección múltiple compleja</td></tr>
<tr><td colspan="3">Calificación</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Falsa en los cuatro apartados</td><td>Otras respuestas</td><td>Sin respuesta</td></tr>
</table>

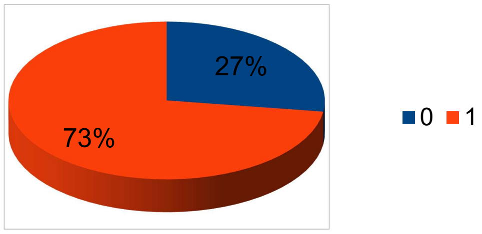
Cuadro 4.21: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Estatura”

De nuevo, otra pregunta de elección múltiple. En este caso, se pretende aclarar aún más el concepto de media y su cálculo, incluso asociándolo al concepto de mediana que, como hemos visto antes, suele ser confundido con el de media. Suponiendo eliminados los factores “*lotería*”, “*patrón*” y “*copiado*”, analicemos los resultados que se exponen en la tabla siguiente:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	9	81,82%
1	2	18,18%

Gráfico



Cuadro 4.22: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Estatura”

En esta pregunta vemos que, al pasar de la teoría a la práctica, las cosas no están tan claras como cabría esperar de la pregunta anterior. De hecho, analicemos la siguiente tabla, obtenida con las respuestas:

Apartado	V	F	% V	%F
a	6	5	55%	45%
b	4	7	36%	64%
c	8	3	73%	27%
d	6	5	55%	45%

Así, podemos ver que, en el apartado a, las respuestas se reparten mitad por mitad entre los que consideran que la afirmación es verdadera frente a los que piensan que es falsa. En el caso en el que la población sea 2 es cierto, pero no lo es en general.

En la segunda afirmación, parece que queda algo más claro que la media no es la moda, pues es a ése concepto al que se refiere dicho apartado. La sorpresa, desagradable, viene en el apartado c, en el que una gran mayoría confunde mediana con media. En el transcurso de las clases del bloque de Estadística fue una constante el trazar la diferencia entre estas dos medidas de tendencia central. En la cuarta afirmación, siguiendo la idea del apartado a, se vuelven a dar los mismos resultados, lo que sugeriría coherencia en el razonamiento propio.

<u>Pregunta 3</u>

Se encontró un error en la estatura de una estudiante. Era de 120 cm en lugar de 145 cm. ¿Cuál es la estatura media correcta de las chicas de la clase?

A. 126 cm　B. 127 cm　C. 128 cm　D. 129 cm　E. 144 cm

Bloque	Estadística descriptiva
Proceso matemático	Formular. Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Utilización de herramientas matemáticas
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Profesional (Educativo)
Tipo de respuesta	Elección múltiple compleja
Calificación	

1	0	9
D. 129	Otras respuestas	Sin respuesta

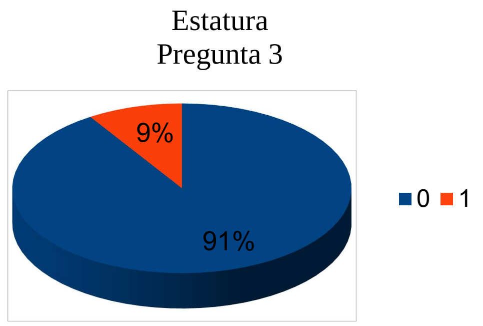
Cuadro 4.23: Análisis de la pregunta 3 del estímulo "Estatura"

Los resultados obtenidos en esta pregunta son los siguientes:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	10	90,91%
1	1	9,09%

Gráfico



Cuadro 4.24: Resultados de la pregunta 3 del estímulo "Estatura"

En esta pregunta, los resultados vuelven a ser malos. Solamente uno da la respuesta correcta. Otro, incluso suma los valores proporcionados y da ese valor como respuesta.

Conclusiones del estímulo nº 4

- Repasar la definición y método de cálculo de las medidas estadísticas fundamentales, especialmente las de centralización.
- Ligar el cálculo de medidas de tendencia central a variables tangibles por el alumno, para reforzar su correcto aprendizaje y profundizar en el significado de las mismas.
- Mejorar la precisión a la hora de comunicar, tanto de forma escrita como oral, los procedimientos matemáticos.

Por último, mostramos los contenidos del currículo relativos a esta pregunta.

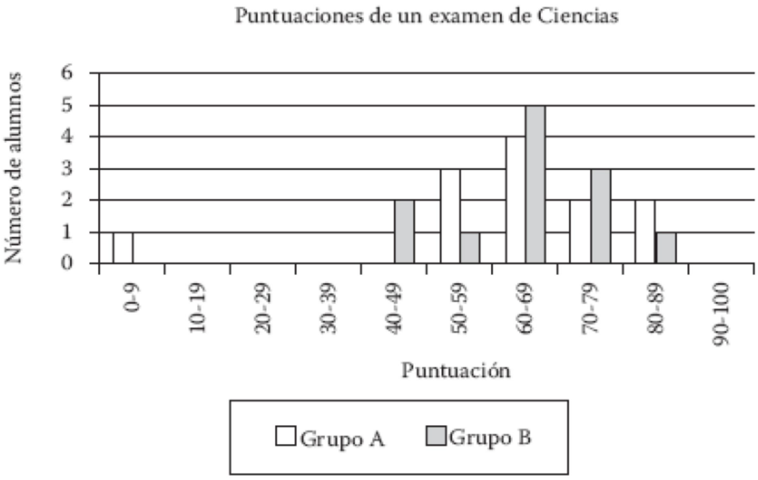
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque V: Estadística y probabilidad		
Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades.	2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.	2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos.

Cuadro 4.25: Contenidos curriculares del estímulo "Estatura"

Estímulo nº 5: Puntuaciones de un examen

El diagrama siguiente muestra los resultados de un examen de Ciencias para dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B.

La puntuación media del grupo A es de 62,0 y la puntuación media del Grupo B es de 64,5. Los alumnos aprueban en examen cuando la puntuación es 50 o más.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el grupo B fue mejor que el grupo A.

<u>Pregunta 1</u>

Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del grupo A.

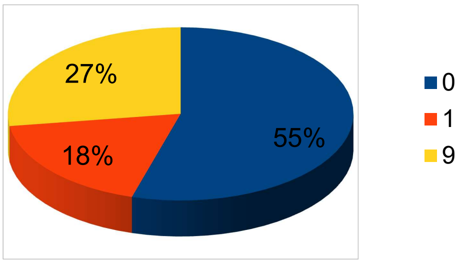
Bloque	Estadística descriptiva
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de herramientas matemáticas
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Profesional (Educativo)
Tipo de respuesta	Abierta
Calificación	
1	Se da un argumento válido, relacionado con el número de estudiantes, la influencia del caso extremo o el número de estudiantes con puntuación mayor.
0	Otras respuestas, incluyendo respuestas matemáticas o no matemáticas, sin razonamientos válidos que indiquen que el grupo B no tiene por qué ser el mejor
9	Sin respuesta

Cuadro 4.26: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Puntuaciones de un examen”

En esta pregunta se trataba de buscar intervalos y sus frecuencias, de forma que se pudiera contraargumentar al profesor. A pesar de que los contenidos puestos en juego son intuitivos y han sido trabajados por los alumnos en clase, se trata de ponerlos a trabajar todos juntos, diseñar una estrategia que los agrupe, circunstancia que no siempre es fácil.

Los resultados obtenidos en esta pregunta reflejan lo ya comentado en antes y que se ha visto reflejado en otros estímulos:

<table>
<tr><th>Porcentajes</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Respuesta</th><th>Frecuencia</th><th>%</th></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>54,55%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>18,18%</td></tr>
<tr><td>9</td><td>3</td><td>27,27%</td></tr>
</table>
</td><td>
Puntuaciones de un Examen
Pregunta 1



</td></tr>
</table>

Cuadro 4.27: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Puntuaciones de un examen”

En este estímulo, donde de nuevo se deben poner en juego las habilidades de interpretación y razonamiento, vemos que no responder o hacerlo erróneamente abarca a gran parte de la clase. No obstante, los razonamientos dados para apoyar la tesis de los alumnos del grupo A dentro de los puntuados con un 0 manifiestan conteos de valores en intervalos aislados, es decir, los alumnos no se han parado a ver la posible suma de los intervalos del rango de aprobados o suspensos, sino que se han ido, de forma parcial, a contar los valores de los intervalos con mayor frecuencia y compararlos con los de los demás grupos. Uno, incluso, alude a la diferencia de dificultad del examen, excusa habitual cuando es el mismo profesor el que evalúa a dos grupos del mismo nivel académico.

<u>Conclusiones del estímulo nº 5</u>

- Establecer estrategias que permitan ver la globalidad de un problema.
- Diseñar estrategias que permitan integrar los distintos saberes del alumno para resolver un problema.

Por último, como es habitual, mostramos los contenidos del currículo relativos a este estímulo.

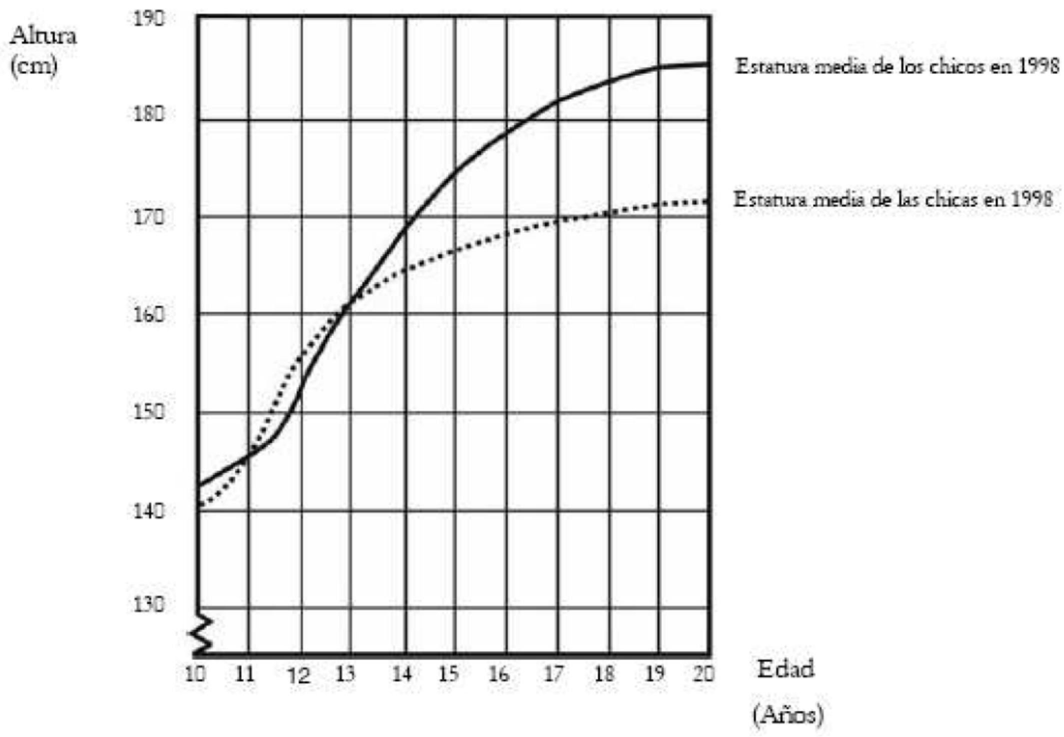
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque V: Estadística y probabilidad		
Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas.	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación.

Cuadro 4.28: Contenidos curriculares del estímulo “Puntuaciones de un examen”

Estímulo nº 6: Crecer

La juventud se hace más alta.

La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 está representada en el siguiente gráfico.



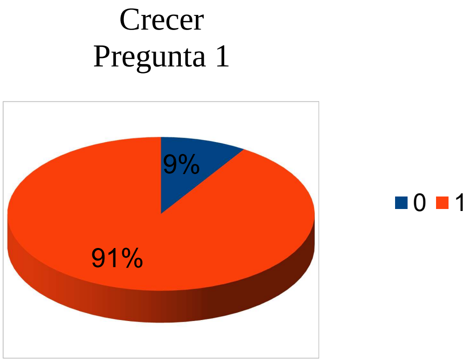
<u>Pregunta 1</u>

Desde 1980, la estatura media de las chicas de 20 años ha aumentado 2,3 cm, hasta alcanzar los 170,6 cm. ¿Cuál era la estatura media de las chicas de 20 años en 1980?

<table>
<tr><td>Bloque</td><td colspan="2">Funciones y gráficas</td></tr>
<tr><td>Proceso matemático</td><td colspan="2">Emplear</td></tr>
<tr><td>Capacidad matemática subyacente</td><td colspan="2">Comunicación.
Matematización.
Utilización de herramientas matemáticas</td></tr>
<tr><td>Bloque de contenido</td><td colspan="2">Cambio y relaciones</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="2">Científico</td></tr>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td colspan="2">Respuesta cerrada</td></tr>
<tr><td colspan="3">Calificación</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>168,3 cm</td><td>Otras respuestas</td><td>Sin respuesta</td></tr>
</table>

Cuadro 4.29: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Crecer”

Esta pregunta, a pesar de ser bastante inocente, tiene una complicación inesperada, la expresión “*estatura media*”. Al principio, todos los alumnos creyeron que era necesario calcular una media y empezaron, como locos, a buscar datos. Una vez sugerida una segunda lectura, más pausada, comprendieron lo que se les pedía. De nuevo, un exceso de información, o hacer preguntas un poco más “raras” de lo habitual puede ser desastroso para este tipo de alumnos. Las respuestas a esta pregunta aparecen en la siguiente tabla. Como se ve, llegar a la respuesta correcta no resultó difícil. Tan sólo un alumno eligió el dato de partida erróneamente.

<table>
<tr><th>Porcentajes</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Respuesta</td><td>Frecuencia</td><td>%</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>9,09%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td><td>90,91%</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Cuadro 4.30: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Crecer”

<u>Pregunta 2</u>

Explica cómo el grafico muestra que la tasa de crecimiento de la estatura media de las chicas disminuye a partir de los 12 años en adelante.

Bloque	Funciones y gráficas
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones
Contexto	Científico
Tipo de respuesta	Respuesta cerrada
Calificación	
11	Se refiere a la pendiente usando lenguaje no matemático.
12	Se refiere a la pendiente usando lenguaje matemático.
13	Comparación del crecimiento real.
01	Se indica que la línea de las mujeres está por debajo de la de los hombres, pero no se menciona la pendiente o se hace una comparativa.
02	Otras respuestas incorrectas.
99	Sin respuesta.

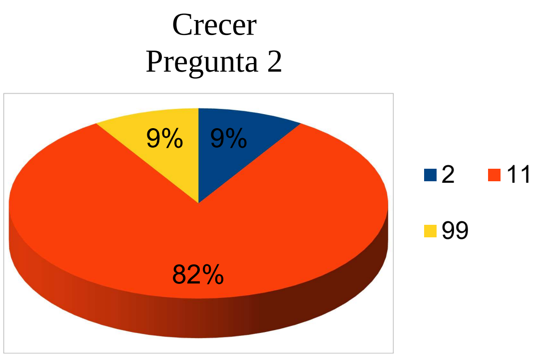
Cuadro 4.31: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Crecer”

En esta pregunta, las respuestas giran en torno a la idea de asíntota, no de pendiente, pues la gran mayoría responde a la idea de que la gráfica se estabiliza en torno a un valor. No son capaces de ver que, si la gráfica se estabiliza, es porque la pendiente cada vez es más pequeña. Los conceptos matemáticos nuevos, en este tipo de alumno, parten de la intuición y necesitan más tiempo de reposo para ser comprendidos correctamente. Podemos decir que, aunque la respuesta es incorrecta, no lo es del todo, puesto que se han quedado a mitad de camino.

Las respuestas obtenidas son las que se adjuntan:

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
2	1	9,09%
11	9	81,82%
99	1	9,09%



Cuadro 4.32: Resultados de la pregunta 2 del estímulo "Crecer"

Pregunta 3

De acuerdo con el gráfico anterior, ¿en qué periodo de la vida las chicas son, por término medio, más altas que los chicos de su edad?

Bloque	Funciones y gráficas
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones
Contexto	Científico
Tipo de respuesta	Respuesta abierta
Calificación	

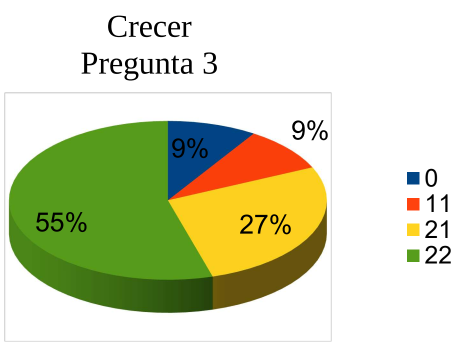
21	Se proporciona el intervalo correcto.
22	Se afirma que las chicas son más altas que los chicos cuando tienen 11 y 12 años.
11	Otros subconjuntos distintos de los anteriores, pero mencionando los datos correctos.
00	Otras respuestas.
99	Sin respuesta.

