



UNIVERSIDAD DE
ALMERÍA



DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

DIMENSIONES (\mathcal{X}, \mathcal{Y})-GORENSTEIN. APLICACIONES EN LA CATEGORÍA DE MÓDULOS

Febrero 2022

Enrique
Duarte González

DIRECTORES:

Juan Ramón
García Rozas

Luis
Oyonarte Alcalá

**DIMENSIONES $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -GORENSTEIN.
APLICACIONES EN LA CATEGORÍA DE MÓDULOS
 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -GORENSTEIN DIMENSIONS.
APPLICATIONS IN THE CATEGORY OF MODULES**

Autor: Enrique Duarte González

Directores: Juan Ramón García Rozas y Luis Oyonarte Alcalá

Programa: 8910 - Programa de Doctorado en Matemáticas

Memoria realizada en el departamento
de Matemáticas de la Universidad
de Almería bajo la dirección
de los profesores
Dr. Juan Ramón García Rozas
y Dr. Luis Oyonarte Alcalá,
para aspirar al grado
de Doctor en Ciencias Matemáticas.

V.º B.º de los directores

Fdo.: Juan Ramón García Rozas

Fdo.: Luis Oyonarte Alcalá

El aspirante

Fdo.: Enrique Duarte González

Quiero mostrar mi agradecimiento
a los directores de esta Memoria,
Luis y Juan Ramón, por el tiempo que
me han dedicado, la confianza que han
depositado en mí y la formación que
he recibido de ellos.
También me gustaría extender este
agradecimiento a todo el
departamento de Matemáticas
de la Universidad de Almería.

RESUMEN

Este documento constituye la memoria de tesis doctoral para optar al grado de Doctor en Matemáticas. Este trabajo lo dividimos en dos bloques.

En el primer bloque, Capítulos 3 y 4, cuyo ámbito de trabajo es una categoría abeliana \mathcal{A} con suficientes inyectivos, consideramos \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos subcategorías plenas de \mathcal{A} . Introducimos y estudiamos la subcategoría $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein de \mathcal{A} , que generaliza a subcategorías y clases de módulos ampliamente estudiadas, por ejemplo, las subcategoría \mathcal{X} -Gorenstein o las clases de módulos G_C -proyectivos y G_C -inyectivos. Probamos que, bajo determinadas condiciones sobre las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} , la subcategoría $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein es estable y estudiamos las principales propiedades de ésta. Definimos las dimensiones homológicas inducidas por la categoría $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein en \mathcal{A} , y vemos que se puede calcular a partir de los funtores Ext^n cuando éstas son finitas. Probamos que los objetos con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva (inyectiva) finita tienen una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta (preenvolvente) especial y relacionamos estas dimensiones con las dimensiones inducidas por las subcategorías \mathcal{X} -Gorenstein e \mathcal{Y} -Gorenstein en \mathcal{A} . Para acabar este bloque, definimos y estudiamos la dimensión global $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein, incidiendo en cómo es la categoría cuando la dimensión global es finita.

En el segundo bloque, Capítulos 5 y 6, el ámbito es la categoría de R -módulos. Consideramos un R -módulo a izquierda C y el anillo $S = \text{End}_R(C)$. Cuando C es semidualizante, las clases de Auslander $\mathcal{A}_C(S)$ y de Bass $\mathcal{B}_C(R)$ asociadas a C han sido sujeto de muchas investigaciones. Suavizando la condición de semidualizante a débilmente Wakamatsu tilting, establecemos condiciones para que el par $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1})$ sea una teoría de cotorsión perfecta y para que el par $({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ sea una teoría de cotorsión completa hereditaria. A partir de estos pares cotorsión, obtenemos condiciones para

que las clases de Auslander y de Bass sean covering.

Introducimos la investigación de los módulos Gorenstein planos relativos a un módulo C , no necesariamente semidualizante, y estudiamos condiciones para que la clase de los módulos G_C -proyectivos sea precovering especial, para que la clase de los módulos G_C -planos sea covering, para que la clase de los módulos Gorenstein C -proyectivos sea precovering y para que la clase de los módulos Gorenstein C -inyectivos sea preenveloping.

ABSTRACT

This document constitutes the doctoral thesis to aim for a PhD degree in Mathematics. We divide this work into two blocks.

In the first block, Chapters 3 and 4, whose scope is an abelian category \mathcal{A} with enough injectives, we consider \mathcal{X} e \mathcal{Y} two full subcategories of \mathcal{A} . We introduce and study the $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein subcategory of \mathcal{A} , which generalizes to widely studied subcategories and classes of modules, for example the \mathcal{X} -Gorenstein subcategory or the classes of G_C -projectives modules and G_C -injectives modules. We proved that, under certain conditions on the subcategories \mathcal{X} e \mathcal{Y} , the subcategory $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein is stable and we studied its main properties. We define the homological dimensions induced by the subcategory $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein in \mathcal{A} , and we see that it can be calculated from the functors Ext^n when they are finite. We prove that objects with finite projective (injective) $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimension have a special $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precover (preenvelope) and relate these dimensions to the dimensions induced by the subcategories \mathcal{X} -Gorenstein and \mathcal{Y} -Gorenstein in \mathcal{A} . To finish this block, we define and study the global dimension $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein, focusing on what the category is like when the global dimension is finite.

In the second block, Chapters 5 and 6, the scope is the category of R -modules. We consider a left R -module C and the ring $S = \text{End}_R(C)$. When C is semidualizing, the Auslander class $\mathcal{A}_C(S)$ and the Bass class $\mathcal{B}_C(R)$ associated to C have been subject of extensive investigations. Weaken the condition from semidualizing to weakly Wakamatsu tilting, we establish conditions for the pair $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1})$ to be a perfect cotorsion theory and for the pair $({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ to be a complete hereditary cotorsion theory. From these cotorsion pairs, we obtain conditions for the Auslander and Bass

classes to be covering.

We introduce the investigation of Gorenstein flat modules relative to a not necessarily semidualizing module C and we find conditions for the class of G_C -projective modules to be special precovering, the class of G_C -flat modules to be covering, the one of Gorenstein C -projective modules to be precovering and that of Gorenstein C -injective modules to be preenveloping.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	9
1 Introducción	15
2 Preliminares	23
2.1 Algunas generalidades sobre complejos y homología	25
2.2 \mathcal{X} -Resoluciones, \mathcal{X} -(pre)cubiertas y \mathcal{X} -(pre)envolventes	28
2.3 Lemas sobre diagramas en categorías abelianas	38
2.4 Dimensiones relativas a una categoría auto-ortogonal	56
2.5 Módulos w-tilting y sus clases asociadas	61
3 Categorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein	67
3.1 Definición y ejemplos	68
3.2 Propiedades de las categorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein	70
3.3 Problemas de estabilidad	77
3.4 Clases de Foxby relativas vistas como $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein	85

4	Dimensiones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$-Gorenstein	89
4.1	Dimensión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectiva e inyectiva	90
4.2	Dimensiones Globales $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein	113
5	Teorías de cotorsión a partir de clases de Foxby	121
5.1	Las clases $\text{Add}_R(C)$ y $\text{Prod}_R(C^\vee)$	121
5.2	Teorías de cotorsión a partir de clases de Foxby	129
6	Precubiertas y preenvolventes Gorenstein relativas	139
6.1	$C\text{-GProj}(R)$ -precubiertas y $C\text{-GInj}(S)$ -preenvolventes	139
6.2	Precubiertas G_C -planas y G_C -proyectivas	146
	Bibliografía	163

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Comencemos esta memoria con una breve exposición sobre el origen y la evolución del Álgebra Homológica que demostrara la necesidad de generalizar esta teoría y nos llevará inevitablemente a introducir el Álgebra Homológica Relativa.

El Álgebra Homológica se origina en la teoría clásica de la Topología Algebraica, en la cual, a partir de espacios topológicos, se construyen grupos relacionados con estos y homomorfismos que los conectan, que proporcionan gran información sobre los espacios topológicos originales.

En sus inicios el Álgebra Homológica resultó bastante impopular por su dificultad de comprensión y, una vez que se lograba comprender, no se le encontraba mucha utilidad.

Pero esto cambió cuando Jean Pierre Serre caracterizó determinados tipos de anillos utilizando el Álgebra Homológica. Además, Henri Cartan y Samuel Eilenberg unificaron todos los conceptos relativos al Álgebra Homológica que se encontraban dispersos en las ramas de teoría de grupos, álgebra de Lie y álgebras asociativas en su libro “Homological Algebra” ([10]), hecho que despertó el interés de muchos matemáticos que comenzaron a estudiar esta teoría tan productiva. Por eso, Cartan y Eilenberg se pueden considerar como los fundadores del Álgebra Homológica Moderna. El método que utilizaron fue el uso sistemático de resoluciones utilizando módulos inyectivos y proyectivos, que son sucesiones exactas con términos proyectivos o inyectivos,

que se construyen a partir de un determinado módulo.

La razón por la que las resoluciones proyectivas e inyectivas funcionan no es otra que la definición de los módulos proyectivos e inyectivos, es decir, un módulo P proyectivo si el funtor $\text{Hom}(P, -)$ es exacto y un módulo E es inyectivo si $\text{Hom}(-, E)$ es exacto. El problema que surge es que, dado un módulo, se pueden elegir infinitas resoluciones proyectivas e inyectivas y cada una dará lugar a unos grupos de (co)homología que, en principio, no tienen por qué ser iguales.

Sin embargo, otra vez por la exactitud de los funtores $\text{Hom}(P, -)$ cuando P es proyectivo, estas resoluciones se pueden relacionar mediante morfismos de complejos. Y lo más importante es que resulta que todos estos morfismos de complejos son homotópicos por el Teorema de Comparación, es decir, que todos los grupos de (co)homología del mismo grado que se obtienen mediante resoluciones proyectivas diferentes son isomorfos. Este hecho da total consistencia a la teoría.

Ocurre lo mismo si en lugar de elegir resoluciones proyectivas elegimos resoluciones inyectivas. Todas las resoluciones que elijamos del mismo módulo son homotópicas (Teorema de Comparación), y por lo tanto todas dan (salvo isomorfismos) los mismos grupos de (co)homología.

Ligado al concepto de resolución proyectiva (o inyectiva) aparece inmediatamente el concepto de dimensión proyectiva (inyectiva), que es la menor longitud de una resolución proyectiva (inyectiva) de un módulo dado. El estudio de estas dimensiones homológicas proporciona, como ya hemos indicado y no podía ser de otra manera, información valiosa sobre el módulo en sí, pero además, también sobre el anillo sobre el que se construyen los módulos, cuando se comparan estas dimensiones en toda la categoría $R\text{-Mod}$. Por ejemplo, un anillo es quasi-Fröbenius si y sólo si todo R -módulo M verifica:

$$\text{pd } M = 0 \Leftrightarrow \text{id } M = 0.$$

Llegados a este punto, surge una pregunta natural: ¿por qué restringirse al uso de resoluciones proyectivas e inyectivas? ¿Por qué no elegir otras clases de módulos que proporcionen unos grupos de (co)homología diferentes y por lo tanto una información distinta? Sobre todo teniendo en cuenta que existen otras clases de módulos homológicamente muy importantes, como es la de los módulos planos, que también caracteriza anillos tan importantes como son los anillos regulares: un anillo es regular si y sólo si todo módulo es plano. Por

esta razón, durante los últimos años el estudio de la (co)homología relativa a diferentes clases de módulos ha sido una rama del álgebra plenamente activa y a la que se han dedicado muchos matemáticos.

Existen clases de módulos especialmente relevantes sobre las que se ha realizado una cantidad ingente de artículos de investigación: la de los módulos Gorenstein proyectivos, de los módulos Gorenstein inyectivos y de los módulos Gorenstein planos. Las clases de los módulos Gorenstein inyectivos y Gorenstein proyectivos fueron introducidas por Edgar Enochs y Overtoun Jenda en [16], la clase de los Gorenstein Planos, por ellos y Blas Torrecillas en [20]. Estas clases junto a las de los proyectivos, inyectivos y planos probablemente son las clases de módulos más estudiadas en el ámbito homológico, sobre todo en términos de calcular (pre)cubiertas, (pre)envolventes, y las dimensiones relativas que inducen. Resulta difícil dar una lista significativa de los artículos más relevantes publicados sobre estas clases sin dejar de citar alguno de ellos e incluso alguna de las teorías que en ellos se estudian, pero por hacer una tentativa, lejana a la realidad por la poca cantidad de citas que podemos dar aquí, mencionamos los estudios de Enochs sobre la existencia de (pre)cubiertas y (pre)envolventes [17], [22], [23], etc., o los relativos a las dimensiones Gorenstein [15], [29], [30], [11], [9], [2], etc.

Tan relevante ha sido el estudio de las clases de módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos en el desarrollo del Álgebra Homológica que han surgido multitud de generalizaciones de este tipo de módulos. Por ejemplo, Holm y Jørgensen estudiaron en [31] las dimensiones homológicas inducidas por la clase de los módulos G_C -proyectivos, G_C -inyectivos y G_C -planos, cuando C es un módulo semidualizante. Diana White añadió otros resultados sobre la dimensión G_C -proyectiva cuando C es semidualizante en [40]. También Liu, Huang y Xu realizaron investigaciones sobre estas dimensiones en [36].

Sin embargo, las propiedades que cumplen los módulos semidualizantes son muy restrictivas a la hora de estudiar dimensiones homológicas relativas a C , ya que la condición $\text{End}_R(C) \cong R$ hace que C esté cerca de ser un módulo proyectivo. Por eso Driss Bennis, J.R. García Rozas y Luis Oyonarte investigaron en [5] cómo debilitar las condiciones de C sin mermar el interés de los resultados que se pueden obtener. A los módulos que verificaban estas propiedades los llamaron débilmente Wakamatsu tilting porque la clase de todos estos módulos contiene propiamente a la clase de los módulos

Wakamatsu tilting.

Además, existe otro factor importante que refuerza la idea de plantearse la investigación del Álgebra Homológica relativa a otras clases de módulos. Como hemos mencionado al principio de esta introducción, el inicio del Álgebra Homológica no se sitúa en un ámbito propio del álgebra, y además, ya dentro de la rama de álgebra, tiene aplicaciones en muy diversas teorías, como la de la Geometría Algebraica, en la que el estudio de categorías diferentes a las de módulos (como por ejemplo las de haces) es fundamental. Por tanto el paso lógico en la evolución del Álgebra Homológica es su desarrollo en el ámbito categórico. Pero no todas las categorías sobre las que tenga sentido construir homología (categorías abelianas con algunas propiedades adicionales) poseen suficientes objetos proyectivos o inyectivos (por ejemplo las categorías de haces no tienen suficientes proyectivos). Así, estudiar Álgebra Homológica relativa sobre otras clases relevantes de objetos (como pueden ser los planos en las categorías de módulos o de haces) se hace imprescindible.

Existen otras generalizaciones de los conceptos de módulos Gorenstein proyectivos e inyectivos, y no solo en la categoría de módulos, sino en categorías más generales. De entre todos estos nuevos conceptos tal vez el más interesante sea, dada una categoría abeliana \mathcal{A} y una subcategoría plena \mathcal{X} de \mathcal{A} , el de objetos \mathcal{X} -Gorenstein. Este nuevo concepto fue dado por Sather-Wagstaff, Sharif y White en [38] en donde, entre otras cosas, buscan las condiciones que tiene que verificar la subcategoría \mathcal{X} para que $\mathcal{G}(X)$ sea estalbe, es decir, para que la subcategoría formada por todos los núcleos de sucesiones completas exactas, $\text{Hom}(\mathcal{G}(\mathcal{X}), -)$ -exactas y $\text{Hom}(-, \mathcal{G}(\mathcal{X}))$ -exactas de objetos \mathcal{X} -Gorenstein coincida con la subcategoría de los objetos \mathcal{X} -Gorenstein, lo que quiere decir que $\mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X})) = \mathcal{G}(\mathcal{X})$. Posteriormente Geng y Ding estudiaron las dimensiones homológicas inducidas por estos nuevos objetos en [27].

Nuestro interés en la primera parte de este trabajo se centra dar un concepto que generalice a la vez aquéllos de objeto \mathcal{X} -Gorenstein, de módulo G_C -proyectivo y de módulo G_C -inyectivo, cuando C es un módulo débilmente Wakamatsu tilting (no necesariamente semidualizante), y además que este nuevo concepto resulte de utilidad en categorías abelianas y no sólo en las categorías de módulos.

Con el fin de que esta memoria sea lo más autocontenida posible se han

incluido en el Capítulo 2 las definiciones básicas que se van a utilizar a lo largo de toda la memoria, como son las de cubiertas y envolventes en una categoría arbitraria abeliana, resoluciones y corresoluciones, y dimensiones proyectiva e inyectiva inducidas por una subcategoría, así como las relaciones entre estos conceptos y resultados conocidos en categorías abelianas. Finalizaremos este repaso recordando algunos conceptos en la categoría $R\text{-Mod}$, incidiendo en los R -módulos débilmente Wakamatsu tilting y sus duales, así como las clases de módulos asociadas a estos, como son los módulos C -inyectivos, C -proyectivos, las clases Gorenstein relativas a C y las clases de Foxby (las clases de Auslander y de Bass).

Una vez hecho esto comenzaremos la primera parte de nuestro trabajo en el Capítulo 3 y el Capítulo 4. Dadas dos subcategorías plenas \mathcal{X} e \mathcal{Y} de una categoría abeliana \mathcal{A} , definiremos estos nuevos objetos, los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. Nuestro primer objetivo será estudiar la subcategoría $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein de \mathcal{A} , es decir, la subcategoría plena de \mathcal{A} cuyos objetos son todos los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein de \mathcal{A} , y hacer una investigación exhaustiva de las dimensiones homológicas inducidas por esta nueva subcategoría: la dimensión $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -proyectiva (o dimensión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectiva) y de la dimensión $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -inyectiva de los objetos de \mathcal{A} (o dimensión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein inyectiva).

Así, comenzamos nuestro camino en el Capítulo 3 caracterizando cuándo un objeto de \mathcal{A} es un objeto de $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y cuándo esta subcategoría verifica las propiedades básicas que permiten desarrollar satisfactoriamente la teoría de la dimensión homología que induce, es decir, cuándo $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo extensiones, bajo núcleos de epimorfismos, bajo conúcleos de monomorfismos y bajo sumandos directos. Además, indagaremos sobre qué condiciones deben satisfacer las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} para estar dentro de $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Este hecho es de gran importancia porque cuando esto suceda la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de cualquier objeto será siempre menor que la \mathcal{X} -dimensión proyectiva y que la \mathcal{Y} -dimensión proyectiva, e igualmente ocurre con las dimensiones inyectivas. Dicho de otra forma, las $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensiones (tanto proyectiva como inyectiva) dan medidas más precisas que las \mathcal{X} -dimensiones y que las \mathcal{Y} -dimensiones. También descubriremos cuándo $\mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Acabaremos el Capítulo 3 probando que las clases de Foxby relativas son un ejemplo de estas subcategorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

En el Capítulo 4 estudiaremos las dimensiones homológicas inducidas por las subcategorías $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Estas dimensiones se definen como longitudes de sucesiones exactas con términos en $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y veremos que la dimensión de un objeto no depende de la sucesión que se tome. Y por supuesto, probaremos que la herramienta clásica de cálculo de las dimensiones también se puede aplicar en nuestra subcategoría: demostraremos que las $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensiones se pueden calcular a partir de los funtores Ext^n (la dimensión será el menor n tal que $\text{Ext}^k = 0 \forall k \geq n + 1$).

Para finalizar esta primera parte estudiaremos las dimensiones homológicas globales inducidas por estas subcategorías $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si tomamos la dimensión global por la izquierda (proyectiva), llegaremos a la conclusión de que si ésta es finita entonces la subcategoría \mathcal{X} no es otra que la categoría de los objetos proyectivos. En el caso de tomar la dimensión global por la derecha (inyectiva), será \mathcal{Y} la categoría de objetos inyectivos.

La segunda parte de este trabajo, Capítulo 5 y Capítulo 6, la centraremos en la existencia de precubiertas Gorenstein proyectivas relativas y preenvolventes Gorenstein inyectivas relativas en la categoría $R\text{-Mod}$. Comencemos motivando esto.

Las clases de Foxby (clases de Auslander y de Bass) han demostrado ser muy útiles cuando estudiamos las dimensiones Gorenstein inyectiva y proyectiva. Sobre los anillos Gorenstein, todo módulo tiene dimensión Gorenstein proyectiva y Gorenstein inyectiva finita ([18]). Sin embargo, cuando el anillo ya no es Gorenstein, los módulos de dimensiones Gorenstein proyectiva e inyectiva finita constituyen una nueva subcategoría plena. Éstas fueron identificadas en el caso de anillos conmutativos locales Cohen-Macaulay con un módulo dualizante, al menos para módulos finitamente generados. Foxby demostró que las clases de Auslander y de Bass se comportan en una dualidad y que los módulos finitamente generados en la clase de Auslander son precisamente los de dimensión Gorenstein proyectiva finita, mientras que los módulos finitamente generados en la clase de Bass son los de dimensión Gorenstein inyectiva finita ([24]).

Este resultado ha sido muy apreciado y posteriormente muchos autores han estudiado y ampliado la situación dada por Foxby (véanse [8], [19], [21] o [33] por ejemplo).

Por otro lado, la existencia de precubiertas Gorenstein proyectivas y preenvolventes Gorenstein inyectivas es un tema de estudio muy activo en

la actualidad, no solo en la categoría de módulos sino en cualquier categoría con propiedades homológicas interesantes, como por ejemplo las categorías de haces sobre un espacio topológico, la categoría de complejos de módulos, la categoría de representaciones de quivers, etc. (véanse, por ejemplo, Enochs, Estrada y García Rozas en [13], Enochs, García Rozas, Oyonarte y Torrecillas en [14], Gillespie en [28] o Krause en [35]).

Pero poco se sabe sobre existencia de precubiertas o preenvolventes Gorenstein proyectivas e inyectivas relativas a un módulo semidualizante, o incluso débilmente Wakamatsu tilting (véase la Definición 2.5.4), por lo que se hace necesario su estudio. Se han hecho numerosas investigaciones en [32], [40], [36], [5] sobre dimensiones relativas a estas clases, y se sabe que si C es débilmente Wakamatsu tilting (cotilting) entonces todo módulo con dimensión Gorenstein proyectiva (inyectiva) relativa a C finita tiene una G_C -precubierta (preenvolvente) especial ([5, Corolary 3.6 y Theorem 4.11]), pero nada más general.

Llegados a este punto queda clara la importancia de saber cuándo existe una precubierta G_C -proyectiva e incluso G_C -plana, así como de preenvolventes G_C -inyectivas, o, desde otro punto de vista, cuando todos los módulos tienen una resolución G_C -proyectiva o G_C -plana así como una corresolución G_C -inyectiva. Tal y como hemos mencionado antes, en esta segunda parte de la Memoria abordaremos este problema.

Comenzaremos el Capítulo 5 demostrando que la “imagen” de una clase (pre)covering mediante un funtor adjunto a izquierda es (pre)covering y que la “imagen” de una clase (pre)enveloping mediante un funtor adjunto a derecha es (pre)enveloping. Gracias a estos resultados y extendiendo el caso conmutativo al no conmutativo cuándo $\text{Add}(C)$ ($\text{Prod}(C^\vee)$) coincide con $C \otimes \mathcal{P}roj$ ($\text{Hom}(C, \mathcal{I}nj$) podremos estudiar condiciones bajo las que esta clase es covering (enveloping). Después de esto estudiaremos condiciones suficientes para que un módulo sea w-(co)tilting.

A continuación veremos bajo qué condiciones $\text{Prod}(C^\vee)$ es preenveloping en la clase de Auslander y $\text{Add}(C)$ precovering en la de Bass. Y acabaremos este capítulo ayudándonos de los pares de dualidad sobre un anillo y de los pares cotorsión para ver condiciones suficientes con las que las clases de Bass y Auslander son covering.

Comenzaremos el último capítulo de esta memoria, el Capítulo 6, viendo, bajo determinadas condiciones, las clases de módulos $C\text{-}G\mathcal{I}nj$ y $C\text{-}G\mathcal{P}roj$ co-

mo “imagen” de los módulos $G\mathcal{I}nj$ y $G\mathcal{P}roj$ mediante los funtores $\text{Hom}(C, -)$ y $C \otimes -$, respectivamente. Esto nos llevará a estudiar los casos en los que estas clases son preenveloping y precovering.

A continuación, recordaremos el concepto de módulo G_C -plano y estudiaremos su relación con las clases de Auslander y de Bass, la clase de los módulos planos, así como las clases C -relativas.

Finalizaremos este capítulo y esta Memoria, demostrando cuándo la clase de los módulos G_C -planos es covering en $R\text{-Mod}$. Gracias a la relación de estos módulos con los G_C -proyectivos, terminaremos viendo condiciones para que los módulos G_C -proyectivos están contenidos en los módulos G_C -planos, y finalmente, descubriremos condiciones con las que los módulos G_C -proyectivos son precovering en $R\text{-Mod}$.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

El ámbito en el que se desarrollará la primera parte de esta memoria es el de las categorías abelianas con suficientes inyectivos, en muchas ocasiones, cuando nos refiramos a una categoría, no indicaremos que supondremos que es abeliana con suficientes inyectivos. Mención aparte requieren las subcategorías. Haremos un uso sistemático de subcategorías de estas categorías abelianas, pero por supuesto no necesitarán ser abelianas también. Sin embargo, supondremos que verifican unas condiciones aparte de las que se especifiquen en cada enunciado, y que serán: la subcategoría será siempre plena, cerrada para isomorfismos y contendrá al objeto cero.

Cuando nos centremos en las categorías de módulos, R será un anillo (no necesariamente conmutativo) asociativo con identidad, y todos los módulos serán, salvo que se especifique otra cosa, R -módulos a izquierda. Notaremos por M_R a los R -módulos a derecha, por ${}_R M$ a los R -módulos a izquierda y por ${}_R M_S$ a los (R, S) -bimódulos. La categoría de todos los R -módulos a izquierda (derecha) la denotaremos por $R\text{-Mod}$ ($\text{Mod-}R$).

Para un R -módulo C usaremos $\text{Add}_R(C)$ (resp. $\text{add}_R(C)$) para denotar la clase de todos los R -módulos que son isomorfos a sumandos directos de sumas directas (resp. sumas directas finitas) de copias de C , y $\text{Prod}_R(C)$ denotará la clase de R -módulos que son isomorfos a sumandos directos de productos directos de copias de C . Denotaremos por $\text{Gen}_R(C)$ a la clase de R -módulos a izquierda generada por C , es decir, módulos isomorfos a cocientes de módulos

en $\text{Add}_R(C)$ y por $\text{Cogen}_R(C)$ la clase de R -módulos que es cogenerada por C , es decir, módulos isomorfos a submódulos en $\text{Prod}_R(C)$.

Notamos por $\sigma_R[C]$ a la clase de R -módulos a izquierda subgenerados por C , es decir, isomorfos a submódulos de cocientes de sumas directas de copias de C . Dualmente, será $\pi_R[C]$ la clase de R -módulos a izquierda que son cocientes de submódulos de productos directos de copias de C (véase [41]). Entonces podemos ver que $\text{Gen}_R(C) \subseteq \sigma_R[C] \cap \pi_R[C]$ y que $\text{Cogen}_R(C) \subseteq \pi_R[C]$.

Un R -módulo inyectivo E es un cogenerador inyectivo si para todo R -módulo M y todo elemento $x \in M$ con $x \neq 0$, existe $f \in \text{Hom}_R(M, E)$ tal que $f(x) \neq 0$.