Cuadro 4.33: Análisis de la pregunta 3 del estímulo "Crecer"

El concepto subyacente, intervalo, es aún algo precoz para estos alumnos, pues todavía no han conseguido "continuizar" la recta real, que sigue siendo vista como sucesión infinita de números enteros o, si acaso, racionales. Por eso se obtiene una gran variedad de respuestas en esta pregunta. La dificultad viene de asociar años con intervalos, entendido cada año también como un intervalo en sí mismo, pues contiene 12 meses. No obstante, casi todos están dentro del bloque de preguntas de máxima puntuación (21 y 22), uno está dentro del rango de la puntuación parcial y sólo uno da una respuesta errónea, como podemos ver en la siguiente tabla.

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	1	9,09%
11	1	9,09%
21	3	27,27%
22	6	54,55%



Cuadro 4.34: Resultados de la pregunta 3 del estímulo "Crecer"

Conclusiones del estímulo nº 6

- Recalcar la importancia de comprender bien lo que se pregunta.
- Conectar lo que ya sabe el alumno con los nuevos contenidos.
- Dar tiempo para "*madurar*" los nuevos contenidos.

Para terminar, mostramos los contenidos del currículo presentes en este estímulo

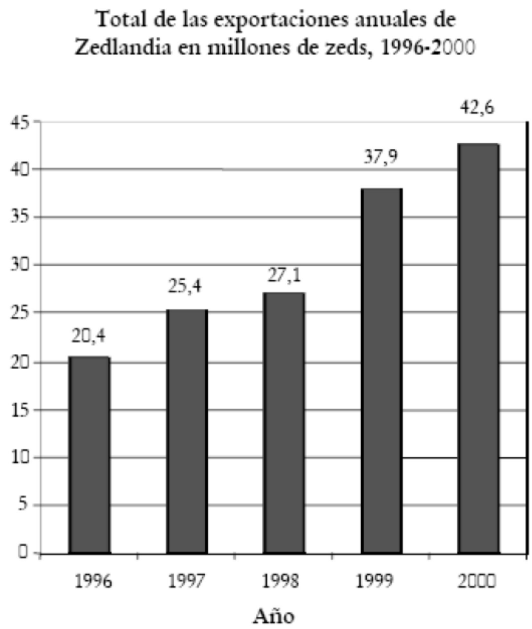
Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

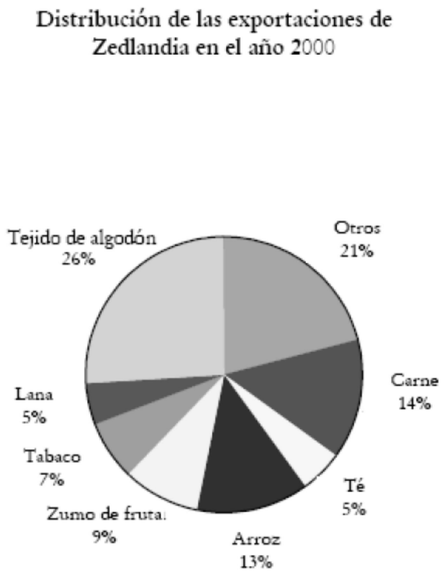
Bloque IV: Funciones y gráficas		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias	2. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica.	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

Cuadro 4.35: Contenidos curriculares del estímulo “Crecer”

Estímulo nº 7: Exportaciones

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.





Pregunta 1

¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Bloque	Estadística
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación.
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Social

<table>
<tr><td>Tipo de respuesta</td><td colspan="2">Respuesta cerrada</td></tr>
<tr><td colspan="3">Calificación</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr>
<tr><td>27,1 millones de zeds.</td><td>Otras respuestas.</td><td>Sin respuesta.</td></tr>
</table>

Cuadro 4.36: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Exportaciones”

De nuevo una pregunta donde los datos están claros y, como es de esperar, la respuesta es mayoritariamente la correcta. Tan sólo hay que elegir, en el gráfico, la información necesaria. Aun así, dos alumnos se confunden, uno en los decimales 2,7 en vez de 27,1 y otro da una respuesta 22,5, que realmente no sabemos de dónde puede salir.

Veamos el cuadro con los resultados de esta pregunta.

<table>
<tr><th>Porcentajes</th><th>Gráfico</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Respuesta</td><td>Frecuencia</td><td>%</td></tr>
<tr><td>1</td><td>9</td><td>82%</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td>18%</td></tr>
</table>
</td><td>


</td></tr>
</table>

Cuadro 4.37: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Exportaciones”

<u>Pregunta 2</u>

¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

A. 1,8 millones de zeds.
B. 2,3 millones de zeds.
C. 2,4 millones de zeds.
D. 3,4 millones de zeds.
E. 3,8 millones de zeds.

Bloque	Estadística
Proceso matemático	Emplear. Interpretar.
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Diseño de estrategias para resolver problemas.

	Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Social
Tipo de respuesta	Respuesta múltiple cerrada
Calificación	

1	0	9
3,8 millones de zeds.	Otras respuestas.	Sin respuesta.

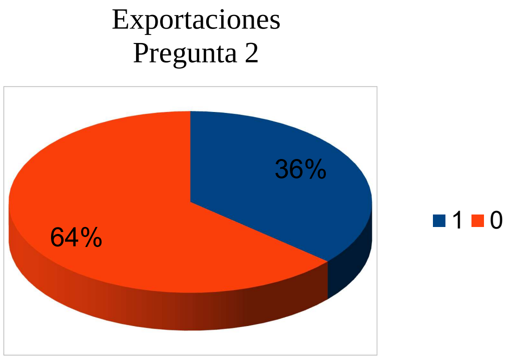
Cuadro 4.38: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Exportaciones”

Y, de nuevo, en esta pregunta nos encontramos con las dificultades anteriores: combinar los datos que se proporcionan. Tan sólo hay que hacer una operación, 9% de 42,6, que es el valor de las exportaciones en el año 2000, lo que implica elegir primero la columna adecuada en el primer gráfico y el porcentaje correcto en el segundo. Pero, como parece habitual en este tipo de preguntas, gran parte de la clase no es capaz de llegar a esa combinación de elementos para llegar a la solución. Es más, la brecha entre las respuestas es aún mayor, ya que los que la tienen bien presentan la operación hecha en el margen y, los que no, responden de forma “*quinielística*”. Los resultados se muestran a continuación.

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
1	4	36%
0	7	64%

Gráfico



Cuadro 4.39: Resultados de la pregunta 2 del estímulo “Exportaciones”

Conclusiones del estímulo nº 7

- Identificar los datos del problema y utilizarlos correctamente en su solución.

Por último, incluimos los contenidos del currículo asociados a este estímulo.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque II: Números y Álgebra		
Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida. 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos	1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período. 1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos. 4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
Bloque V: Estadística y probabilidad		
Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas.	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación. 3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión.

Cuadro 4.40: Contenidos curriculares del estímulo “Exportaciones”

Estímulo nº 8: Alquiler de DVD

Jimena trabaja en una tienda que alquila DVD y juegos de ordenador.

En dicha tienda, la cuota anual de socio es de 10 zeds.

El precio de alquiler de los DVD para los socios es inferior al precio para los no socios, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

Precio de alquiler de un DVD para los no socios	*Precio de alquiler de un DVD para los no socios*
3,20 zeds	*2,50 zeds*

Pregunta 1

El año pasado, Tomás era socio de la tienda de alquiler de DVD. Gasto un total de 52,5 zeds, incluida la cuota de socio.

¿Cuánto habría gastado Tomás si no hubiese sido socio y hubiese alquilado el mismo número de DVD?

Bloque	Aritmética y álgebra
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Representación. Diseño de estrategias para resolver problemas. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cantidad
Contexto	Personal
Tipo de respuesta	Respuesta cerrada
Calificación	

1	0	9
54,40.	Otras respuestas.	Sin respuesta.

Cuadro 4.41: Análisis de la pregunta 1 del estímulo “Alquiler de DVD”

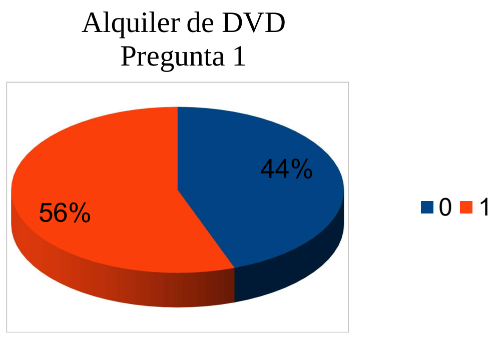
Hubo dos alumnos que ese día no asistieron a clase, por lo que no realizaron la prueba. Como se puede ver en la siguiente tabla, las respuestas se dividen en dos bloques, con ventaja para los que sí saben calcular la solución. En el caso de las respuestas incorrectas, los errores se deben a no saber cómo calcular el número de DVD alquilados a partir de los datos dados. Uno de ellos restó los precios de alquiler de socio y no socio y multiplicó la cantidad inicial. Otro, realizó una regla de tres. Otro fue capaz de determinar el coste de los DVD eliminando la cuota de socio, pero no pudo seguir.

Otro, dio una respuesta sin efectuar cálculos. Como se ve, el problema parece estar en calcular el número de DVD alquilados, dados los datos del problema. Los resultados a esta pregunta están en la siguiente tabla:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	4	44,44%
1	5	55,56%

Gráfico



Cuadro 4.42: Resultados de la pregunta 1 del estímulo “Alquiler de DVD”

<u>Pregunta 2</u>

¿Cuál es el número mínimo de DVD que tiene que alquilar un socio para cubrir el coste de su cuota? Escribe tus cálculos.

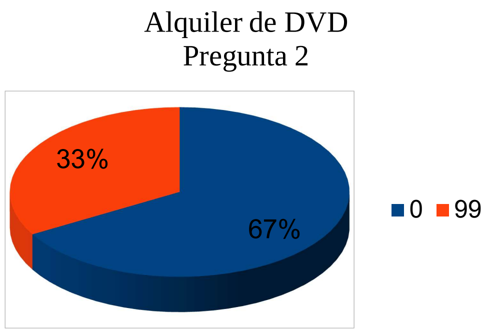
Bloque	Aritmética y álgebra
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Representación. Diseño de estrategias para resolver problemas. Razonamiento y argumentación. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cantidad
Contexto	Personal
Tipo de respuesta	Respuesta cerrada
Calificación	
21	15. Solución algebraica acompañada de un razonamiento adecuado.
22	15. Solución aritmética acompañada de un razonamiento adecuado.
23	15. Resuelto mediante ensayo-error.
24	15. Por otro razonamiento correcto.
11	15. Sin razonamiento ni cálculos.
12	Cálculo correcto pero redondeo incorrecto o sin redondeo
00	Otras respuestas
99	Sin respuesta

Cuadro 4.43: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Alquiler de DVD”

Los resultados de esta pregunta, que se pueden ver a continuación, son bastante malos, pues se dividen entre los que no dan ninguna respuesta y los que dan una respuesta errónea. La respuesta que se da es dividir la cuota de socio entre el coste de alquiler de un DVD para socios, cuando lo que se tendría que haber hecho es hallar la diferencia de costes y dividir entre dicha diferencia la cuota de socio.

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	6	66,67%
99	3	33,33%



Cuadro 4.44: Resultados de la pregunta 2 del estímulo “Alquiler de DVD”

Conclusiones del estímulo nº 8

- Aplicar las matemáticas en entornos cotidianos, prestando especial atención a facturas, pertenencia a clubes y sociedades, pues serán elementos cotidianos del entorno futuro del alumno
- Fomentar el sentido crítico sobre la necesidad de contratar determinados productos, servicios o pertenencia a sociedades dependiendo de las necesidades reales del individuo.

Por último, incluimos los contenidos del currículo asociados a este estímulo.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución,	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo

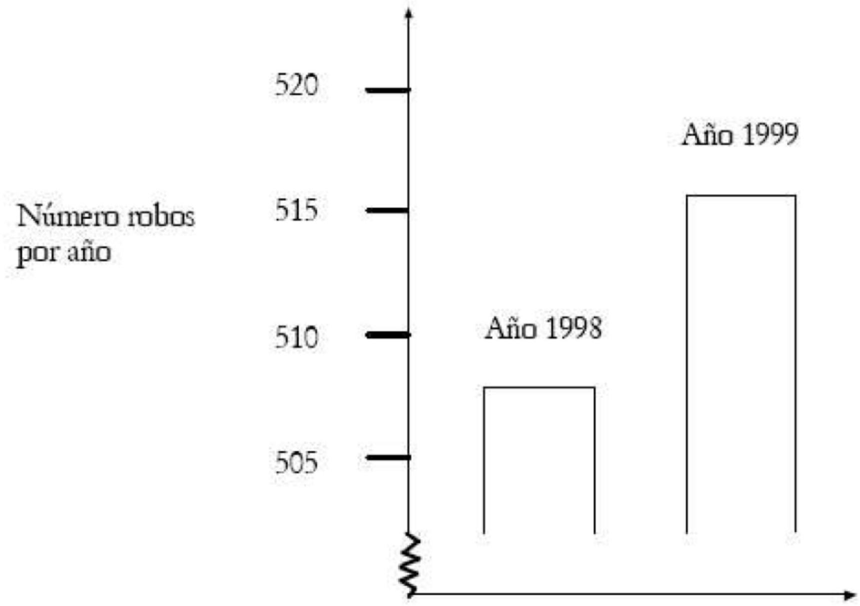
etc.	situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque II: Números y Álgebra		
Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones. Jerarquía de operaciones. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida. 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.	1.2. Distingue, al hallar el decimal equivalente a una fracción, entre decimales finitos y decimales infinitos periódicos, indicando en este caso, el grupo de decimales que se repiten o forman período. 1.8. Expresa el resultado de un problema, utilizando la unidad de medida adecuada, en forma de número decimal, redondeándolo si es necesario con el margen de error o precisión requeridos, de acuerdo con la naturaleza de los datos. 1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución. 4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
Bloque IV: Funciones		
Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado	2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Cuadro 4.45: Contenidos curriculares del estímulo “Alquiler de DVD”

<u>Estímulo nº 9: Robos</u>

Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo:

El gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999.



<u>Pregunta 1</u>

¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

Bloque	Funciones y gráficas
Proceso matemático	Emplear. Interpretar.
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Incertidumbre
Contexto	Personal / Social
Tipo de respuesta	Respuesta abierta
Calificación	
21	No, no es razonable. Solo se muestra una pequeña parte del gráfico.
22	No, no es razonable. Argumenta en términos de proporción o porcentaje de incremento.
23	Hacen falta datos de tendencias para emitir un juicio.
11	No, no es razonable. Sin detalles en la explicación.
12	No, no es razonable. Hay errores de cálculo.

01	No, sin explicación o explicación insuficiente.
02	Sí. Se centra en la apariencia del gráfico y menciona que el número de robos se duplicó
03	Sí, sin explicación o con explicaciones distintas a las de 02
04	Otras respuestas
99	Sin respuesta

Cuadro 4.46: Análisis de la pregunta 1 del estímulo "Robos"

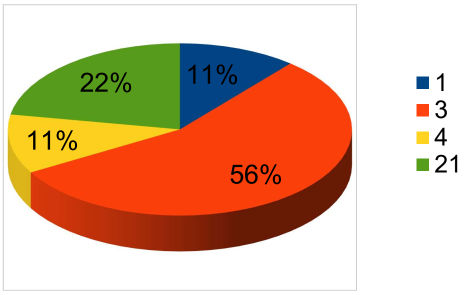
Esta prueba fue realizada por 9 alumnos. Los resultados obtenidos son:

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
1	1	11,11%
3	5	55,56%
4	1	11,11%
21	2	22,22%

Gráfico

Robos
Pregunta 1



Cuadro 4.47: Resultados de la pregunta 1 del estímulo "Robos"

Como vemos, solamente dos alumnos han obtenido una puntuación del bloque de máxima puntuación, puesto que hacen referencia a que hay poca diferencia entre los valores. El resto, también hace referencia a la diferencia existente en número pero, parece, se deja influir por el gráfico. La misma realidad, vista de dos maneras distintas. No han pensado en la diferencia vista en términos absolutos en comparación con la magnitud de la cifra de la diferencia, decenas, con respecto a la cifra total, centenas.

Conclusión del estímulo nº 9

- Proporcionar estrategias para analizar los gráficos con detalle.

Por último, incluimos los contenidos del currículo asociados a este estímulo.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque V: Estadística y probabilidad		
Gráficas estadísticas.	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	3.1 Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación.

Cuadro 4.48: Contenidos curriculares del estímulo "Robos"

Estímulo nº 10: Vender periódicos

En Zedland dos periódicos quieren contratar vendedores. Los siguientes anuncios muestran cómo les pagan a sus vendedores.

LA ESTRELLA DE ZEDLAND

¿NECESITAS DINERO EXTRA?

VENDE NUESTRO PERIÓDICO

Pagamos:
0,20 zeds por periódico para los primeros 240 ejemplares que vendas en una semana, más 0,40 zeds por cada periódico adicional vendido.

EL DIARIO DE ZEDLAND

¡TRABAJO BIEN PAGADO QUE PRECISA POCO TIEMPO!

Vende *El Diario de Zedland* y gana 60 zeds a la semana más 0,05 zeds adicionales por periódico vendido.

Pregunta 1

Como media, Federico vende 350 ejemplares de "La Estrella de Zedland" cada semana ¿Cuánto gana cada semana como media?

Bloque	Funciones y gráficas
Proceso matemático	Emplear
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Representación. Diseño de estrategias para resolver problemas. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones
Contexto	Profesional
Tipo de respuesta	Respuesta abierta

Calificación

1	0	9
92 o 92,00	Otras respuestas	Sin respuesta

Cuadro 4.49: Análisis de la pregunta 1 del estímulo "Vender periódicos"

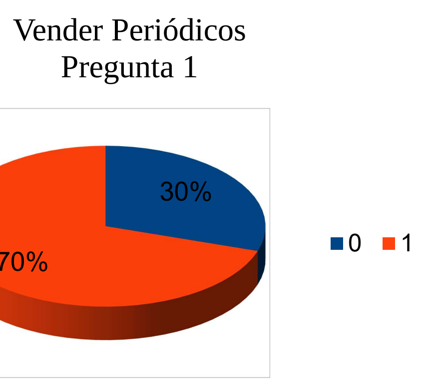
Esta prueba se pasó después de haber desarrollado el tema de Sistemas, en el que los alumnos se atascaron bastante y, como se verá después, se decidió utilizar herramientas informáticas. Decidí esperar un poco y ver si los contenidos habían sido asimilados correctamente. Un alumno no la realizó.

En la primera pregunta, se pedía saber cuánto gana, como media, Federico. A diferencia de lo que se pudo plantear en un estímulo anterior, en esta pregunta la expresión "*como media*" no supuso ninguna polémica a la hora de empezar a trabajar con este estímulo ni se estableció, en principio, relación alguna con dicho concepto estadístico. Veamos los resultados

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	3	30,00%
1	7	70,00%

Gráfico



Cuadro 4.50: Resultados de la pregunta 1 del estímulo "Vender periódicos"

Tal y como se puede comprobar, solamente tres alumnos fallaron en la respuesta. Curiosamente, uno de ellos calcula correctamente la solución pero, posiblemente por la expresión “*como media*” hizo que lo dividiera entre dos. Las otras respuestas erróneas vinieron de no identificar correctamente los distintos tramos de beneficio de los periódicos y, en otro caso, se dividieron las ganancias de Federico entre el número de días de la semana, quizá también influido por la expresión “*como media*”.

<u>Pregunta 2</u>

Cristina vende “El Diario de Zedland”. Una semana ganó 74 zeds. ¿Cuántos periódicos vendió esa semana?

Bloque	Funciones y gráficas	
Proceso matemático	Emplear	
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Diseño de estrategias para resolver problemas. Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico Utilización de herramientas matemáticas	
Bloque de contenido	Cambio y relaciones	
Contexto	Profesional	
Tipo de respuesta	Respuesta abierta	
Calificación		
1	0	9
280	Otras respuestas	Sin respuesta

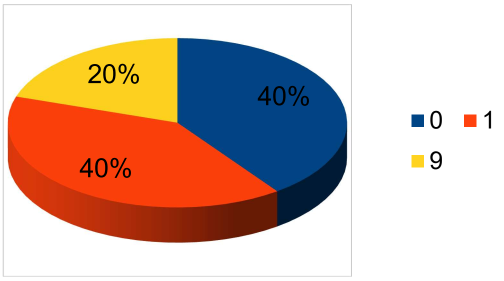
Cuadro 4.51: Análisis de la pregunta 2 del estímulo “Vender periódicos”

En esta pregunta, los resultados son algo peores que en la anterior. En este caso, hay un sueldo fijo que algún alumno, asimilándolo al caso anterior, es interpretado como otro tramo de venta de periódicos con lo que, acertando en un primer momento, divide esos 60 zeds entre 0,05 céntimos para obtener más periódicos y los suma a la respuesta correcta. Otros, directamente, dividieron los 74 zeds entre 0,05 céntimos. En líneas generales, parece que se tiene claro que hay que dividir, pero no qué cantidad entre el beneficio por vender cada periódico.

Porcentajes	Gráfico

Respuesta	Frecuencia	%
0	4	40,00%
1	4	40,00%
9	2	20,00%

Vender Periódicos
Pregunta 2

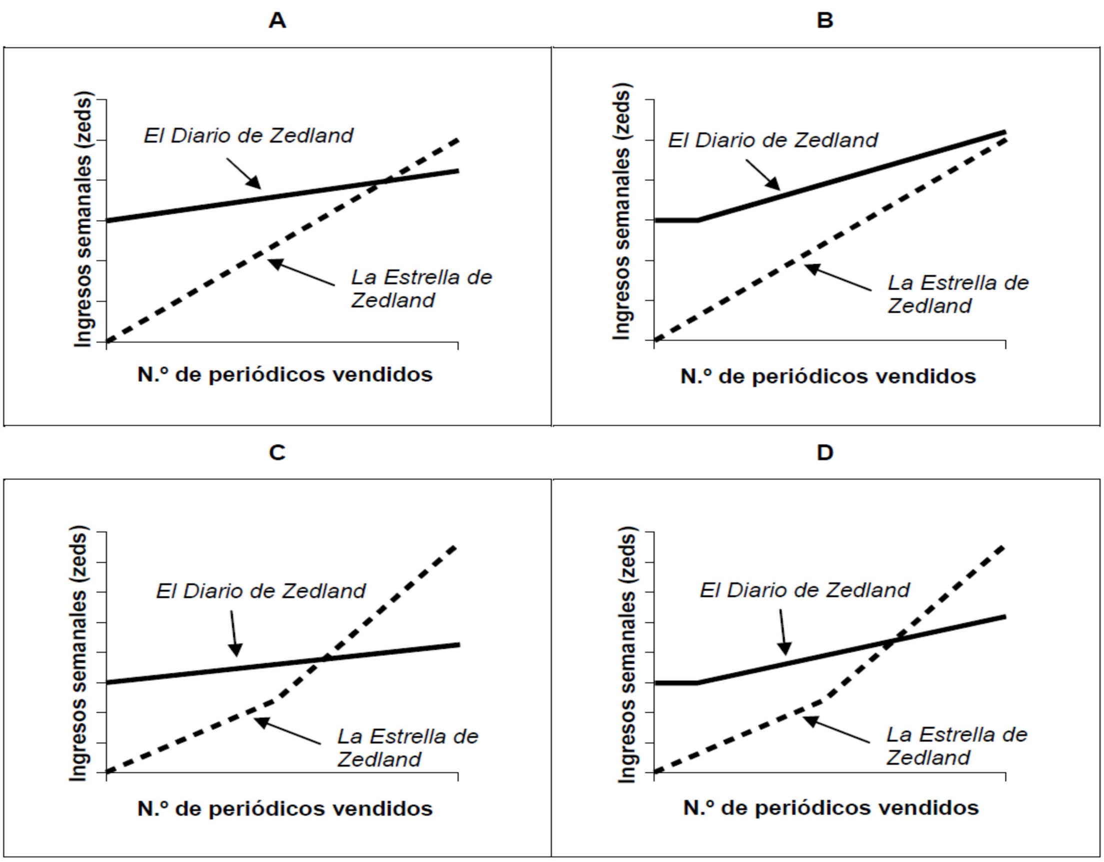


Cuadro 4.52: Resultados de la pregunta 2 del estímulo "Vender periódicos"

<u>Pregunta 3</u>

Juan decide solicitar un puesto de vendedor de periódicos. Tiene que elegir entre "La Estrella de Zedland" y "El Diario de Zedland".

¿Cuál de los siguientes gráficos es la representación correcta de cómo pagan a sus vendedores los dos periódicos? Rodea un con un círculo A, B, C o D.



Bloque	Funciones y gráficas
Proceso matemático	Interpretar
Capacidad matemática subyacente	Comunicación. Matematización. Razonamiento y argumentación. Utilización de herramientas matemáticas.
Bloque de contenido	Cambio y relaciones
Contexto	Profesional
Tipo de respuesta	Respuesta abierta
Calificación	

1	0	9
Gráfico C	Otras respuestas	Sin respuesta

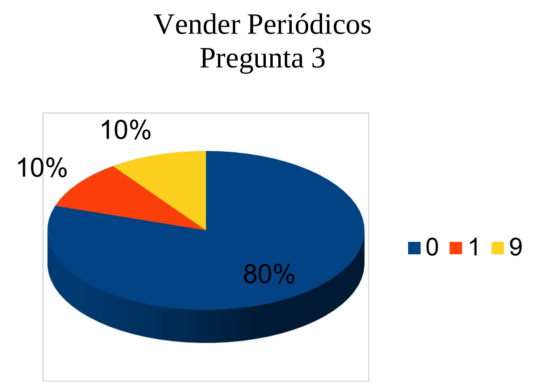
Cuadro 4.53: Análisis de la pregunta 3 del estímulo “Vender periódicos”

La última pregunta pretende ver el grado de asimilación de conceptos relativos a funciones y sistemas, por eso fue éste uno de los últimos estímulos en pasar a los alumnos. En esta ocasión, solamente un alumno fue capaz de identificar correctamente la ecuación, dando los demás respuestas erróneas o dejando en blanco la respuesta. Temo, de nuevo, el efecto lotería en la respuesta a esta pregunta.

Porcentajes

Respuesta	Frecuencia	%
0	8	80,00%
1	1	10,00%
9	1	10,00%

Gráfico



Cuadro 4.54: Resultados de la pregunta 3 del estímulo “Vender periódicos”

Conclusiones del estímulo nº 10

- Profundizar en las relaciones entre el álgebra y las funciones, sabiendo que problemas algebraicos admiten una forma gráfica que puede facilitar su entendimiento.
- Insistir en la lectura comprensiva de los enunciados, analizando qué se pide y qué se da
- Identificar, dentro de las herramientas matemáticas que se conocen, las más adecuadas para resolver un problema

Por último, incluimos los contenidos del currículo asociados a este estímulo.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares evaluables
Bloque I. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios. 6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.
Bloque II: Números y Álgebra		
Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas.	1. Utilizar las propiedades de los números racionales para operarlos, utilizando la forma de cálculo y notación adecuada, para resolver problemas de la vida cotidiana, y presentando los resultados con la precisión requerida.	1.1. Reconoce los distintos tipos de números (naturales, enteros,racionales) indica el criterio utilizadopara su distinción y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa. 1.10. Emplea números racionales para resolver problemas de la vida cotidiana y analiza la coherencia de la solución.
Bloque IV: Funciones		
Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado	1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica

Cuadro 4.55: Contenidos curriculares del estímulo “Vender periódicos”

Capítulo V. Propuesta de actividades

V.1 Introducción

Comenzaremos este capítulo recordando las conclusiones obtenidas en el capítulo anterior para, posteriormente, abordar las actuaciones docentes que se han llevado a cabo para intentar mejorar las carencias puestas de relieve en dichas conclusiones. Para ello, mostraremos las novedades que se han introducido en el trabajo en clase con los alumnos y los resultados obtenidos en la aplicación de los mismos.

V.2 Conclusiones obtenidas del capítulo anterior

A modo de resumen, volvemos a considerar las conclusiones que se han ido obteniendo de los estímulos desarrollados en el capítulo anterior:

Estímulo	Conclusiones
1. Los líquenes	1.1 Consolidar los conceptos básicos relativos a raíces y resolución de ecuaciones. 1.2 Reforzar los procedimientos de resolución de ecuaciones.
2. Los niveles de CO2	2.1 Reforzar la lectura de gráficos, para buscar la información que se necesita para resolver la(s) pregunta(s) que se le(s) plantean.
3. Pago por superficie	3.1 Las preguntas deben estar lo menor influenciadas que sea posible por la redacción, pues el déficit en la comprensión lectora (comunicación) influye en la respuesta que se da. 3.2 Definir relaciones entre variables dadas, intentando conectarlas con su contexto cercano. Por ejemplo, el precio de los pisos se da en €/m^2, no en m^2/€. 3.3 Fomentar el sentido crítico a la hora de establecer estrategias para resolver problemas.
4. Estatura	4.1 Repasar la definición y método de cálculo de las medidas estadísticas fundamentales, especialmente las de centralización. 4.2 Ligar el cálculo de medidas de tendencia central a variables tangibles por el alumno, para reforzar su correcto aprendizaje y profundizar en el significado de las mismas. 4.3 Mejorar la precisión a la hora de comunicar, tanto de forma escrita como oral, los procedimientos matemáticos.

5. Puntuaciones de un examen	5.1 Establecer estrategias que permitan ver la globalidad de un problema. 5.2 Diseñar estrategias que permitan integrar los distintos saberes del alumno para resolver un problema.
6. Crecer	6.1 Recalcar la importancia de comprender bien lo que se pregunta. 6.2 Conectar lo que ya sabe el alumno con los nuevos contenidos. 6.3 Dar tiempo para "madurar" los nuevos contenidos.
7. Exportaciones	7.1 Identificar los datos del problema y utilizarlos correctamente en su solución.
8. Alquiler de DVD	8.1 Aplicar las matemáticas en entornos cotidianos, prestando especial atención a facturas, pertenencia a clubes y sociedades, pues serán elementos cotidianos del entorno futuro del alumno 8.2 Fomentar el sentido crítico sobre la necesidad de contratar determinados productos, servicios o pertenencia a sociedades dependiendo de las necesidades reales del individuo.
9. Robos	9.1 Proporcionar estrategias para analizar los gráficos con detalle.
10. Vender periódicos	10.1 Profundizar en las relaciones entre el álgebra y las funciones, sabiendo que problemas algebraicos admiten una forma gráfica que puede facilitar su entendimiento. 10.2 Insistir en la lectura comprensiva de los enunciados, analizando qué se pide y qué se da. 10.3 Identificar, dentro de las herramientas matemáticas que se conocen, las más adecuadas para resolver un problema.

Cuadro 5.1 Conclusiones obtenidas en el capítulo IV

Tras un primer análisis de las anteriores conclusiones, llegamos a que es necesario reconsiderar distintos aspectos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con este tipo de alumnado. Centraremos nuestro trabajo en tres componentes: insistir en lo básico, acercar las matemáticas a la realidad del alumno convirtiéndolos, en la medida de lo posible, en "matemáticos por un día" y utilizar las herramientas tecnológicas que tienen a su disposición. Describamos, a continuación, cada una de estas componentes.

En primer lugar, hemos de **insistir en lo básico**. No sólo repitiendo ejercicios iguales o parecidos sino yendo más allá. Por ejemplo, a la hora de trabajar un problema, intentaremos separarlo en tres bloques: datos, operaciones y solución. Dado el perfil de alumno con el que se está trabajando, especialmente por las lagunas de comprensión que hemos visto antes, se hace necesario desmenuzar los problemas hasta sus componentes más elementales. En este apartado, tratamos de mejorar las habilidades de **comunicación**, **matematización** y **representación**, claves en la forma de aproximarse con éxito a un problema. Las conclusiones que se podrían incluir en este punto son, entre otras, la 1.1, 2.1, 5.2, 6.1, 7.1, 9.1 y 10.2.

Otra forma de insistir en lo básico es ayudar al alumno a comprender fórmulas, expresiones o resolver ecuaciones. Piénsese, por ejemplo, en la resolución de ecuaciones, de sistemas de ecuaciones o, simplemente, en la aplicación de fórmulas, como pueden ser las identidades notables, auténtica pesadilla para los adolescentes. La utilización de herramientas informáticas es, sin duda, un buen aliado en esto. Trabajamos en este apartado los procesos de **utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico** y de **utilización de herramientas matemáticas**. Las conclusiones que podemos tratar, incluyendo las ya mencionadas, son las 1.2, 4.3, 5.1, 6.3 y 10.3

En segundo lugar, si las matemáticas no aportan algo que ayude al alumno en su vida cotidiana o que pueda ayudar en sus estudios o que, simplemente, le permita hacer cosas nuevas e interesantes, veremos como el desinterés aparecerá, más pronto o más tarde, en el desarrollo de la asignatura a lo largo del curso. Si bien es cierto que hay otras asignaturas que se prestan más que otras a ese "*aprendizaje divertido*", debemos buscar la forma de hacer cosas nuevas en matemáticas, cosas distintas al habitual esquema de trabajo en clase. En especial, hemos de buscar nuevas formas de trabajar matemáticas. Y una forma de lograrlo es que **los alumnos hagan matemáticas**. Por ejemplo, mediante la creación, diseño y elaboración de una encuesta en el tema de Estadística, una vez desarrollados conceptos y procedimientos propios del tema. Así, de esta forma, se da una utilidad real, práctica y comprensible, puesto que saben lo que es, para lo que sirve y lo trabajan un punto de vista cercano y tangible. En este apartado, se engloban todos los procesos matemáticos ya citados y el no menos importante de **diseño de estrategias para resolver problemas**, puesto que es un verdadero problema matemático desde su génesis hasta su finalización. Las conclusiones que se pueden asociar a esta vía son, entre otras, la 3.3, 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 8.1 y 10.3.