Esto es equivalente a la condición $\text{Hom}_R(M, E) \neq 0$ para cualquier módulo $M \neq 0$.

El grupo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es un cogenerador inyectivo para grupos abelianos. De esta forma si M es un R -módulo a derecha no nulo entonces el módulo de caracteres M^+ de M ($M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$) es un R -módulo a izquierda no nulo. Además sabemos que R^+ es un cogenerador inyectivo para $R\text{-Mod}$.

A partir de ahora C será un R -módulo a izquierda con anillo de endomorfismos $S = \text{End}_R(C)$. De esta forma C es un (R, S) -bimódulo. Sea E un cogenerador inyectivo en $R\text{-Mod}$, definimos el S -módulo a izquierda C^\vee como $C^\vee = \text{Hom}_R(C, E)$.

Se notará por $\text{Proj}(R)$, $\text{Inj}(R)$ y $\text{Flat}(R)$ a las clases de todos los R -módulos proyectivos, inyectivos y planos respectivamente.

Muchos de los resultados que aparecen en este capítulo son ampliamente conocidos, tanto su enunciado como su demostración. Esto significa que pueden ser encontrados fácilmente en la literatura (de hecho aparecen en cualquier libro que trate la homología en el ámbito categórico, y de estos libros hay suficientes referencias en la bibliografía que aparece al final de este trabajo, por ejemplo [18] o [37]) y que además no es fácil determinar dónde exactamente aparecieron por primera vez. Por tanto, escribimos la demostración de alguno de estos resultados cuando sean significativamente interesantes o den alguna idea clave para nuestro posterior desarrollo de la teoría, en estos casos, no daremos referencias explícitas. Sí las daremos en los casos en que las demostraciones no sean incluidas.

2.1 — Algunas generalidades sobre complejos y homología

Comenzamos recordando el concepto de complejo en una categoría abeliana y por los grupos de homología asociados a dicho complejo.

Definición 2.1.1 Dada una categoría abeliana \mathcal{A} , un complejo sobre \mathcal{A} es una sucesión de objetos y morfismos

$$\mathcal{M} : \cdots \rightarrow M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} M_{-1} \rightarrow \cdots$$

de forma que cualquier composición de dos morfismos consecutivos es cero. Es decir, la imagen de cualquier morfismo es siempre un subobjeto del núcleo del siguiente, dicho de otro modo, siempre hay un monomorfismo $\text{Im } \delta_i \hookrightarrow \text{Ker } \delta_{i-1}$. A los núcleos del morfismo δ_n se les suele llamar ciclos, $\text{Ker } \delta_n = Z_n(\mathcal{M})$, y a las imágenes bordes, $\text{Im } \delta_{n+1} = B_n(\mathcal{M})$.

Un morfismo entre dos complejos

$$\cdots \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow M_{-1} \rightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \rightarrow N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N_0 \rightarrow N_{-1} \rightarrow \cdots$$

es una sucesión de morfismos en \mathcal{A} , $M_i \rightarrow N_i$, de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M_{-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_0 & \longrightarrow & N_{-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

es conmutativo.

Es conocido que la clase formada por los complejos construidos sobre una categoría abeliana \mathcal{A} y sus morfismos forman también una categoría abeliana. A la categoría formada por los complejos sobre \mathcal{A} la denotamos por $C(\mathcal{A})$.

Definición 2.1.2 Dado un complejo en una categoría abeliana \mathcal{A}

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} M_{-1} \rightarrow \cdots$$

se define el n -ésimo objeto de homología de \mathcal{C} como

$$H_n(\mathcal{C}) = \text{Coker}(\text{Im } \delta_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \delta_n).$$

Dado que $\text{Im } \delta_{n+1} \rightarrow \text{Ker } \delta_n$ es un monomorfismo, denotaremos al conúcleo anterior como

$$H_n(\mathcal{C}) = \text{Ker } \delta_n / \text{Im } \delta_{n+1} = Z_n(\mathcal{C}) / B_n(\mathcal{C}).$$

Intuitivamente la homología de un complejo proporciona en cierto sentido una medida de lo que le falta al complejo para ser exacto en ese término. Además, es conocido que si dos complejos están relacionados con un morfismo de complejos entonces los grupos de homología también se relacionan por un morfismo, es decir, si

$$\mathcal{M} : \cdots \rightarrow M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} M_{-1} \rightarrow \cdots$$

y

$$\mathcal{N} : \cdots \rightarrow N_2 \xrightarrow{\delta'_2} N_1 \xrightarrow{\delta'_1} N_0 \xrightarrow{\delta'_0} N_{-1} \rightarrow \cdots$$

son dos complejos y $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un morfismo de complejos,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{i+1} & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & M_i & \xrightarrow{\delta_i} & M_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \alpha_{i+1} \downarrow & & \alpha_i \downarrow & & \alpha_{i-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & N_{i+1} & \xrightarrow{\delta'_{i+1}} & N_i & \xrightarrow{\delta'_i} & N_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

entonces existe un único morfismo $H_i(\alpha) : H_i(\mathcal{M}) \rightarrow H_i(\mathcal{N})$.

Se puede comprobar que estos morfismos entre las homologías tienen carácter funtorial, es decir, dados α, β dos morfismos de complejos, se cumple que $H_i(\alpha\beta) = H_i(\alpha)H_i(\beta) \forall i$, y $H_i(id) = id \forall i$. Además, los funtores H_i son aditivos, es decir, $H_i(f + g) = H_i(f) + H_i(g) \forall i$.

Por otro lado, también es conocido que existe una forma de caracterizar los morfismos de complejos que hacen que los morfismos inducidos por éstos en los grupos de homología no varíen. Hablamos relación de homotopía.

Definición 2.1.3 Sean

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\delta_0} C_{-1} \rightarrow \cdots$$

y

$$\mathcal{C}' : \cdots \rightarrow C'_2 \xrightarrow{\delta'_2} C'_1 \xrightarrow{\delta'_1} C'_0 \xrightarrow{\delta'_0} C'_{-1} \rightarrow \cdots$$

dos complejos y sean $\alpha, \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ dos morfismos de complejos, los morfismos α y β son homotópicos si existen unos morfismos $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ tales que $\alpha_n - \beta_n = \delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n \forall n \in \mathbb{Z}$.

La demostración de este hecho, así como la existencia de los morfismos de conexión que generan la sucesión exacta larga de homología y otros muchos resultados, también ampliamente conocidos, se pueden consultar en cualquier manual de Álgebra Homológica, por ejemplo [18], [34] o [45].

Para acabar esta sección veamos la definición del funtor derivado del funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$, es decir, la definición de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, -)$. Hay varias definiciones para este funtor, utilizaremos la definición que utiliza los objetos inyectivos, puesto que suponemos que la categoría \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos.

Dado un objeto Y podemos considerar una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{s_0} I_0 \xrightarrow{s_1} I_1 \xrightarrow{s_2} I_2 \rightarrow \dots$$

donde los I_i son objetos inyectivos en \mathcal{A} . Si consideramos el complejo que queda al quitar el primer morfismo

$$0 \rightarrow I_0 \xrightarrow{s_1} I_1 \xrightarrow{s_2} I_2 \rightarrow \dots,$$

y aplicamos el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$, nos queda el complejo

$$\mathcal{C} : 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I_2) \rightarrow \dots$$

Entonces, se define

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) = H_n(\mathcal{C}).$$

2.2 — \mathcal{X} -Resoluciones, \mathcal{X} -(pre)cubiertas y \mathcal{X} -(pre)envolventes

Antes de comenzar, recordemos la definición de las categorías ortogonales, que utilizaremos en algunas definiciones.

Definición 2.2.1 Dada una categoría abeliana \mathcal{A} y una subcategoría \mathcal{X} de \mathcal{A} , llamamos subcategoría 1-ortogonal a derecha (izquierda) de \mathcal{X} a la subcategoría que forman los objetos Z de \mathcal{A} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Z) = 0$ ($\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Z, X) = 0$) para todo objeto X de \mathcal{X} . A esta subcategoría la notaremos por \mathcal{X}^{\perp_1} (${}^{\perp_1}\mathcal{X}$).

Llamamos subcategoría ortogonal a derecha (a izquierda) de \mathcal{X} , y la notamos por \mathcal{X}^{\perp} (${}^{\perp}\mathcal{X}$), a la subcategoría plena formada por todos los objetos Z de \mathcal{A} tales que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Z) = 0$ ($\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Z, X) = 0$) para todo $i > 0$ y todo X de \mathcal{X} .

Si $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, X') = 0$ para todo X, X' de \mathcal{X} y todo $i > 0$ entonces diremos que \mathcal{X} es auto-ortogonal.

Observemos que si \mathcal{X} e \mathcal{Y} son dos subcategorías de \mathcal{A} tales que $\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$, entonces $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\geq 1}(X, Y) = 0 \forall X \in \mathcal{X}, \forall Y \in \mathcal{Y}$, es decir, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$. Por tanto las condiciones $\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^{\perp}$ son equivalentes.

El uso de las resoluciones proyectivas e inyectivas, y la razón por la que éstas son útiles es que hacen que se verifique el Teorema de Comparación, fue una de las herramientas que utilizaron Cartan y Eilenbergh para el desarrollo de la teoría de (co)homología en las categorías de módulos. En nuestras categorías, en general, no tenemos estas herramientas. Por tanto se hace necesario encontrar una generalización de estos objetos proyectivos e inyectivos, por supuesto, con menos propiedades. El primero en observar este hecho y en dar generalizar este concepto fue Edgar Enochs en 1981 ([12]). Hablamos de las \mathcal{X} -resoluciones.

Definición 2.2.2 Dada una categoría abeliana \mathcal{A} y una subcategoría \mathcal{X} de \mathcal{A} , diremos que un complejo

$$\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow A_{-1} \rightarrow \cdots$$

en \mathcal{A} es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacto ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exacto) si para todo $X \in \mathcal{X}$ el complejo

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A_{-1}) \rightarrow \cdots$$

$$(\cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_{-1}, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, X) \rightarrow \cdots)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Dado un objeto X de una subcategoría \mathcal{X} , el hecho de que la sucesión $X \rightarrow A \rightarrow 0$ sea $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta significa, ni más ni menos, que $X \rightarrow A$ es una \mathcal{X} -precubierta en el sentido de Enochs ([12]). Las precubiertas son construcciones que emulan, como veremos a continuación, en cierto sentido las propiedades que tienen los proyectivos, que son tan escasos en ciertos ámbitos categóricos. El concepto dual al de precubierta es el de preenvolvente, que hace lo mismo con respecto a los objetos inyectivos.

Además, existen también las cubiertas y las envolventes (también aparecieron en [12]), que son precubiertas y preenvolventes con una propiedad adicional. Estos conceptos generalizan a los de cubierta proyectiva y envolvente inyectiva en la homología clásica en la categoría de módulos.

Veamos la definición de estos conceptos de los que estamos hablando.

Definición 2.2.3 Sean una categoría abeliana \mathcal{A} , una subcategoría \mathcal{X} de \mathcal{A} y A un objeto de \mathcal{A} . Una \mathcal{X} -precubierta de A es un morfismo $f : X \rightarrow A$ con X un objeto de \mathcal{X} , tal que la sucesión $X \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Es decir, para todo objeto X' de \mathcal{X} y todo morfismo $X' \rightarrow A$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X' \\ & \swarrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

se puede completar de manera conmutativa.

Diremos que $f : X \rightarrow A$ es \mathcal{X} -precubierta especial de A si f es una \mathcal{X} -precubierta, es epimorfismo y $\text{Ker } f \in \mathcal{X}^{\perp_1}$ para todo $X' \in \mathcal{X}$.

Si $f : X \rightarrow A$ es una \mathcal{X} -precubierta de A y además verifica que para

cualquier morfismo que complete conmutativamente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

es un automorfismo, entonces diremos que f es un \mathcal{X} -cubierta.

De forma dual tenemos los conceptos de preenvolvente, preenvolvente especial y envolvente.

Definición 2.2.4 Sean \mathcal{A} un categoría abeliana y \mathcal{X} una subcategoría de \mathcal{A} . Dado un objeto A de \mathcal{A} , una \mathcal{X} -preenvolvente de A es un morfismo $f : A \rightarrow X$ con X en \mathcal{X} , tal que la sucesión $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} X$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exacta, es decir, el siguiente diagrama se puede completar de forma conmutativa

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \swarrow \\ X' & & \end{array}$$

para cualquier objeto X' de \mathcal{X} y cualquier morfismo $A \rightarrow X'$.

Diremos que una \mathcal{X} -preenvolvente de A , $f : A \rightarrow X$, es especial si es monomorfismo y $\text{Coker } f \in {}^{\perp_1} \mathcal{X}$ para todo $X' \in \mathcal{X}$.

Una X -preenvolvente f es una \mathcal{X} -envolvente si además cualquier morfismo que complete el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow f & & \swarrow \\ X & & \end{array}$$

conmutativamente es un automorfismo.

Si un objeto A de \mathcal{A} posee una \mathcal{X} -precubierta $f_0 : X_0 \rightarrow A$ y llamamos $K_0 = \text{Ker } f_0$ entonces la sucesión

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Si también K_0 posee una \mathcal{X} -precubierta $f_1 : X_1 \rightarrow K_0$ y llamamos $K_1 = \text{Ker } f_1$, obtenemos otra sucesión $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow X_1 \rightarrow K_0 \rightarrow 0.$$

Pegando ambas sucesiones obtenemos otra sucesión $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0.$$

Si este proceso se pudiera continuar (si todos los núcleos nuevos tuvieran \mathcal{X} -precubiertas) obtendríamos una sucesión

$$\cdots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

que sería $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta (no necesariamente exacta, salvo que las \mathcal{X} -precubiertas fueran epimorfismos).

Por supuesto, si en lugar de construir precubiertas tomamos preenvolventes, obtenemos sucesiones $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas que van hacia la derecha. Estamos hablando de las (co)resoluciones.

Definición 2.2.5 Sea \mathcal{X} una subcategoría de una categoría abeliana \mathcal{A} y sea A un objeto de \mathcal{A} . Una \mathcal{X} -resolución de A es un complejo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacto

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

(no necesariamente exacto) donde $X_i \in \mathcal{X}$. Cuando el complejo sea exacto diremos que es una \mathcal{X} -resolución exacta de A .

Una \mathcal{X} -corresolución de A es un complejo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exacto

$$0 \rightarrow A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots$$

(no necesariamente exacto) donde $X^i \in \mathcal{X}$. Si el complejo es exacto, diremos que es una \mathcal{X} -corresolución exacta de A .

El complejo que se obtiene eliminando el último (primer) término de una resolución (corresolución) se llama complejo reducido de A . Es decir, el complejo reducido de la \mathcal{X} -resolución de A es

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow 0,$$

y el complejo reducido de la \mathcal{X} -corresolución de A es

$$0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots$$

La subcategoría plena formada por todos los objetos de \mathcal{A} que admitan \mathcal{X} -resoluciones (\mathcal{X} -corresoluciones) la llamaremos $\text{res}(\mathcal{X})$ ($\text{cores}(\mathcal{X})$). En el caso de la subcategoría plena formada por todos los objetos de \mathcal{A} que admitan \mathcal{X} -resoluciones exactas (\mathcal{X} -corresoluciones exactas), la notaremos por $\widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ ($\widehat{\text{cores}}(\mathcal{X})$).

En algunas ocasiones también hablaremos del concepto de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa, cuando \mathcal{X} e \mathcal{Y} son subcategorías:

Definición 2.2.6 Dadas dos subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} de una categoría abeliana \mathcal{A} , una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa de un objeto M es una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots$$

con $X_i \in \mathcal{X}$, $Y_i \in \mathcal{Y}$ para todo i y $M = \text{Im}(X_0 \rightarrow Y_0)$.

Una \mathcal{X} -resolución completa de M es aquella en la que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, es decir, una $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -resolución completa de M .

Recordemos ahora la versión que utilizaremos del lema de la herradura. Además, en su demostración podremos ver la principales herramientas utilizadas en el ámbito categórico.

Lema 2.2.7 — [Lema de la Herradura.] *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y sea \mathcal{X} una subcategoría de \mathcal{A} cerrada bajo sumas directas finitas. Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta donde M' y M'' tienen \mathcal{X} -resoluciones (exactas), entonces M tiene una \mathcal{X} -resolución (exacta).*

Si además las \mathcal{X} -resoluciones exactas de M' y M'' son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas, donde \mathcal{Y} es una subcategoría de \mathcal{A} , entonces la \mathcal{X} -resolución exacta de M es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta.

Demostración. Veamos el caso en el que las \mathcal{X} -resoluciones son exactas pues el otro caso lo podemos encontrar en [18, Lemma 8.2.1].

Como M' y M'' admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas entonces existen las sucesiones exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas

$$\cdots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0$$

$$\cdots \rightarrow X_1'' \rightarrow X_0'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

con $X_i', X_i'' \in \mathcal{X}$. Considerando $K_{i-1}' = \text{Im}(X_i' \rightarrow X_{i-1}')$ y $K_{i-1}'' = \text{Im}(X_i'' \rightarrow X_{i-1}'')$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0' & & K_0'' & & \\
 & & \downarrow \alpha_0' & & \downarrow \alpha_0'' & & \\
 & & X_0' & & X_0'' & & \\
 & & \downarrow d_0' & & \downarrow d_0'' & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

(A dashed arrow labeled λ points from M to X_0'' in the original diagram.)

donde existe λ de forma que $g\lambda = d_0''$ porque la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta.

Consideramos entonces la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow X_0' \xrightarrow{\iota_1} X_0' \oplus X_0'' \xrightarrow{\pi_2} X_0'' \rightarrow 0$$

y, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $d_0 : X_0' \oplus X_0'' \rightarrow M$ tal que $d_0\iota_1 = fd_0'$ y $d_0\iota_2 = \lambda$. Pero como $i_1\pi_1 + i_2\pi_2 = id$ vemos que

$$gd_0 = gd_0(i_1\pi_1 + i_2\pi_2) = gd_0i_1\pi_1 + gd_0i_2\pi_2 = gfd_0'\pi_1 + gd_0i_2\pi_2 = gd_0i_2\pi_2.$$

Por tanto $gd_0 = gd_0i_2\pi_2 = g\lambda\pi_2 = d''_0\pi_2$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K'_0 & & K''_0 & & \\
 & & \downarrow \alpha'_0 & & \downarrow \alpha''_0 & & \\
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \xrightarrow{\iota_1} & X'_0 \oplus X''_0 & \xrightarrow{\pi_2} & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_0 & & \downarrow d_0 & & \downarrow d''_0 \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

es conmutativo.

Además, por ser \mathcal{X} es cerrada bajo sumas directas finitas, sabemos que $X'_0 \oplus X''_0 \in \mathcal{X}$.

Ahora llamamos $K_0 = \text{Ker } d_0$ y $C = \text{Coker } d_0$ y consideramos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K'_0 & & K_0 & & K''_0 \\
 & & \downarrow \alpha'_0 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha''_0 \\
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \xrightarrow{\iota_1} & X'_0 \oplus X''_0 & \xrightarrow{\pi_2} & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_0 & & \downarrow d_0 & & \downarrow d''_0 \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & C & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Aplicando ahora el lema de la serpiente, tenemos que $C = 0$ y que el siguiente

diagrama es conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & (2.1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & K'_0 & \xrightarrow{f_0} & K_0 & \xrightarrow{g_0} & K''_0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \alpha'_0 \downarrow & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha''_0 & & & & \\
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \xrightarrow{\iota_1} & X'_0 \oplus X''_0 & \xrightarrow{\pi_2} & X''_0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & d'_0 \downarrow & & \downarrow d_0 & & \downarrow d''_0 & & & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Veamos que

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow X'_0 \oplus X''_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow K'_0 \rightarrow K_0 \rightarrow K''_0 \rightarrow 0$$

son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas. Para ello, como las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow K'_0 \rightarrow X'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow K''_0 \rightarrow X''_0 \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow X'_0 \rightarrow X'_0 \oplus X''_0 \rightarrow X''_0 \rightarrow 0$$

son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas (ésta última por ser escindida), dado un $X \in \mathcal{X}$ aplicamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ al diagrama anterior y tenemos el siguiente diagrama

conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K'_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K''_0) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'_0 \oplus X''_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X''_0) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Aplicando otra vez el lema de la serpiente tenemos que los morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, K''_0)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X'_0 \oplus X''_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M)$ son epimorfismos como queríamos.

Veamos que $0 \rightarrow K_0 \rightarrow X'_0 \oplus X''_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta (suponiendo que $0 \rightarrow K''_0 \rightarrow X''_0 \rightarrow M'' \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow X'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0$ lo son).

Sea $Y \in \mathcal{Y}$ y apliquemos el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ al diagrama 2.1:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', Y) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X''_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X'_0 \oplus X''_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X'_0, Y) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K''_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K_0, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K'_0, Y) \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Aplicando una vez más el lema de la serpiente, se obtiene que los morfismos

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', Y)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X'_0 \oplus X''_0, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K_0, Y)$ son epimorfismos, y por tanto $0 \rightarrow K_0 \rightarrow X'_0 \oplus X''_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta.

Como la sucesión $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow K_0 \rightarrow K''_0 \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ exacta y K'_0, K''_0 tienen \mathcal{X} -resoluciones exactas (y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas) podemos repetir el argumento e ir construyendo la \mathcal{X} -resolución exacta (y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta) de M . ■

También se verifica el dual del lema de la herradura y su demostración no requiere ninguna técnica distinta. Lo enunciamos sin dar su prueba.

Lema 2.2.8 *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y sea \mathcal{X} una subcategoría de \mathcal{A} cerrada bajo sumas directas finitas. Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exacta donde M' y M'' tienen \mathcal{X} -corresoluciones (exactas), entonces M tiene una \mathcal{X} -corresolución (exacta).*

Si además las \mathcal{X} -corresoluciones exactas de M' y M'' son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}, -)$ -exactas, donde \mathcal{Y} es una subcategoría de \mathcal{A} , entonces la \mathcal{X} -corresolución exacta de M es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}, -)$ -exacta.

Antes de acabar esta sección, veamos algunos conceptos en la categoría de R -módulos que, además, necesitaremos en el desarrollo del Capítulo 4: las clases Kaplansky y las teorías de cotorsión.

Definición 2.2.9 Una clase \mathcal{F} de R -módulos es Kaplansky si existe un cardinal \aleph tal que para todo $M \in \mathcal{F}$ y todo $x \in M$, existe un submódulo F de M conteniendo a x tal que $F, M/F \in \mathcal{F}$ y $\text{Card } F \leq \aleph$.

Definición 2.2.10 Dadas dos clases de R -módulos a izquierda \mathcal{C} y \mathcal{D} , el par $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una teoría de cotorsión si $\mathcal{C}^{\perp 1} = \mathcal{D}$ y ${}^{\perp 1}\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Esta teoría de cotorsión se dice:

- Cogenerada por un conjunto, si existe un conjunto X tal que $X^{\perp 1} = \mathcal{D}$.
- Completa si cualquier R -módulo tiene una \mathcal{D} -preenvolvente especial (o equivalentemente, cualquier R -módulo tiene una \mathcal{C} -precubierta especial).
- Perfecta si cualquier R -módulo tiene una \mathcal{C} -cubierta y una \mathcal{D} -envolvente.

- Hereditaria si $\mathcal{C}^{\perp 1} = \mathcal{C}^{\perp}$ ([25, Definition 1.2.10]).

Definición 2.2.11 ([18, Definition 7.1.5])

Una teoría de cotorsión $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ tiene suficientes inyectivos si para todo R -módulo M existe una sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow 0$ con $D \in \mathcal{D}$ y $C \in \mathcal{C}$. Diremos que $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ tiene suficientes proyectivos si para todo M existe una sucesión exacta $0 \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow 0$ con $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$.

Notemos que si $0 \rightarrow D \rightarrow C \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$ es como en la definición, entonces α es una \mathcal{C} -precubierta especial. Ya que para todo $C' \in \mathcal{C}$ tenemos $\text{Hom}_R(C', C) \rightarrow \text{Hom}_R(C', M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C', D) = 0$, luego α es una \mathcal{C} -precubierta, y como $\text{Ker } \alpha = D \in \mathcal{D} = \mathcal{C}^{\perp 1}$, es especial. De forma similar, si $0 \rightarrow M \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow 0$ es como en la definición entonces $M \rightarrow D$ es una \mathcal{D} -preenvolvente especial.

2.3 — Lemas sobre diagramas en categorías abelianas

Dedicamos esta sección a presentar una serie de resultados técnicos que usaremos más adelante en esta memoria. Todos son conocidos en la categoría de R -Mod, pero no todos se encuentran con su demostración en una categoría abeliana.

Los primeros resultados que veremos hacen en parte referencia a las propiedades de los pushouts y de los pullbacks que permiten la construcción de unos diagramas conmutativos con filas y columnas exactas. En realidad hacen referencia en parte a estas conocidas propiedades pero nosotros probaremos además que si las sucesiones de partida son Hom-exactas entonces las filas y columnas resultantes en el diagrama conmutativo también lo son, hecho que utilizaremos en numerosas ocasiones en nuestro trabajo. No conocemos que esta última parte haya sido comentada en la literatura con anterioridad y por eso damos la demostración completa de los resultados.

Lema 2.3.1 *Sean las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ en una categoría abeliana \mathcal{A} . Entonces, tomando $F \in \text{Ob}(\mathcal{A})$*

el pushout de $B \rightarrow C$ y $B \rightarrow D$, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & D & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & E & \xlongequal{\quad} & E \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array} \tag{2.2}$$

Además, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas) entonces todas las filas y columnas del diagrama son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas).

Demostración. Dadas las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow B \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$ en \mathcal{A} , tomamos el pushout de g y α , (F, κ_1, κ_2) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa_1 \\
 & & & & D & \xrightarrow{\kappa_2} & F \\
 & & & & \downarrow \beta & & \\
 & & & & E & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

De las propiedades del pushout (véase por ejemplo [39, Proposition 5.1]) tenemos que como α es monomorfismo entonces κ_1 es monomorfismo, que

como g es epimorfismo entonces κ_2 es epimorfismo y que como g es el conúcleo de f , entonces κ_2 es el conúcleo de αf .

Si tomamos ahora el morfismo $0 : C \rightarrow E$, tenemos que $0 = 0g = \beta\alpha$ y entonces existe una única $\lambda : F \rightarrow E$ tal que $\lambda\kappa_1 = 0$ y $\lambda\kappa_2 = \beta$, es decir,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa_1 \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha f} & D & \xrightarrow{\kappa_2} & F \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow \beta & & \downarrow \lambda \\
 & & & & E & = & E \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo con las dos filas y la columna central exactas. Además, como $\beta = \lambda\kappa_2$ es un epimorfismo entonces λ es epimorfismo.

Veamos que λ es el conúcleo de κ_1 .

Si $\phi : F \rightarrow G$ es tal que $\phi\kappa_1 = 0$ entonces $\phi\kappa_1g = \phi\kappa_2\alpha = 0$, con lo cual (ya que β es el conúcleo de α) existe un $\varphi : E \rightarrow G$ tal que $\phi\kappa_2 = \varphi\beta = \varphi\lambda\kappa_2$, luego $\phi = \varphi\lambda$ por ser κ_2 epimorfismo. Si existiera otro $\psi : E \rightarrow G$ tal que $\phi = \psi\lambda$, entonces como $\psi\lambda = \varphi\lambda$, y por ser λ epimorfismo, se tiene $\psi = \varphi$. Es decir, $\lambda = \text{Coker}(\kappa_1)$.