Por último, creemos que también es interesante **aprovechar las herramientas tecnológicas**. A día de hoy, todos nosotros, especialmente nuestros alumnos, llevan herramientas tecnológicas muy potentes en su bolsillo: sus teléfonos inteligentes. Y hay aplicaciones, como *Geogebra*, que les permiten obtener soluciones a ejercicios que, en ocasiones, son muy complicados para ellos, lo que les permite ahorrar tiempo en resolverlos y dedicar ese tiempo ahorrado a entender las soluciones. Si nos centramos, por ejemplo, en el tema de resolución de sistemas de ecuaciones vemos que, a partir de un cierto nivel de dificultad en dichos sistemas, se cometen errores a la hora de despejar que pueden llegar a ser muy persistentes y que son difíciles de evitar, por mucho que se insista en ejemplos alternativos lo que, a la larga y como ya comentamos, es contraproducente. Utilizar *Geogebra* u otras herramientas informáticas permite a este tipo de alumnado librarse de la frustración que les supone no poder resolver un problema porque fallan en la ejecución del procedimiento pero sí saben, dada la solución, interpretarla. Como tal, esta componente es transversal, pues está presente, en mayor o menor medida, en el desarrollo de las demás.

V.3 Insistir en lo básico

Para trabajar este aspecto, nos vamos a apoyar en dos medios: los exámenes de mentira y el comentario de problemas. Asimismo, nos ayudaremos también de la pizarra digital, pero las experiencias en ella se verán en el apartado relativo al uso de las nuevas tecnologías.

V.3.1 Exámenes de mentira.

En este nivel, la dificultad de los exámenes debe asegurar que el alumno domina los contenidos mínimos establecidos en la programación del departamento para dicha asignatura. Tras todo lo visto anteriormente, lo que se pretende es que el alumnado demuestre el dominio sobre las herramientas matemáticas fundamentales, pudiendo proponer ejercicios de dificultad variable, pero siempre dentro de las posibilidades de este tipo de alumnado. Asimismo, en ocasiones, se incluyen preguntas de temas anteriores, especialmente las relacionadas con las operaciones con enteros y fracciones, pues consideramos fundamentales aplicar con soltura las tablas de multiplicar así como la correcta aplicación de la prioridad de las operaciones. A continuación, se muestran ejemplos de los tres temas, Álgebra, Ecuaciones y Funciones en los que se ha realizado un examen de mentira.

Examen de mentira . Matemáticas 3º ESO.

Nombre:

1. Escribir las fórmulas de las identidades notables.

I.

II.

III.

2. Completar el siguiente cuadro.

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio semejante
$3x^2y^2z$				
$-4abc$				
$-x^2y^3z$				
$-3/4bf^2h$				

3. Sumar las expresiones semejantes

a) $3x^2 + 6x^2 + 5x^2 =$ b) $-5xy + 6yx - 8xy =$

c) $-9y^3 + 2y^3 - 7y^3 =$ d) $8x^4 - 5x^4 - 5y^4 =$

e) $-6x^3 - 2x^3 + 8x^3 - 11x^3 =$ f) $7z^2 + 6b^2 + 4z^2 - 5z^2 =$

4. Dados los siguientes polinomios, realizar las operaciones que se señalan:

$P(x) = 6x + 8x^2 + 7x^3 - 5x^4$ $Q(x) = 3x + 6x^3 - 2x^2$

$R(x) = 3x^5 + 6x^2 - 7x - 5$ $T(x) = x^2 + 4x - 3$

a) $P(x)+Q(x)$ b) $R(x) - Q(x)$ c) $P(x)\cdot T(x)$

5. Desarrollar las siguientes identidades notables.

a) $(6x^2 - 7)^2 =$ b) $(2x + 8b)^2 =$

c) $(2 + 8c^2)(2 - 8c^2) =$ e) $(9x^2 + d)^2 =$

6. Extraer factor común.

a) $-6y^2x + 4xy + 5xy^2 - 3x4y^2 - 5xy^3 =$ b) $-3ab^2 + 3a^2b^2c - 6abc + 5ac^2b^2$

7. Realizar las siguientes operaciones combinadas.

a) $\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\right):\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{9}\right)=$ b) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{(-3)}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}:\frac{(-1)}{8}\right)=$

Examen Tema 3 . Matemáticas 3º ESO.

Nombre:

1. Completar el siguiente cuadro.

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio semejante
$-5a^2c^2b$				
$5/3x^2y^2z^5$				
bcd				
$2abc^2x^2y$				

2. Sumar las expresiones semejantes

a) $3x^2 + 6x^2 + 5x^2 =$ b) $-5xy + 6xy - 8xy =$ c) $-9y^3 + 2y^3 - 7y^3 =$

d) $8x^4 - 5x^4 - 5x^4 =$ e) $7x^2y + 6x^2y - 5x^2y =$ f) $-3/4b^2ac + 1/5b^2ac =$

g) $xy + 7xy - 8zy + 12xy + 17za - 3zy - 9xy - 11za - 9za + 12xy$

3. Multiplicar o dividir los siguientes monomios

a) $(3x^2b)(4x^3c) =$ b) $(6x^3y)(2x^2yz) =$

c) $(3/4z^2y)(1/7zxy) =$ d) $(7x^4y^2b)(-5x^3y^2d) =$

e) $(4/5z^3y^2a):(3/5z^2yb) =$ f) $(6x^2zc^3):(3x^5zc^4) =$

4. Dados los siguientes polinomios, realizar las operaciones que se señalan:

$P(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 6x + 3$ $Q(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + x - 5$ $R(x) = x^2 + 4x - 3$

a) $P(x)+Q(x)$ b) $Q(x) - P(x)$ c) $P(x)\cdot R(x)$

5. Desarrollar las siguientes identidades notables.

a) $(3x + 8b)^2$ b) $(6x^2 + 8c^2)^2$ c) $(6x^2 - 7)^2$

d) $(2x^4y^3 - 8b^3)^2$ e) $(2b^2 + 8c^2)(2b^2 - 8c^2)$ f) $(7c^2d^4 + 6f)(7c^2d^4 - 6f)$

6. Realizar las siguientes operaciones combinadas.

a) $\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\right):\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{9}\right)=$ b) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{(-3)}{4}\right)+\left(\frac{4}{5}:\frac{(-1)}{8}\right)=$

Examen de mentira . Matemáticas 3º ESO.

Nombre:

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a. $2x - 2(x+5) = 4$

b. $4x - 3(x+2) = 3 + 3(x-2)$

c. $4 - 3(2x-1) = 2 - 2(2x-4)$

d. $\frac{2x+5}{5} = \frac{4x-1}{2}$

e. $$\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{2} + \frac{3}{5}x = 2(x-4)$$

f. $$\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = \frac{x+5}{5}$$

g. $\frac{3x+2}{7} + \frac{x+1}{2} = 5 - \frac{x-1}{4}$

h. $\frac{2x-5}{8} - \frac{3+4x}{4} = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 + 3x - 6 = 0$

b) $x^2+9x=0$

c) $x(x-4) = 0$

d) $72x^2-288=0$

e) $x^2+x=-5$

4. Al multiplicar un número entero por el resultado de aumentar su doble en 3 unidades, obtenemos 35. ¿De qué número se trata?

5. Si al doble de un número le sumamos su tercera parte, obtenemos 14. ¿De qué numero se trata?

6. Cristina Ibarra y Cristina Pastor tienen 2500 euros entre las dos, pero Cristina Ibarra tiene 700 euros más que Cristina Pastor. ¿Cuánto dinero tiene cada Cristina?

Examen de ecuaciones. Matemáticas 3º ESO.

Nombre:

1. Resolver las siguientes ecuaciones

a. $5x + 1 = 4(2x-1) - 4$

b. $5x - 2(x+5) = 2x + 3(4-x)$

c. $4 - 2(x - 1) = 3(2 - x) - 10$

d. $\frac{2x+5}{5} = \frac{4x-1}{2}$

e. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$

f. $\frac{x-5}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

g. $\frac{x-4}{2} + \frac{2-2x}{3} = x-9$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a. $x^2+x-6=0$

b. $5x^2 - 20 = 0$

c. $3x^2 - 4x=0$

d. $3x^2+4x-2 = 2(x-1)$

3. Juan Manuel y Antonio Montoya se reparten 98 euros, de forma que Juan Manuel se queda con dos quintos de lo que recibe Antonio. ¿Cuánto recibe cada uno?

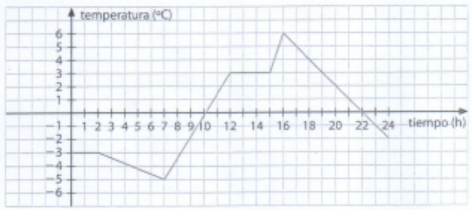
4. Un padre tiene 51 años y sus dos hijos, 12 y 14. ¿Cuántos años han de pasar para que la suma de las edades de los hermanos iguale a la del padre?

5. Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos 130. ¿De qué numero se trata?

Examen de Mates 3º ESO

Nombre:

1 La función representada en la siguiente gráfica muestra la variación de temperatura en cierta localidad en el transcurso de un día:

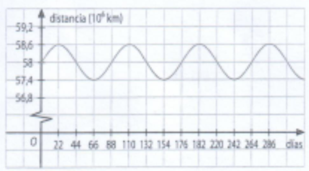


a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuál es la temperatura máxima? ¿Cuál es la temperatura mínima? ¿Cuándo se alcanzan?

c) ¿Se mantiene la temperatura constante en algún momento?

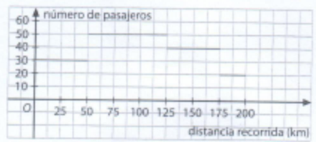
2. La siguiente gráfica representa la distancia entre Mercurio y el Sol en función del tiempo:



a) ¿A qué distancia máxima llega a estar Mercurio del Sol? ¿Y a qué distancia mínima?

b) ¿Es periódica esta función? ¿Cuánto vale el periodo y qué representa?

3. Un autobús realiza tres paradas en su recorrido para que suban y bajen pasajeros. La siguiente gráfica relaciona la distancia recorrida con el número de viajeros:



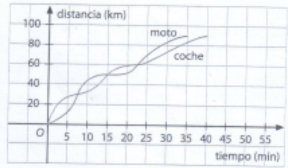
a) ¿En qué kilómetros se dan los puntos de discontinuidad? ¿Qué representan estos puntos?

b) ¿Cuántos viajeros comenzaron el viaje?

c) ¿Cuántos viajeros subieron al autobús en la primera parada?

d) ¿Cuántos viajeros llegaron al final del recorrido?

4. Estas gráficas representan el tiempo empleado por un coche y una moto en recorrer un mismo trayecto:



a) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada uno de los dos vehículos?

b) ¿Cuánto tiempo han empleado?

c) ¿En qué instante paró el coche para repostar? ¿Y la moto? ¿Cuánto tiempo invirtieron en ello?

d) ¿En qué momentos adelantó la moto al coche? ¿Y el coche a la moto?

e) ¿Cuál de los dos vehículos llegó antes?

Puntuaciones:

Ej 1: 1'5

Ej 2: 1

Ej 3: 1'5

Ej 4: 2

Ej 5: 2'5 (0'5 c/u)

Ej 6: 1'5

5. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = -2$

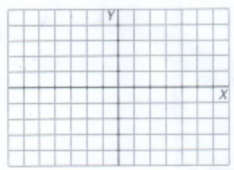
d) $y = 2x - 1$ e) $y = 1 - 5x$

6. Imagínate que tienes una MÁQUINA DE FUNCIONES, de forma que si metes un número x por una ranura, sale por la boca de la máquina el valor y: "Doble de x y una unidad más".

a) Completa esta tabla de valores según el número x que metas:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

b) Dibuja la gráfica de la función que realiza la máquina. ¿Cuál es el dominio de definición de la función? ¿Y el recorrido?



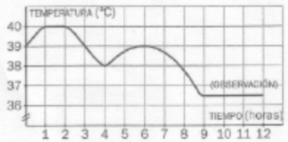
c) ¿Para qué valor de x la máquina muestra $y = 13$?

Examen de Matemáticas. Tema 7 y 8. Funciones. 3 ESO

Nombre:

1

Esta es la gráfica de la temperatura de un enfermo según las horas de hospitalización:



a) ¿Con qué temperatura ingresó en el hospital?

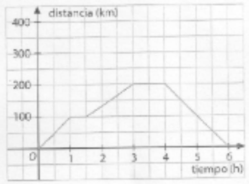
b) ¿En qué momento alcanzó la temperatura máxima?

c) ¿En qué períodos la temperatura decreció?

d) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación hasta que fue dado de alta?

2

Esta gráfica representa el tiempo empleado por un coche en un viaje y la distancia al punto de partida.



a) Si el viaje se inició a las 9 h de la mañana, ¿a qué hora y a qué distancia del punto de partida finalizó?

b) ¿Cuántas veces paró y durante cuánto tiempo?

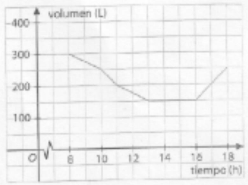
c) ¿En qué momento estuvo más lejos?

d) ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?

e) ¿Cuántos kilómetros recorrió durante la primera hora de viaje? ¿A qué velocidad iba? ¿Mantuvo la misma velocidad después de la primera parada?

3

Esta gráfica muestra la variación del volumen de agua que contiene un depósito desde las ocho de la mañana hasta las seis de la tarde:



a) ¿Cuál fue el volumen mínimo de agua en el depósito? ¿En qué intervalo de tiempo se alcanzó?

b) ¿A qué hora tuvo el depósito 275 L?

c) ¿Cuál era el volumen de agua a las 11 h de la mañana? ¿Y a las 5 h de la tarde?

d) Señala en qué intervalo de tiempo decrece la gráfica e interpreta el significado de este descenso.

e) Indica en qué intervalo de tiempo crece la gráfica e interpreta el significado de este incremento.

Puntuaciones:

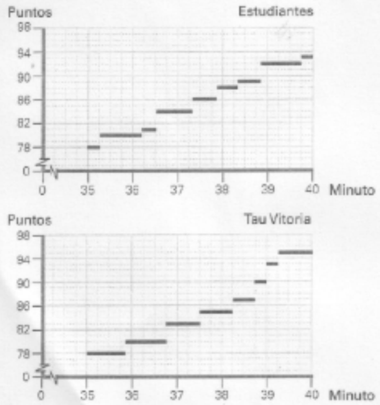
1. 2 puntos (0'5 c/u)
2. 2 puntos (0'4 c/u)
3. 2 puntos (0'4 c/u)
4. 2 puntos (0'4 c/u)
5. 2 puntos (0'5 c/u)

A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

4

49. Partido de baloncesto

Cuando faltaban 5 minutos para el final de un partido de baloncesto entre el Estudiantes y el Tau Vitoria, el marcador era de empate a 78. Las gráficas muestran la evolución del marcador a partir de ese instante.



a) ¿Cuál fue el resultado final?

b) ¿Cuál era el resultado en el minuto 37?

c) ¿Cuál era el resultado en el minuto 38?

d) ¿En qué momento fue máxima la diferencia de puntos?

e) ¿Cuántos triples hizo el Estudiantes en los últimos 5 minutos? ¿Y el Tau Vitoria?

5. Representa las siguientes funciones.

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -2$

c) $y = \frac{x}{3}$

d) $y = 1 - 2x$

Ejercicio extra: (2 puntos)

Escribe la ecuación de la función que asigna a cada número entero:

a) El que le sigue menos tres.

b) El que le antecede más dos.

c) Su cuadrado menos uno.

d) El cuadrado del que le antecede.

e) El cuadrado del que sigue a su cuadrado.

f) El doble del que le sigue menos tres.