Ahora, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas, tomamos $X \in \mathcal{X}$ y aplicamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ al diagrama (2.2), y nos queda

el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, X) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, X) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(D, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(D, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ es un epimorfismo porque es composición de epimorfismos, y aplicando el Lema de la Serpiente se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(F, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X)$ tiene conúcleo cero, es decir, es epimorfismo.

Por último, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$$

son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas, tomamos $X \in \mathcal{X}$ y aplicamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ al diagrama (2.2), y nos queda el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \kappa_{1*} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & \xrightarrow{(\alpha f)_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, D) & \xrightarrow{\kappa_{2*}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) \\
 & & & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \lambda_* \\
 & & & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

en el que, dado un morfismo $h : L \rightarrow M$, notamos por h_* al morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, h) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M)$ para simplificar. Ahora, como $\beta_* = \lambda_* \kappa_{2*}$ es epimorfismo entonces λ_* es epimorfismo. Para ver que κ_{2*} es epimorfismo tomamos C' el conúcleo de κ_{2*} y aplicamos el Lema de la Serpiente al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, D) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & C' & &
 \end{array}$$

Obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow C' \rightarrow 0$$

que demuestra que $C' = 0$ y por tanto que κ_{2*} es un epimorfismo. ■

Lema 2.3.2 Sean $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ sucesiones exactas en una categoría abeliana \mathcal{A} . Tomando F el pushout de $A \rightarrow B$ y $A \rightarrow D$, entonces se puede construir el siguiente diagrama

conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & F & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & E & \xlongequal{\quad} & E & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{2.3}$$

Además, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas), entonces todas las filas y columnas del diagrama son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas).

Demostración. Consideremos las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$ en \mathcal{A} y tomamos el pushout de f y α , (F, κ_1, κ_2) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa_1 & & \\
 & & D & \xrightarrow{\kappa_2} & F & & \\
 & & \downarrow \beta & & & & \\
 & & E & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

De las propiedades del pushout, como f es monomorfismo entonces κ_2 es monomorfismo y como α es monomorfismo entonces κ_1 es monomorfismo (véase [39, Proposition 5.1]). Ahora tomamos $0 : D \rightarrow C$ y como $0 = 0\alpha = gf$ entonces existe una única $\lambda : F \rightarrow C$ tal que $\lambda\kappa_2 = 0$ y $\lambda\kappa_1 = g$. De la misma

forma tomamos $0 : B \rightarrow E$ y como $0f = \beta\alpha$ existe una única $\nu : F \rightarrow E$ tal que $\nu\kappa_1 = 0$ y $\nu\kappa_2 = \beta$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa_1 & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\kappa_2} & F & \xrightarrow{\lambda} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \nu & & \\
 & & E & \xlongequal{\quad} & E & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{2.4}$$

Como $g = \lambda\kappa_1$ es epimorfismo entonces λ es epimorfismo y como $\beta = \nu\kappa_2$ es epimorfismo entonces ν es epimorfismo. Sólo resta demostrar que ν es el conúcleo de κ_1 y que λ es el conúcleo de κ_2 . Ambas demostraciones se hacen de la misma forma por lo que solo haremos la prueba de la primera afirmación. Para ello sea $\mu : F \rightarrow L$ tal que $\mu\kappa_1 = 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & & \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\kappa_2} & F & & \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \nu & & \\
 & & E & \xlongequal{\quad} & E & & L \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Tenemos pues que $0 = \mu\kappa_1 f = \mu\kappa_2 \alpha$ y por tanto que existe un único $\varphi : E \rightarrow L$ tal que $\varphi\beta = \mu\kappa_2$ ya que $\beta = \text{Coker } \alpha$.

Por otro lado observamos que $\varphi\beta\alpha = 0 = 0f$, así que, por las propiedades del pushout, existe un único $\phi : F \rightarrow L$ tal que $\varphi\beta = \phi\kappa_2$ y $0 = \phi\kappa_1$. Pero

$\varphi\nu : F \rightarrow L$ y $\mu : F \rightarrow L$ son dos morfismos que, al igual que ϕ , verifican que:

$$\begin{cases} \varphi\nu\kappa_2 = \varphi\beta \\ \varphi\nu\kappa_1 = 0 \end{cases} \quad \text{y que} \quad \begin{cases} \mu\kappa_2 = \varphi\beta \\ \mu\kappa_1 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, la unicidad de ϕ garantiza que $\phi = \varphi\nu = \mu$.

Si existiera otro $\varphi' : E \rightarrow L$ tal que $\varphi'\nu = \mu$ entonces $\varphi'\nu\kappa_2 = \mu\kappa_2$. Pero $\varphi'\nu\kappa_2 = \varphi'\beta$, así que tendríamos que $\varphi'\beta = \mu\kappa_2$, y por tanto que $\varphi' = \varphi$ porque φ era el único morfismo tal que $\varphi\beta = \mu\kappa_2$. Deducimos pues que $\nu = \text{Coker } \kappa_1$.

Supongamos ahora que \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ son también $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas, tomamos $X \in \mathcal{X}$ y aplicamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ al diagrama (2.3). Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A) & \xrightarrow{f_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, B) & \xrightarrow{g_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \kappa_{1*} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, D) & \xrightarrow{\kappa_{2*}} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, F) & \xrightarrow{\lambda_*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C) \\ & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \nu_* & & \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, E) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

en el que, dado un morfismo $h : L \rightarrow M$, notamos por h_* al morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, h) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M)$ para simplificar. Ahora, como $g_* = \lambda_*\kappa_{1*}$ es epimorfismo entonces λ_* es epimorfismo. Con el mismo razonamiento se prueba que ν_* es epimorfismo.

Por último, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} tal que las sucesiones exactas $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas, tomamos $X \in \mathcal{X}$ y aplicamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ al diagrama (2.3), obtenemos el

siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & 0 \\
 & & & \downarrow & & & \downarrow \\
 & & & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, X) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, X) & \\
 & & & \downarrow \nu^* & & \downarrow \beta^* & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) & \xrightarrow{\lambda^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F, X) & \xrightarrow{\kappa_2^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(D, X) \\
 & & \parallel & & \downarrow \kappa_1^* & & \downarrow \alpha^* \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

en el que, dado un morfismo $h : L \rightarrow M$, notamos por h^* al morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(h, X) : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, X)$ para simplificar. Veamos que κ_1^* es epimorfismo (que κ_2^* es epimorfismo se comprueba de la misma forma). Si $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X)$ entonces $f^*(h) = hf \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$. Como α^* es epimorfismo existe $m \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(D, X)$ tal que $\alpha^*(m) = m\alpha = hf$, y como F es el pushout de α y f existe un único $\mu : F \rightarrow X$ ($\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F, X)$) tal que $\mu\kappa_1 = h$ y $\mu\kappa_2 = m$. En definitiva tenemos que existe $\mu \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F, X)$ tal que $\kappa_1^*(\mu) = h$, es decir, κ_1^* es un epimorfismo. ■

Los resultados duales, los relativos a los pullbacks, se demuestran de forma análoga. Son los siguientes.

Lema 2.3.3 *Dadas las sucesiones exactas*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$$

en una categoría abeliana \mathcal{A} , entonces tomando el pullback F de $A \rightarrow B$ y $E \rightarrow B$ se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y

columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & D & \longleftarrow & D & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Además, si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas) para una subcategoría \mathcal{X} de \mathcal{A} , entonces todas las filas y columnas del diagrama son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas).

Lema 2.3.4 Sean $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ sucesiones exactas en una categoría abeliana \mathcal{A} . Entonces tomando el pullback F de $B \rightarrow C$ y $E \rightarrow C$ se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & D & \longleftarrow & D & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Además, si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas) para una subcategoría \mathcal{X} de

\mathcal{A} , entonces todas las filas y columnas del diagrama son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X})$ -exactas).

Sigamos con los siguientes lemas que nos ayudarán a construir lo que llamaremos *mapping cone* asociado a un morfismo de complejos.

Lema 2.3.5 *Supongamos que el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{A} : & \cdots \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
 \mathbf{B} : & \cdots \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d'_n} & B_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow g_{n+1} & & \downarrow g_n & & \downarrow g_{n-1} \\
 \mathbf{C} : & \cdots \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d''_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d''_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

es conmutativo, sus columnas son exactas y las filas son complejos. Si los complejos \mathbf{A} y \mathbf{C} son exactos entonces \mathbf{B} también es exacto.

Demostración. Sean

$$A_n \xrightarrow{u_n} K_n \xrightarrow{v_n} A_{n-1}$$

y

$$C_n \xrightarrow{u'_n} M_n \xrightarrow{v'_n} C_{n-1}$$

las descomposiciones épico-mónicas de los morfismos d_n y d''_n respectivamente, y $u'_n : B_n \rightarrow L_n$ el conúcleo de d'_{n+1} . Como $d'_n d'_{n+1} = 0$ entonces existe un único morfismo $v'_n : L_n \rightarrow B_{n-1}$ tal que $v'_n u'_n = d'_n$. Además, como $0 = d'_{n-1} d'_n = d'_{n-1} v'_n u'_n$ y u'_n es epimorfismo se tiene que $d'_{n-1} v'_n = 0$. Es

decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & A_{n+1} & \rightarrow & A_n & \rightarrow & A_{n-1} & \rightarrow & A_{n-2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & \searrow^{u_n} & & \nearrow_{v_n} & & & \\
 \cdots & \rightarrow & B_{n+1} & \rightarrow & B_n & \rightarrow & B_{n-1} & \rightarrow & B_{n-2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & \searrow^{u'_n} & & \nearrow_{v'_n} & & & \\
 \cdots & \rightarrow & C_{n+1} & \rightarrow & C_n & \rightarrow & C_{n-1} & \rightarrow & C_{n-2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & \searrow^{u''_n} & & \nearrow_{v''_n} & & & \\
 & & & & & & M_n & & & &
 \end{array}$$

en el que $d'_{n-1}v'_n = 0$.

Si probamos que v'_n es un monomorfismo habremos terminado porque en ese caso $\text{Ker } d'_n = \text{Ker}(v'_n u'_n) = \text{Ker } u'_n = \text{Im } d'_{n+1}$.

Pero antes de probar que v'_n es un monomorfismo necesitamos hacer algunos cálculos.

Como $u'_n f_n d_{n+1} = u'_n d'_{n+1} f_{n+1} = 0$ entonces (u_n es el conúcleo de d_{n+1}) existe un único $\gamma_n : K_n \rightarrow L_n$ tal que $\gamma_n u_n = u'_n f_n$, y como $f_{n-1} d_n = d'_n f_n$ entonces $f_{n-1} v_n u_n = v'_n u'_n f_n = v'_n \gamma_n u_n$, luego $f_{n-1} v_n = v'_n \gamma_n$ (por ser u_n epimorfismo).

De la misma forma, como $u''_n g_n d'_{n+1} = u''_n d''_{n+1} g_{n+1} = 0$ entonces (u'_n es el conúcleo de d'_{n+1}) existe una única $\gamma'_n : L_n \rightarrow M_n$ tal que $\gamma'_n u'_n = u''_n g_n$, y como $g_{n-1} d'_n = d''_n g_n$ entonces $g_{n-1} v'_n u'_n = v''_n u''_n g_n = v''_n \gamma'_n u'_n$ luego $g_{n-1} v'_n = v''_n \gamma'_n$ (por ser u'_n epimorfismo).

Tenemos pues que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & A_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & K_n & & & & \\
 & & & & u_n \searrow & & \nearrow v_n & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & L_n & & & & \\
 & & & & u'_n \searrow & & \nearrow v'_n & & & & \\
 & & & & \gamma_n \searrow & & \nearrow & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & u''_n \searrow & & \nearrow v''_n & & & & \\
 & & & & & & M_n & & & &
 \end{array}$$

Además, γ'_n es un epimorfismo porque $\gamma'_n u'_n = u''_n g_n$ que es un epimorfismo, y γ_n es un monomorfismo porque $v'_n \gamma_n = f_{n-1} v_n$ que es un monomorfismo.

Veamos que γ'_n es el conúcleo de γ_n , es decir, que la sucesión

$$0 \rightarrow K_n \xrightarrow{\gamma_n} L_n \xrightarrow{\gamma'_n} M_n \rightarrow 0$$

es exacta.

Sea $\mu : L_n \rightarrow X$ tal que $\mu \gamma_n = 0$. Componiendo con u_n obtenemos que $0 = \mu \gamma_n u_n = \mu u'_n f_n$, así que como g_n es el conúcleo de f_n existe un único $\psi : C_n \rightarrow X$ tal que $\psi g_n = \mu u'_n$. Componiendo ahora con d'_{n+1} obtenemos que $\mu u'_n d'_{n+1} = 0$, luego $0 = \psi g_n d'_{n+1} = \psi d''_{n+1} g_{n+1}$, y como g_{n+1} es epimorfismo, $\psi d''_{n+1} = 0$. Entonces (como u''_n es el conúcleo de d''_{n+1}) existe un único $\lambda : M_n \rightarrow X$ tal que $\lambda u''_n = \psi$. De esta forma $\mu u'_n = \psi g_n = \lambda u''_n g_n = \lambda \gamma'_n u'_n$, y por ser u'_n epimorfismo, $\mu = \lambda \gamma'_n$.

Para probar la unicidad de λ supongamos que tenemos $\lambda' : M_n \rightarrow X$ tal que $\lambda' \gamma'_n = \mu$. Entonces $\lambda' \gamma'_n u'_n = \mu u'_n$, es decir, $\lambda' u''_n g_n = \mu u'_n$, y como ψ es el único morfismo tal que $\psi g_n = \mu u'_n$, obtenemos que $\lambda' u''_n = \psi$. Pero por la misma razón $\lambda u''_n = \psi$, así que $\lambda' u''_n = \lambda u''_n$, y como u''_n es un epimorfismo, concluimos que $\lambda = \lambda'$. Y por lo tanto que γ'_n conúcleo de γ_n .

Con todo lo que acabamos de ver obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{v_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & A_{n-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \gamma_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} \\
 & & L_n & \xrightarrow{v'_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{d'_{n-1}} & B_{n-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \gamma'_n & & \downarrow g_{n-1} & & \downarrow g_{n-2} \\
 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{v''_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d''_{n-1}} & C_{n-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

en el que todas las columnas son exactas, la primera y la tercera filas son exactas, y la segunda fila es un complejo.

Probemos, ahora sí, que v'_n es monomorfismo y, como ya explicamos antes, tendremos que la segunda fila también es exacta.

Sea $\phi : X \rightarrow L_n$ un morfismo tal que $v'_n \phi = 0$. Entonces $0 = g_{n-1} v'_n \phi = v''_n \gamma'_n \phi$, y como v''_n es monomorfismo necesariamente $\gamma'_n \phi = 0$. Ahora, γ_n es el núcleo de γ'_n así que existe un único $\varphi : X \rightarrow K_n$ tal que $\gamma_n \varphi = \phi$, y componiendo con v'_n tenemos que $0 = v'_n \phi = v'_n \gamma_n \varphi = f_{n-1} v_n \varphi$. Por ser f_{n-1} y v_n monomorfismos obtenemos que $\varphi = 0$, luego $\phi = \gamma_n \varphi = 0$. ■

Lema 2.3.6 *Sea el diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\delta_1} A_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_1 & \downarrow f_0 \\
 0 & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow B_1 \xrightarrow{d_1} B_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

conmutativo con filas exactas. Consideramos además las inclusiones $\kappa_{A_i} : A_i \rightarrow B_{i+1} \oplus A_i$ y $\kappa_{B_{i+1}} : B_{i+1} \rightarrow B_{i+1} \oplus A_i$ y las proyecciones $\pi_{A_i} : B_{i+1} \oplus A_i \rightarrow A_i$ y $\pi_{B_{i+1}} : B_{i+1} \oplus A_i \rightarrow B_{i+1}$. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones.

1. Si f_n es un isomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\varphi} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \xrightarrow{\Delta_{n-1}} \cdots \rightarrow B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \rightarrow 0,$$

en donde

$$\begin{aligned}\varphi &= -k_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + k_{B_{n-1}}f_{n-1} \\ \Delta_i &= (-\kappa_{A_{i-2}}\delta_{i-1} + \kappa_{B_{i-1}}f_{i-1})\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_{i-1}}d_i\pi_{B_i} \quad \forall i, 1 < i < n \\ \Delta_1 &= f_0\pi_{A_0} + d_1\pi_{B_1}\end{aligned}$$

2. Si f_0 es un isomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \rightarrow B_2 \oplus A_1 \xrightarrow{\rho} B_1 \rightarrow 0,$$

en donde

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= -\kappa_{A_{n-1}}\delta_n + \kappa_{B_n}f_n \\ \Delta_i &\text{ son los del punto anterior } \forall i, 2 < i \leq n \\ \rho &= f_1\pi_{A_1} + d_2\pi_{B_2}\end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar veamos que la sucesión

$$\mathbf{X}: 0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \rightarrow B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \rightarrow 0$$

es exacta.

Que es un complejo no tiene mayor dificultad:

$$\begin{aligned}\Delta_{i-1}\Delta_i &= ((-\kappa_{A_{i-3}}\delta_{i-2} + \kappa_{B_{i-2}}f_{i-2})\pi_{A_{i-2}} + \kappa_{B_{i-2}}d_{i-1}\pi_{B_{i-1}}) \\ &\quad + ((-\kappa_{A_{i-2}}\delta_{i-1} + \kappa_{B_{i-1}}f_{i-1})\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_{i-1}}d_i\pi_{B_i}) = \\ &= \kappa_{A_{i-3}}\delta_{i-2}\delta_{i-1}\pi_{A_{i-1}} + 0 + 0 - \kappa_{B_{i-2}}f_{i-2}\delta_{i-1}\pi_{A_{i-1}} + 0 + \\ &\quad + 0 + 0 + \kappa_{B_{i-2}}d_{i-1}f_{i-1}\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_{i-2}}d_{i-1}d_i\pi_{B_i} = \\ &= 0 - \kappa_{B_{i-2}}f_{i-2}\delta_{i-1}\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_{i-2}}d_{i-1}f_{i-1}\pi_{A_{i-1}} + 0 = 0\end{aligned}$$

para todo $i \in \{3, \dots, n\}$, y de la misma forma se comprueba que $\Delta_n\Delta_{n+1} = 0$ y que $\Delta_1\Delta_2 = 0$.

Probemos ahora que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la sucesión

$$0 \longrightarrow B_i \xrightarrow{\kappa_{B_i}} B_i \oplus A_{i-1} \xrightarrow{(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}} A_{i-1} \longrightarrow 0.$$

es exacta.

Sea $\eta : B_i \oplus A_{i-1} \rightarrow X$ tal que $\eta\kappa_{B_i} = 0$ y consideremos $\psi : A_{i-1} \rightarrow X$ dado por $\psi = \eta(-1)^{i-1}\kappa_{A_{i-1}}$. Veamos que $\psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta$:

$$\begin{aligned} \psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} &= \eta(-1)^{i-1}\kappa_{A_{i-1}}(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} = \\ &= \eta\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} + \eta\kappa_{B_i}\pi_{B_i} = \eta(\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_i}\pi_{B_i}) = \\ &= \eta 1_{B_i \oplus A_{i-1}} = \eta. \end{aligned}$$

Como $(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}$ es un epimorfismo (es básicamente la proyección) ψ es el único que verifica $\psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta$. Por tanto $(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \text{Coker } \kappa_{B_i}$ y la sucesión es exacta.

El siguiente diagrama tiene pues las dos columnas y la primera y tercera filas exactas, y la segunda fila es un complejo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & B_i & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \kappa_{B_{i+1}} & & \downarrow \kappa_{B_i} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i+1} \oplus A_i & \xrightarrow{\Delta_{i+1}} & B_i \oplus A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (-1)^i \pi_{A_i} & & \downarrow (-1)^{i-1} \pi_{A_{i-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\delta_i} & A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Probemos ahora que es conmutativo.

$$\Delta_{i+1}\kappa_{B_{i+1}} = ((-\kappa_{A_{i-1}}\delta_i + \kappa_{B_i}f_i)\pi_{A_i} + \kappa_{B_i}d_{i+1}\pi_{B_{i+1}})\kappa_{B_{i+1}} = \kappa_{B_i}d_{i+1}$$

así que el cuadrado superior es conmutativo. Ahora,

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}\Delta_{i+1} &= (-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}((-\kappa_{A_{i-1}}\delta_i + \kappa_{B_i}f_i)\pi_{A_i} + \kappa_{B_i}d_{i+1}\pi_{B_{i+1}}) = \\ &= (-1)^{i-1}(-\delta_i)\pi_{A_i} = \delta_i(-1)^i\pi_{A_i} \end{aligned}$$

y por tanto el cuadrado inferior también es conmutativo.

Observemos que estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.3.5 y, por tanto, \mathbf{X} es una sucesión exacta.

Continuamos probando las dos afirmaciones del enunciado. Demostraremos sólo el primer punto, pues el segundo totalmente análogo.

En primer lugar, como f_n es isomorfismo existe f_n^{-1} . Veamos que el morfismo $\phi : B_n \oplus A_{n-1} \rightarrow A_{n-1}$ dado por $\phi = \delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}$ es el conúcleo de Δ_{n+1} :

$$\begin{aligned} \phi \Delta_{n+1} &= (\delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}})(-\kappa_{A_{n-1}} \delta_n + \kappa_{B_n} f_n) = \\ &= \delta_n f_n^{-1} f_n - \delta_n = 0. \end{aligned}$$

Ahora, sea $h : B_n \oplus A_{n-1} \rightarrow Z$ tal que $h \Delta_{n+1} = 0$. Entonces $-h \kappa_{A_{n-1}} \delta_n + h \kappa_{B_n} f_n = 0$, luego $h \kappa_{A_{n-1}} \delta_n = h \kappa_{B_n} f_n$. Tomando el morfismo $\tau : A_{n-1} \rightarrow Z$ dado por $\tau = h \kappa_{A_{n-1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tau \phi &= h \kappa_{A_{n-1}} (\delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}) = h \kappa_{A_{n-1}} \delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + h \kappa_{A_{n-1}} \pi_{A_{n-1}} = \\ &= h \kappa_{B_n} f_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + h \kappa_{A_{n-1}} \pi_{A_{n-1}} = h (\kappa_{B_n} \pi_{B_n} + \kappa_{A_{n-1}} \pi_{A_{n-1}}) = \\ &= h 1_{B_n \oplus A_{n-1}} = h \end{aligned}$$

Para probar la unicidad de τ consideramos $\tau' : A_n \rightarrow Z$ tal que $\tau' \phi = h$. Componiendo con $\kappa_{A_{n-1}}$ tenemos por un lado que $\tau' \phi \kappa_{A_{n-1}} = \tau'$ y por otro que $\tau' \phi \kappa_{A_{n-1}} = h \kappa_{A_{n-1}} = \tau$.

Ahora, como \mathbf{X} es una sucesión exacta tenemos que $A_{n-1} = \text{Coker } \Delta_{n+1} \cong \text{Ker } \Delta_{n-1}$, pongamos que mediante un isomorfismo $\bar{\varphi}$. Entonces, llamando $\varphi = k \bar{\varphi}$ ($k : \text{Ker } \Delta_{n-1} \rightarrow B_{n-1} \oplus A_{n-2}$ es la inclusión) la sucesión

$$0 \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\varphi} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \xrightarrow{\Delta_{n-1}} B_{n-2} \oplus A_{n-3} \rightarrow \cdots$$

es exacta.

Además podemos determinar que $\varphi = -\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}$ pues

$$\begin{aligned} (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) \phi &= \\ &= (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) (\delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}) = \\ &= -\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} \delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} - \kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} \pi_{A_{n-1}} + \\ &\quad + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1} \delta_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1} \pi_{A_{n-1}} = \\ &= -\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} \pi_{A_{n-1}} + \kappa_{B_{n-1}} d_n f_n f_n^{-1} \pi_{B_n} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1} \pi_{A_{n-1}} = \\ &= (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) \pi_{A_{n-1}} + \kappa_{B_{n-1}} d_n \pi_{B_n} = \Delta_n. \end{aligned}$$

■

Observemos que, según la demostración del resultado anterior, cuando las filas del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\delta_1} & A_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{d_1} & B_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

no son exactas, sino que son simplemente complejos, entonces la sucesión

$$\mathbf{X}: 0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \rightarrow B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \rightarrow 0$$

sigue siendo un complejo (no exacto en este caso). Este hecho se puede generalizar a cualquier morfismo de complejos: si

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

es un morfismo de complejos, entonces siempre se puede construir otro complejo de la forma

$$\cdots \rightarrow B_{n+2} \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+2}} B_{n+1} \oplus A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \rightarrow \cdots$$

en el que $\Delta_n = \kappa_{B_{n-1}} d_n \pi_{B_n} + (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) \pi_{A_{n-1}}$ ($\kappa_{A_n} : A_n \rightarrow B_{n+1} \oplus A_n$ y $\kappa_{B_n} : B_n \rightarrow B_n \oplus A_{n-1}$ siguen siendo las inclusiones y $\pi_{A_n} : B_{n+1} \oplus A_n \rightarrow A_n$ y $\pi_{B_{n+1}} : B_{n+1} \oplus A_n \rightarrow B_{n+1}$ siguen siendo las proyecciones). Este complejo juega un papel muy importante a la hora de hacer cálculos en el álgebra homológica, y recibe el nombre de mapping cone de f .

Definición 2.3.7 Si f es un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\delta_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{d_n} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

al complejo

$$\cdots \rightarrow B_{n+2} \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+2}} B_{n+1} \oplus A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \rightarrow \cdots$$

en el que $\Delta_n = \kappa_{B_{n-1}} d_n \pi_{B_n} + (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) \pi_{A_{n-1}} \forall n$ (con κ_{A_n} y κ_{B_n} las inclusiones y π_{A_n} y π_{B_n} las proyecciones) se le llama mapping cone de f y se denota por $M(f)$. Así $M(f)_n = B_n \oplus A_{n-1}$.

Como ya vimos en el resultado anterior y acabamos de comentar, si los dos complejos son exactos entonces el mapping cone es exacto.

Definición 2.3.8 Dado un complejo A , se llama suspensión n -ésima de A , y se denota por $A[n]$, al complejo definido como $A[n]_i = A_{n+i}$, $\delta_i^{A[n]} = (-1)^n \delta_{n+i}^A$.

Proposición 2.3.9 Si $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es un morfismo de complejos entonces siempre existe una sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow M(f) \rightarrow \mathbf{A}[-1] \rightarrow 0$$

dada por

$$0 \longrightarrow B_i \xrightarrow{\kappa_{B_i}} B_i \oplus A_{i-1} \xrightarrow{\pi_{A_{i-1}}} A_{i-1} \longrightarrow 0.$$

Demostración. Véase la demostración del Lema 2.3.6. ■

2.4 — Dimensiones homológicas relativas a una categoría auto-ortogonal

En esta sección veremos propiedades de una subcategoría auto-ortogonal, sobre todo aquellas propiedades que nos darán consistencia para calcular dimensiones homológicas de los objetos de una categoría abeliana. Estos resultados son conocidos de alguna forma, o bien en el ámbito categórico o en la categoría de módulos, de ahí, que aparezcan en estos preliminares.

Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 2.4.1 *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} subcategorías de \mathcal{A} tales que $\mathcal{Y} \subseteq {}^\perp \mathcal{X}$. Si*

$$0 \rightarrow A \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en \mathcal{A} entonces $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n}(Y, A)$ para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

Demostración. Si $K_i = \text{Im}(X_i \rightarrow X_{i-1})$ entonces tenemos la sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \rightarrow X_{n-1} \rightarrow K_{n-1} \rightarrow 0$, y dado $Y \in \mathcal{Y}$ calculamos la sucesión exacta larga asociada a ella por el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, -)$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, K_{n-1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, A) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, X_{n-1})}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, K_{n-1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, A) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, X_{n-1})}_0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, X_{n-1})}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, K_{n-1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, A) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, X_{n-1})}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_{n-1}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

luego $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, K_{n-1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, A) \forall k \geq 1$.