La mecánica de funcionamiento de dichos exámenes es sencilla, pues se fija como un examen más, con al menos una semana de antelación con respecto al examen "oficial". Los alumnos deben estudiar como si de un examen normal se tratara pues, por una parte les sirve como simulacro y, por otra, es una nota de clase. Asimismo, los alumnos se sientan en su sitio de examen habitual, siguiendo los procedimientos determinados para cualquier otro examen. Las únicas diferencias son, por un lado, que disponen de la libreta, pudiendo consultarla tanto como deseen. Así, un alumno con una libreta completa y con los ejercicios bien hechos tiene más fácil poder "*aprobar*" el examen de mentira. Lo que no saben, o al menos no se dan cuenta (esa es la idea), es que si han estado trabajando con normalidad durante el tema, realmente no necesitan consultar la libreta porque ya deben haber asimilado los contenidos del mismo. El hecho de tenerla cerca es, sencillamente, un elemento psicológico, fundamental en este tipo de alumnos. En cambio, un alumno con una libreta incompleta, por mucho que la mire, no podrá hacer gran cosa, tendrá que confiar en ayudas "*sobrenaturales*" y deberá ponerse al día antes del examen del tema. El profesor siempre les propone evitar mirarla, salvo en casos de "*extrema necesidad*", para reforzar el hecho de que, en el fondo, es un examen.

Por otro lado, los alumnos dispondrán de la oportunidad de hacer una pregunta al profesor durante el examen. La pregunta se hace en voz alta, de forma que todos los alumnos podrán oír la respuesta. Las preguntas son "acumulativas", es decir, no hacer pregunta alguna en una prueba permite tener dos en la siguiente, y así sucesivamente.

Una vez finalizado el examen, se realiza una fotocopia del mismo y se entrega a los alumnos, custodiando el profesor el original. Es en ese momento cuando se corrige en clase. Los alumnos salen a la pizarra, realizan los ejercicios, señalan los errores, si los hay, del compañero que está en la pizarra y comentan los suyos propios. De esa forma van corrigiendo su examen y puntuando cada una de las preguntas, comunicando al final las calificaciones obtenidas al profesor, que las anota en su cuaderno pues, como comentamos con anterioridad, es un trabajo más de clase con su correspondiente nota. Además, al poder llevarse el alumno el examen corregido a casa, tiene la oportunidad de repasar los fallos, disponer de un repertorio más amplio de ejercicios para estudiar y auto-corregir las posibles dudas que puedan surgir en la preparación del examen oficial. Evidentemente, siempre tendrá el apoyo del profesor para cualquier dificultad que pudiera surgir y que no sean capaces de resolver.

Es mediante este tipo de actividades como reforzamos la capacidad de emplear, así como los distintos procesos matemáticos asociados a esta capacidad matemática. Se trata de repetir para consolidar y/o corregir.

En la siguiente tabla podemos ver la calificación obtenida por los alumnos en los exámenes de mentira y oficiales realizados por los alumnos en los distintos temas en los que se ha trabajado.

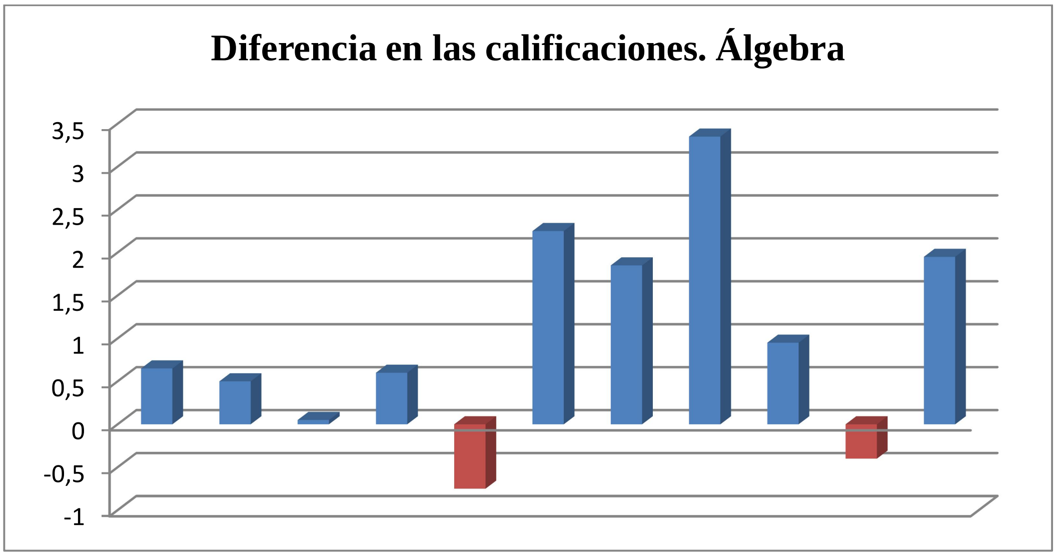
Alumno	Álgebra		Ecuaciones		Funciones	
	Mentira	Oficial	Mentira	Oficial	Mentira	Oficial
1	7.1	7.75	4.75	7.5	8.6	6.5
3	9.5	10	6	6.4	8.45	6.9
5	5.75	5.8	3.25	3.9	5.45	7.3
7	8.65	9.25	5.3	7	9.1	10
9	6.65	5.9	5.5	6.3	5	7.5
11	3.4	5.65	3	4.6	5.25	9.1
13	4.9	6.75	5.25	6.1	5.8	4.2
15	3.95	7.3	2.25	3.9	5.2	6.9
17	6.5	7.45	5.5	7.5	5.55	3.8
19	6.45	6.05	3.25	5.1	5.4	5.8
21	6.95	8.9	4.8	7.8	6.8	6.3

Cuadro 5.2: Calificaciones del alumnado en exámenes de mentira y oficiales

Analicemos ahora estos datos, tema por tema, alumno por alumno y el bloque. Comencemos por el primer examen, el del tema de Álgebra.

Alumno	Mentira	Oficial	Diferencia
1	7,1	7,75	0,65
3	9,5	10	0,5
5	5,75	5,8	0,05
7	8,65	9,25	0,6
9	6,65	5,9	-0,75
11	3,4	5,65	2,25
13	4,9	6,75	1,85
15	3,95	7,3	3,35
17	6,5	7,45	0,95
19	6,45	6,05	-0,4
21	6,95	8,9	1,95

Diferencia Media	1,00
Varianza	1,517
Alumnos con mejor nota	9
Alumnos con peor nota	2



Cuadro 5.3: Análisis de resultados en exámenes del tema de Álgebra

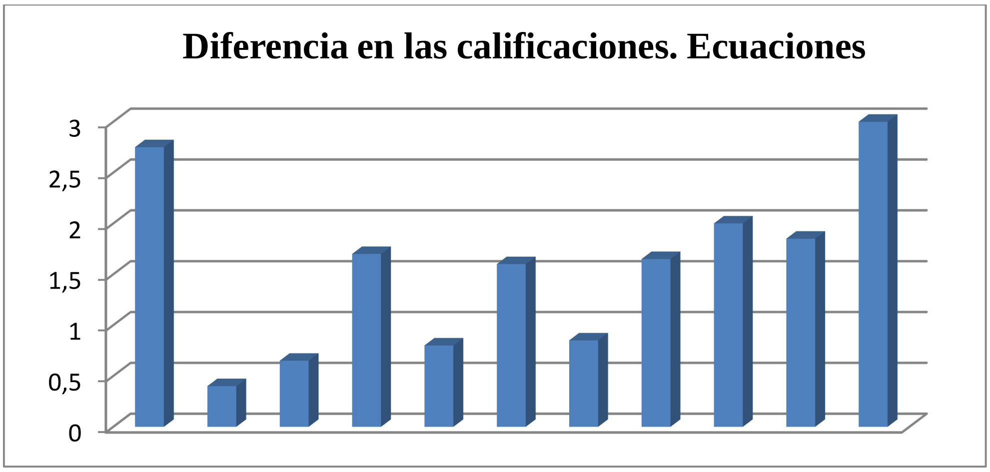
Como se puede apreciar, tanto en la tabla como en el gráfico, vemos que 9 de los 11 alumnos han mejorado sus calificaciones, un 82% aproximadamente. En algunos casos, vemos que la mejora de las calificaciones ha sobrepasado los tres puntos, siendo la media de mejora en la calificación de 1 punto, con una varianza muy grande, lo que nos indica gran disparidad en la diferencia de puntuación entre los dos exámenes.

Se puede apreciar que ambos exámenes mantienen la estructura, a pesar de que en el segundo se ha eliminado la pregunta de teoría sobre las identidades notables, haciendo más hincapié en el desarrollo de las mismas. También se eliminó la pregunta en la que el alumno debía extraer factor común. Para el desarrollo de ambos exámenes se requirió un poco más de tiempo del habitual, en torno a diez minutos.

Pasemos ahora a ver qué ha sucedido con el examen de mentira del tema 4, sobre ecuaciones:

Alumno	Mentira	Oficial	Diferencia
1	4,75	7,5	2,75
3	6	6,4	0,4
5	3,25	3,9	0,65
7	5,3	7	1,7
9	5,5	6,3	0,8
11	3	4,6	1,6
13	5,25	6,1	0,85
15	2,25	3,9	1,65
17	5,5	7,5	2
19	3,25	5,1	1,85
21	4,8	7,8	3

Diferencia Media	1,57
Varianza	0,7051364
Alumnos con mejor nota	11
Alumnos con peor nota	0



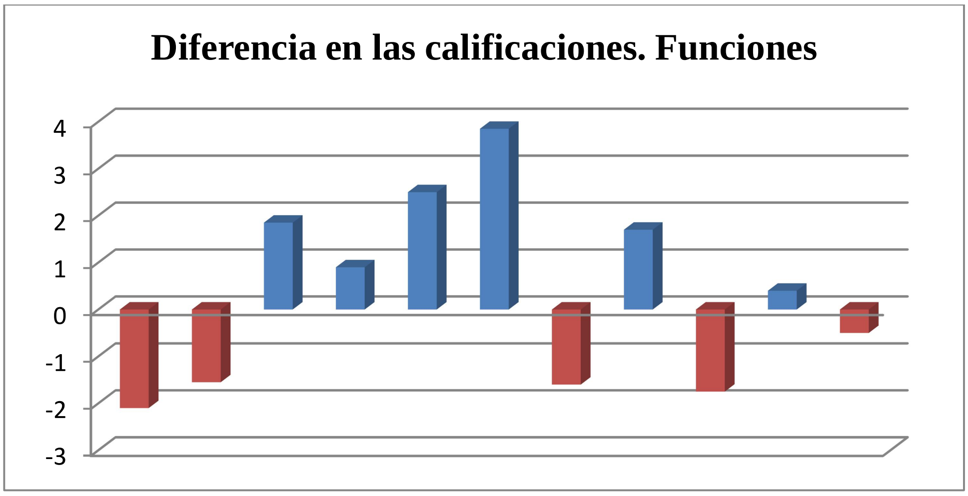
Cuadro 5.4: Análisis de resultados en exámenes del tema de ecuaciones

En este caso, podemos ver que todo el grupo ha mejorado sus calificaciones, superando la media de mejora el punto y medio, siendo esta mejora más representativa en este examen que en la prueba del anterior tema, al ser menor la varianza. Los exámenes, como se puede comprobar, vuelven a ser parecidos pero, en el examen "oficial", se redujeron los apartados fundamentalmente para no ocupar más tiempo de lo debido y para no cansar al alumno repitiendo los mismos procesos. De nuevo, la mayor diferencia llegó casi a los tres puntos.

Para finalizar, veamos lo que ocurrió en el tema de funciones, último en el curso.

Alumno	Mentira	Oficial	Diferencia
1	8,6	6,5	-2,1
3	8,45	6,9	-1,55
5	5,45	7,3	1,85
7	9,1	10	0,9
9	5	7,5	2,5
11	5,25	9,1	3,85
13	5,8	4,2	-1,6
15	5,2	6,9	1,7
17	5,55	3,8	-1,75
19	5,4	5,8	0,4
21	6,8	6,3	-0,5

Diferencia Media	0,34
Varianza	3,9795455
Alumnos con mejor nota	6
Alumnos con peor nota	5



Cuadro 5.5: Análisis de resultados en exámenes del tema de funciones

Los dos exámenes, de nuevo, mantienen la misma estructura. Incluso en el examen del final del tema, se dio la oportunidad de mejorar la calificación con un ejercicio extra, relacionado con el bloque de Álgebra, pues debían definir una función a partir del enunciado propuesto.

En este último tema, los resultados que se tienen son bastante decepcionantes, pues 6 alumnos han mejorado la nota (55%) y 5 no (45%). Además, tal y como cabe esperar de este primer dato, la mejora media de la calificación es de 0.34, con una varianza de casi 4, lo que nos confirma la gran disparidad de resultados obtenidos, de nuevo, en la diferencia de las notas de los dos exámenes. Parece ser que, en este caso, los alumnos no aprovecharon debidamente los errores del anterior ni consolidaron aquello que tuvieron bien en el examen de mentira. Aun así, y salvo dos casos, los que mejoraron su calificación lo hicieron por más de un punto.

A continuación, mostramos una tabla con los datos de los exámenes de mentira y oficiales de los tres temas, la diferencia en cada uno de ellos, la diferencia media, la varianza de dicha diferencia media y su coeficiente de variación.

	Álgebra			Ecuaciones			Funciones					
Alumno	Mentira	Oficial	Diferencia	Mentira	Oficial	Diferencia	Mentira	Oficial	Diferencia	Diferencia Media	Varianza	CV
1	7,1	7,75	0,65	4,75	7,5	2,75	8,6	6,5	-2,1	0,433	5,916	5,613
3	9,5	10	0,5	6	6,4	0,4	8,45	6,9	-1,55	-0,217	1,336	5,334
5	5,75	5,8	0,05	3,25	3,9	0,65	5,45	7,3	1,85	0,850	0,840	1,078
7	8,65	9,25	0,6	5,3	7	1,7	9,1	10	0,9	1,067	0,323	0,533
9	6,65	5,9	-0,75	5,5	6,3	0,8	5	7,5	2,5	0,850	2,643	1,912
11	3,4	5,65	2,25	3	4,6	1,6	5,25	9,1	3,85	2,567	1,341	0,451
13	4,9	6,75	1,85	5,25	6,1	0,85	5,8	4,2	-1,6	0,367	3,151	4,841
15	3,95	7,3	3,35	2,25	3,9	1,65	5,2	6,9	1,7	2,233	0,936	0,433
17	6,5	7,45	0,95	5,5	7,5	2	5,55	3,8	-1,75	0,400	3,743	4,836
19	6,45	6,05	-0,4	3,25	5,1	1,85	5,4	5,8	0,4	0,617	1,301	1,850
21	6,95	8,9	1,95	4,8	7,8	3	6,8	6,3	-0,5	1,483	3,226	1,211

Cuadro 5.6: Análisis de resultados en exámenes por alumno y tema

De los once alumnos del grupo, solamente uno tiene una diferencia media de los tres exámenes negativa. El resto, en mayor o menor medida, han incrementado la media de las calificaciones, si bien es cierto que podemos extraer, visto lo anterior, las siguientes conclusiones:

- En algunos alumnos se produce una gran disparidad en las diferencias entre los exámenes de los tres temas.
- En solo dos alumnos, se mantiene una progresión ascendente en las diferencias medias de las calificaciones.

V.3.2 Comentario de problemas

Retomando una de las conclusiones vistas al comienzo del capítulo y obtenidas de la aplicación de las pruebas PISA, uno de los problemas que presentan este tipo de alumnado es la dificultad que tienen a la hora de enfrentarse a los problemas. Para ello, es necesario asentar en ellos una forma de trabajo en la que "*desmenucen*" la información de los mismos antes de empezar a trabajar. Por ello, en cada problema se debe establecer, desde el primer momento, cuáles son los datos del mismo, así como el procedimiento para su resolución y el resultado del mismo. Los procesos de comunicación, matematización y representación son esenciales en este aspecto, pues nos permiten trasladar un problema a su equivalente matemático. Veámoslo con un ejemplo:

Problema 17: Calcula un número de forma tal que sumándole su mitad se obtiene lo mismo que restando 6 a los 9/5 de dicho número.

17)

x

Datos

x — número

$\frac{x}{2}$ — mitad

$$x + \frac{x}{2} = \frac{9}{5}x - 6$$

$$\frac{10x}{10} + \frac{5x}{10} = \frac{18x}{10} - \frac{60}{10}$$

$$10x + 5x = 18x - 60$$

$$10x + 5x - 18x = -60$$

$$-3x = -60$$

$$x = \frac{60}{3} = 20$$

Habitualmente, este problema se suele emplear para ir familiarizando al alumno con la forma de traducir el lenguaje habitual a las Matemáticas. Aunque es bastante sencillo, presenta varias dificultades que señalamos a continuación:

La primera de ellas es combinar la incógnita con fracciones, hecho que suele resultar bastante más complicado que combinarlas con enteros. Precisamente por eso, en el apartado "*Datos*", es conveniente explicitar esa combinación de incógnitas y fracciones, de forma que resulte más sencillo construir la ecuación. Es en este apartado en el que los ya mencionados procesos de comunicación, matematización y representación están presentes.