Ahora, para cada i , $1 \leq i \leq n-2$, tomando la sucesión $0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow K_i \rightarrow 0$ hacemos lo mismo y tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, K_{i+1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X_i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, K_i) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, K_{i+1}) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, X_i)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, K_i) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, K_{i+1}) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, X_i)}_0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, X_i)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, K_i) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_{i+1}) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, X_i)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_i) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, K_i) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_{i+1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n-1-i}(Y, K_{n-1}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n-i}(Y, A).$$

Para acabar, calculando la sucesión exacta larga asociada a $0 \rightarrow K_1 \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, K_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, K_1) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, X_0)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, K_1) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Y, X_0)}_0 \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, X_0)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, B) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_1) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, X_0)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Por tanto

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(Y, B) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+1}(Y, K_1) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n}(Y, A).$$

■

También se cumple el resultado dual.

Lema 2.4.2 *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos subcategorías \mathcal{A} tales que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}^\perp$. Si la sucesión*

$$0 \rightarrow A \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

es exacta entonces $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n}(B, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(A, Y)$ para todo $Y \in \mathcal{Y}$.

Antes de definir la dimensión, tenemos el siguiente resultado cuya importancia veremos más adelante.

Teorema 2.4.3 *Sea \mathcal{X} una subcategoría de una categoría abeliana \mathcal{A} tal que \mathcal{X} es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Si las siguientes sucesiones*

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

son exactas con $X_i, X'_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ entonces

$$A_n \in \mathcal{X} \Leftrightarrow B_n \in \mathcal{X}.$$

Demostración. En primer lugar pongamos nombres a los morfismos

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{g_n} X'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_1 \xrightarrow{g_1} X'_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$$

y llamamos $A_i = \text{Ker } f_{i-1}$, $B_i = \text{Ker } g_{i-1}$.

Si $A_n \in \mathcal{X}$, por el Lema 2.4.1 tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(X, A_i) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n-i}(X, A_n) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad \forall k > 0.$$

Entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Por tanto existe $h_0 : X'_0 \rightarrow X_0$ tal que $g_0 = f_0 h_0$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas;

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X'_1 & \xrightarrow{g_1} & X'_0 & \xrightarrow{g_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \nearrow u'_2 & & \searrow v'_1 & & \nearrow u'_1 \\
 B_2 & & & & B_1 & & \\
 & & & & \downarrow \lambda_1 & & \downarrow h_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \nearrow u_2 & & \searrow v_1 & & \nearrow u_1 \\
 A_2 & & & & A_1 & &
 \end{array}$$

Como $0 = g_0 u'_1 = f_0 h_0 u'_1$ y A_1 es el núcleo de f_0 , existe un único $\lambda_1 : B_1 \rightarrow A_1$ tal que $u_1 \lambda_1 = h_0 u'_1$. Por tanto, como $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X'_1, A_2) = 0$, existe $h_1 : X'_1 \rightarrow X_1$ tal que $v_1 h_1 = \lambda_1 v'_1$ y entonces $f_1 h_1 = u_1 v_1 h_1 = u_1 \lambda_1 v'_1 = h_0 u'_1 v'_1 = h_0 g_1$, es

decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X'_2 & \xrightarrow{g_2} & X'_1 & \xrightarrow{g_1} & X'_0 & \xrightarrow{g_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow^{v'_2} & & \nearrow_{u'_2} & & \downarrow_{h_1} & & \downarrow_{h_0} & & \parallel \\
 & & & & B_2 & & & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow^{v_2} & & \nearrow_{u_2} & & & & & & \\
 & & & & A_2 & & & & & &
 \end{array}$$

Podemos repetir este argumento hasta llegar al siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & X'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Aplicando ahora el Lema 2.3.6 obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow A_n \oplus X'_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \oplus X'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \oplus X'_0 \rightarrow X_0 \rightarrow 0$$

en la que todos los objetos salvo B_n están en \mathcal{X} . Como \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, $\text{Ker}(X_1 \oplus X'_0 \rightarrow X_0) \in \mathcal{X}$ y así también se tiene que $\text{Ker}(X_2 \oplus X'_1 \rightarrow X_1 \oplus X'_0) \in \mathcal{X}$ pues es precisamente el núcleo del epimorfismo

$$X_2 \oplus X'_1 \rightarrow \text{Ker}(X_1 \oplus X'_0 \rightarrow X_0).$$

Repitiendo este argumento vemos que todos los núcleos $\text{Ker}(X_i \oplus X'_{i-1} \rightarrow X_{i-1} \oplus X'_{i-2}) \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Luego $B_n = \text{Ker}(A_n \oplus X'_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \oplus X'_{n-2}) \in \mathcal{X}$. ■

También tenemos el resultado dual.

Teorema 2.4.4 *Sea \mathcal{X} una subcategoría de una categoría abeliana \mathcal{A} tal que \mathcal{X} es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Si las siguientes sucesiones*

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow M \rightarrow X'_0 \rightarrow X'_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X'_{n-1} \rightarrow B_n \rightarrow 0$$

son exactas con $X_i, X'_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ entonces

$$A_n \in \mathcal{X} \Leftrightarrow B_n \in \mathcal{X}.$$

Definición 2.4.5 Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y \mathcal{X} una subcategoría de \mathcal{A} . Decimos que la \mathcal{X} -dimensión proyectiva de un objeto M de \mathcal{A} es menor o igual que n , y notaremos $\mathcal{X}\text{-pd}(M) \leq n$, si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Si n es el menor entero no negativo por el que existe esta sucesión entonces $\mathcal{X}\text{-pd}(M) = n$.

Dualmente, diremos que la \mathcal{X} -dimensión inyectiva de un objeto $M \in \mathcal{A}$ es menor o igual que n , y notaremos $\mathcal{X}\text{-id}(M) \leq n$, si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_n \rightarrow 0$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Si n es el menor entero no negativo por el que existe esta sucesión entonces $\mathcal{X}\text{-id}(M) = n$.

Observemos que por el Teorema 2.4.3 (2.4.4), si \mathcal{X} es auto-ortogonal y cumple ciertas propiedades, tenemos que nos vale cualquier sucesión exacta del tipo

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$(0 \rightarrow M \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_n \rightarrow 0)$$

con objetos de \mathcal{X} para calcular la \mathcal{X} -dimensión proyectiva (inyectiva), hecho muy importante para poder calcular estas dimensión de una forma más operativa.

2.5 — Módulos w-tilting y sus clases asociadas

Comenzamos definiendo las clases de módulos C -relativas, es decir, los módulos C -proyectivos y los módulos C -inyectivos.

Definición 2.5.1 Un R -módulo a izquierda se dice C -proyectivo si este es isomorfo a $C \otimes_S P$ (siendo P proyectivo en $S\text{-Mod}$). La clase de todos los módulos C -proyectivos se denota por $\mathcal{P}_C(R)$.

Un R -módulo a derecha M se dice C -inyectivo si este es isomorfo a $\text{Hom}_C(C, E)$ para algún S -módulo a derecha E inyectivo. Usaremos $\mathcal{I}_C(R)$ para denotar la clase de todos los R -módulos C -inyectivos.

Recordemos ahora, que un R -módulo M es Gorenstein proyectivo, si existe una resolución proyectiva competa que es $\text{Hom}_R(-, \text{Proj}(R))$ -exacta de M , es decir, si existe una $\text{Proj}(R)$ -resolución completa de M . A la clase de todos los R -módulos Gorenstein proyectivos se le nota por $G\text{Proj}(R)$.

De forma análoga se definen los R -módulos Gorenstein inyectivos, y la clase formada por estos $G\text{Inj}(R)$.

Visto esto, recordemos también las clases de módulos Gorenstein proyectivos e inyectivos relativos a un módulo C .

Definición 2.5.2 Siendo C el (R, S) -bimódulo definido anteriormente. Definimos:

- Un R -módulo a izquierda M lo llamaremos G_C -proyectivo si existe una $(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C))$ -resolución completa de M . A la clase de todos los R -módulos a izquierda G_C -proyectivos la notamos por $G_C \text{Proj}(R)$.
- Un S -módulo a izquierda M lo llamaremos G_C -inyectivo si existe una $(\text{Prod}_S(C^\vee), \text{Inj}(S))$ -resolución completa de M . A la clase de todos los S -módulos a izquierda G_C -inyectivos la notamos por $G_C \text{Inj}(S)$.
- Un R -módulo a izquierda M es Gorenstein C -proyectivo si existe una $\text{Add}_R(C)$ -resolución completa de M . A la clase de todos los R -módulos a izquierda Gorenstein C -proyectivos la notamos por $C\text{-}G\text{Proj}(R)$.
- Un S -módulo a izquierda M es Gorenstein C -inyectivo si existe una $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -resolución completa de M . A la clase de todos los S -módulos a izquierda Gorenstein C -inyectivos la notamos por $C\text{-}G\text{Inj}(S)$.

Veamos también la definición y notación de las dimensiones homológicas de estas clases C -relativas.

Definición 2.5.3 Se dice que M tiene dimensión G_C -proyectiva (dimen-

sión \mathcal{P}_C -proyectiva, dimensión Gorenstein C -proyectiva) menor o igual a n , $G_C\text{-pd}(M) \leq n$ ($\mathcal{P}_C\text{-pd}(M) \leq n$, $C\text{-GProj}(R)\text{-pd}(M) \leq n$), si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_i \in G_C\text{Proj}(R)$ ($G_i \in \mathcal{P}_C(R)$, $G_i \in C\text{-GProj}(R)$) para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Si n es el menor entero no negativo para el que existe esta sucesión entonces $G_C\text{-pd}(M) = n$ ($\mathcal{P}_C\text{-pd}(M) = n$, $C\text{-GProj}(R)\text{-pd}(M) = n$), y si no existe tal n entonces $G_C\text{-pd}(M) = \infty$ ($\mathcal{P}_C\text{-pd}(M) = \infty$, $C\text{-GProj}(R)\text{-pd}(M) = \infty$).

Los conceptos de dimensiones \mathcal{I}_C -inyectiva, G_C -inyectiva y dimensión Gorenstein C -inyectiva se definen de forma dual.

Definición 2.5.4 [5] Un R -módulo a izquierda C es débilmente Wakamatsu tilting (w-tilting para acortar) si:

1. $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, C^{(I)}) = 0$ para cualquier conjunto I (es decir, $C^{(I)} \in \text{Add}_R(C)^\perp$ para todo conjunto I).
2. R tiene una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución exacta $0 \rightarrow R \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \cdots$

Si C satisface 1. pero no 2. entonces C es Σ -auto-ortogonal. Si $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, C) = 0$ entonces C es auto-ortogonal.

Dualmente, un R -módulo a izquierda U es débilmente cotilting (w-cotilting para acortar), si:

1. $\text{Ext}_R^{\geq 1}(U^X, U) = 0$ para todo conjunto X .
2. Existe un cogenerador inyectivo $D \in R\text{-Mod}$ con una $\text{Prod}_R(U)$ -resolución exacta $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow D \rightarrow 0$.

Si U satisface 1. pero no 2. entonces U es Π -auto-ortogonal.

Diremos que un bimódulo ${}_R C_S$ es débilmente Wakamatsu (co)tilting si ${}_R C$ y C_S son débilmente Wakamatsu (co)tilting.

Definición 2.5.5 Un R -módulo a izquierda M es Hom-fiel relativo a la clase de R -módulos a izquierda \mathcal{C} si:

$$\text{Hom}_R(M, N) = 0, N \in \mathcal{C} \Rightarrow N = 0.$$

Diremos que simplemente M es Hom-fiel si M es Hom-fiel relativo a $R\text{-Mod}$.

Un R -módulo a izquierda M es auto-Hom-fiel si M es Hom-fiel relativo a $\sigma_R[M]$.

Por otro lado, un R -módulo a izquierda M es Hom-cofiel relativo a la clase de R -módulos a izquierda \mathcal{C} si:

$$\text{Hom}_R(N, M) = 0, N \in \mathcal{C} \Rightarrow N = 0.$$

Diremos que simplemente M es Hom-cofiel si M es Hom-cofiel relativo a $R\text{-Mod}$.

Un R -módulo a izquierda M es auto-Hom-cofiel si M es Hom-cofiel relativo a $\pi_R[M]$.

Un S -módulo a derecha es \otimes_S -fiel relativo a la clase \mathcal{D} de S -módulos a izquierda si: $N \otimes_S M = 0, M \in \mathcal{D} \Rightarrow M = 0$. Diremos que simplemente N es \otimes_S -fiel si N es \otimes_S -fiel relativo a $S\text{-Mod}$.

Un R -módulo a izquierda es auto-pequeño si

$$\text{Hom}_R(M, M^{(I)}) \cong \text{Hom}_R(M, M)^{(I)}$$

para todo conjunto I .

Para acabar esta sección, hagamos un pequeño recordatorio de las conocidas clases de Foxby. Utilizaremos una definición que las generaliza en una categoría abeliana, dada en [26], que además, también usaremos en el Capítulo 3.

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías abelianas con productos y coproductos arbitrarios. Supongamos que \mathcal{C} tiene un generador proyectivo y que \mathcal{D} tiene un cogenerador inyectivo.

Sean (F, G) funtores en situación de adjunción (par adjunto) con $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$. Entonces F es exacto a derecha y preserva colímites y G es exacto a izquierda y preserva límites. Sus funtores derivados se denotan por $\mathbf{L}_i F$ y $\mathbf{R}^i G \forall i \geq 0$ respectivamente.

Definición 2.5.6 La clase de Auslander de \mathcal{C} relativa a F , denotada por $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, consiste en los objetos X satisfaciendo:

1. $\mathbf{L}_i F(X) = 0 \forall i \geq 1$
2. $\mathbf{R}^i G(F(X)) = 0 \forall i \geq 1$

3. la unidad $\mu_X : X \rightarrow GF(X)$ es un isomorfismo.

Análogamente, la clase de Bass de \mathcal{D} relativa a G , denotada por $\mathcal{B}(\mathcal{D})$, consiste en los objetos Y satisfaciendo:

1. $\mathbf{R}^i G(Y) = 0 \forall i \geq 1$
2. $\mathbf{L}_i F(G(Y)) = 0 \forall i \geq 1$
3. la counidad $\nu_Y : FG(Y) \rightarrow Y$ es un isomorfismo.

Notemos que si C es un (R, S) -bimódulo, tenemos que el funtor $C \otimes_S -$ es adjunto a izquierda de $\text{Hom}_R(C, -)$, es decir, forman un par adjunto. En este caso, estas clases se definen relativas al bimódulo C , y se notan: la clase de Auslander como $\mathcal{A}_C(S)$ y la clase de Bass como $\mathcal{B}_C(R)$.

Es conocido que los funtores F y G definen una equivalencia entre $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{D})$. Así, en $R\text{-Mod}$, tenemos que los funtores $\text{Hom}_R(C, -)$ y $C \otimes_S -$ establecen una equivalencia entre las subcategorías $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$.

Acabamos esta sección con la siguiente definición de pares semidualizantes.

Definición 2.5.7 ([26, Definition 2.1])

1. Diremos que el par adjunto (F, G) es un semidualizante a derecha si la clase de objetos inyectivos está contenida en $\mathcal{B}(\mathcal{D})$.
2. Diremos que el par adjunto (F, G) es un semidualizante a izquierda si la clase de los objetos proyectivos está contenida en $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Observemos que, por [5, Proposition 5.4], C es un R -módulo a izquierda Σ -auto-ortogonal y auto-pequeño si, y solamente si, el par $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$ es semidualizante a izquierda.

Además, esta definición permite escribir [5, Theorem 5.9] y [8, Theorem 2.5] como:

Teorema 2.5.8 *Si ${}_R C$ es Hom-fiel y C_S admite una resolución proyectiva de finitamente generados entonces, equivalen:*

1. $C^\vee \in \mathcal{A}_C(S)$
2. $C\text{-GInj}(S) = \text{G}_{C^\vee}\text{Inj}(S) \cap \mathcal{A}_C(S)$.

3. $\text{Inj}(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$
4. $R \cong \text{End}_S(C)$ canónicamente y $\text{Ext}_S^{\geq 1}(C, C) = 0$.
5. $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$ es semidualizante a derecha.

Teorema 2.5.9 *Si C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\text{Inj}(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$
2. a) ${}_R C$ es balanceado, es decir, la aplicación canónica $R \rightarrow \text{End}_S(C)$ es un isomorfismo.
b) C_S es auto-ortogonal, es decir, $\text{Ext}_S^{\geq 1}(C, C) = 0$
3. $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$ es semidualizante a derecha.

Si, además, ${}_R C$ es Hom-fiel relativo a $\sigma[C] \cup \{E/K : K \leq\}$, 1. o 2. equivalen a:

3. $\text{Prod}_S(C^\vee) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$.

CAPÍTULO 3

CATEGORÍAS (\mathcal{X} , \mathcal{Y})-GORENSTEIN

Dedicaremos este capítulo a estudiar la definición de objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein y las primeras propiedades que cumplen estos objetos. Veremos las propiedades de \mathcal{X} e \mathcal{Y} que necesitamos para que la subcategoría formada por todos los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein sea cerrada para extensiones, núcleos de epimorfismos, conúcleos de monomorfismos y sumandos directos.

A continuación, estudiaremos cuando las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} están dentro de $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y, por último, estudiaremos la estabilidad de esta subcategoría, es decir, cuando se cumple que $\mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Iremos dando las definiciones y resultados de este capítulo tal y como las estudiamos en su día, haciendo un paralelismo con las clases de módulos G_C -proyectivos y G_C -inyectivos estudiadas en [5]. En el que, al estudiarlo, fuimos buscando las propiedades que debían cumplir las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} para que se cumplieran los resultados deseados.

Por último, veremos que las subcategorías de Foxby relativas a una adjunción se pueden ver, bajo determinadas condiciones, como subcategorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

También tenemos que destacar que otros autores estudian problemas similares, véase [44], aunque nuestra aproximación es original y tiene sus propias

consecuencias.

Para evitar repetirlo en cada definición y cada resultado, durante este capítulo y el siguiente, el Capítulo 4, supondremos, salvo que se diga lo contrario, que \mathcal{A} es una categoría abeliana con suficientes injectivos y \mathcal{X} e \mathcal{Y} son dos subcategorías de \mathcal{A} .

3.1 — Definición y ejemplos

Comenzamos definiendo los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

Definición 3.1.1 Diremos que un objeto A de \mathcal{A} es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein si existe una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta en \mathcal{A} , de la siguiente forma

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \cdots$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ e $Y^i \in \mathcal{Y}$ para $i \geq 0$, tal que $A = \text{Im}(X_0 \rightarrow Y^0)$.

Al igual que en la categoría $R\text{-Mod}$, a esta sucesión exacta la llamamos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa de A , así, un módulo es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein si tiene una $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución completa.

Notaremos por $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ a la subcategoría plena que contiene a todos los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

Como el objeto cero está contenido en las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ contiene al objeto cero. Además, es claro que la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo isomorfismos.

De la definición, abusando del lenguaje, se tiene:

1. $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
2. $(\widehat{\text{res}}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{Y} \cap {}^\perp\mathcal{Y}) \cup (\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp \cap \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Ejemplo 3.1.2 Esta subcategoría generaliza a muchas ya conocidas, por ejemplo, tenemos $\mathcal{G}(\text{Proj}(\mathcal{A}), \text{Proj}(\mathcal{A})) = G\text{Proj}(\mathcal{A})$ es la subcategoría

de los objetos Gorenstein proyectivos y $\mathcal{G}(\text{Inj}(\mathcal{A}), \text{Inj}(\mathcal{A})) = \text{GInj}(\mathcal{A})$ es la subcategoría de los objetos Gorenstein inyectivos, estudiadas por ejemplo en [16].

En general, si \mathcal{X} es una subcategoría de \mathcal{A} , la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X})$, que se define como la formada por los objetos que son la imagen de uno de los morfismos de una \mathcal{X} -resolución completa (véase por ejemplo [38]), coincide con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.

También, como decíamos al principio de este capítulo que es nuestra intención, en la categoría $R\text{-Mod}$ tenemos que la clase de los módulos G_C -proyectivos, estudiada en [5], no es otra que $\mathcal{G}(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C))$, es decir,

$$\text{G}_C \text{Proj}(R) = \mathcal{G}(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C)).$$

El primer hecho que ocurre en $\text{G}_C \text{Proj}(R)$, por la naturaleza de la clase de los proyectivos, es que $\text{Proj}(R) \subseteq {}^\perp \text{Add}_R(C)$ y que $\text{Proj}(R)$ es auto-ortogonal, sea quien sea C . Además una de las primeras condiciones que se le exigen a C es que sea Σ -auto-ortogonal, que no es otra condición que $\text{Add}_R(C)$ sea auto-ortogonal. Tomando estas condiciones en dos subcategorías más generales, tenemos:

Proposición 3.1.3 *Si $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp \mathcal{Y}$ y M es un objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein entonces, para $i \geq 0$, se tiene*

$$\text{Im}(Y^i \rightarrow Y^{i+1}) \in \mathcal{X}^\perp \quad \text{Im}(X_{i+1} \rightarrow X_i) \in {}^\perp \mathcal{Y} \quad M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp \mathcal{Y}$$

Si además \mathcal{X} e \mathcal{Y} son auto-ortogonales se tiene

$$\text{Im}(Y^i \rightarrow Y^{i+1}), \text{Im}(X_{i+1} \rightarrow X_i) \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp \mathcal{Y}$$

Demostración. Dado un objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein M tenemos que existe una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \cdots$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ e $Y^i \in \mathcal{Y}$ para $i \geq 0$, tal que $M = \text{Im}(X_0 \rightarrow Y^0)$. Si llamamos $M_i = \text{Im}(X_i \rightarrow X_{i-1})$ y $M^i = \text{Im}(Y_{i-1} \rightarrow Y^i)$ y $M_0 = M^0 = M$ entonces las siguientes sucesiones exactas cortas son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas

$$0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow M_i \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow M^i \rightarrow Y^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow 0$$

Dado $X \in \mathcal{X}$, veamos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, M^i) = 0$ para $i \geq 0$ (análogamente tendríamos $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M_i, Y) = 0 \forall Y \in \mathcal{Y}$). Para ello, se considera la sucesión exacta larga asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ de la sucesión $0 \rightarrow M^i \rightarrow Y^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M^i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y^i) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M^{i+1}) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, M^i) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y^i) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Como $\mathcal{X} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{Y}$ entonces $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(X, Y^i) = 0$ y, al ser $0 \rightarrow M^i \rightarrow Y^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow 0$ $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta, se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, M^i) = 0$ para todo $i \geq 0$.

Ahora, si consideramos los términos superiores de la sucesión anterior, para $j > 0$;

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(X, Y^i)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(X, M^{i+1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{j+1}(X, M^i) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{j+1}(X, Y^i)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{j+1}(X, M^{i+1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{j+1}(X, M^i) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(X, M^{i+1})$, por tanto $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(X, M^i) = 0$ para todo $i \geq 0$ y $j \geq 1$.

Finalmente, si \mathcal{Y} es auto-ortogonal entonces, dado $Y \in \mathcal{Y}$, entonces utilizamos otra vez el razonamiento anterior al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ a la sucesión exacta $0 \rightarrow M^i \rightarrow Y^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow 0$, y tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(M^i, Y) = 0$. ■

3.2 — Propiedades de las subcategorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein

Al igual que $G_C \text{Proj}(R)$ en $R\text{-Mod}$, comenzamos caracterizando los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. Para ello, dada la cantidad de propiedades que cumplen los proyectivos, sintetizamos las que creemos que son básicas para ello.

Proposición 3.2.1 *Si $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$ entonces, un objeto M de \mathcal{A} es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein si, y solamente si M admite una \mathcal{X} -resolución exacta, M admite una \mathcal{Y} -corresolución exacta y $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$.*

Demostración. Sea $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces por la Proposición 3.1.3 $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$ y es claro existe una \mathcal{X} -resolución exacta de M y una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M .

Sea M tal que $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$ y existen una \mathcal{X} -resolución exacta de M y una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M . Sea una \mathcal{X} -resolución exacta de M

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Comprobemos que esta \mathcal{X} -resolución exacta es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta (análogamente tendríamos que una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta). Sea $Y \in \mathcal{Y}$, usando el Lema 2.4.2 se tiene que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\text{Ker}(X_i \rightarrow X_{i-1}), Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(M, Y) = 0,$$

luego (3.1) es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta. Por tanto $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Proposición 3.2.2 *$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Demostración. Dados dos objetos A, B en $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ se tiene que la sucesión escindida $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, aplicando [44, Theorem 3.7] se tiene que $A \oplus B \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Recordemos que la clase de los módulos G_C -proyectivos es cerrada bajo extensiones, sea quien sea C . En el caso de la subcategoría $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein necesitamos algunas propiedades que cumplen $\text{Proj}(R)$ y $\text{Add}_R(C)$. Veamos cuáles son:

Proposición 3.2.3 *Si las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} son cerradas bajo sumas directas finitas y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$ entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ en \mathcal{A} tal que $A, C \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Por la Proposición 3.2.1 tenemos que $A, C \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$ entonces la sucesión anterior es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ exacta. Aplicando [44, Theorem 3.7] tenemos que $B \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Corolario 3.2.4 Sea $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} con $A \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp \mathcal{Y}$. Entonces se cumple:

1. Si $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A'', \mathcal{Y}) = 0$ y $A' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces $A'' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
2. Si $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{X}, A') = 0$ y $A'' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces $A' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Demostración. Es consecuencia directa de [44, Theorem 3.10]. ■

Proposición 3.2.5 Si las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} son cerradas bajo sumas directas finitas entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo sumandos directos.

Demostración. Consideremos $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $G = A \oplus B$. Veamos que B admite una \mathcal{X} -resolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta (de forma análoga se comprueba que admite una \mathcal{Y} -corresolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ y habríamos terminado).

Como G es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein, existe la sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

donde $X_0 \in \mathcal{X}$ y K_0 admite una \mathcal{X} -resolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, junto con la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$$

que es escindida (y por tanto $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta), tomamos el diagrama pullback del Lema 2.3.3 (que tiene filas y columnas exactas $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0 & \equiv & K_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & X_0 & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Consideramos ahora la sucesión $0 \rightarrow K_0 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ y la sucesión escindida $0 \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ y tomamos el diagrama pullback del Lema 2.3.4 (que tiene filas y columnas exactas $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & B & \xlongequal{\quad} & B & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & D_0 & \dashrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

si observamos la sucesión $0 \rightarrow K_0 \rightarrow D_0 \rightarrow G \rightarrow 0$, como K_0, G admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ -exactas, aplicando el lema de la herradura (Lema 2.2.7) tenemos que D_0 admite una \mathcal{X} -resolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta. Luego existe la sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta $0 \rightarrow K_1 \rightarrow X_1 \rightarrow D_0 \rightarrow 0$ con $X_1 \in \mathcal{X}$ y K_1 admite una \mathcal{X} -resolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, que junto con la sucesión $0 \rightarrow B \rightarrow D_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta que nos da el Lema 2.3.3

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & K_1 & \xlongequal{\quad} & K_1 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \dashrightarrow & X_1 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Ahora componiendo las sucesiones exactas $0 \rightarrow P_1 \rightarrow X_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow P_0 \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0$ tenemos la sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Para acabar, basta continuar considerando el diagrama pullback dado por las sucesiones $0 \rightarrow K_1 \rightarrow P_1 \rightarrow B \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 0$ y seguir el proceso hasta obtener una \mathcal{X} -resolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta de B .