No menor problema es asociar "*es lo mismo que*" al signo igual. Para esta dificultad, potenciamos el hecho de utilizar operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Una de las dificultades que se tiene a la hora de trabajar con los alumnos en secundaria es que aprendan que las Matemáticas son un lenguaje, con su simbología propia. Una correcta aplicación de dicha simbología es vital para que las Matemáticas sean lo que son, un lenguaje verdaderamente universal que modeliza el mundo.

En este caso, la capacidad de interpretar la solución no tiene mayor problema.

Veamos otro problema parecido, pero con mayor dificultad a la hora de buscar nuestras incógnitas y de ser interpretado.

Problema 18: Tres números impares consecutivos suman 117. ¿De qué tres números se trata?

18 | Datos

$2x+1$ — $2 \cdot 18+1=37$

$2x+3$ — 39

$2x+5$ — 41

$$2x+1+2x+3+2x+5=117$$
$$6x+9=117$$
$$6x=117-9$$
$$6x=108$$
$$x=\frac{108}{6}=18 \Rightarrow x=18$$

La dificultad de este problema es determinar cómo escribir un número impar. La primera intuición suele ser escribir *x+1*, pero al sugerir que *x* puede ser impar, se descarta esta posibilidad, aunque generalmente hay que poner varios ejemplos antes de que el alumno pueda inferir que la expresión dada anteriormente no es válida para nuestro propósito. Definir impar como el siguiente de un número par nos lleva habitualmente a pasar por *x+2*, hasta que se llega a *2x*. De ahí, sólo queda un paso hacia *2x+1*, que es nuestra solución final, pues es el siguiente a un número par, idea que se persigue en ese ejercicio para designar un número impar. Por último, y tras pasar por *2x+2*, llegamos a que *2x+3* y *2x+5* son los números que completan la terna que buscamos. Ensayando y probando, aplicando procesos de representación y razonamiento y argumentación, fundamentalmente por ensayo-error, hemos llegado al planteamiento de nuestra ecuación, que se resolverá por los métodos habituales. De nuevo, y dentro de la capacidad matemática de formulación de situaciones, hemos de insistir en la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, pues sin una correcta identificación matemática de número impar es imposible una solución adecuada del problema.

Es muy importante que el alumno, sobre todo en la resolución de problemas, diferencie entre resolver una ecuación y resolver un problema. Resolver una ecuación no deja de ser practicar un determinado procedimiento, con mayor o menor pericia, lo que implica la utilización de herramientas matemáticas dentro de la capacidad alcanzada por cada alumno para ello. Resolver un problema incluye esto y también desarrollar las estrategias de matematización, representación de la realidad y comunicación vistas anteriormente, pero no dentro de la capacidad de formulación matemática de las situaciones, sino en el proceso inverso de **interpretación, aplicación y valoración de los resultados**. Por tanto, el problema anterior quedaría incompleto con dar un valor de *x*. Es necesario responder a la pregunta. Por tanto, hallar esos tres enteros impares implica conocer el papel de *x* en el contexto del problema, que no es más que una ayuda para determinar a dichos impares. De hecho, en este problema y aunque los alumnos no son conscientes de ello, *x* no es ni siquiera la incógnita, aunque nos sirva para construirla.

Obsérvese que, en estos dos ejemplos, no se ha profundizado en la capacidad de emplear, pues la solución a estos problemas se obtiene mediante ecuaciones lineales que, en general, todo el alumnado domina sin demasiada dificultad.

Es importante añadir que, no siendo el caso de estos problemas, el enunciado de los mismos no debe estar escrito con lenguaje no asequible al alumno, especialmente durante los exámenes, si queremos que los alumnos sean autónomos en los procesos descritos. No obstante, no está de más introducir algún problema con un lenguaje ligeramente más complicado del habitual en clase para ampliar los conocimientos del alumnado y así hacer de la enseñanza un todo, no elementos separados en asignaturas distintas.

V.4 Aprovechar las herramientas tecnológicas

V.4.1 Utilización de la pizarra digital

Las pizarras digitales se han ido incorporando, poco a poco, a la práctica docente. A pesar del esfuerzo de la Consejería por formar al profesorado en su uso, muchos docentes lo consideran como un “armatoste” o un “elemento extraño” que ha aparecido para usurparles el sitio de su añorada pizarra “analógica”. Para ser sinceros, yo pensaba algo parecido, especialmente por el cariño que le tengo a la tiza. De hecho, a pesar de tener pizarra digital en las aulas del primer ciclo de la ESO nunca las había utilizado, salvo para cosas muy concretas, si bien es cierto que su uso es menos práctico que las que se han instalado en el segundo ciclo de la ESO, que se manejan con el dedo, frente a las otras, que necesitan lápices.

La verdad es que el periodo de aprendizaje en su manejo es corto y es muy fácil, con un poco de imaginación y curiosidad, buscarle aplicaciones. Una de ellas, aprovechando las herramientas que nos proporciona el “*Notebook*”, ayuda a insistir en lo básico. Por ejemplo, cuando se trabajó el tema de Álgebra, a la hora de extraer factor común o bien desarrollar las identidades notables, se pueden utilizar colores o formas para que a los alumnos les resulte más fácil abstraer estos elementos algebraicos. Para algunos de ellos, resulta más amigable extraer un color o una estrellita que una expresión algebraica. Veámoslo en las siguientes capturas:

e) $3x(x-2)+4y(x-2)+3z(x-2)$

$$(x-2)(3x+4y+3z)$$

El procedimiento consiste en identificar aquello que se repite, asignarle un color, extraer y escribir la nueva expresión.

En el siguiente ejemplo se utiliza la misma estrategia, pero, como podemos apreciar, en el segundo término de la expresión algebraica se identifica como “extraíble” el denominador, pero no así en la primera, a pesar de ser el mismo. Es complicado asumir que los denominadores también participan en los procesos de extracción.

g) $\frac{(x^2-3)}{2}(y-7)-\frac{7}{2}(y-7)$

$$(y-7)\left(\frac{(x^2-3)}{2}-\frac{7}{2}\right)$$

Con estos ejemplos queremos poner de relieve la importancia de los procesos de comunicación, matematización y representación. Es por esto por lo que pretendemos, mediante el uso de colores, reforzar la consolidación de dichos procesos, dando un paso intermedio para intentar desarrollar la capacidad de abstracción en el alumnado, ya que es en este momento cuando se empieza a consolidar en los adolescentes. Precisamente en el ejemplo anterior, la no extracción del 2 del denominador es ejemplo de que los procesos de abstracción están en camino de ser desarrollados, pero todavía no están a punto.

A veces, también los colores nos “*demuestran*” identidades conocidas.

$$(a-b)^2 = \underline{a^2}+\underline{b^2}-\underline{2ab}$$

$$\begin{array}{rrr} & a & -\ b \\ & a & -\ b \\ \hline & -ab & +b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline \underline{a^2} & \underline{-2ab} & \underline{+b^2} \end{array}$$

Con este ejercicio, queremos reforzar el proceso de razonamiento y argumentación, dentro de la capacidad de formulación, mostrando que las identidades notables no son un hecho memorístico, sino que proviene de una multiplicación, así como reforzar, dentro de la capacidad de empleo, la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.

Para ejercicios más complicados la identificación con otros elementos, por ejemplo, formas, también es útil y abunda en el mismo sentido que hemos señalado antes. Primero, un ejemplo del profesor. Posteriormente, una aplicación del alumno.

b) $\underbrace{(2x+3)^2}_{\star\star\star\star\star}-\underbrace{(2x-3)^2}_{☺☺☺☺☺}-9$

$\star$ $(2x+3)^2 = (2x)^2+3^2+2\cdot 2x\cdot 3 = 4x^2+9+12x = 4x^2+12x+9$

☺ $(2x-3)^2 = (2x)^2+3^2-2\cdot 2x\cdot 3 = 4x^2+9-12x = 4x^2-12x+9$

$\star$ $-$ ☺ $-\ 9 = (4x^2+12x+9)-(4x^2-12x+9)-9 =$

$\cancel{4x^2}+12x+\cancel{9}-\cancel{4x^2}+12x-\cancel{9}-9=$

$24x-9$

$$8)\ (x+3)^2 - [x^2 + (x-3)^2] =$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 3^2 + 2.x.3 = x^2 + 9 + 6x$$

$$(x-3)^2 = x^2 + 3^2 - 2.x.3 = x^2 + 9 - 6x$$

$$x^2 + 6x + 9 - [x^2 + x^2 + 9 - 6x]$$

$$x^2 + 6x + 9 - [2x^2 + 9 - 6x]$$

$$x^2 + 6x + 9 - 2x^2 - 9 + 6x$$

$$-x^2 + 12x$$

En el tema de ecuaciones, el uso de color es fundamental a la hora de prevenir posibles errores. En las ecuaciones de primer grado, nos han servido como forma de resaltar los signos negativos delante de paréntesis, auténtico banco de pruebas en este procedimiento.

$$\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$$

$$\frac{3x-12}{\cancel{24}} + \frac{10-2x}{\cancel{24}} - \frac{2x-7}{\cancel{24}} + \frac{120}{\cancel{24}} = \frac{24x}{\cancel{24}} - \frac{192}{\cancel{24}}$$

$$3x - 12 + 10 - 2x - 2x + 7 + 120 = 24x - 192$$

$$3x - 2x - 2x - 24x = 12 - 18 + 7 - 126 - 192$$

$$-25x = -325$$

$$x = \frac{-325}{-25} = 13$$

Asimismo, también siguen siendo útiles para identificar cosas, como los coeficientes para aplicar la ecuación de segundo grado, en la que usamos un color para cada parámetro.

$$9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$a = 9$$

$$b = -12$$

$$c = 4$$

Además, en las ecuaciones de segundo grado incompletas, se sigue identificando elementos matemáticos con objetos, como ya se ha señalado antes. En este tipo de ecuaciones, la dificultad está en comprender la factorización de cada una de las ecuaciones para obtener las dos soluciones.

$$5x^2 + 45x = 0$$

$$\underbrace{x}_{☆}\underbrace{(5x+45)}_{☺} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} ☆ = 0 \\ ☺ = 0 \end{array}$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$5x + 45 = 0$$

$$5x = -45$$

$$x = \frac{-45}{5}$$

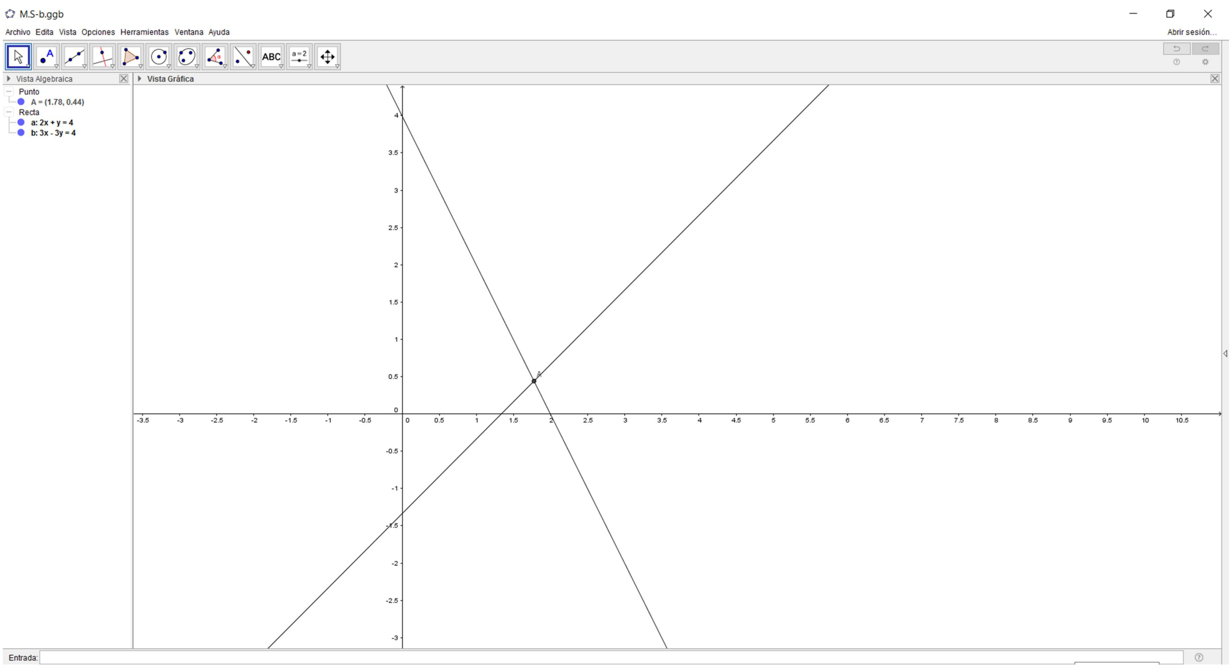
$$x = -9$$

En este caso, dentro del proceso de diseñar estrategias para resolver problemas, consolidamos la capacidad de empleo, pues buscamos herramientas de control que nos ayuden a encontrar la solución, evitando errores en el procedimiento. También reforzamos la capacidad de utilizar operaciones y herramientas matemáticas.

V.4.2 Utilización de software matemático: Geogebra.

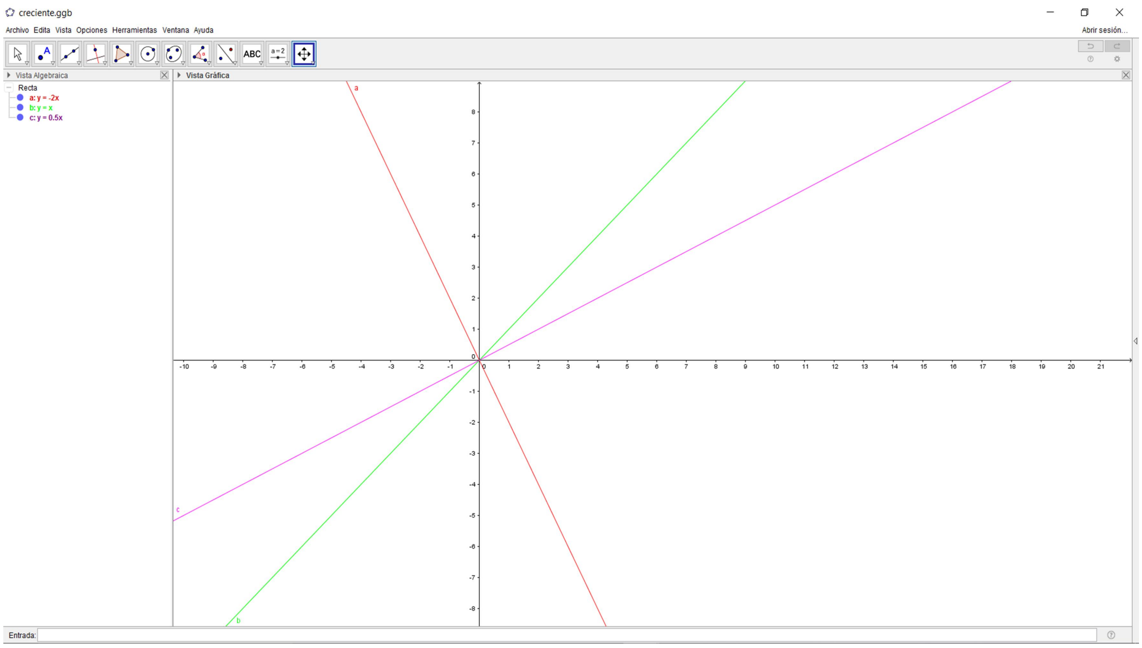
La pizarra digital no nos ofrece solamente herramientas que permiten cambiar la tiza por los píxeles, sino que están dotadas de programas informáticos que ayudan en el trabajo diario tanto de profesores como de alumnos. Buena prueba de ello es el software "Geogebra", presente también en otros dispositivos, como tablets y teléfonos inteligentes. Mucho más allá de una calculadora, es especialmente útil para ahondar en las relaciones entre Álgebra y Análisis. Buena prueba de ello es que, en la resolución de sistemas, resulta muy conveniente su utilización, sobre todo de cara a comprobar los resultados. Además, aunque el tema de Funciones todavía no se ha impartido, resulta interesante que aparezca que una ecuación lineal con dos incógnitas se asocie a una recta.

De hecho, en el tema de sistemas, se propuso al alumnado que comprobara las soluciones utilizando Geogebra. Veamos un ejemplo de ello:



En esta imagen podemos comprobar que el punto de corte de las dos rectas es la solución de nuestro sistema de ecuaciones. A partir de aquí, utilizando este programa, resulta muy fácil determinar si nos hemos equivocado o no en la resolución del sistema. La única dificultad es comparar la solución que proporciona Geogebra cuando no son números enteros, pues hay que dividir la fracción obtenida. Yendo más allá, incluso comprobaremos si un sistema no tiene solución (rectas paralelas) o tiene infinitas soluciones (rectas coincidentes), ya que habitualmente este tipo de sistemas no suelen ser trabajados con alumnado de este nivel desde el punto de vista algebraico, por el grado de abstracción se requiere al ser resueltos de esta forma. Con Geogebra, se "prescinde" de dicho proceso de abstracción para pasar a ser algo "tangible" para el alumno de este tipo.