Dualmente tendríamos una \mathcal{Y} -corresolución exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta de B . Componiendo ambas tenemos que $B \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Observemos que en el caso de los módulos G_C -proyectivos la propiedad anterior es más fácil de demostrar, pues las clases $\mathcal{P}roj(R)$ y $\text{Add}_R(C)$ cumplen más propiedades.

Para acabar esta sección veamos las propiedades que necesitamos para que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sea cerrada bajo núcleos de epimorfismos, ya que esto se cumple en $G_C \mathcal{P}roj(R)$ cuando C es Σ -auto-ortogonal.

Proposición 3.2.6 *Si $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp \mathcal{Y}$, \mathcal{X} e \mathcal{Y} son cerradas bajo sumas directas finitas y auto-ortogonales y \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donde $M, M'' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces, dado $Y \in \mathcal{Y}$, si consideramos la sucesión exacta larga asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ entonces se tiene que $M' \in {}^\perp \mathcal{Y}$. De la misma forma, dado $X \in \mathcal{X}$, si consideramos la sucesión exacta larga asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ tenemos que $M' \in \mathcal{X}^\perp$.

Continuemos viendo que M' tiene una \mathcal{Y} -corresolución exacta. Sea

$$0 \rightarrow M \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \dots$$

una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M con $C^0 = \text{Im}(Y^0 \rightarrow Y^1)$, entonces, como $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow M \rightarrow Y^0 \rightarrow C^0 \rightarrow 0$ son $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas, consideramos el diagrama pushout del Lema 2.3.2 (que tiene filas y

columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & Y^0 & \dashrightarrow & P \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & C^0 & = & C^0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

como la sucesión $0 \rightarrow M'' \rightarrow P \rightarrow C^0 \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta y $M'', C^0 \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ por el dual del Lema de la Herradura (Lema 2.2.8) tenemos que $P \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$

$$0 \rightarrow P \rightarrow Y^1 \rightarrow Y^2 \rightarrow \dots$$

y, como $0 \rightarrow M' \rightarrow Y^0 \rightarrow P \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, se obtiene

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & Y^0 & \longrightarrow & Y^1 \longrightarrow \dots \\
 & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & & & P
 \end{array}$$

que es una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M' .

Por otro lado, al ser M'' un objeto $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein, se puede tomar $0 \rightarrow K_0'' \rightarrow X_0'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donde $X_0'' \in \mathcal{X}$ y K_0'' posee una \mathcal{X} -resolución exacta, además como \mathcal{X} es auto-ortogonal se tiene que $K_0'' \in \mathcal{X}^\perp$. Consideramos entonces el diagrama pullback del Lema 2.3.3 (con filas y columnas

exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0'' & \xlongequal{\quad} & K_0'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \dashrightarrow & X_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

De la sucesión $0 \rightarrow K_0'' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta, como $K_0'', M \in \mathcal{X}^\perp \cap \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ (tomando la sucesión exacta larga que nos da el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ para cualquier $X \in \mathcal{X}$), tenemos que $P \in \mathcal{X}^\perp$ y por el lema de la herradura (Lema 2.2.7) tenemos que $P \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$. Por tanto, existe la sucesión exacta $0 \rightarrow K_0' \rightarrow X_0' \rightarrow P \rightarrow 0$ con $K_0' \in \mathcal{X}^\perp \cap \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$. Y consideramos el diagrama pullback del Lema 2.3.4

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0' & \xlongequal{\quad} & K_0' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \dashrightarrow & X_0' & \longrightarrow & X_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Utilizamos en la segunda fila que \mathcal{X} es cerrado bajo núcleos de epimorfismos y $P' \in \mathcal{X}$. Y por ser \mathcal{X} auto-ortogonal, en la primera columna, tenemos que $M' \in \mathcal{X}^\perp$. Juntando ahora una \mathcal{X} -resolución exacta de K_0' con esta sucesión exacta corta, se tiene que $M' \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$.

Finalmente, por la Proposición 3.2.1, M' es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. ■

El resultado dual.

Proposición 3.2.7 *Si $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$, \mathcal{X} e \mathcal{Y} son auto-ortogonales y cerradas bajo sumas directas finitas e \mathcal{Y} es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos, entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.*

3.3 — Problema de estabilidad de las subcategorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein

En primer lugar, veamos cuando las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} están en la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. En el caso de los R -módulos G_C -proyectivos, los proyectivos siempre lo son, y para que $\text{Add}_R(C)$ esté en $G_C \text{Proj}(R)$, necesitamos que esta clase sea auto-ortogonal.

Proposición 3.3.1 *Supongamos que \mathcal{X} es auto-ortogonal y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{X} \subseteq \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ si, y solamente si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Demostración. \Rightarrow) Si $X \in \mathcal{X}$ entonces $X \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$ y $X \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ ($0 \rightarrow X \rightarrow X \rightarrow 0$ es una \mathcal{X} -resolución exacta) y, por hipótesis, $X \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$, luego $X \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

\Leftarrow) Es claro porque todos los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein tienen \mathcal{Y} -corresoluciones exactas. ■

También se cumple el resultado dual.

Proposición 3.3.2 *Si \mathcal{Y} es auto-ortogonal y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$ entonces, $\mathcal{Y} \subseteq \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ si, y solamente si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Definición 3.3.3 Si \mathcal{X} es auto-ortogonal, \mathcal{X} e \mathcal{Y} cerradas bajo sumas directas finitas, $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X} \subseteq \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$, diremos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a izquierda

Dualmente, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-compatible a derecha si \mathcal{Y} es auto-ortogonal, \mathcal{X} e \mathcal{Y} cerradas bajo sumas directas finitas, $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y} \subseteq \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$.

Y diremos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-compatible si lo es, a la vez, a derecha e izquierda.

Observemos que en el caso de las clases que definen los G_C -proyectivos, si C es Σ -auto-ortogonal entonces $(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C))$ es G-compatible a derecha. Y en el caso de que C sea débilmente Wakamatsu tilting, tendremos que $(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C))$ es G-compatible. Por lo que, los siguientes resultados son una generalización de los dados en la sección 2 de [5].

Proposición 3.3.4 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-compatible a izquierda entonces todos los núcleos de las \mathcal{X} -resoluciones exactas de M son objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.*

Demostración. Si

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es una \mathcal{X} -resolución exacta de M , llamando $K_0 = \text{Ker}(X_0 \rightarrow M)$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Si tomamos ahora $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \mathcal{Y}$ y consideramos las sucesiones exactas largas de la sucesión anterior asociadas a los funtores $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ se comprueba que $K_0 \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$.

Finalmente veamos que K_0 admite una \mathcal{Y} -corresolución exacta. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ podemos tomar la sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta $0 \rightarrow X_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0$ con $Y_1 \in \mathcal{Y}$ y $C_1 \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ y consideramos el diagrama pushout del Lema 2.3.1 (que tiene filas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -

exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & , \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \vdots \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & Y_1 & \dashrightarrow & P \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & C_1 & \equiv & C_1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

como $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow C_1 \rightarrow 0$ es exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, por el dual del lema de la herradura (Lema 2.2.8) tenemos $P \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$. Si componeos ahora una \mathcal{Y} -corresolución exacta de P con

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow P \rightarrow 0$$

obtenemos una \mathcal{Y} -corresolución exacta de K_0 .

Luego K_0 es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. ■

Observemos que en la hipótesis de la Proposición 3.3.4 no consideramos que la subcategoría \mathcal{X} sea cerrada bajo núcleos de epimorfismos. En caso de hacerlo, la prueba sería evidente.

Dualizando el resultado anterior.

Proposición 3.3.5 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a derecha entonces todos los conúcleos de las \mathcal{Y} -corresoluciones exactas de M son objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.*

Observemos lo que ocurre en la clase de los objetos Gorenstein proyectivos, dado M un objeto Gorenstein proyectivo, si \mathbf{X} es la resolución proyectiva completa cuyo núcleo de la diferencial de grado 0 es M , entonces los núcleos de todas las diferenciales de \mathbf{X} son objetos Gorenstein proyectivos. Este hecho no parece igual de claro en el caso de los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

Sin embargo, a partir de las proposiciones 3.3.4 y 3.3.5 resulta inmediato que esto es así, es decir, si

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, entonces todos los núcleos de $X_{n+1} \rightarrow X_n$, los de $Y^n \rightarrow Y^{n+1}$ y $\text{Ker}(X_0 \rightarrow Y^0)$ son objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

En el siguiente resultado demostramos que, el proceso de iteración de la construcción de los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein estabiliza en el segundo paso cuando el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible. Dicho de otra forma, podemos construir los objetos Gorenstein relativos a dos clases \mathcal{X} e \mathcal{Y} , pero al construir los objetos Gorenstein relativos respecto a $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ no obtenemos nada nuevo. Esto generaliza lo que probaron en [38, Corollary 4.10] Sather-Wagstaff y otros.

Teorema 3.3.6 *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par G -compatible entonces*

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Demostración. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. Dado $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ basta tomar la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longleftarrow M \longrightarrow 0$$

$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \supseteq \mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. Dado $M \in \mathcal{G}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ tenemos que existe una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ -exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & G^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & M_1 & & M & & M^1 & & \end{array} \quad (3.2)$$

con $G_i, G^i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $M_i = \text{Im}(G_i \rightarrow G_{i-1})$, $M^i = \text{Im}(G^{i-1} \rightarrow G^i)$ y $M = \text{Im}(G_0 \rightarrow G^0)$.

Como $\mathcal{X} \subseteq \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y como (3.2) es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), -)$ -exacta entonces también es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Con

el razonamiento análogo tenemos que (3.2) es también $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta. De esta forma tenemos que $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp \mathcal{Y}$.

Veamos que $M \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ ($M \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ es análogo). Como $G_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ existe la sucesión exacta $0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow G_0 \rightarrow 0$ con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $K_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (por la Proposición 3.3.1), junto con la sucesión $0 \rightarrow M_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ construimos el diagrama pullback del Lema 2.3.3 (con filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0 & \xlongequal{\quad} & K_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

ya tenemos el primer eslabón $0 \rightarrow P_0 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ de la \mathcal{X} -resolución exacta de M . Tomando las sucesión $0 \rightarrow K_0 \rightarrow P_0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ y la sucesión $0 \rightarrow M_2 \rightarrow G_1 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ consideramos el diagrama pullback del Lema 2.3.4 (que tiene filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_2 & \xlongequal{\quad} & M_2 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & D_0 & \dashrightarrow & G_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Como $G_1, K_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, por la Proposición 3.2.3, se tiene que $D_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, entonces existe $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow X'_0 \rightarrow D_0 \rightarrow 0$ exacta con $X'_0 \in \mathcal{X}$ y $K'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Junto con la sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta $0 \rightarrow M_2 \rightarrow D_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback del Lema 2.3.3 (con filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K'_0 & \xlongequal{\quad} & K'_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \dashrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

La sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta $0 \rightarrow P_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ es el segundo eslabón de la \mathcal{X} -resolución de M , continuando con las sucesiones exactas $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow M_3 \rightarrow G_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$, y repitiendo el proceso indefinidamente obtendríamos una \mathcal{X} -resolución exacta de M . Por tanto $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. \blacksquare

Hasta ahora entendemos que los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein son aquéllos que se obtienen como núcleos de sucesiones

$$\dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow Y^0 \rightarrow Y^1 \rightarrow \dots$$

que son exactas, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exactas, y tales que $X_i \in \mathcal{X}$, $Y^i \in \mathcal{Y} \forall i$. En el siguiente teorema encontramos las condiciones que deben cumplir las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} , para que tanto la posición de los X_i y los Y^i como la cantidad de unos y de otros presentes en la sucesión resulte totalmente irrelevante, hasta el punto de que la cantidad de unos u otros puede ser cero. Este hecho puede resultar muy útil a la hora de estudiar los objetos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.

Teorema 3.3.7 *Supongamos que \mathcal{X} e \mathcal{Y} son auto-ortogonales, cerradas bajo sumas directas finitas y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$. Entonces son equivalentes*

1. $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
2. $\mathcal{X} \subseteq \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ e $\mathcal{Y} \subseteq \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$
3. $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si, y solo si, existe una sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \cdots$$

con $A_i, A^j \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ y $M = \text{Im}(A_0 \rightarrow A^0)$.

Demostración. 1. \Leftrightarrow 2. Se tiene por las Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2.

2. \Rightarrow 3. Sea la sucesión exacta $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \cdots$$

donde $A_i, A^j \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ y $M = \text{Im}(A_0 \rightarrow A^0)$, comprobemos entonces que $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Comencemos viendo que como \mathcal{X} e \mathcal{Y} son auto-ortogonales y $\mathcal{X} \subseteq {}^\perp\mathcal{Y}$, se tiene que $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp\mathcal{Y}$.

Comprobemos que $M \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ (dualmente se ve que $M \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$). Llamando $M_i = \text{Im}(A_i \rightarrow A_{i-1})$ para $i > 0$ y $M_0 = M$ tenemos las sucesiones exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ exactas $0 \rightarrow M_i \rightarrow A_{i-1} \rightarrow M_{i-1} \rightarrow 0$.

Como $\mathcal{X} \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$ e $\mathcal{Y} \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$ tenemos que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y como $A_0 \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, existe $0 \rightarrow K_0 \rightarrow X_0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$ con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $K_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (por la Proposición 3.3.4). Con la sucesión anterior y $0 \rightarrow M_1 \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ consideramos el diagrama pullback del Lema 2.3.3

(con filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_0 & \equiv & K_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Así $0 \rightarrow P_0 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es una sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta (que será el primer eslabón de la \mathcal{X} -resolución exacta de M).

Considerando ahora las sucesiones exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas $0 \rightarrow K_0 \rightarrow P_0 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow M_2 \rightarrow A_1 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$, tomamos el diagrama pullback del Lema 2.3.4 (con filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M_2 & \equiv & M_2 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & D_0 & \dashrightarrow & A_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Como $A_1, K_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces, por la Proposición 3.2.3, se tiene que $D_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Por tanto, existe la sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow X_1 \rightarrow D_0 \rightarrow 0$ con $X_1 \in \mathcal{X}$ y $K'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y junto con la sucesión $0 \rightarrow M_2 \rightarrow D_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ consideramos el diagrama pullback del

Lema 2.3.3 (con filas y columnas exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K'_0 & \xlongequal{\quad} & K'_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \dashrightarrow & X_1 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & D_0 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

ya tenemos el segundo eslabón $0 \rightarrow P_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$, es decir, la sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta $0 \rightarrow P_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$.

Si continuamos el mismo proceso con las sucesiones

$$0 \rightarrow K'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow M_3 \rightarrow A_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0,$$

exactas y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exactas y lo repetimos indefinidamente obtendremos una \mathcal{X} -resolución exacta de M . Así $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

3. \Rightarrow 2. Dado $X \in \mathcal{X}$, la sucesión $0 \longrightarrow X \xlongequal{\quad} X \longrightarrow 0$ es exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, entonces $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y por la Proposición 3.3.1 tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$. De igual forma obtendremos $\mathcal{Y} \subseteq \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$. ■

3.4 — Subcategorías de Foxby relativas vistas como subcategorías $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein

En esta sección veremos que existen más ejemplos aún de este tipo de subcategorías, las famosas clases de Foxby.

Durante toda esta sección consideraremos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías abelianas y que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores.

Si notamos por

$$\begin{aligned} G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})) &= \{U \in \mathcal{C} \mid U \cong G(E), E \in \mathcal{I}nj(\mathcal{D})\}, \\ F(\mathcal{P}roj(\mathcal{C})) &= \{W \in \mathcal{D} \mid W \cong F(P), P \in \mathcal{P}roj(\mathcal{C})\}, \end{aligned}$$

llegamos al siguiente resultado.

Teorema 3.4.1 *Si (F, G) es un par adjunto semidualizante a derecha entonces $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \mathcal{G}(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$.*

Demostración. Por [26, Theorem 2.11] solo hay que probar que, dado un $M \in \mathcal{G}(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$, hay una $(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$ -resolución completa de M que es $F(-)$ -exacta. Sea

$$\mathbf{X} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow G(E_0) \rightarrow G(E_1) \rightarrow \cdots$$

una $(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$ -resolución completa de M . Sabemos que para todo $E \in \mathcal{I}nj(\mathcal{D})$ $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}, G(E))$ es exacta, en particular para E' cogenerador inyectivo de \mathcal{D} . Por la adjunción, tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\mathbf{X}), E')$ es exacta, entonces $F(\mathbf{X})$ es exacta por ser E' cogenerador inyectivo de \mathcal{D} . ■

La aplicación de este resultado sobre la ya conocida clase de Auslander de un (R, S) -bimódulo C nos proporciona la siguiente relación:

$$\mathcal{A}_C(S) = \mathcal{G}(\mathcal{P}roj(S), \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))).$$

Además, se cumple:

Proposición 3.4.2 *Sea (F, G) un par adjunto semidualizante a derecha e izquierda. Entonces $(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$ es G -compatible y la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}), G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D}))) = \mathcal{A}(\mathcal{C})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.*

Demostración. Ambas clases son cerradas bajo sumas directas finitas.

La clase $\mathcal{P}roj(\mathcal{C})$ es auto-ortogonal y $G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})) \subseteq \mathcal{P}roj(\mathcal{C})^\perp$.

Por [26, Lemma 2.8] la clase $G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D}))$ es auto-ortogonal.

$G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})) \subseteq \widehat{\text{res}}(\mathcal{P}roj(\mathcal{C}))$. y por el Teorema [26, Theorem 2.11] tenemos $\mathcal{P}roj(\mathcal{C}) \subseteq \widehat{\text{cores}}(G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D})))$.

$\mathcal{P}roj(\mathcal{C})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.

Veamos que $G(\mathcal{I}nj(\mathcal{D}))$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Sea la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G(E) \rightarrow G(E') \rightarrow C \rightarrow 0$$

con $E, E' \in \mathcal{I}nj(\mathcal{D})$. Por [26, Proposition 2.12] tenemos $K \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Aplicando F , como $E, E' \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, tenemos la sucesión exacta

$$\mathbf{L}_i F(K) = 0 \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow F(K) \rightarrow 0.$$

Como $\mathcal{I}nj(\mathcal{D})$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos tenemos $F(K) \in \mathcal{I}nj(\mathcal{D})$. Por tanto, como $K \cong G(F(K))$ entonces $K \in \mathcal{G}(\mathcal{I}nj(\mathcal{D}))$. ■

De la misma forma, se obtienen los resultados duales. En este caso aplicando [26, Theorem 2.14].

Teorema 3.4.3 *Si (F, G) es un par adjunto semidualizante a izquierda entonces $\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \mathcal{G}(F(\mathcal{P}roj(\mathcal{C})), \mathcal{I}nj(\mathcal{D}))$.*

Este Teorema, dado un (R, S) -bimódulo C , nos proporciona la relación análoga a la anterior, en este caso sobre la clase de Bass relativa a C , es decir,

$$\mathcal{B}_C(R) = \mathcal{G}(C \otimes_S \mathcal{P}roj(S), \mathcal{I}nj(R)),$$

que además, generaliza a [44, Proposition 3.3].

Por último, el resultado dual de la Proposición 3.4.2, dada por [26, Proposition 2.15].

Proposición 3.4.4 *Sea (F, G) un par adjunto semidualizante a derecha e izquierda. Entonces $((F(\mathcal{P}roj(\mathcal{C})), \mathcal{I}nj(\mathcal{D}))$ es G -compatible y la subcategoría $\mathcal{G}((F(\mathcal{P}roj(\mathcal{C})), \mathcal{I}nj(\mathcal{D})) = \mathcal{B}(\mathcal{D})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.*

CAPÍTULO 4

DIMENSIONES (\mathcal{X} , \mathcal{Y})-GORENSTEIN

En este capítulo trataremos la dimensión proyectiva (inyectiva) inducida por la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Probaremos que la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva (inyectiva) de un objeto que tenga dimensión finita quedará totalmente determinada por el mínimo grado del funtor Ext a partir del cual los siguientes son todos cero, es decir, será el menor número natural n tal que $\text{Ext}^k = 0 \forall k \geq n + 1$. A continuación investigaremos las condiciones bajo las cuales la \mathcal{X} -dimensión proyectiva (inyectiva) coincide con la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva (inyectiva).

Después, definiremos la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión global proyectiva (inyectiva) de la categoría, donde llegaremos a la conclusión de que cuando ésta es finita la subcategoría $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ coincide con $\text{Proj}(\mathcal{A})$ ($\text{Inj}(\mathcal{A})$).

4.1 — Dimensión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein proyectiva e inyectiva

Comenzamos con la definición de dimensión proyectiva, también llamada dimensión por la izquierda, en \mathcal{A} inducida por estas subcategorías.

Definición 4.1.1 Dado un objeto M de \mathcal{A} , decimos que la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de un objeto M es menor o igual que un natural n , y notaremos $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$, si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Y decimos que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = n$ si n es el menor entero no negativo para el que existe esta sucesión.

Se nos presenta el siguiente problema, para calcular la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de un objeto deberíamos considerar todas las sucesiones exactas de este tipo y quedarnos con la longitud más pequeña de todas éstas. Para solventarlo tenemos los siguientes resultados, como veremos, gracias a ellos, podremos calcular la dimensión tomando cualquier sucesión exacta de este tipo.

Lema 4.1.2 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a izquierda entonces, dada la sucesión exacta*

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, existen la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ y el morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demostración. Dada la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

llamamos $A_i = \text{Im}(G_i \rightarrow G_{i-1})$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ y tomamos la sucesión exacta $0 \rightarrow A_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Como $G_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G'_0 \rightarrow X_0 \rightarrow G_0 \rightarrow 0$$

con $X_0 \in \mathcal{X}$ y $G'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Utilizando estas sucesiones exactas tomamos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos proporciona el Lema 2.3.3

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G'_0 & \xlongequal{\quad} & G'_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \dashrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & X_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \parallel \\
 & & P_1 & \nearrow & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & \nearrow & & & \\
 & & A_1 & & & &
 \end{array}$$

Ahora considerando las sucesiones exactas $0 \rightarrow G'_0 \rightarrow P_1 \rightarrow A_1 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A_2 \rightarrow G_1 \rightarrow A_1 \rightarrow 0$ y el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas del Lema 2.3.4

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G'_0 & \xlongequal{\quad} & G'_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & D_1 & \dashrightarrow & P_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \vdots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & A_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

como la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo extensiones entonces $D_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, luego existe la sucesión exacta $0 \rightarrow G'_1 \rightarrow X_1 \rightarrow D_1 \rightarrow 0$ con $X_1 \in \mathcal{X}$ y $G'_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Con esta sucesión y la sucesión $0 \rightarrow A_2 \rightarrow D_1 \rightarrow P_1 \rightarrow 0$ tomamos el siguiente diagrama pullback del Lema 2.3.3

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G'_1 & \xlongequal{\quad} & G'_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P_2 & \dashrightarrow & X_1 & \longrightarrow & P_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & P_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 P_2 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & P_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 A_2 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & P_1 \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 A_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & A_1
 \end{array}$$

y por tanto, el diagrama siguiente también conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 & & P_2 & \nearrow & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & A_2 & & & & & & &
 \end{array}$$

Continuaríamos el proceso al considerar ahora las sucesiones exactas $0 \rightarrow G'_1 \rightarrow P_2 \rightarrow A_2 \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow A_3 \rightarrow G_2 \rightarrow A_2 \rightarrow 0$ y procediendo de la misma forma hasta el paso n . ■

Teorema 4.1.3 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a izquierda y \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos entonces, dadas las sucesiones exactas*

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow H_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_i, H_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, se tiene

$$A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Demostración. Si $A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $A_n \in \mathcal{X}^\perp$, si llamamos $A_i = \text{Im}(G_i \rightarrow G_{i-1})$, como $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, se tiene que dado $X \in \mathcal{X}$ $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, A_i) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{1+n-i}(X, A_n) = 0$, luego la sucesión

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta.

Aplicando ahora el Lema 4.1.2, existe el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & H_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & H_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
 \end{array} \quad (4.1)$$

con $X_i \in \mathcal{X}$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Ahora, llamando $K_i = \text{Im}(X_i \rightarrow X_{i-1})$, construiremos un morfismo de complejos a partir de las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \searrow^{v_0} & & \nearrow_{v_0} & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & K_1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{d_n} & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{d_1} & G_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \searrow^{l_0} & & \nearrow_{k_0} & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & A_1 & & & &
 \end{array}$$

Como la sucesión inferior es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta, tenemos que la sucesión $0 \rightarrow A_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta ($\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, -)$ -exacta en particular), luego tenemos que existe $h_0 : X_0 \rightarrow G_0$ tal que $d_0 h_0 = f_0$. Como $0 = f_0 v_0 = d_0 h_0 v_0$ y k_0 es el núcleo de d_0 entonces existe un único $\lambda_1 : K_1 \rightarrow A_1$ tal que $h_0 v_0 = k_0 \lambda_1$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \searrow^{v_0} & & \nearrow_{v_0} & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & K_1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow^{\lambda_1} & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{d_n} & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{d_1} & G_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \searrow^{l_0} & & \nearrow_{k_0} & & \parallel & & \\
 & & & & & & & & & & A_1 & & & &
 \end{array}$$

Si continuamos razonando que $0 \rightarrow A_2 \rightarrow G_1 \rightarrow A_1 \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, -)$ -exacta y así sucesivamente llegaremos al morfismo de complejos deseado, es decir,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h_n & & \downarrow h_{n-1} & & & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_0 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{d_n} & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{d_1} & G_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si aplicamos ahora el Lema 2.3.6 a este morfismo de complejos, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow A_n \oplus X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \oplus X_0 \rightarrow G_0 \rightarrow 0.$$

Como \mathcal{X} es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, obtenemos $K_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Para acabar, aplicamos el Lema 2.3.6 en el morfismo de complejos (4.1), y tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow B_n \oplus X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \oplus X_0 \rightarrow H_0 \rightarrow 0.$$

Es claro que todos los objetos de esta sucesión son $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein, salvo $B_n \oplus X_{n-1}$, tomando los núcleos, como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, éstos son $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. Por tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta para algún $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow B_n \oplus X_{n-1} \rightarrow G \rightarrow 0$$

al ser $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cerrada bajo extensiones $B_n \oplus X_{n-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y como es cerrada bajo sumandos directos $B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Proposición 4.1.4 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a izquierda y \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Dado un objeto M de \mathcal{A} , si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M)$ es finita entonces existe una \mathcal{X} -resolución exacta de M . Además $M \in \mathcal{X}^\perp$.*

Demostración. Como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M)$ es finita, existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Por el Lema 4.1.2 existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $X_i \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$, si aplicamos ahora el Teorema 4.1.3, tenemos que $K_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Además, esta sucesión es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta, ya que llamando $K_i = \text{Im}(X_i \rightarrow X_{i-1})$ tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(X, K_i) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-i+k}(X, K_n) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

Uniando esta sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta con cualquier \mathcal{X} -resolución exacta de K_n tendríamos una \mathcal{X} -resolución exacta de M .

Por último, por el Lema 2.4.1 y tenemos

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(X, M) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n}(X, G_n) = 0$$

para todo $k > 0$ y todo $X \in \mathcal{X}$, luego $M \in \mathcal{X}^\perp$. ■

Definición 4.1.5 Decimos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto a izquierda (derecha) si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un par G-compatible y \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos (\mathcal{Y} es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos).