En el caso de funciones, ver si una función es creciente o bien si una es más creciente que otra resulta mucho más fácil, sobre todo por el empleo, de nuevo, del color. Veámoslo en la siguiente imagen:



Mediante el uso de Geogebra, o de cualquier otra herramienta TIC, ponemos de relieve la importancia que tienen hoy en día estas herramientas en el entorno cotidiano del alumno, y las incorporamos, de forma natural, en su práctica matemática. Aplicando lo que han hecho antes con lápiz y papel pueden "*olvidarse*" de las dificultades de los procedimientos y centrarse en la capacidad de interpretación, especialmente si el problema planteado surge de un entorno no matemático y profundizar en la relación entre el contexto no matemático y su traslación matemática.

Asimismo, mejoramos las capacidades de empleo, especialmente el proceso de diseño de estrategias para resolver problemas, puesto que se dispone de una herramienta que ayuda en la corrección del trabajo del alumno.

V.5 Los alumnos hacen Matemáticas

Sin duda, una de las mejores formas de aprender, especialmente en Matemáticas, es hacer. Precisamente por ello, y para evaluar el tema de Estadística, se recurrió a la realización de un trabajo, que consistió en el diseño, realización y análisis de una encuesta, lo que permitiría poner en práctica todo lo aprendido durante el tema.

Afortunadamente, quizá por ser una manera de "*librarse*" de un examen, los alumnos agradecieron y apoyaron la idea y comenzó el proceso de desarrollo de la misma.

La idea de este trabajo es proporcionar a los alumnos el recorrido completo de un problema asociado a la realidad del alumno, comenzando por su descripción contextual, su traslación a una descripción matemática, su tratamiento con las herramientas trabajadas en clase y su vuelta al contexto original.

Lo primero de todo es mostrar al alumnado la utilidad y el sentido de la encuesta, por lo que se hace especialmente importante elegir las preguntas que se iban a realizar en la encuesta con sentido común. Al comienzo de este tema, y de cara a identificar los tipos de variables estadísticas, se plantean preguntas como "número de hermanos que tienes" o "asignaturas suspensas" o incluso el hecho la situación sentimental de los padres o la marca de o el número de vehículos que poseen en casa. En principio, estas parecieron buenas preguntas pero, en parte para evitar preguntas incómodas a los encuestados o a ser datos no relevantes, se fueron "*dirigiendo*" las preguntas a incluir en la encuesta.

Como se puede comprobar, la encuesta se estructura en tres partes: hábitos de estudio/lectura, relación con las nuevas tecnologías y hábitos de vida saludable. Son tres temas muy presentes en la vida de los adolescentes de hoy en día y sobre los que es interesante hacer indagaciones.

Código de encuesta:________________ Nº Encuestador:________

Encuesta - Trabajo Matemáticas 3º ESO.

¡Hola! Somos un grupo de alumnos de Matemáticas de 3º de ESO. Estamos haciendo una encuesta para trabajar los contenidos del tema de Estadística. Os pedimos que, de forma anónima y sincera, respondáis esta encuesta. Tan solo serán unos minutos.

¡Muchas gracias por tu tiempo y por ayudarnos!

1. ¿Cuántas asignaturas has suspendido el último trimestre?	
2. ¿Cuántos libros lees cada año?	
3. ¿Cuántas horas estudias, aproximadamente, cada semana? Por favor, usa un número entero de horas	
4. ¿Tienes un teléfono móvil?	SI / NO
5. Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿cuántas horas lo utilizas cada día?	

6. ¿Para qué utilizas el teléfono? Pon una x debajo de cada una de las opciones. Puedes marcar más de una.

Mensajería (WhatsApp, Telegram...)	Redes sociales (Facebook, Instagram, Snapchat)	Llamadas	Buscar información para trabajos (Wikipedia, WordReference)	Navegar por Internet

7. ¿Juegas con videojuegos?	SI / NO
8. Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿cuántas horas juegas cada semana? Por favor, usa un número entero de horas	
9. ¿Desayunas en casa antes de venir al Instituto?	
10. ¿Cuántas piezas de fruta tomas cada día?	

11. ¿Qué desayunas durante el recreo? Pon una x debajo de cada una de las opciones. Marca sólo una.

Bollería	Fruta	Bocadillo	Cereales	Nada	Otros (Especifícalo, por favor)

12. ¿Cuántas horas duermes, por término medio, cada día? Por favor, usa un número entero de horas	

Has acabado la encuesta. ¡Muchas gracias de nuevo por tu ayuda!

Una vez que la anterior encuesta fue aprobada por la clase, había que pasarla a los posibles encuestados. Para ello, se realizó un muestreo estratificado, en el que cada estrato correspondía con cada uno de los niveles educativos que se imparten en el centro. Dentro de cada estrato, el número de encuestados se determinó de forma proporcional al número de estudiantes dentro de cada nivel educativo. Fueron los propios alumnos los que realizaron dicho reparto. También se procuró que el número de encuestados fuera proporcionado en cuanto al sexo de los mismos.

La distribución de encuestas por grupos quedó en los siguientes términos:

Grupo	Nº de encuestas
1º ESO	11
2º ESO	11 + 4
3º ESO	11
4º ESO	11
1º BACH CYT	3
1º BACH CCSS	5 + 2
2º BACH CYT	3
2º BACH CCSS	3+1
1º COMERCIO	2
Total	60*

Cuadro 5.7: Reparto de encuestas por niveles.

Una vez que se tuvo claro el reparto de encuestas por niveles, se constituyó el equipo de encuestadores. Los alumnos se distribuyeron en parejas y se repartieron a qué nivel querían ir. Puesto que les daba vergüenza ir al ciclo formativo, ya que los alumnos son mucho mayores que ellos, me ofrecí voluntario para ayudarles con dicho grupo. La tarea se realizó durante un recreo, en el que les estuve dando apoyo y guiando en su trabajo como encuestadores.

El hecho de que en 2º de ESO y en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales se tuvieran que hacer más encuestas se debió a que algunos encuestados dieron respuestas incoherentes. Los propios alumnos, durante el proceso de digitalización del cuestionario para su posterior tratamiento informático, se dieron cuenta de eso y decidieron repetir las encuestas erróneas, pues dijeron que quedarían pocas encuestas de dichos grupos y se podrían falsear los resultados.

Cada pareja de alumnos digitalizó sus encuestas, utilizando una plantilla proporcionada por el profesor, y se las remitieron por correo electrónico. El profesor se encargó de unir todos estos datos y remitió de vuelta a los alumnos el archivo con todos los datos, para que cada pareja hiciera su correspondiente análisis.

Para ello, trabajaron con la hoja de cálculo en los ordenadores de los que se dispone en clase, siempre bajo la supervisión del profesor para evitar "*tentaciones*" en forma de juegos durante la hora de trabajo.

La metodología sugerida fue bastante sencilla. Primero, el alumno debe identificar si se trata de una variable cuantitativa o cualitativa. Posteriormente, si se trata de una variable estadística cuantitativa, se calcula media, mediana, moda, varianza, desviación típica y coeficiente de variación. También se pidió la realización de un gráfico. En el caso de una variable cualitativa, bastaba con calcular la moda y realizar un gráfico.

Podemos ver un ejemplo de una variable cuantitativa en este ejemplo. Concretamente, nos referimos al número de asignaturas suspensas:

Tabla estadística

VALORES	FRECUENCIAS	MEDIA	F. ABSOLUTA	VARIANZA
0	34	0	34	58,9427777778
1	7	7	41	0,7019444444
2	6	12	47	2,8016666667
3	3	9	50	8,5008333333
4	3	12	53	21,6008333333
5	4	20	57	54,2677777778
6	2	12	59	43,8672222222
7	1	7	60	32,3002777778
	60	79		222,9833333333

Cálculo de parámetros

MEDIA	1,3166666667
MODA	0
MEDIANA	0
VARIANZA	3,7163888889
DES. TIPICA	1,927793788
CV	1,4641471807
RECORRIDO	7

Gráfico

Cuadro 5.8: Ejemplo de estudio de variable estadística cuantitativa.

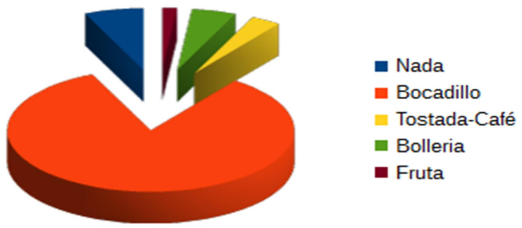
Para mantener la homogeneidad en el trabajo con lo hecho en la libreta, la tabla realizada en la hoja de cálculo es similar a la allí empleada. De hecho, el procedimiento de cálculo de la varianza se hace aplicando directamente la fórmula. Por otro lado, el cálculo de la mediana, recuérdese que planteó problemas en el estímulo PISA "*Estatura*" se hizo de la ordenando los valores de la primera columna, pues ahí están los valores de la variable estudiada en cada caso, y viendo el que ocupa la posición central, teniendo en cuenta que en la primera fila se describe el contenido de la misma y, por tanto, no cuenta en la búsqueda de la posición central. Con esta forma de cálculo, se pretende erradicar el hecho de asimilar media y mediana a la misma cosa.

Veamos a continuación un ejemplo de una variable cualitativa, en este caso, qué toman para desayunar durante el recreo:

Tabla de valores

Valores	Frecuencias
Nada	4
Bocadillo	50
Tostada-Café	2
Bollería	3
Fruta	1
Total	60
Moda	Bocadillo

Gráfico



Cuadro 5.9: Ejemplo de estudio de variable estadística cualitativa.

En el trabajo final entregado para valorar el tema se debía incluir un análisis, dependiendo del tipo de variable, similar a los anteriores. Los fallos más comunes que se presentaron en el cálculo de la varianza, sobre todo al elegir la forma de calcular el cuadrado de la diferencia entre cada uno de los valores de la variable y la media, el cálculo de la mediana, pues muchos al principio no ordenaban los valores de la variable. Asimismo, algunos alumnos olvidaron incluir gráficos.

El tiempo previsto para realizar este trabajo fue de tres clases, pero los habituales impoderables informáticos y los errores persistentes de algunos alumnos en el cálculo de algunas medidas, debido en una parte a la poca pericia en el manejo de la hoja de cálculo y en otra parte a la falta de madurez en el manejo de los procedimientos propiamente matemáticos, hizo que se tuviera que dar una hora más para realizar la tarea.

Hemos querido dejar para el final la exposición de esta actividad con el alumnado porque creemos que ésta resume a la perfección la idea general que se ha transmitido a lo largo de este trabajo puesto que, de una forma o de otra, están presentes los siete procesos y las tres capacidades en las que PISA descompone la competencia matemática. Aunque no todos hayan sido trabajados por el alumnado en este caso concreto, sí nos muestran una forma de plantear actividades que, sin descuidar lo fundamental, que es el conocer los distintos conceptos y procedimientos matemáticos, nos ayudan a que el alumnado pueda desarrollar plenamente dichos conocimientos y, por tanto, alcance el mayor grado posible en el desarrollo de la competencia matemática.

Partimos de un problema, en un contexto concreto, como es el obtener información de los alumnos que estudian en un determinado centro educativo, centrándonos en las áreas que describíamos al principio: hábitos de estudio/lectura, relación con las nuevas tecnologías y hábitos de vida saludable. Ante este problema, el estudio de los procesos y capacidades descritos en PISA podría ser el que se adjunta en la siguiente tabla.

	Formular	Emplear	Interpretar
Comunicación	Comprensión del problema: Conocer determinadas características de un grupo determinado.	Diseño de la manera de desarrollar lo anterior.	Interpretar el sentido de la encuesta en cada variable estudiada.
Matematización	Estadística. Variable. Población. Muestra. Medidas de centralización. Medidas de dispersión. Gráficos estadísticos.	Identificar en el contexto real los anteriores conceptos matemáticos.	Validar si la respuesta matemática dada al problema cubre todos las necesidades en el contexto original.
Representación	Variable estadística cuantitativa y/o cualitativa.	Aplicar a cada elemento en estudio la variable correspondiente.	Analizar los valores de cada variable y su implicación en el contexto inicial.
Razonamiento y argumentación	Se ajusta, en principio, al problema que se desea estudiar, pues nos permite obtener información del grupo.	Explicación del por qué del uso de cada una de las variables, y su tipo, en el estudio de la población.	Valorar el conjunto encuesta / resultados y argumentar la utilidad o no de la solución dada al problema
Diseño de estrategias para resolver problemas	Diseño y realización de una encuesta.	Analizar el diseño de la encuesta, para ver si es útil para resolver el problema planteado. Rectificar en caso necesario.	Revisar si la encuesta ha sido una herramienta apropiada para el estudio del problema planteado.
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Variable estadística cuantitativa y/o cualitativa. Muestreo. Medidas estadísticas.	Clasificación de cada variable contextual en su correspondiente variable matemática.	Valorar el sentido de los parámetros obtenidos en cada variable, con relación al contexto inicial.
Utilización de herramientas matemáticas	Identificación con situaciones teóricas estudiadas. Reconocer modelos similares en la realidad.	Cálculo de medidas estadísticas. Elaboración de gráficos. Herramientas de muestreo.	Valorar matemáticamente los resultados de los parámetros obtenidos para cada variable.

Cuadro 5.10: Análisis al problema planteado aplicando los procesos y capacidades descritos por PISA

Capítulo VI. Conclusiones

Para finalizar el presente trabajo fin de máster, presentamos algunas de las conclusiones a las que se ha llegado durante el desarrollo del mismo.

En primer lugar, creemos que la metodología planteada en este estudio, en espiral, permite, tras un cierto número de iteraciones, aproximarnos cada vez mejor tanto a las circunstancias del grupo como al objeto del estudio. En cada paso, vamos enriqueciendo las aportaciones de los anteriores y, al evaluar, se consigue poco a poco ir afinando en la búsqueda de las soluciones a los problemas planteados.

En segundo, es fundamental conocer perfectamente al alumnado, así como sus capacidades y actitudes hacia la asignatura. Más que mediante encuestas, que pueden ser engañosas, es importante haber trabajado durante un largo periodo de tiempo con ellos. Hemos de decir que, al haberlo hecho así y tener experiencia en la docencia con niveles bajos, parte de ese trabajo se llevaba ya hecho. En este aspecto, la experiencia e instinto del docente son muy importantes.

Los tipos de alumno que se suelen dar en estos niveles son tres: alumno con buena actitud pero que le cuesta seguir la asignatura, alumno desmotivado y alumno que le cuesta y, además, tiene una actitud negativa hacia las Matemáticas. Conjugar esos tres grupos de alumnos suele ser complicado, pues implica una atención casi personalizada. Por tanto, este trabajo debe hacerse en grupos lo más reducidos posible.

Por otro lado, creemos que resulta muy adecuada la utilización de PISA para detectar las carencias en el desarrollo de la competencia matemática. Aunque las pruebas PISA han sido diseñadas a tal fin, adolecen de ser un instrumento clasificador. Precisamente el hecho que no se puedan pasar “a mano” y obtener la puntuación correspondiente y la adscripción de cada alumno a los seis niveles de desarrollo de competencia descritos por PISA, sí es posible, y creo que esa es la novedad que aportamos, hacer una lectura atenta de las respuestas a los estímulos y detectar las carencias de los alumnos tanto en sus conocimientos como, sobre todo, en la forma de aplicarlos. Paliar la falta de conocimientos puede hacerse insistiendo en aquello más débil en el armazón de conocimiento matemático de cada alumno. Lo realmente complicado es enseñar a aplicar, en diversos contextos, aquello que ya saben.

Como hemos señalado, a nuestro juicio, las pruebas PISA deben servir como un medio para, fundamentalmente, extraer conclusiones de cara a detectar esa falta de conexión entre lo que explicamos en clase de Matemáticas y su aplicación fuera de ella, ya sea en otras asignaturas, en casa o en otros contextos del alumno. Debemos enseñar para aplicar, sobre todo en estos niveles curriculares y con este tipo de alumnado. Tras muchos años de estudio de contenidos matemáticos, lo que realmente cuesta al alumnado es seleccionar qué contenido y/o procedimiento concreto necesita y cómo aplicarlo. Eso es lo que, desde nuestro punto de vista, genera inseguridad al alumnado y les lleva a fracasar en pruebas de medición de competencias. Saben, pero no aplican.

En el comienzo del capítulo V se han citado un buen número de conclusiones concretas tras aplicar las pruebas PISA, que han resultado muy útiles para el diseño de las actividades con las que se ha trabajado en clase. Todas estas conclusiones quedan agrupadas en tres ámbitos: insistir en lo básico, aprovechar las nuevas tecnologías y que los alumnos hagan matemáticas.

La primera de estas conclusiones abunda precisamente en lo señalado anteriormente. No se trata de insistir en los conocimientos, aunque deba hacerse si no se dominan correctamente, sino en los elementos básicos de un problema, para consolidar, dentro de la capacidad de formular, los procesos de comunicación, matematización y representación de la realidad, de cara a la conexión del problema con su imagen matemática y la resolución del mismo con los conocimientos que cada alumno posee. También es importante, dentro de la capacidad de emplear, diseñar estrategias para resolver problemas y utilizar las herramientas necesarias para tal fin. Herramientas clásicas, como separar un problema en el esquema datos, operaciones, solución son infalibles, aunque puedan ser consideradas, en ocasiones, infantiles por este tipo de alumnado. Hemos de mostrar que, si siguen respirando de niños, ¿por qué deben dejar de hacerlo de mayores?

En este sentido, los exámenes de mentira pretenden trabajar este aspecto. Creemos que es lógico comenzar una casa por sus cimientos, y eso se hace clarificando conocimientos y mostrando la relación entre los contextos de los problemas y su identificación matemática. Los procesos inversos, en principio más asequibles pero no menos importantes, pues descodificar lo codificado resulta más sencillo al tener ya determinada la representación matemática hecha. El estudio de estos procesos quedaría para un análisis ulterior. Asimismo, resultaría interesante profundizar en la disparidad que aparece en las diferencias de las calificaciones obtenidas en los distintos exámenes, para intentar separar las variables dependientes de la práctica docente, de las dependientes de los alumnos.

La segunda de dichas conclusiones nos insta a la utilización de las nuevas tecnologías. Ello puede hacerse, como hemos visto, de varias formas. Pero nos parece especialmente interesante, por un lado, la forma en la que dichas herramientas pueden servir como ayuda a la consecución de la capacidad de abstracción que se forma en estas edades y, por otro lado, desligar procedimiento y cálculos. Es decir, un alumno puede saber qué herramienta usar para resolver un problema pero no ser lo suficientemente hábil en el manejo de la misma. Piénsese, por ejemplo, que en muchas ocasiones son capaces de plantear una ecuación pero cometen errores en su resolución, siendo en ocasiones persistentes en dichos errores. Se trata de que, con el manejo de las herramientas informáticas, sean capaces de detectarlos, mejorando su capacidad de ejecutar procesos matemáticos, y no se sientan en inferioridad de condiciones por saber plantear y no resolver.

En cuanto a la mejora de la capacidad de abstracción, también hemos de considerar el factor psicológico. Algunos alumnos consideran "*fea*" una incógnita y ven con más agrado reemplazarla por otra cosa. Mientras la belleza de las Matemáticas hace su aparición, bien podemos apañarnos con otra cosa.

Por último, quisiéramos señalar la importancia de que los alumnos hagan Matemáticas. Mientras que otro tipo de alumnado asimila mejor los conocimientos impartidos, bien por su propia capacidad, por reforzar el trabajo que se hace en clase en casa o por ambos motivos, este tipo de alumnado debe llevarse todo hecho de clase, ya que generalmente no estudia en casa. La mejor forma de hacerlo es procurar que el trabajo sea significativo y, además, que sea tangible, es decir, debe poder aplicarlo con sus propias manos. Así, en un futuro, al hacer referencia a esos contenidos, los recordará porque los trabajó, y será más probable que los recupere más fácilmente de su almacén de conocimientos que si nos limitamos a una metodología de trabajo estándar. Mediante el desarrollo de actividades que recorran todos los contenidos de un tema de principio a fin, lo repasamos y lo aplicamos. Cuanto más potenciemos el trabajo del alumno y nuestro papel pase a ser el de guía y ayudante en momentos puntuales, más probabilidades tendremos de fijar los contenidos en el alumnado.

Para ello, se necesitan actividades variadas y participativas, de forma que con cierta frecuencia se salgan del guión habitual de la asignatura, aunque siempre debemos tener cuidado, porque el uso de una metodología clásica en la enseñanza de las Matemáticas hacen que se instalen en una zona de confort que, al ser abandonada, puede provocar inseguridades y rechazo, aunque sean alumnos que suspendan habitualmente. De hecho, piensan que se está más cómodo en su suspenso habitual que en el nuevo y la estrategia que habíamos diseñado para intentar atraerlos se nos vuelve en contra.

Como conclusión final, pensamos que la utilización de las pruebas PISA para mejorar el desarrollo de la competencia matemática del alumnado de los niveles bajos de 3º de ESO es posible. Para ello, debe realizarse un diseño metodológico adaptado al grupo con el que se trabaja, que partirá precisamente de las conclusiones obtenidas del análisis tras pasar dichas pruebas. Evidentemente, dicho diseño estará adaptado a la realidad del alumnado con el que se trabaje en el aula y debería basarse en los principios que marcan el espíritu de este trabajo: insistir en lo fundamental, aprovechar las herramientas tecnológicas y hacer que los alumnos hagan matemáticas. Quedaría para un posterior estudio ver los resultados de esta metodología de trabajo no solo en parte de un curso, sino en el alumnado de la ESO, desde su comienzo hasta la finalización de la etapa.

Bibliografía

Referencias bibliográficas y procedentes de revistas.

1. AGAEVE, (2014) Guía de evaluación de la competencia básica en razonamiento matemático.
2. ALSINA, A. LÓPEZ, P.(2014), Sobre la naturaleza de las Matemáticas en la formación inicial de maestros: los procesos matemáticos en el sistema de creencias de los estudiantes. Revista Épsilon. Vol 31(3), pp 7-20.
3. BOLÍVAR, A (2007) El discurso de las competencias en España: Educación Básica y Educación Superior. Revista de docencia Universitaria, 2(3).
4. BOLÍVAR, A y PEREYRA, M.A. (2006) El proyecto DeSeCo sobre la definición y selección de competencias clave. Introducción a la edición española en RICHEN, D.S y SALGANIK, H. (2006) Las competencias clase para el bienestar personal, social y económico. Ediciones Aljibe.
5. BOS, W., SCHWIPPERT, K.(2002) TIMSS, PISA, ILGU y demás: razón y sinrazon de los estudios internacionales de rendimiento escolar. Profesorado, Vol 13, 2, pp 5-23.
6. CASTRO, E. RICO, L. (1994), Conocimiento matemático, comprensión y evaluación. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 21, pp 71-82.
7. CÓLERA, J., GAZTELU, I., OLIVEIRA, M.J.,(2010) Matemáticas 3º ESO. Anaya.
8. COLOMINA, R. ONRIBIA, J., NARANJO, M. (2000) Las pruebas escritas y la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado 3(2).
9. COLL, C., REMESAL, A. (2009) Concepciones del profesorado de Matemáticas acerca de las funciones de la evaluación del aprendizaje en la educación obligatoria. Infancia y Aprendizaje, 32:3, pp 391-404.
10. COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS (2006) Recomendaciones del Parlamento europeo y del Consejo de Europa sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Disponible en http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/es/com/2005/com2005_0548es01.pdf
11. COMISIÓN EUROPEA (2004) Competencias clave para un aprendizaje a lo largo de la vida. Un marco de referencia europeo. Bruselas. Dirección General de Educación y Cultura. (Grupo de trabajo B. Competencias clave)
12. COMISIÓN EUROPEA (2007) Competencias clave para el aprendizaje permanente. Un marco de referencia europeo.
13. COMISIÓN EUROPEA (2012) El desarrollo de las competencias clave en el contexto escolar en Europa. Eurydice.

14. DEVLIN, K. (1994), Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe, W. H. Freeman Scientific American Library, Nueva York.
15. EURYDICE (2002) Competencias clave. Madrid: Unidad española de la red Eurydice.
16. EURYDICE (2002) Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria.
17. FONT, V., PLANAS, N., GODINO, J.D. (2010) Modelo para el Análisis Didáctico en Educación Matemática, Infancia y Aprendizaje, 33:1, pp 89-105.
18. FORTUNY, J. M., IZQUIERDO, D. (1989), Elaboración de instrumentos de evaluación diagnóstica de los conocimientos de Ciencias y Matemáticas en los niveles no universitarios. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 6, pp. 169-179.
19. GIL, D., VILCHES, A. (2006) ¿Cómo puede contribuir el proyecto PISA a la mejora de la enseñanza de las ciencias (y de otras áreas de conocimiento)?. Revista de Educación. Número extraordinario.
20. GINGSBURG, H.P. (2009) The Challenge of Formative Assessment in Mathematics Education: Children's mind, Teacher's Minds. Human Development, nº 52, pp 109-128.
21. GOBIERNO VASCO, Competencia Matemática. 2º curso de ESO. http://ediagnostikoak.net/ediag/cas/item-liberados/ED09_Euskadi_Matem_ESO2.pdf
22. GUARRO, A.(2008) El currículo de una Buena escuela es un currículo democrático. ¿Qué aporta la LOE?
23. GUERRERO F., ORTIZ, J.(2012) Modelización Matemática en la Educación Media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes. Revista Épsilon. Volumen 29 (2) pp 27-40.
24. GUTIÉRREZ, L., MARTÍNEZ, E., NEBREDA, T. (2008) Las competencias básicas en las área de Matemáticas . Consejería de Educación. Cantabria.
25. HABERMAS, J.(1987) Teoría de la acción comunicativa. Ediciones Taurus.
26. MARCHESI, A., MARTÍNEZ, R., MARTÍN, E. (2004) Estudio longitudinal sobre la influencia del nivel sociocultural en el aprendizaje de los alumnos en la Educación Secundaria Obligatoria, Infancia y Aprendizaje, 27:3, pp307-323.
27. MARTÍNEZ, R. (2006) La metodología sobre los estudios PISA. Revista de Educación. Número extraordinario, pp111-129.
28. MEC (2000) PISA. Pruebas de Matemáticas y resolución de problemas.
29. MEC (2005) Currículo y competencias básicas.

30. MEC (2012) PISA. Informes de centros. http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/explicarinformespisa.pdf?documentId=0901e72b818b21f7

31. MEC (2012) PISA. Presentación del informe. http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/presentacionpisa2012.pdf?documentId=0901e72b81787b13

32. MEC (2013) Marcos y pruebas de evaluación PISA 2012.Matemáticas, Ciencias y Lectura. Madrid.

33. MEC (2013) PISA. Informe español. Análisis secundario.

34. MEC (2014) PISA. Informe español. Resultados y contexto.

35. MEC (2014) PISA. Pruebas de Matemáticas y resolución de problemas.

36. MEC (2015) PISA in Focus nº 50. ¿Afectan las relaciones alumno- profesor al bienestar de los alumnos en la escuela? http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/pisa-in-focus/pisa-in-focus-n50-esp.pdf?documentId=0901e72b81dd880f

37. MEC (2015) PISA in Focus nº 56. ¿Hasta qué punto confían los alumnos en su capacidad para resolver problemas? http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/pisa-in-focus/pisa-in-focus-n56esp.pdf?documentId=0901e72b81fff169

38. MEC (2016) Pisa In Focus nº 60, ¿Quiénes son los alumnos de bajo rendimiento? http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/pisa-in-focus/pisa-in-focus-n60-esp.pdf?documentId=0901e72b820a5905

39. MEC PISA. Ejemplos de ítems liberados. http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/recursos/ejemplospruebaspisa.pdf?documentId=0901e72b816484b9

40. MEC, Recursos PISA. http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/

41. MEYER, H.D. (2014) Carta abierta a Andreas Schleicher. http://odiseo.com.mx/marcatexto/2014/05/carta-abierta-para-andreas-schleicher-ocde-paris

42. MIRANDA, A., ARLANDIS, P., SORIANO, M. (1997) Instrucción en estrategias y entrenamiento atribucional: efectos sobre la resolución de problemas y el autoconcepto de los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Infancia y Aprendizaje, 22:80, pp 37-52.

43. MONÉREO, C. (2009) PISA como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza. Ed Grao.

44. MONEREO, C., CASTELLÒ, M., DURAN, D., GÓMEZ, I. (2009) Las bases psicoeducativas del proyecto PISA como guía para el cambio en las concepciones y prácticas del profesorado en secundaria, Infancia y Aprendizaje, 32:3, pp 421-447

45. MOYA, J. (2008) Las competencias básicas en el diseño y el desarrollo del currículo, Qurriculum nº 21, pp 57-78.
46. NISS, M. (2003), "Mathematical Competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project", en Gagatsis A. y S. Papastavridis (eds.), 3.ª Conferencia Mediterránea sobre la Enseñanza de las Matemáticas, la Sociedad Matemática Helénica y la Sociedad Matemática de Chipre, Atenas, pp. 115-124.
47. NISS, M. y T. HOJGAARD (eds.) (2011), "Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark", Ministerio de Educación, Informe n.º 485, Universidad de Roskilde, Roskilde.
48. NISS, M., W. BLUM y P. GALBRAITH (2007), "Introduction", en Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education (Estudio ICMI n.º 14), Springer, Nueva York, pp. 3-32.
49. OCDE (2005) Definition and selection of Competences. Executy Summary.
50. OCDE (2005) Informe Pisa 2003: Aprender para el mundo de mañana. Ed Santillana.
51. OCDE, El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve. París.
52. OCDE-DeSeCo (2002) Definition and selection of competences (DeSeCo): theoretical and conceptual foundations. Strategy Paper.
53. PÉREZ, A. (2013) Reválidas, evaluación de competencias y calidad de los aprendizajes. Qurriculum nº 26, pp 11-25.
54. PERRENOUD, PH. (2004) la clave de los campos sociales: competencias del autor autónomo. RICHEN, D.S y SALGANIK, H. (2004) Definir y seleccionar las competencias básicas para la vida. México. FCE.
55. RAMOS, L., CASTRO, E., CASTRO-RODRIGUEZ, E. (2016) Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. Enseñanza de las Ciencias 34:1, pp 173-192.
56. RECIO, T. (2006), Pisa y la Evaluación de las Matemáticas (2006), Revista de Educación. Número extraordinario, pp 263.273.
57. RICO, L. (2006) La competencia matemática en PISA. Publicado originalmente como Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA, pp. 21-40.
58. RICO, L. (2006) Marco teórico de evaluación en PISA sobre Matemáticas y resolución de problemas. Revista de Educación. Número extraordinario, pp275-294.

59. SCHLEICHER, A. (2014) Respuesta a la carta abierta de H.D. Meyer. http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/OECD-response-to-Heinz-Dieter-Meyer-Open-Letter.pdf

60. SERVICIO DE INSPECCIÓN EDUCATIVA DE GRANADA (2015) Mejora de la competencia matemática.

61. Sistema de indicadores para la evaluación de las competencias básicas en educación infantil, educación primaria y educación secundaria. http://roble.pntic.mec.es/~sblm0001/documentos_master/Curso_Competencias/contenidos/unidad01/documentos/sistemaindicadores.pdf

62. SOLÉ, I, MIRAS, M, CASTELLS, N.(2003), ¿Dónde se encuentra la innovación en las prácticas de evaluación innovadoras? Infancia y Aprendizaje, 26:2, pp 212-233.

63. STEEN, L. (1990), On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy, National Academy Press. Washington, D.C.

64. TIANA, A. (2011) Análisis de las competencias básicas como núcleo curricular en la educación secundaria española. Bordón, nº 63, pp 63-75.

65. TURNER, R. y R.J. ADAMS (2012), “Some drivers of test item difficulty in mathematics: an analysis of the competency rubric”, ponencia presentada en la Reunión Anual de la Asociación Americana de Investigación Educativa (AERA), 13-17 de abril de 2012, Vancouver.

66. VÉLAZ DE MEDRANO, C. (2006) Presentación. Una visión integral de las evaluaciones del PISA (OCDE) con especial atención a la participación de España. Revista de Educación, número extraordinario.

Referencias Legislativas

67. Ley Orgánica de Calidad y Mejora en la Educación, BOE nº 295 10 de diciembre de 2013.

68. Ley Orgánica de Educación, BOE nº 106 de 4 de mayo de 2006.

69. Ley Orgánica de Calidad en la Educación, BOE nº 307 de 24 de diciembre de 2002.

70. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, BOE de 3 de enero de 2015.

71. Real Decreto 1146/2011, de 29 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, así como los Reales

Decretos 1834/2008, de 8 de noviembre, y 860/2010, de 2 de julio, afectados por estas modificaciones (BOE 30-07-2011).

72. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE 5-1-2007)

73. Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, BOE de 21 de enero de 2015.

74. Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía, BOJA nº 252 de 26 de diciembre de 2007

75. Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, BOJA nº 122 de 28 de junio de 2016.

76. Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, BOJA nº 144 de 28 de julio de 2016.

77. Orden de 27 de octubre de 2009, por la que se regulan las pruebas de evaluación de diagnóstico y el procedimiento de aplicación en los centros docentes de Andalucía, BOJA nº 230 de 25 de Noviembre de 2009.

78. Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA 30-8-2007)