Observemos que cuando C es w-tilting, tenemos que $(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C))$ es un par G-perfecto a izquierda y, de forma análoga cuando C w-cotilting, $(\text{Proj}_S(C^\vee), \text{Inj}(S))$ es un par G-perfecto a derecha. Y por tanto, los resultados de este capítulo generalizan a los dados en las secciones 3 y 4 de [5].

Proposición 4.1.6 Si M es un objeto de \mathcal{A} y el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto a izquierda entonces, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$ con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P es un objeto de \mathcal{A} que admite \mathcal{Y} -resolución exacta de longitud n .

Demostración. \Rightarrow). Procedemos por inducción sobre n . Para $n = 0$ es claro, pues existe $0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \rightarrow M' \rightarrow 0$ para algún $M' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ por la Proposición 3.3.5.

Si $n \geq 1$, por $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$, existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Si la descomponemos en las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow K \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow K \rightarrow 0$$

tenemos $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(K) \leq n - 1$ que, por hipótesis de inducción, existe

$$0 \rightarrow K \rightarrow P' \rightarrow G' \rightarrow 0$$

donde $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P' tiene una \mathcal{Y} -resolución exacta de longitud $n - 1$.

$$0 \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0 \rightarrow P' \rightarrow 0$$

Tomando ahora el diagrama pushout que nos proporciona el Lema 2.3.1

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \vdots & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & P' & \dashrightarrow & D & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G' & \equiv & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

tenemos que $D \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, por ser $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cerrada bajo extensiones (observando la segunda columna). Entonces existe la sucesión exacta $0 \rightarrow D \rightarrow Y \rightarrow G'' \rightarrow 0$ donde $Y \in \mathcal{Y}$ y $G'' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Considerando el diagrama pushout del Lema 2.3.2 aplicándolo a las su-

cesiones $0 \rightarrow D \rightarrow Y \rightarrow G'' \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow P' \rightarrow D \rightarrow M \rightarrow 0$, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & D & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & Y & \dashrightarrow & P \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & G'' & = & G'' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

entonces, uniendo $0 \rightarrow P' \rightarrow Y \rightarrow P \rightarrow 0$ a la \mathcal{Y} -resolución exacta de P' , tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} & & \nearrow \\ & \searrow & \\ & P' & \end{array}$

además, como $Y' \in \mathcal{Y}$ e \mathcal{Y} es auto-ortogonal, se tiene

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(Y', P') = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(Y', Y_{n-1}) = 0$$

luego, la sucesión anterior es una \mathcal{Y} -resolución exacta de longitud n .

\Leftarrow). Partimos de la sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$ y la \mathcal{Y} -resolución exacta de longitud n de P

$$0 \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0 \rightarrow P \rightarrow 0.$$

Llamemos $K = \text{Ker}(Y_0 \rightarrow P)$ y consideremos el siguiente diagrama pullback

que nos proporciona el Lema 2.3.3

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K & \equiv & K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P' & \dashrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

como $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, tenemos que $P' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, luego existe la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0, \\
 & & & & & & \searrow & & \nearrow & & & & \\
 & & & & & & & & K & & & &
 \end{array}$$

por tanto $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) $\leq n$. ■

Observemos que en la demostración del recíproco de la Proposición 4.1.6 no hemos usado que la \mathcal{Y} -resolución exacta de P sea exacta sea $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{Y}, -)$ -exacta. Por tanto, la anterior proposición se puede formular:

Proposición 4.1.7 *Si M es un objeto de \mathcal{A} y el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda entonces, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) $\leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$ donde $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P es un objeto de \mathcal{A} tal que existe una sucesión exacta $0 \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0 \rightarrow P \rightarrow 0$ con todo $Y_i \in \mathcal{Y}$.*

Teorema 4.1.8 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par G -perfecto a izquierda. Para todo objeto M de \mathcal{A} y todo entero $n \geq 1$, si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) $\leq n$ entonces existe una sucesión exacta $0 \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P admite una \mathcal{Y} -resolución exacta de longitud $n - 1$. Además, $P \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\perp$.*

Demostración. Como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$ entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(N) \leq n-1$. Si aplicamos la Proposición 4.1.6 entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow G' \rightarrow 0$$

con $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P un objeto que admite una \mathcal{Y} -resolución exacta,

$$0 \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0 \rightarrow P \rightarrow 0.$$

Tomando el diagrama pushout del Lema 2.3.1

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \vdots & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & P & \dashrightarrow & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & G' & \equiv & G' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Por ser $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo extensiones se tiene que $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Y como $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(G, P) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{k+n-1}(G, Y_{n-1}) = 0$, luego $P \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\perp$. ■

El teorema anterior nos proporciona la interesante consecuencia cuando el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto.

Corolario 4.1.9 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto a izquierda entonces todo objeto de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita posee una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta especial.*

A su vez, como consecuencia de este corolario, veamos que la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de un objeto M se puede calcular utilizando $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resoluciones de M en vez de sucesiones exactas, siempre y cuando ésta sea finita.

Corolario 4.1.10 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda entonces, dado un objeto M de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) $\leq n$ si, y solo si, M admite una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -resolución exacta de longitud n .*

Proposición 4.1.11 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda. Si existe una sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ donde $G, G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Demostración. Si calculamos la sucesión exacta larga asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$, para algún $Y \in \mathcal{Y}$, de la sucesión $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, como es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(M, Y) = 0$.

Por hipótesis $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) ≤ 1 entonces aplicamos el Teorema 4.1.8, tenemos que existe una sucesión exacta $0 \rightarrow Y \rightarrow G'' \rightarrow M \rightarrow 0$ donde $Y \in \mathcal{Y}$ y $G'' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Y como $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, Y) = 0$, esta sucesión es escindida, lo que implica que M es sumando directo de G'' y, como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo sumandos directos, M es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. ■

Teorema 4.1.12 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda. Para un objeto M de \mathcal{A} tal que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) es finita, equivalen:*

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) $\leq n$
2. $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, Y) = 0$ para todo $i > n$ y todo $Y \in \mathcal{Y}$.
3. Dada la sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \geq 0$, se tiene $\text{Ker}(G_i \rightarrow G_{i-1}) \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \geq n - 1$.

Demostración. Para 1. \Leftrightarrow 3. basta aplicar Teorema 4.1.3, y para 1. \Rightarrow 2., el Lema 2.4.2.

2. \Rightarrow 1. Al ser la $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de M finita existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_m \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde $G_0, \dots, G_m \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (supondremos que $m > n$, pues si $m \leq n$ habríamos terminado). Si consideramos el n -ésimo núcleo K_n , éste tiene

$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Aplicando ahora el Lema 2.4.2, tenemos $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(K_n, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+n}(M, Y) = 0$ para todo entero $i > 0$, y todo $Y \in \mathcal{Y}$. Al tener K_n dimensión proyectiva finita, existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G'_s \rightarrow \cdots \rightarrow G'_0 \rightarrow K_n \rightarrow 0,$$

donde $G'_0, \dots, G'_m \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si descomponemos esta sucesión en sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow C'_j \rightarrow G'_{j-1} \rightarrow C'_{j-1} \rightarrow 0$, para $j = 1, \dots, m$, donde $C'_m = G'_m$ y $C'_0 = K_n$, y aplicamos el Lema 2.4.2, tenemos que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(C'_{j-1}, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(K_n, Y) = 0$$

para todo $j = 1, \dots, m$, y todo $Y \in \mathcal{Y}$.

Para acabar, aplicando la Proposición 4.1.11 sucesivamente a las sucesiones anteriores tenemos que $C'_{m-1}, \dots, C'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, en particular $K_n = C'_0$ es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein. ■

Gracias a este teorema tendremos otra forma más operativa de calcular la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de un objeto M , en el caso de que ésta sea finita, es decir:

Corolario 4.1.13 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda y M es un objeto de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva es finita, entonces*

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(M, Y) \neq 0 \text{ para algún } Y \in \mathcal{Y}\}.$$

Veamos ahora la relación de la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva entre los objetos de una sucesión exacta corta con los siguientes resultados.

Proposición 4.1.14 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda y*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en \mathcal{A} tal que dos de los tres objetos tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, entonces el tercero también, y además, se cumple:

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') - 1\}$.
2. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'')\}$.
3. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') + 1, \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M)\}$.

Demostración. Veamos primero que M , M' y M'' admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas.

- Supongamos que M' y M'' tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, aplicando la Proposición 4.1.4, tenemos que $M', M'' \in \mathcal{X}^\perp$ y admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas.

Por otro lado, como $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, M') = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$, entonces la sucesión

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta, que por el lema de la herradura (Lema 2.2.7), tenemos que M también admite una \mathcal{X} -resolución exacta.

- Si M' y M tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita entonces, por la Proposición 4.1.4, $M', M \in \mathcal{X}^\perp$ y admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas. Ahora, tomando el primer eslabón de la \mathcal{X} -resolución exacta de M tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde $X_0 \in \mathcal{X}$ y $K_1 \in \mathcal{X}^\perp$ admite una \mathcal{X} -resolución exacta. Considerando el diagrama pullback del Lema 2.3.3, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K_1 & \xlongequal{\quad} & K_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & P & \dashrightarrow & X_0 & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

como $K_1, M' \in \mathcal{X}^\perp$ entonces $P \in \mathcal{X}^\perp$ y la sucesión

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow P \rightarrow M' \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Si aplicamos el Lema 2.2.7 entonces tenemos que P admite una \mathcal{X} -resolución exacta, luego M'' también.

- Supongamos que M y M'' tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, entonces aplicando Proposición 4.1.4, $M, M'' \in \mathcal{X}^\perp$ y admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas. Si tomamos el primer eslabón de una \mathcal{X} -resolución de M'' , tenemos la sucesión exacta $0 \rightarrow K_1'' \rightarrow X_0'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ donde $X_0'' \in \mathcal{X}$ y $K_1'' \in \mathcal{X}^\perp$ admite una \mathcal{X} -resolución exacta. Consideramos ahora el diagrama pullback con del Lema 2.3.4

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & K_1'' & = & K_1'' & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \dashrightarrow & X_0'' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Como $K_1'', M \in \mathcal{X}^\perp$ entonces $P \in \mathcal{X}^\perp$ y la sucesión

$$0 \rightarrow K_1'' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta. Aplicamos el Lema 2.2.7 y tenemos que P admite una \mathcal{X} -resolución exacta. Entonces existe $0 \rightarrow K_1' \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow 0$ donde $X \in \mathcal{X}$ y $K_1' \in \mathcal{X}^\perp$ admite una \mathcal{X} -resolución exacta.

Tomamos el diagrama pullback del Lema 2.3.3

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K'_1 & \xlongequal{\quad} & K'_1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \dashrightarrow & X & \longrightarrow & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Como \mathcal{X} es cerrada bajo núcleos de epimorfismos entonces $X'_0 \in \mathcal{X}$ y de la primera sucesión exacta vertical, se tiene que $M' \in \mathcal{X}^\perp$ y admite una \mathcal{X} -resolución exacta.

Como hemos visto, en cualquier caso,

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y M' y M'' admiten \mathcal{X} -resoluciones exactas. Consideramos el diagrama que aparece en la demostración del Lema 2.2.7

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_1 \oplus X''_1 & \longrightarrow & X''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & X'_0 \oplus X''_0 & \longrightarrow & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Sea n el máximo de las dos $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensiones proyectivas finitas conocidas, y llamando $K'_n = \text{Ker}(X'_{n-1} \rightarrow X'_{n-2})$, $K_n = \text{Ker}(X'_{n-1} \oplus X''_{n-1} \rightarrow X'_{n-2} \oplus X''_{n-2})$ y $K''_n = \text{Ker}(X''_{n-1} \rightarrow X''_{n-2})$, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow K'_n \rightarrow K_n \rightarrow K''_n \rightarrow 0.$$

- Si M' y M tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, por el Teorema 4.1.12 tenemos que $K'_n, K_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ luego $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(K''_n) \leq 1$ y, por tanto, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') \leq n + 1$.
- Si M' y M'' tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, por el Teorema 4.1.12 tenemos que $K'_n, K''_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo extensiones, se tiene $K_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y, por tanto $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$.
- Si M y M'' tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, por el Teorema 4.1.12 tenemos que $K_n, K''_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos se tiene $K'_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y, por tanto, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') \leq n$.

■

Corolario 4.1.15 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda y la sucesión*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es exacta tal que los tres objetos tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva finita, entonces:

1. Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M')$ entonces

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') = \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') + 1, \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M)\}.$$
2. Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'')$ entonces

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') = \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') - 1\}.$$
3. Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') + 1$ entonces

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'')\}.$$

Demostración. Utilizamos el Corolario 4.1.13 para la demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') = n$, así $\exists Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \neq 0$, si consideramos los términos superiores de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(M, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(M', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(M', Y) \neq 0$ por ser $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \neq 0$, luego $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') = n - 1$.

Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = n$ entonces $\exists Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \neq 0$. Ahora si consideramos los términos superiores de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \neq 0$, lo que implica que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') = n$.

2. Supongamos que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') + 1 = n + 1$, entonces existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \neq 0$. Si consideramos los términos superiores de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \neq 0$ por ser $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \neq 0$, luego $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = n$.

Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') + 1 < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') = n$ entonces existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores

de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n-1}(M', Y)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \neq 0$, lo que implica que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = n$.

3. Supongamos que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') = n$, entonces $\exists Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \neq 0$. Si consideramos los términos superiores de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y)}_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y) \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+2}(M'', Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

tenemos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y) \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y) \neq 0$, lo que implica que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') = n + 1$.

Supongamos ahora que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M') < \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = n$, entonces $\exists Y \in \mathcal{Y}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \neq 0$. Si consideramos los términos superiores de la sucesión exacta larga de la sucesión $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ asociada al funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$;

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M', Y)}_0 \rightarrow \\ \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M'', Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M, Y)}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M', Y)}_0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

se tiene que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M'', Y) \neq 0$ por ser $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(M, Y) \neq 0$, luego $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M'') = n$. ■

Como observábamos en el Ejemplo 3.1.2, si \mathcal{X} es una subcategoría de una categoría abeliana \mathcal{A} , se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Además, si \mathcal{X}

es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo núcleos de epimorfismos, entonces el par $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ es G-perfecto y, por tanto, $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ verifica los resultados estudiados hasta el momento. Y además:

Proposición 4.1.16 *Si \mathcal{X} es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo núcleos de epimorfismos entonces, para todo objeto M de \mathcal{A} con \mathcal{X} -dimensión proyectiva es finita se tiene que $\mathcal{X}\text{-pd}(M) = \mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M)$.*

Demostración. Como claramente se cumple que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{X}\text{-pd}(M) \geq \mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M)$.

Para comprobar la igualdad, aplicamos inducción sobre $\mathcal{X}\text{-pd}(M) = n$. Si $n = 0$ entonces $M \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X})$.

Supongamos ahora que $n \geq 1$. Tenemos que $\mathcal{X}\text{-pd}(M) = n$, entonces existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

donde $X_i \in \mathcal{X}$. Llamando $K = \text{Ker}(X_0 \rightarrow M)$, tenemos la sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ donde $\mathcal{X}\text{-pd}(K) \leq n - 1$ (ya que si $\mathcal{X}\text{-pd}(K) < n - 1$ tendríamos que $\mathcal{X}\text{-pd}(M) \leq n - 1$), luego, por hipótesis de inducción, $\mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(K) = n - 1$ y, por el Teorema 4.1.12, tenemos que $\mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M) = n$. ■

Para acabar esta sección, veamos la relación entre todas estas dimensiones homológicas inducidas por \mathcal{X} , $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Teorema 4.1.17 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto a izquierda, $\mathcal{G}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ entonces, dado un objeto M de \mathcal{A} ;*

1. *Si $\mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M)$ es finita entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = \mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M)$.*
2. *Si $\mathcal{X}\text{-pd}(M)$ es finita entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) = \mathcal{X}\text{-pd}(M)$.*

Demostración. Por la proposición anterior, 2. es consecuencia de 1. Veamos 1. procediendo por inducción sobre $n = \mathcal{G}(\mathcal{X})\text{-pd}(M)$. Si $n = 0$ entonces es claro, ya que $\mathcal{G}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Supongamos que $n = 1$, aplicando el Teorema 4.1.8, existe una sucesión

exacta

$$0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $E \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) = 0 entonces $0 \rightarrow X \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, y como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, en particular es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ -exacta, es decir, es escindida, luego $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X})$, lo que es una contradicción.

Si $n = \mathcal{G}(\mathcal{X})$ -pd(M) > 1 entonces, también por el Teorema 4.1.8 existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ -pd(K) = $n - 1$. Ahora, por hipótesis de inducción $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(K) = $n - 1$ y, por el Teorema 4.1.12, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -pd(M) = n . ■

4.1.1 — Dimensión $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein inyectiva

El concepto dual de la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva es la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva. Se cumplen todos los resultados duales de la sección 4.1, pues las demostraciones consisten en repetir los mismos argumentos dualizando las ideas correspondientes.

Por este motivo, incluimos los correspondientes duales en este apartado, pero no redactamos ninguna demostración.

Definición 4.1.18 Dado un objeto A de \mathcal{A} , diremos que la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva de A es menor o igual que el natural n , y notaremos $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -id(A) $\leq n$, si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \cdots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_n \rightarrow 0$$

donde $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Y diremos que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -id(A) = n si n es el menor entero no negativo por el que existe esta sucesión.

Lema 4.1.19 Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a derecha entonces, dada la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \cdots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

con $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, existen la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow K_n \rightarrow 0$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$ y el morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_{n-1} & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Teorema 4.1.20 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a derecha e \mathcal{Y} es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos entonces, dadas las sucesiones exactas*

$$0 \rightarrow M \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \cdots \rightarrow G_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow M \rightarrow H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow \cdots \rightarrow H_{n-1} \rightarrow B_n \rightarrow 0$$

donde $G_i, H_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, se tiene

$$A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow B_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Proposición 4.1.21 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -compatible a derecha e \mathcal{Y} es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Dado un objeto M de \mathcal{A} , si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M)$ es finita entonces existe una \mathcal{Y} -corresolución exacta de M . Además $M \in {}^\perp \mathcal{Y}$.*

Proposición 4.1.22 *Si M es un objeto de \mathcal{A} y el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha entonces, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P es un objeto de \mathcal{A} que admite una \mathcal{X} -corresolución exacta de longitud n .*

Proposición 4.1.23 *Si M es un objeto de \mathcal{A} y el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha entonces, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P es un objeto de \mathcal{A} tal que existe una sucesión exacta $0 \rightarrow P \rightarrow X_0 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow 0$ donde todo $X_i \in \mathcal{X}$.*

Teorema 4.1.24 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un par G -perfecto a derecha. Para todo objeto M de \mathcal{A} y todo entero $n \geq 1$, si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq n$ entonces existe una sucesión exacta $0 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow 0$, con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y P admite una \mathcal{X} -corresolución exacta de longitud $n-1$. Además, $P \in {}^\perp \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Corolario 4.1.25 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha entonces todo objeto de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva finita tiene una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -preenvolvente especial.*

Corolario 4.1.26 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha entonces, dado un objeto M de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva finita, se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq n$ si, y solo si, M admite una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -corresolución exacta de longitud n .*

Proposición 4.1.27 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha. Si existe una sucesión exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta $0 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 0$ donde $G, G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces M es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein.*

Teorema 4.1.28 *Supongamos que el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha. Para un objeto M de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva finita equivalen:*

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq n$
2. $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, M) = 0$ para todo $i > n$ y todo $X \in \mathcal{X}$.
3. Dada la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \dots$$

donde $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \geq 0$, se tiene $\text{Coker}(G_{i-1} \rightarrow G_i) \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $i \geq n - 1$.

Corolario 4.1.29 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha y M es un objeto de \mathcal{A} con $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M)$ finita entonces*

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, M) \neq 0 \text{ para algún } X \in \mathcal{X}\}.$$

Proposición 4.1.30 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha y*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en \mathcal{A} talque dos de los tres objetos tienen $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión inyectiva finita, entonces el tercero también, y además se cumple:

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M') \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'') + 1, \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M)\}$, y se tiene la igualdad si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M')$.
2. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'') \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M') - 1\}$, y se tiene la igualdad si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'')$.

3. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \leq \max\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'), \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'')\}$, y se tiene la igualdad si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M'') + 1 \neq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M')$.

Proposición 4.1.31 *Si \mathcal{Y} es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos entonces, para todo objeto M de \mathcal{A} con \mathcal{Y} -dimensión inyectiva finita se tiene que $\mathcal{Y}\text{-id}(M) = \mathcal{G}(\mathcal{Y})\text{-id}(M)$.*

Teorema 4.1.32 *Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha, $\mathcal{G}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ entonces, dado un objeto M de \mathcal{A} , se tiene;*

1. Si $\mathcal{G}(\mathcal{Y})\text{-id}(M)$ es finita entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) = \mathcal{G}(\mathcal{Y})\text{-id}(M)$.
2. Si $\mathcal{Y}\text{-id}(M)$ es finita entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) = \mathcal{Y}\text{-id}(M)$.

4.2 — Dimensiones Globales $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein

Tal y como decíamos al principio del presente capítulo, estudiaremos las dimensiones globales inducidas por esta subcategoría. Comenzamos dando la definición:

Definición 4.2.1 Llamamos $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva global de \mathcal{A} , $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-PD}(\mathcal{A})$, al supremo de la $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva de todo objeto M de \mathcal{A} o infinito si no existe dicho supremo, es decir

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-PD}(\mathcal{A}) = \sup\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \mid M \in \mathcal{A}\}.$$

Dualmente

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-ID}(\mathcal{A}) = \sup\{\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(M) \mid M \in \mathcal{A}\}.$$

En el siguiente resultado se puede ver qué sucede cuando las subcategorías \mathcal{X} e \mathcal{Y} forman un par G -perfecto a izquierda, que además, se puede ver como una generalización de lo que ocurre con los G_C -proyectivos en [6].

Teorema 4.2.2 *Sea n un entero positivo. Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda entonces equivalen:*

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-PD}(\mathcal{A}) \leq n$
2. Se cumplen las siguientes afirmaciones:
 - a) $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo sumas directas.
 - b) $\widehat{\text{res}}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}$ (Todo objeto de \mathcal{A} admite una \mathcal{X} -precubierta épica).
 - c) $\mathcal{X} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{A})$.
 - d) $\text{id}_{\mathcal{A}}(Y) \leq n \forall Y \in \mathcal{Y}$.
 - e) $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(I) \leq n \forall I \in \text{Inj}(\mathcal{A})$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. a) Sea la familia de objetos $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con $i \in I$. Por hipótesis $\oplus G_i$ tiene $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -dimensión proyectiva menor o igual que n , es decir, existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G'_n \rightarrow \cdots \rightarrow G'_0 \rightarrow \oplus G_i \rightarrow 0$$

con $G'_j \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$. Observemos que esta sucesión es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta, entonces, aplicando [44, Theorem 3.10] en cada sucesión exacta corta que nos da la sucesión anterior, tenemos que $\oplus G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Veamos b), dado $M \in \mathcal{A}$, por el Corolario 4.1.9 existe una $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -precubierta especial, es decir, existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0,$$

con $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $K \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\perp$. Por otro lado como $G \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ existe la sucesión exacta y $\text{Hom}(\mathcal{X}, -)$ -exacta

$$0 \rightarrow G' \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow 0$$

con $X \in \mathcal{X}$ y $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Ahora, tomando el diagrama pullback que

nos da el Lema 2.3.3, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & G' & \xlongequal{\quad} & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Para ver c), dado $M \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$, tenemos que existe la sucesión exacta $0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ con $G_i \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Y como $\text{Ext}^1(X, M) = \text{Ext}^{n+1}(X, G_n) = 0$, tenemos $X \in \text{Proj}(\mathcal{A})$.

Ahora, para probar d), como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$ entonces $K \in \mathcal{X}^\perp$, y como $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}^\perp$, tenemos que $F \in \mathcal{X}^\perp$, luego

$$0 \rightarrow F \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ exacta, luego $X \rightarrow M$ es una \mathcal{X} -precubierta épica.

En segundo lugar, como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M) \leq n$ y por el Corolario 4.1.13 se tiene

$$\text{Ext}_A^i(M, Y) = 0, \quad \forall i \geq n+1, \quad \forall Y \in \mathcal{Y}, \quad \forall M \in \mathcal{A},$$

luego $\text{id}_{\mathcal{A}}(Y) \leq n, \quad \forall Y \in \mathcal{Y}$.

e) es evidente.

2. \Rightarrow 1. Dado $M \in \mathcal{A}$, consideramos una \mathcal{X} -resolución de M

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X_{-1} = M \rightarrow 0$$

y una resolución inyectiva de M

$$0 \rightarrow M = E_{-1} \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots$$

Descomponemos estas sucesiones exactas en sucesiones exactas cortas para todo $i \in \mathbb{N}$

$$0 \rightarrow Q_i \rightarrow X_i \rightarrow N_i \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow E_i \rightarrow L_i \rightarrow 0$$

donde $Q_i = \text{Ker}(P_i \rightarrow P_{i-1})$, $N_i = \text{Im}(P_i \rightarrow P_{i-1})$, $K_i = \text{Ker}(E_i \rightarrow E_{i+1})$ y $L_i = \text{Im}(E_i \rightarrow E_{i+1})$. Tomamos la suma directa de las primeras sucesiones,

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} Q_i \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow M \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Q_i \right) \rightarrow 0,$$

el producto de las segundas sucesiones

$$0 \rightarrow M \oplus \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} L_i \right) \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} L_i \rightarrow 0$$

y tomamos una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow M \oplus (Q \oplus L) \rightarrow G \oplus E \rightarrow M \oplus (Q \oplus L) \rightarrow 0$$

donde $Q = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Q_i$, $L = \prod_{i \in \mathbb{N}} L_i$, $G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} X_i$ (que es $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein por ser $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cerrada bajo sumas directas y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$) y $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Ahora tomamos una \mathcal{X} -resolución exacta de $M \oplus Q \oplus L$:

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \oplus Q \oplus L \rightarrow 0.$$

Ahora, como $0 \rightarrow M \oplus (Q \oplus L) \rightarrow G \oplus E \rightarrow M \oplus (Q \oplus L) \rightarrow 0$ es $\text{Hom}(\mathcal{X}, -)$ -exacta ($\mathcal{X} \in \text{Proj}(\mathcal{A})$), aplicando el Lema de la Herradura

(Lema 2.2.7) tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J_n & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & J_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \oplus X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_0 \oplus X_0 & \longrightarrow & X_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M \oplus Q \oplus L & \longrightarrow & G \oplus E & \longrightarrow & M \oplus Q \oplus L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Donde $J_n = \ker(X_n \rightarrow X_{n-1})$. Como E es inyectivo, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(E) \leq n$ y, por tanto, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(G \oplus E) \leq n$. Entonces, por el Teorema 4.1.12, $G' \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Por otro lado, usando la resolución proyectiva de $M \oplus Q \oplus L$, tenemos que para todo $Y \in \mathcal{Y}$ y todo entero positivo $i \geq 1$, $\text{Ext}^{i+n}(M \oplus Q \oplus L, X) \cong \text{Ext}^i(J_n, Y) = 0$, por el Lema 2.4.2, ya que $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}^\perp$ e $\text{id}_{\mathcal{A}}(Y) \leq n$.

Juntando las sucesiones $0 \rightarrow J_n \rightarrow G' \rightarrow J_n \rightarrow 0$ con ellas mismas, tendremos un sucesión exacta, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$ -exacta y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{Y})$ -exacta de la forma $\cdots \rightarrow G' \rightarrow G' \rightarrow G' \rightarrow \cdots$, que usando el Teorema 3.3.6, tenemos que $J_n \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Luego, $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(M \oplus Q \oplus L) \leq n$.

Finalmente, veamos que si $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(A \oplus B) \leq n$ entonces se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(A) \leq n$ y habríamos terminado.

Para ello tomamos \mathcal{X} -resoluciones exactas de A y B ,

$$\cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

y

$$\cdots \rightarrow X'_1 \rightarrow X'_0 \rightarrow B \rightarrow 0,$$

nos quedamos en el término n y tomamos la suma directa de los complejos:

$$0 \rightarrow K_n \oplus K'_n \rightarrow X_{n-1} \oplus X'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \oplus X'_0 \rightarrow A \oplus B \rightarrow 0.$$

Como $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(A \oplus B) \leq n$ entonces $K_0 \oplus K'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, y por la Proposición 3.2.5 $K_0, K'_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, luego $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(A) \leq n$ y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-pd}(B) \leq n$. ■

A partir de aquí, tenemos las siguientes consecuencias que explican cómo es la subcategoría $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cuando la dimensión global es finita.

Corolario 4.2.3 *Sea n un entero positivo. Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a izquierda y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-PD}(\mathcal{A}) \leq n$ entonces \mathcal{A} posee suficientes proyectivos y*

$$\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{G}(\text{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y}).$$

Demostración. Por el Teorema anterior \mathcal{X} es precovering con \mathcal{X} -precubiertas épicas y $\mathcal{X} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{A})$. Por lo que cualquier \mathcal{X} -precubierta es una precubierta proyectiva.

Veamos ahora que $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{G}(\text{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$. Como $\mathcal{X} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{A})$ y toda sucesión exacta es $\text{Hom}(\text{Proj}(\mathcal{A}), -)$ -exacta, ya se tiene la primera inclusión.

Sea ahora $M \in \mathcal{G}(\text{Proj}(\mathcal{A}), \mathcal{Y})$, entonces existe una sucesión exacta, $\text{Hom}(\text{Proj}(\mathcal{A}), -)$ -exacta y $\text{Hom}(-, \mathcal{Y})$ -exacta

$$\cdots P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \cdots$$

donde $P_i \in \text{Proj}(\mathcal{A})$ e $Y_i \in \mathcal{Y}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, tal que $\text{Im}(P_0 \rightarrow Y_0) = M$.

Como $\mathcal{X} \subseteq \text{Proj}(\mathcal{A})$ por el Teorema anterior, tenemos $M \in \mathcal{X}^\perp \cap {}^\perp \mathcal{Y}$ y $M \in \widehat{\text{res}}(\mathcal{X})$, como además por definición $M \in \widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y})$, entonces, por la Proposición 3.2.1, tenemos $M \in \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ■

Veamos una aplicación en la categoría $R\text{-Mod}$ de este resultado cuando C es un R -módulo débilmente Wakamatsu tilting (véase las Definiciones 2.5.2 y 2.5.4). Para ello observemos que $C\text{-GProj}(R) = \mathcal{G}(\text{Add}_R(C), \text{Add}_R(C))$.

Corolario 4.2.4 *Si C es w -tilting y $C\text{-GProj}(R)\text{-pd}(R\text{-Mod}) \leq n$ entonces $C\text{-GProj}(R) = G_C \text{Proj}(R)$.*

Demostración. En primer lugar, es claro que el par $(\text{Add}_R(C), \text{Add}_R(C))$ es G-compatible por ser C débilmente Wakamatsu tilting (véase [5]).

Para ser G-perfecto a izquierda falta que $\text{Add}_R(C)$ sea cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Para ello, sea la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$$

donde $A, A' \in \text{Add}_R(C)$. Como $C\text{-GProj}(R)\text{-pd}(R\text{-Mod}) \leq n$ existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow K \rightarrow 0,$$

donde $G_i \in C\text{-GProj}(R) \subseteq \text{Add}_R(C)^\perp$. Así, por el Lema 2.4.1 tenemos que $\text{Ext}_R^1(B, K) = \text{Ext}_R^{1+n}(B, G_n) = 0$ para todo $B \in \text{Add}_R(C)$. Luego la sucesión

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_R(\text{Add}_R(C), -)$ -exacta, y por tanto escindida. Y como $\text{Add}_R(C)$ es cerrada bajo sumandos directos, tenemos que $K \in \text{Add}_R(C)$.

Finalmente, aplicando el Corolario 4.2.3, se tiene que

$$C\text{-GProj}(R) = \mathcal{G}(\text{Proj}(R), \text{Add}_R(C)) = G_C \text{Proj}(R).$$

■

De la misma forma se obtienen los resultados duales:

Teorema 4.2.5 *Sea n un entero positivo. Si $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G-perfecto a derecha e \mathcal{Y} es cerrada bajo productos directos entonces equivalen:*

1. $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-ID}(\mathcal{A}) \leq n$
2. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*
 - a) $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es cerrada bajo productos.
 - b) $\widehat{\text{cores}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{A}$ (Todo objeto de \mathcal{A} admite una \mathcal{Y} -preenvolvente mónica).
 - c) $\mathcal{Y} \subseteq \text{Inj}(\mathcal{A})$.
 - d) $\text{pd}_{\mathcal{A}}(X) \leq n \forall X \in \mathcal{X}$.
 - e) $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-id}(P) \leq n \forall P \in \text{Proj}(\mathcal{A})$.

Corolario 4.2.6 *Sea n un entero positivo. Si el par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es G -perfecto a derecha y $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\text{-ID}(\mathcal{A}) \leq n$ entonces $\mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \text{Inj}(\mathcal{A}))$.*

Corolario 4.2.7 *Si C es w -cotilting y $C\text{-GInj}(S)\text{-pd}(\text{Mod-}S) \leq n$ entonces $C\text{-GInj}(S) = G_C \text{Inj}(S)$.*

CAPÍTULO 5

TEORÍAS DE COTORSIÓN A PARTIR DE CLASES DE FOXBY

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las diferentes teorías de cotorsión dadas por las clases de Auslander y de Bass. Estas propiedades las usaremos para determinar cuando ciertos tipos de módulos son w -(co)tilting y cuando ciertos tipos de clases de Auslander y de Bass son precovering y preenveloping.

5.1 — Las clases $\text{Add}_R(C)$ y $\text{Prod}_R(C^\vee)$

Existen en la literatura una serie de resultados que proporcionan información sobre cuándo la imagen de una (pre)cubierta o una (pre)envolvente mediante un funtor en una situación de adjunción vuelve a ser una (pre)cubierta o una (pre)envolvente. Y seguro que existen soluciones a la pregunta de si la “imagen” de una clase (pre)covering o (pre)enveloping es (pre)covering o (pre)enveloping. Sin embargo, no las hemos encontrado y por eso, a continuación, proporcionamos dos resultados que pueden aclarar este problema y

que serán útiles más adelante.

Teorema 5.1.1 *Sea (F, G) un par adjunto.*

1. *Si \mathcal{Y} es una subcategoría (pre)enveloping de \mathcal{D} entonces $G(\mathcal{Y})$ es una subcategoría (pre)enveloping de \mathcal{C} .*
2. *Si \mathcal{X} es una subcategoría (pre)covering de \mathcal{C} entonces $F(\mathcal{X})$ es una subcategoría (pre)covering de \mathcal{D} .*

Demostración. Veamos 1. pues 2. es el dual.

Dado un objeto A de \mathcal{C} consideramos el objeto $F(A)$ de \mathcal{D} y $\varphi : F(A) \rightarrow Y$ una \mathcal{Y} -(pre)envolvente de $F(A)$. Aplicando G y componiendo con la unidad de la adjunción tenemos

$$A \xrightarrow{\mu_A} GF(A) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y).$$

Veamos que $\alpha = G(\varphi)\mu_A$ es una $G(\mathcal{Y})$ -(pre)envolvente de A . Sea $f : A \rightarrow G(Y')$ un morfismo en \mathcal{C} con $Y' \in \mathcal{Y}$, aplicando F y componiendo con las counidades de la adjunción tenemos

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\alpha)} & FG(Y) \xrightarrow{\nu_Y} Y \\ \downarrow F(f) & & \\ FG(Y') & & \\ \downarrow \nu_{Y'} & & \\ Y' & & \end{array}$$

como

$$\begin{aligned} \nu_Y F(\alpha) &= \nu_Y F(G(\varphi)\mu_A) = \eta_{G(Y), Y}^{-1}(1_{G(Y)})F(G(\varphi)\mu_A) = \eta_{A, Y}^{-1}(1_{G(Y)}G(\varphi)\mu_A) = \\ &= \eta_{A, Y}^{-1}(G(\varphi)\mu_A) = \eta_{A, Y}^{-1}(G(\varphi)\eta_{A, F(A)}(1_{F(A)})) = \eta_{A, Y}^{-1}(\eta_{A, Y}(\varphi 1_{F(A)})) = \\ &= \eta_{A, Y}^{-1}\eta_{A, Y}(\varphi) = \varphi \end{aligned}$$

y φ es una \mathcal{Y} -(pre)envolvente existe $\omega : Y \rightarrow Y'$ tal que $\omega\varphi = \nu_{Y'}F(f)$, es

decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 F(A) & \xrightarrow{F(\alpha)} & FG(Y) & \xrightarrow{\nu_Y} & Y \\
 \downarrow F(f) & & & & \nearrow \omega \\
 FG(Y') & & & & \\
 \downarrow \nu_{Y'} & & & & \\
 Y' & & & &
 \end{array}$$

Volviendo a aplicar G tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & & \\
 \searrow \alpha & & \\
 & GF(A) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \\
 \mu_A \searrow & \downarrow G(\nu_{Y'}F(f)) & \swarrow G(\omega) & \\
 & G(Y') & &
 \end{array}$$

y como

$$\begin{aligned}
 G(\nu_{Y'}F(f))\mu_A &= G(\nu_{Y'}F(f))\eta_{A,F(A)}(1_{F(A)}) = \eta_{A,Y'}(\nu_{Y'}F(f)1_{F(A)}) = \\
 &= \eta_{A,Y'}(\nu_{Y'}F(f)) = \eta_{A,Y'}(\eta_{G(Y'),Y'}^{-1}(1_{G(Y')})F(f)) = \\
 &= \eta_{A,Y'}(\eta_{A,Y'}^{-1}(1_{G(Y')}f)) = \eta_{A,Y'}\eta_{A,Y'}^{-1}(f) = f
 \end{aligned}$$

entonces $G(\omega)\alpha = G(\nu_{Y'}F(f))\mu_A = f$.

Para ver que α es $G(\mathcal{Y})$ -envolvente de A tomamos $Y = Y'$ y $f = \varphi$, y como $\varphi : F(A) \rightarrow Y$ es una \mathcal{Y} -envolvente de $F(A)$, ω es isomorfismo, entonces $G(\omega)$ es isomorfismo. ■

Podemos aplicar este resultado a la adjunción más conocida:

Corolario 5.1.2 *Para todo par de anillos R y S y para todo bimódulo ${}_R M_S$ tenemos:*

1. Si \mathcal{F} es una clase de R -módulos a izquierda (pre)enveloping entonces $\text{Hom}_R(M, \mathcal{F})$ es una clase de S -módulos a izquierda (pre)enveloping.

2. Si \mathcal{F} es una clase de S -módulos a izquierda (pre)covering entonces $M \otimes_S \mathcal{F}$ es una clase de R -módulos a izquierda (pre)covering.

Demostración. Los funtores $\text{Hom}_R(C, -)$ y $C \otimes_S -$ son adjuntos. ■

Vistos estos resultados, continuamos probando que las clases $\text{Add}_R(C)$ y $\text{Prod}_R(C^\vee)$, bajo determinadas condiciones sobre C , se pueden ver como otro tipo de clases con interesantes propiedades. Esta identificación la usaremos a lo largo de esta Memoria.

Es conocido (véase [27]) que si R es conmutativo y C es semidualizante entonces las clases $\text{Add}_R(C)$ y $C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$ coinciden. Comenzaremos extendiendo este resultado al caso no conmutativo y con restricciones significativas sobre C .

Proposición 5.1.3 *Si ${}_R C$ es auto-pequeño entonces $\text{Add}_R(C) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$.*

Demostración. Sea $C \otimes_S P \in C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$, como $P \in \mathcal{P}roj(S)$ existe Q tal que $P \oplus Q = S^{(I)}$ para algún conjunto I . Por tanto

$$(C \otimes_S P) \oplus (C \otimes_S Q) \cong C \otimes_S (P \oplus Q) = C \otimes_S S^{(I)} \cong C^{(I)}.$$

Luego $C \otimes_S P \subseteq \text{Add}_R(C)$.

Sea ahora $N \in \text{Add}_R(C)$, luego existe un módulo M tal que $N \oplus M = C^{(I)}$ para algún conjunto I , así

$$\text{Hom}_R(C, N) \oplus \text{Hom}_R(C, M) \cong \text{Hom}_R(C, C^{(I)}) \cong \text{Hom}_R(C, C)^{(I)} \cong S^{(I)}.$$

Esto implica que $\text{Hom}_R(C, N) \in \mathcal{P}roj(S)$ y que tenemos el isomorfismo natural

$$(C \otimes_S \text{Hom}_R(C, N)) \oplus (C \otimes_S \text{Hom}_R(C, M)) \cong C \otimes_S S^{(I)} \cong C^{(I)},$$

así tenemos los diagramas conmutativos dados por la unidad de la adjunción

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & C \otimes_S \text{Hom}_R(C, N) & \longrightarrow & C \otimes_S \text{Hom}_R(C, C^{(I)}) \\ & & \nu_N \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C^{(I)} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes_S \text{Hom}_R(C, C^{(I)}) & \longrightarrow & C \otimes_S \text{Hom}_R(C, N) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \nu_N & & \\ C^{(I)} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

que prueban que $N \cong C \otimes_S \text{Hom}_R(C, N)$. ■

Corolario 5.1.4 *Si ${}_R C$ es auto-pequeño entonces $\text{Add}_R(C)$ es precovering en $R\text{-Mod}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.1.3 y el Corolario 5.1.2. ■

Corolario 5.1.5 *Si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y ${}_S S$ es perfecto entonces la clase $\text{Add}_R(C)$ es covering en $R\text{-Mod}$.*

Corolario 5.1.6 *Si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y auto-pequeño entonces*

$$\mathcal{B}_C(R) = \mathcal{G}(C \otimes_S \text{Proj}(S), \text{Inj}(R)) = \mathcal{G}(\text{Add}_R(C), \text{Inj}(R)).$$

Demostración. Por [5, Proposition 5.4] tenemos que $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$ es un par adjunto semidualizante a izquierda. Aplicando el Corolario 3.4.3 tenemos la primera igualdad y aplicando la Proposición 5.1.3 tenemos la segunda. ■

Concerniente a las clase $\text{Hom}_R(C, \text{Inj}(R))$ y $\text{Prod}(C^\vee)$ tenemos.

Proposición 5.1.7 *Sea S un anillo, C un S -módulo a derecha auto-ortogonal que admite una resolución proyectiva de finitamente generados y $R = \text{End}_S(C)$. Entonces $\text{Prod}_S(C^\vee) = \text{Hom}_R(C, \text{Inj}(R))$.*

Demostración. La inclusión $\text{Hom}_R(C, \text{Inj}(R)) \subseteq \text{Prod}_S(C^\vee)$ es clara sin asumir ninguna condición sobre C .

Por otro lado, supongamos que C_S admite una resolución proyectiva de finitamente generados entonces $\mathcal{A}_C(S)$ es cerrada bajo productos, y por el Teorema 2.5.9 tenemos que $\text{Inj}(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. Como $C^\vee \in \mathcal{A}_C(S)$ tenemos que $\text{Prod}_S(C^\vee) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$.

Si tomamos $L \in \text{Prod}_S(C^\vee)$, $L \oplus K = (C^\vee)^J \cong \text{Hom}_R(C, E^J)$ para algún

$K \in S\text{-Mod}$, tenemos que

$$(C \otimes_S L) \oplus (C \otimes_S K) \cong C \otimes_S \text{Hom}_R(C, E^J) \cong E^J$$

(ya que $\mathcal{I}nj(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$). Por tanto como $\text{Hom}_R(C, C \otimes_S L) \oplus \text{Hom}_R(C, C \otimes_S K) \cong \text{Hom}_R(C, E^J)$, luego $L \cong \text{Hom}_R(C, C \otimes_S L) \in \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))$. ■

Corolario 5.1.8 Sean S cualquier anillo y C un S -módulo a derecha auto-ortogonal que admite una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces $\text{Prod}_S(C^\vee)$ es enveloping en $S\text{-Mod}$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.1.7 y el Corolario 5.1.2. ■

Corolario 5.1.9 Sean S cualquier anillo y C un S -módulo a derecha auto-ortogonal que admite una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces

$$\mathcal{A}_C(S) = \mathcal{G}(\text{Proj}(S), \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))) = \mathcal{G}(\text{Proj}(S), \text{Prod}_S(C^\vee)).$$

Demostración. Por el Teorema 2.5.8 tenemos que $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$ es un par adjunto semidualizante a derecha. Aplicando el Corolario 3.4.1 tenemos la primera igualdad y aplicando la Proposición 5.1.7 tenemos la segunda. ■

Ahora es el momento de estudiar condiciones para garantizar cuando un módulo es w-(co)tilting.

Recordemos que dada una subcategoría \mathcal{C} de $R\text{-Mod}$, un módulo $Q \in \mathcal{C}$ es Ext-proyectivo en \mathcal{C} si $Q \in {}^\perp \mathcal{C}$. El módulo Q es generador de \mathcal{C} si para todo $M \in \mathcal{C}$ existe una sucesión exacta $0 \rightarrow M' \rightarrow Q' \rightarrow M \rightarrow 0$ con $M' \in \mathcal{C}$ y $Q' \in \text{Add}_R(Q)$. Los módulos Ext-inyectivos y cogeneradores se definen dualmente.

Proposición 5.1.10 Sea \mathcal{C} una clase preenveloping de R -módulos a izquierda, con \mathcal{C} tal que contiene a la clase de todos los módulos inyectivos y con un generador Ext-proyectivo Q tal que $\text{Add}_R(Q) \subseteq \mathcal{C}$. Entonces Q es w-tilting.

Demostración. Como Q es Ext-proyectivo en \mathcal{C} y $\text{Add}_R(Q) \subseteq \mathcal{C}$ tenemos inmediatamente que Q es Σ -auto-ortogonal. Lo único que falta es encontrar una $\text{Add}_R(Q)$ -corresolución de R .

Comenzamos eligiendo una \mathcal{C} -preenvolvente $g_0 : R \rightarrow T_0$ de R . Como \mathcal{C} es coresolving, \mathcal{C} contiene los módulos inyectivos, así la envolvente inyectiva $E(R)$ está en \mathcal{C} y tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{g_0} & T_0 \\ \downarrow & \swarrow \text{---} & \\ E(R) & & \end{array}$$

se puede completar de forma conmutativa. De esta forma tenemos que toda \mathcal{C} -preenvolvente (en particular g_0) es mónica.

Ahora, como Q es generador en \mathcal{C} existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y_0 \rightarrow Q_0 \xrightarrow{\alpha} T_0 \rightarrow 0$$

con $Q_0 \in \text{Add}_R(Q)$ e $Y_0 \in \mathcal{C}$. Entonces cualquier $f_0 \in \text{Hom}_R(R, Q_0)$ con $\alpha f_0 = g_0$ (R es proyectivo) es una \mathcal{C} -preenvolvente mónica ya que cualquier morfismo $h : R \rightarrow X$ con $X \in \mathcal{C}$ se tiene la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{g_0} & & \\ R & \xrightarrow{f_0} & Q_0 & \xrightarrow{\alpha} & T_0 \\ \downarrow & & & & \\ & & & & X \end{array}$$

Pero g_0 es una \mathcal{C} -preenvolvente entonces existe una $h_0 : T_0 \rightarrow X$ que completa el diagrama de forma conmutativa y entonces $h_0 \alpha : Q_0 \rightarrow X$ demuestra que f_0 es una preenvolvente.

De esta forma, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{f_0} Q_0 \rightarrow K_0 \rightarrow 0$$

es también $\text{Hom}_R(-, \mathcal{C})$ -exacta, y como $\text{Ext}_R^{\geq 1}(Q_0, \mathcal{C}) = 0$ (Q es Ext-proyectivo en \mathcal{C} y por tanto Q_0 lo es también) tenemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K_0, \mathcal{C}) = 0$. Podemos hacer lo mismo sustituyendo R por K_0 , y tendríamos K_1 . Continuando indefinidamente con un argumento parecido tendríamos una $\text{Add}_R(Q)$ -corresolución

$$0 \rightarrow R \rightarrow Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow \cdots .$$

■

Dualmente, tenemos:

Proposición 5.1.11 *Sea \mathcal{C} una clase precovering en $R\text{-Mod}$, tal que contiene a la clase de módulos proyectivos y con un módulo cogenerador Ext-inyectivo D tal que $\text{Prod}_R(D) \subseteq \mathcal{C}$. Entonces D es w -cotilting.*

Ahora daremos resultados con condiciones suficientes sobre C para que $\text{Add}_R(C)$ sea precovering en $\mathcal{B}_C(R)$ y $\text{Prod}_S(C^\vee)$ sea preenveloping en $\mathcal{A}_C(S)$.

Proposición 5.1.12 *Si ${}_R C$ es auto-pequeño y Σ -auto-ortogonal entonces cualquier módulo en $\mathcal{B}_C(R)$ tiene una $\text{Add}_R(C)$ -precubierta con el núcleo en $\mathcal{B}_C(R)$.*

Demostración. Por [5, Proposition 5.4] tenemos que $\mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$ entonces podemos aplicar [26, Theorem 2.14] y para cualquier $M \in \mathcal{B}_C(C)$ tenemos una $C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$ -precubierta épica $\gamma : L \rightarrow M$. Pero la Proposición 5.1.3 dice que $\text{Add}_R(C) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$ por lo que hemos encontrado una $\text{Add}_C(R)$ -precubierta épica $\gamma : L \rightarrow M$ de M .

Ahora, como ${}_R C$ es auto-pequeño y Σ -auto-ortogonal se tiene la inclusión $\text{Add}_R(C) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$, luego $L \in \mathcal{B}_C(R)$. Y que $L, M \in \mathcal{B}_C(R)$ implica $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, L) = \text{Ext}_R^{\geq 1}(C, M) = 0$, así aplicando $\text{Hom}_R(C, -)$ sobre la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow L \xrightarrow{\gamma} M \rightarrow 0$$

tenemos inmediatamente que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, \text{Ker } \gamma) = 0$.

Similarmente, que $L, M \in \mathcal{B}_C(R)$ implica que $\text{Tor}_{\geq 1}^S(C, \text{Hom}_R(C, M)) = 0$, así aplicando $C \otimes_S -$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, \text{Ker } \gamma) \rightarrow \text{Hom}_R(C, L) \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow 0$$

tenemos que

$$\text{Tor}_{\geq 1}^S(C, \text{Hom}_R(C, \text{Hom}_R(C, \text{Ker } \gamma))) \cong \text{Tor}_{\geq 1}^S(C, \text{Hom}_R(C, L)) = 0$$

con $L \in \mathcal{B}_C(R)$.

Finalmente, el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C \otimes_S \text{Hom}_R(C, \text{Ker } \gamma) & \longrightarrow & C \otimes_S (C, L) & \longrightarrow & C \otimes_S \text{Hom}_R(C, M) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \gamma & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

prueba que $\text{Ker } \gamma \cong C \otimes_S \text{Hom}_R(C, \text{Ker } \gamma)$ canónicamente. ■

Proposición 5.1.13 *Si C_S es auto-ortogonal, tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y $\text{End}_S(C) \cong R$ canónicamente, entonces cualquier $N \in \mathcal{A}_C(S)$ tiene una $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -envolvente mónica con conúcleo en $\mathcal{A}_C(S)$.*

Demostración. Aplicando la Proposición 5.1.7 tenemos que $\text{Prod}_S(C^\vee) = \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))$, y por el Teorema 2.5.9 que $\mathcal{I}nj(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$, luego $\text{Prod}_S(C^\vee) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$. Entonces, aplicando el [26, Theorem 2.11] encontramos una $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -preenvolvente mónica $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} T$. Además, por el Corolario 5.1.8 existe una $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -envolvente de N que es mónica por tener una $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -preenvolvente mónica.

Ahora, aplicando $\text{Hom}_S(-, C^\vee)$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow 0$$

inmediatamente tenemos $\text{Ext}_S^{\geq 1}(A, C^\vee) = 0$ ya que $N, T \in \mathcal{A}_C(S)$, así

$$\text{Tor}_{\geq 1}^S(C, A)^\vee \cong \text{Ext}_S^{\geq 1}(A, C^\vee) = 0$$

y entonces $\text{Tor}_{\geq 1}^S(C, A) = 0$ y tenemos A1.

Pero la sucesión

$$0 \rightarrow C \otimes_S N \rightarrow C \otimes_S T \rightarrow C \otimes_S A \rightarrow 0$$

es también exacta y aplicando $\text{Hom}_R(C, -)$ se tiene que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, C \otimes_S A) = 0$ ya que $N, T \in \mathcal{A}_C(S)$, y el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, C \otimes_S N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, C \otimes_S T) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, C \otimes_S A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & T & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

que demuestra que $\text{Coker } \alpha \cong A \cong \text{Hom}_R(C, C \otimes_S A)$ canónicamente. ■

5.2 — Teorías de cotorsión a partir de clases de Foxby

Comencemos viendo que cuando ${}_R C$ es w-tilting entonces la clase de Bass, $\mathcal{B}_C(R)$, se puede ver como la clase ortogonal de la suma de todos los conúcleos

de cualquier $\text{Add}_R(C)$ -corresolución exacta de R , todo esto cuando ${}_R C$ es auto-pequeño.

Teorema 5.2.1 *Sea C un R -módulo a izquierda auto-pequeño y w -tilting y sea*

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{t_0} C_0 \xrightarrow{t_1} C_1 \rightarrow \dots$$

una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución exacta de R . Entonces

$$\mathcal{B}_C(R) = (C \oplus (\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Coker } t_i))^{\perp}.$$

Demostración. Llamamos $K_i = \text{Coker } t_i$, $i \geq 0$, $K = C \oplus (\bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i)$ y tomamos cualquier $M \in \mathcal{B}_C(R)$. Por la Proposición 5.1.13 sabemos que M tiene una $\text{Add}_R(C)$ -precubierta épica $\gamma : L \rightarrow M$ con $\text{Ker } \gamma \in \mathcal{B}_C(R)$, así la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow L \xrightarrow{\gamma} M \rightarrow 0$$

es $\text{Hom}_R(C, -)$ -exacta.

Aplicando $\text{Hom}_R(-, M)$ y $\text{Hom}_R(-, L)$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{t_0} C_0 \rightarrow K_0 \rightarrow 0$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas, notando por

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(K_0, L) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C_0, L) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R, L) \longrightarrow 0 \\ & & \text{Hom}_R(K_0, \gamma) \downarrow & & \text{Hom}_R(C_0, \gamma) \downarrow & & \text{Hom}_R(R, \gamma) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(K_0, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C_0, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(K_0, M) \end{array}$$

con $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C_0, M) = 0$ (y así $\text{Ext}_R^{\geq 2}(K_0, M) = 0$) ya que $M \in \mathcal{B}_C(R)$.

Ahora, la conmutatividad del diagrama prueba que $\text{Hom}_R(t_0, M)$ es un epimorfismo así vemos que $\text{Ext}_R^1(K_0, M) = 0$, luego $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K_0, H) = 0$ para todo $H \in \mathcal{B}_C(R)$.

Ahora, para todo $j \geq 0$ tenemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C_{j+1}, M) = 0$ ya que $C_{j+1} \in \text{Add}_R(C)$ y $M \in \mathcal{B}_C(R)$, así aplicando $\text{Hom}_R(-, M)$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_j \rightarrow C_{j+1} \rightarrow K_{j+1} \rightarrow 0$$

tenemos de la sucesión exacta larga que $\text{Ext}_R^i(K_j, M) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(K_{j+1}, M)$ $\forall i \geq 1$.

Por otro lado, aplicando $\text{Hom}_R(K_j, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } \gamma \rightarrow L \xrightarrow{\gamma} M \rightarrow 0,$$

y observemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K, L) = 0$ ($0 \rightarrow R \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots$ es una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución) inmediatamente se ve que

$$\text{Ext}_R^i(K_j, M) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(K_j, \text{Ker } \gamma)$$

para todo $i \geq 1$.

De esta forma tenemos

$$\text{Ext}_R^{i+1}(K_j, \text{Ker } \gamma) \cong \text{Ext}_R^i(K_j, M) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(K_{j+1}, M) \quad \forall i \geq 1, \forall j \geq 0.$$

Pero sabemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K_0, H) = 0$ para todo H en $\mathcal{B}_C(R)$ y $\text{Ker } \gamma \in \mathcal{B}_C(R)$ así $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K_1, M) = 0$ y entonces, por inducción, vemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K_j, M) = 0 \forall j \geq 0$ y así $\text{Ext}_R^{\geq 1}(K, M) = 0$.

A la inversa, $\mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$ ([5, Proposition 5.4]) y cualquier $M \in K^\perp$ están en C^\perp , así por el [26, Theorem 2.14] es suficiente probar que M tiene una $\text{Add}_R(C)$ -resolución exacta (Proposición 5.1.3).

Sea $R^{(X)} \rightarrow M$ un epimorfismo, consideramos los morfismos $\oplus t_0 : R^{(X)} \rightarrow C_0^{(X)}$ y construimos el pushout

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & R^{(X)} & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & C_0^{(X)} & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & K_0^{(X)} & \equiv & K_0^{(X)} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Como $\text{Ext}_R^1(K_0^{(X)}, M) \cong \text{Ext}_R^1(K_0, M)^X = 0$, la columna de la derecha escinde entonces existe un epimorfismo $C_0^{(X)} \rightarrow M$, luego toda $\text{Add}_R(C)$ -precubierta de M (que existe por el Corolario 5.1.4) es épica.

Ahora, aplicando $\text{Hom}_R(K_i, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow M \rightarrow 0$$

tenemos que $0 = \text{Ext}_R^j(K_i, M) \cong \text{Ext}_R^{j+1}(K_i, B) \forall j \geq 1, \forall i \geq 0$, y aplicando $\text{Hom}_R(C, -)$ que $B \in C^\perp$, pero la sucesión exacta larga obtenida de

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow C_{i+1} \rightarrow K_{i+1} \rightarrow 0$$

después de aplicar $\text{Hom}_R(-, B)$ se tiene $\text{Ext}_R^j(K_i, B) \cong \text{Ext}_R^{j+1}(K_{i+1}, B) = 0 \forall j \geq 0, i \geq 0$, esto es, $B \in K^\perp$. Podemos repetir este proceso hasta encontrar una $\text{Add}_R(C)$ -resolución exacta de M . ■

Ahora es fácil ver que, cuando C satisface las condiciones del Teorema 5.2.1, $\mathcal{B}_C(R)$ es la clase de la derecha de una teoría de cotorsión que es completa y hereditaria.

Corolario 5.2.2 *Si ${}_R C$ es auto-pequeño y w -tilting entonces $({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ es una teoría de cotorsión completa y hereditaria. En particular $\mathcal{B}_C(R)$ es preenveloping especial y ${}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R)$ es precovering especial.*

Demostración. Si llamamos $K = C \oplus (\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Coker } t_i)$ al módulo del Teorema 5.2.1, entonces sabemos que $\mathcal{B}_C(R) = K^\perp$. Ahora, elegimos cualquier representación proyectiva de K ,

$$\cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0,$$

llamamos $L_i = \text{Ker}(P_{i-1} \rightarrow P_{i-2})$ (siendo $P_{-1} = K$) y consideramos el módulo $X = K \oplus (\bigoplus L_i)$. Afirmamos que $\mathcal{B}_C(R) = X^{\perp 1}$.

Para cualquier R -módulo a izquierda A tenemos

$$\text{Ext}_R^1(X, A) \cong \text{Ext}_R^1(K, A) \times \left(\prod \text{Ext}_R^1(L_i, A) \right),$$

y por supuesto $\text{Ext}_R^1(L_i, A) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(K, A)$, así

$$\text{Ext}_R^1(X, A) \cong \prod_{i \geq 1} \text{Ext}_R^i(K, A).$$

De esta forma vemos que $X^{\perp 1} = K^\perp = \mathcal{B}_C(R)$, dicho de otro modo, el par $({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ es cogenerado por el conjunto X . Esto claramente implica que esto es una teoría de cotorsión por

$$\left({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R) \right)_{\perp 1} = \left({}^{\perp 1}(K^\perp) \right)^{\perp 1} = \left({}^{\perp 1}(X^{\perp 1}) \right)^{\perp 1} = X^{\perp 1} = \mathcal{B}_C(R).$$

Ahora, es bien conocido que cuando una teoría de cotorsión cogenerada por un conjunto entonces ésta es completa (por [18, Theorem 7.4.1]) y $\mathcal{B}_C(R)$ es cerrada bajo extensiones y conúcleos de monomorfismos ([5, Proposition 5.6]) así esta es una clase coresolving, así aplicando [25, Theorem 1.2.10] tenemos que $({}^\perp\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ es también hereditaria. ■

Ahora enunciamos la versión no conmutativa de [31, Definition 2.1].

Definición 5.2.3 Un par de dualidad a izquierda sobre R es un par $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$, donde \mathcal{M} es una clase de R -módulos a izquierda y \mathcal{C} es una clase de R -módulos a derecha, que cumple:

1. Para un $M \in R\text{-Mod}$ se tiene: $M \in \mathcal{M}$ si, y solo si $M^+ \in \mathcal{C}$.
2. \mathcal{C} es cerrado bajo sumandos directos y sumas directas finitas.

Análogamente se define un par de dualidad a derecha con \mathcal{M} en $\text{Mod-}R$ y \mathcal{C} en $R\text{-Mod}$.

Un par de dualidad a izquierda $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ se dice cerrado bajo (co)productos si la clase \mathcal{M} es cerrada bajo (co)productos en la categoría $R\text{-Mod}$.

Un par de dualidad a izquierda $(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ se llama perfecto si es cerrado bajo coproductos, \mathcal{M} es cerrada bajo extensiones y $R \in \mathcal{M}$.

Queremos comprobar que $\mathcal{A}_C(R)$, $\mathcal{A}_C(S)$, $\mathcal{B}_C(R)$ y $\mathcal{B}_C(S)$ son covering.

Comenzamos el camino con el siguiente resultado, que es una versión que generaliza a [33, Proposition 7.2].

Proposición 5.2.4 *Si ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces:*

1. $M \in \mathcal{A}_C(S) \Leftrightarrow M^+ \in \mathcal{B}_C(S)$.
2. $M \in \mathcal{B}_C(R) \Leftrightarrow M^+ \in \mathcal{A}_C(R)$.

Si S es cualquier anillo, C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y $R = \text{End}_S(C)$ entonces:

1. $M \in \mathcal{A}_C(R) \Leftrightarrow M^+ \in \mathcal{B}_C(R)$.
2. $M \in \mathcal{B}_C(S) \Leftrightarrow M^+ \in \mathcal{A}_C(S)$.

Demostración. Probaremos la primera parte, la segunda es similar.

1. Sea M un S -módulo a izquierda. En primer lugar como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo entonces por [18, Theorem 3.2.1], para cada $i \geq 1$, tenemos

$$\text{Ext}_S^i(C, M^+) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_i^S(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_i^S(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow \text{Tor}_i^S(C, M) = 0.$$

Ahora, aplicando en primer lugar la adjunción entre el Hom y el tensor, y después, como C tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo, para cada $i \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tor}_i^R(\text{Hom}_S(C, M^+), C) &\cong \text{Tor}_i^R(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C \otimes_S M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), C) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Ext}_R^i(C, C \otimes_S M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Ext}_R^i(C, C \otimes_S M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow \text{Ext}_R^i(C, C \otimes_S M) = 0.$$

Por último, aplicamos la adjunción entre Hom y el tensor y, como C es finitamente presentado y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, por [18, Theorem 3.2.11], tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(C, M^+) \otimes_R C &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C \otimes_S M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_R C \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_R(C, C \otimes_S M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo por [18, Lemma 3.2.8] tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_R(C, C \otimes_S M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = M^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{Hom}_R(C, C \otimes_S M) \cong M. \end{aligned}$$

2. Sea M un R -módulo a izquierda. En primer lugar, como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo y ${}_R C$ admite una resolución proyectiva de finitamente generados, tenemos

$$\text{Tor}_i^R(M^+, C) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Ext}_R^i(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \forall i \geq 1,$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}_R^i(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ext}_R^i(C, M) = 0.$$

En segundo lugar, como ${}_R C$ es finitamente presentado y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo, por [18, Theorem 3.2.11] y [18, Theorem 3.2.1] tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_S^i(C, M^+ \otimes_R C) &\cong \mathrm{Ext}_S^i(C, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_i^S(C, \mathrm{Hom}_R(C, M)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}_i^S(C, \mathrm{Hom}_R(C, M)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_i^S(C, \mathrm{Hom}_R(C, M)) = 0.$$

Por último, como ${}_R C$ es finitamente presentado y \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo entonces por [18, Theorem 3.2.11] y por la adjunción entre Hom y el tensor tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(C, M^+ \otimes_R C) &\cong \mathrm{Hom}_S(C, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_R(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C \otimes_S \mathrm{Hom}_R(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es cogenerador inyectivo por [18, Lemma 3.2.8] tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C \otimes_S \mathrm{Hom}_R(C, M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = M^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C \otimes_S \mathrm{Hom}_R(C, M) \cong M. \end{aligned}$$

■

Corolario 5.2.5 *Si ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces:*

1. $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{B}_C(S))$ es un par de dualidad a izquierda sobre S cerrado bajo coproductos y $\mathcal{A}_C(S)$ es cerrada bajo extensiones. Si, además, ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal entonces el par de dualidad a izquierda es perfecto.
2. $(\mathcal{B}_C(R), \mathcal{A}_C(R))$ es un par de dualidad a izquierda sobre R cerrado bajo coproductos.

Si, además, C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados, entonces los pares $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{B}_C(S))$ y $(\mathcal{B}_C(R), \mathcal{A}_C(R))$ son también cerrados bajo productos.

Por otro lado, si C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces

1. $(\mathcal{A}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ es un par de dualidad a derecha sobre R cerrado bajo coproductos y $\mathcal{A}_C(R)$ es cerrada bajo extensiones. Si, además, C_S es Σ -auto-ortogonal entonces el par de dualidad a derecha es perfecto.
2. $(\mathcal{B}_C(S), \mathcal{A}_C(S))$ es un par de dualidad a derecha sobre S cerrado bajo coproductos.

Si, además, ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados, entonces los pares $(\mathcal{A}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ y $(\mathcal{B}_C(S), \mathcal{A}_C(S))$ son también cerrados bajo productos.

Demostración. Por la Proposición 5.2.4 vemos que los pares son pares de dualidad a izquierda.

Por supuesto son cerrados bajo coproductos, y por la Proposición [5, Proposition 5.4] $\mathcal{A}_C(S)$ es cerrada bajo extensiones. Si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal entonces $\mathcal{A}_C(S)$ contiene todos los S -módulos proyectivos otra vez por [5, Proposition 5.4].

Finalmente, si C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces claramente $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$ son cerradas bajo productos.

2. es el dual de 1. ■

Con las herramientas desarrolladas hasta ahora, podemos responder varias de las preguntas planteadas al principio de este capítulo. Esta respuesta generaliza [31, Theorem 3.2] y mejora [8, Theorem 4.4].

Teorema 5.2.6 1. Si ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces:

- a) Las clases $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$ son *covering*.
- b) Si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal entonces $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1})$ es una teoría de cotorsión perfecta.

2. Si ${}_R C$ y C_S tienen resoluciones proyectivas de finitamente generados

- entonces las clases $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$ son preenveloping.
3. Si C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces:
 - a) Las clases $\mathcal{A}_C(R)$ y $\mathcal{B}_C(S)$ son covering.
 - b) Si C_S es Σ -auto-ortogonal entonces $(\mathcal{A}_C(R), \mathcal{A}_C(R)^{\perp_1})$ es una teoría de cotorsión perfecta.
 4. Si ${}_R C$ y C_S tienen resoluciones proyectivas de finitamente generados entonces las clases $\mathcal{A}_C(R)$ y $\mathcal{B}_C(S)$ son preenveloping.

Demostración. 1. Por el Corolario 4.7 $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{B}_C(S))$ y $(\mathcal{B}_C(R), \mathcal{A}_C(R))$ son pares de dualidad a izquierda cerrados bajo coproductos, así por [31, Theorem 3.1] $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$ son covering.

Ahora, si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal entonces $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp_1})$ es perfecto, así otra vez por [31, Theorem 3.1] es una teoría de cotorsión perfecta.

2. Si C_S también tiene una resolución proyectiva de finitamente generados entonces $\mathcal{A}_C(S)$ y $\mathcal{B}_C(R)$ son cerradas bajo productos y entonces por [31, Theorem 3.1, (a)] tenemos que son preenveloping.

3. y 4. se tienen por argumentos duales. ■

Corolario 5.2.7 *Supongamos que ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces el par $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp_1})$ es una teoría de cotorsión hereditaria si, y solamente si, C es Σ -auto-ortogonal.*

Demostración. Si $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp_1})$ es una teoría de cotorsión entonces se tiene $\mathcal{A}_C(S) = {}^{\perp_1}(\mathcal{A}_C(S)^{\perp_1})$ y así $\mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$. Entonces, por [5, Proposition 5.4], tenemos que C es Σ -auto-ortogonal.

A la inversa, si ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal entonces $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp_1})$ es una teoría de cotorsión por el Teorema 5.2.6 y así, otra vez, $\mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$, y si $A \in \mathcal{A}_C(S)$ y

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

es exacta con P un S -módulo a izquierda proyectivo, entonces $K \in \mathcal{A}_C(S)$ ([5, Proposition 5.4]). De esta forma, para cualquier $M \in \mathcal{A}_C(S)^{\perp_1}$, la exactitud de la sucesión

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_S^{i+1}(A, M) \rightarrow \text{Ext}_S^{i+1}(P, M) \rightarrow \text{Ext}_S^{i+1}(K, M) \rightarrow \cdots$$

demuestra, usando inducción, que $\text{Ext}_S^{\geq 1}(A, M) = 0$, y por tanto $M \in \mathcal{A}_C(S)^\perp$. ■

Usando el Teorema 5.2.6 y la Proposición 5.1.10 podemos ver qué condiciones necesitamos sobre C y $\mathcal{B}_C(R)$ para conseguir que ${}_R C$ sea w-tilting.

Corolario 5.2.8 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y auto-pequeño, que C_S es auto-ortogonal, que $R \cong \text{End}_S(C)$ canónicamente y que ${}_R C$ y C_S tienen resoluciones proyectivas de finitamente generados. Entonces $\mathcal{B}_C(R)$ es una clase preenveloping y coresolving, ${}_R C$ es un generador Ext-proyectivo de $\mathcal{B}_C(R)$ y $\text{Add}_R(C) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. Como consecuencia, ${}_R C$ es w-tilting.*

Demostración. La clase $\mathcal{B}_C(R)$ es preenveloping (Teorema 5.2.6), coresolving (Teorema 2.5.9), $\text{Add}_R(C) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$ ([5, Proposition 5.6]) y por supuesto ${}_R C$ es Ext-proyectivo en $\mathcal{B}_C(R)$ por definición.

Ahora, cualquier $B \in \mathcal{B}_C(R)$ tiene una $\text{Add}_R(C)$ -precubierta épica con núcleo en $\mathcal{B}_C(R)$ (Proposición 5.1.12), así C es un generador en $\mathcal{B}_C(R)$.

Finalmente, por la Proposición 5.1.10 tenemos que ${}_R C$ es w-tilting. ■

De forma similar tenemos.

Corolario 5.2.9 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y auto-pequeño y Hom-fiel, que C_S es auto-ortogonal, que $R \cong \text{End}_S(C)$ canónicamente y que ${}_R C$ y C_S tienen resoluciones proyectivas de finitamente generados. Entonces $\mathcal{A}_C(S)$ es una clase precovering y resolving, C^\vee es un cogenerador Ext-inyectivo de $\mathcal{A}_C(S)$ y $\text{Prod}_S(C) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$. Como consecuencia, C^\vee es w-tilting.*

Demostración. El Teorema 5.2.6 muestra que $\mathcal{A}_C(S)$ es a la vez covering y preenveloping, $\mathcal{A}_C(S)$ es resolving por [5, Proposition 5.4], C^\vee es cogenerador de $\mathcal{A}_C(S)$ por la Proposición 5.1.13 y es Ext-inyectiva por [18, Theorem 3.2.1] y $\text{Prod}_S(C^\vee) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$ por el Teorema 2.5.9. Por tanto C^\vee es w-cotilting por la Proposición 5.1.11. ■

CAPÍTULO 6

EXISTENCIA DE PRECUBIERTAS Y PREENVOLVENTES GORENSTEIN RELATIVAS

En este capítulo estudiaremos condiciones sobre C para que las clases Gorenstein relativas tengan precubiertas o preenvolventes. Nos referimos a las clases Gorenstein C -inyectivas y C -proyectivas y las clases G_C -proyectivas, G_C -inyectivas y G_C -planas.

6.1 — Precubiertas Gorenstein C -proyectivas y preenvolventes Gorenstein C -inyectivas

En primer lugar, abordamos la siguiente pregunta: ¿cuándo son las clases de sicigias de $\text{Add}_R(C)$ -resoluciones completas y $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -resoluciones completas precovering y preenveloping, respectivamente? Es decir, las clases $C\text{-GProj}(R)$ y $C\text{-GInj}(S)$ de módulos Gorenstein C -proyectivos y módu-

los Gorenstein C -inyectivos introducidas en [27], ¿cuándo son precovering y preenveloping, respectivamente?

Como aplicaciones veremos que, de forma dual al Teorema 5.2.1, la clase de Auslander también se puede calcular a partir de los conúcleos de una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución de R cuando C es w-tilting. También podremos calcular la intersección de la clase de Bass con su clase 1-ortogonal izquierda, y la clase de Auslander con su clase 1-ortogonal derecha, obteniendo precisamente las clases de módulos C -proyectivos e C -inyectivos respectivamente.

Merece la pena señalar que cuando ${}_R C$ es auto-pequeño, la clase de módulos C -proyectivos no es otra que $\text{Add}_R(C)$ (Proposición 5.1.3), así los módulos G_C -proyectivos en realidad son $\mathcal{G}(\text{Proj}(R), C \otimes_S \text{Proj}(S))$, es decir, las cero sicigias del complejo exacto y $\text{Hom}_R(-, C \otimes_S \text{Proj}(S))$ -exacto

$$\dots \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow C \otimes P_0 \rightarrow C \otimes P_1 \rightarrow \dots$$

con todos P^i proyectivos en $R\text{-Mod}$ y todos P_i proyectivos en $\text{Mod-}S$.

Similarmente, si C_S es Σ -auto-ortogonal con una resolución proyectiva de finitamente generados y $R = \text{End}_S(C)$ entonces las clases de módulos C -inyectivos coincide con $\text{Prod}_S(C^\vee)$ (Proposición 5.1.7) y también se tiene $G_C \text{Inj}(S) = \mathcal{G}(\text{Hom}_R(C, \text{Inj}(R)), \text{Inj}(S))$.

Comenzaremos con el caso de $\text{Prod}_S(C^\vee)$ -resoluciones completas. Pero antes necesitaremos los siguientes resultados.

Lema 6.1.1 *Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un functor adjunto a izquierda de $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ y μ, ν la unidad y la counidad de la adjunción respectivamente. Si $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ son dos objetos tales que ν_A y $\mu_{G(B)}$ son isomorfismos entonces, para cualquier morfismo $f : G(A) \rightarrow G(B)$ se tiene $G(\nu_B F(f) \nu_A^{-1}) = f$.*

Demostración. Sabemos que $G(\nu_A) \mu_{G(A)} = 1_{G(A)}$, así como ν_A es un isomorfismo implica que $\mu_{G(A)}$ también lo es y $G(\nu_A) = \mu_{G(A)}^{-1}$. Similarmente, $G(\nu_B) = \mu_{G(B)}^{-1}$.

$$\text{De esta forma, } G(\nu_B F(f) \nu_A^{-1}) = \mu_{G(B)}^{-1} G F(f) \mu_{G(A)}.$$

Ahora, de la naturalidad de μ tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{f} & G(B) \\ \mu_{G(A)} \downarrow & & \downarrow \mu_{G(B)} \\ GF G(A) & \xrightarrow[GF(f)]{\cong} & GF G(B) \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $\mu_{G(B)}^{-1} GF(f) \mu_{G(A)} = f$ como queríamos. \blacksquare

Proposición 6.1.2 *Supongamos que ${}_R C$ es Hom-fiel, C_S es \otimes_S -fiel, tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y $C^\vee \in \mathcal{A}_C(S)$. Entonces*

$$C\text{-}GInj(S) = \text{Hom}_R(C, GInj(R) \cap \mathcal{B}_C(R)).$$

Demostración. Comenzamos aplicando Teorema 2.5.8 para obtener que $R \cong \text{End}_S(C)$ y que C_S es Σ -auto-ortogonal. Entonces, por la Proposición 5.1.7, tenemos $\text{Prod}_S(C^\vee) = \text{Hom}_R(C, Inj(R))$.

De esta forma, si $M \in C\text{-}GInj(S)$ tomamos una $\text{Hom}_R(C, Inj(R))$ -resolución completa de M

$$\mathbf{X}_\bullet : \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_{-1}) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_0) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_1) \rightarrow \cdots$$

Llamando $K_i = \text{Ker}(X_i \rightarrow X_{i+1})$ (Así $M = K_1$). Es claro que $K_i \in C\text{-}GInj(S) \forall i$, así, de nuevo por Teorema 2.5.8, $K_i \in \mathcal{A}_C(S) \forall i$ y entonces $C \otimes_S K_i \in \mathcal{B}_C(R) \forall i$.

Así tensorizando con C , como $C \otimes_S \text{Hom}_R(C, E_i) \cong E_i \forall i$, tenemos el complejo

$$C \otimes_S \mathbf{X}_\bullet : \cdots \rightarrow E_{-1} \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots$$

Ahora, para cada i tenemos las sucesiones

$$0 \rightarrow C \otimes_S K_i \rightarrow E_i \rightarrow C \otimes_S K_{i-1} \rightarrow 0$$

son exactas, ya que $K_{i+1} \in \mathcal{A}_C(S)$ ($\text{Tor}_{\geq 1}^S(C, K_{i+1}) = 0$), y por tanto, $C \otimes_S \mathbf{X}_\bullet$ es exacto.

Veamos que son $\text{Hom}_R(E, -)$ -exactas, y por tanto también lo será $C \otimes_S \mathbf{X}_\bullet$. Sea $E \rightarrow C \otimes_S K_{i-1}$ con $E \in Inj(R)$ y aplicamos el funtor $\text{Hom}_R(C, -)$

y como $K_i \in \mathcal{A}_C(S)$ entonces $\text{Hom}_R(C, C \otimes_S K_i) \cong K_i$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{Hom}_R(C, E) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, E_i) & \longrightarrow & K_{i-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

que es una sucesión $\text{Hom}_S(\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)), -)$ -exacta, luego existe un morfismo $\text{Hom}_R(C, E) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_i)$ que factoriza a $\text{Hom}_R(C, E) \rightarrow K_{i-1}$. Tensorizando otra vez lo tenemos.

Sea $N \in \mathcal{G}\mathcal{I}nj(R) \cap \mathcal{B}_C(R)$, existe una sucesión exacta y $\text{Hom}_R(E, -)$ exacta

$$\mathbf{E}_\bullet : \cdots \rightarrow E_{-2} \rightarrow E_{-1} \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots$$

tales que $E_i \in \mathcal{I}nj(R)$ y $N = \text{Ker}(E_0 \rightarrow E_1)$. Llamamos $L_i = \text{Ker}(E_i \rightarrow E_{i+1})$ tenemos que están en $\mathcal{G}\mathcal{I}nj(R)$, y también en $\mathcal{B}_C(R)$ por [5, Proposition 5.6].

Ahora, aplicando el funtor $\text{Hom}_R(C, -)$ tenemos las sucesiones exactas ($L_i \in \mathcal{B}_C(R)$)

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, L_i) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_i) \rightarrow \text{Hom}_R(C, L_{i+1}) \rightarrow 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Veamos que son $\text{Hom}_S(\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)), -)$ -exactas. Sea un morfismo $f : \text{Hom}_R(C, E) \rightarrow \text{Hom}_R(C, L_{i+1})$ con $E \in \mathcal{I}nj(R)$. Veamos que podemos completar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{Hom}_R(C, E) & & \\
 & & & & \downarrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, L_i) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, E_i) & \xrightarrow{\text{Hom}(C, \delta_i)} & \text{Hom}_R(C, L_{i+1}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

de forma conmutativa.

Tensorizando con $C \otimes_S -$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & E & & \\
 & & & & \downarrow \nu_{L_{i+1}}(1_C \otimes f)\nu_E^{-1} & & \\
 0 & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & E_i & \longrightarrow & K_{i+1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

como todo L_i y todo E_i están en $\mathcal{B}_C(R)$, donde

$$\nu_E : C \otimes_S \text{Hom}_R(C, E) \rightarrow E$$

es un homomorfismo natural dado en la definición de las clases de Bass, es decir, la counidad de la adjunción $(C \otimes_S -, \text{Hom}_R(C, -))$.

Pero \mathbf{E}_\bullet es $\text{Hom}(\mathcal{I}nj(R), -)$ -exacta, luego existe $g : E \rightarrow E_i$ que hace el diagrama anterior conmutativo. Aplicando otra vez $\text{Hom}_R(C, -)$ tenemos $\text{Hom}_R(C, g) : \text{Hom}_R(C, E) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_i)$ tal que

$$\text{Hom}_R(C, \delta_i) \text{Hom}_R(C, g) = \text{Hom}_R(C, \nu_{L_{i+1}}(1_C \otimes f) \nu_E^{-1}),$$

y $\text{Hom}_R(C, \nu_{L_{i+1}}(1_C \otimes f) \nu_E^{-1}) = f$ por el Lema 6.1.1, como queríamos.

Con el mismo razonamiento se prueba, que las sucesiones

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, L_i) \rightarrow \text{Hom}_R(C, E_i) \rightarrow \text{Hom}_R(C, L_{i+1}) \rightarrow 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

son $\text{Hom}_S(-, \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)))$ -exactas ■

Corolario 6.1.3 *Supongamos que ${}_R C$ es Hom-fiel, que C_S es \otimes -fiel, tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y $C^\vee \in \mathcal{A}_C(S)$. Si $\text{id}_R(C) < \infty$ entonces C - $G\mathcal{I}nj(S) = \text{Hom}_R(C, G\mathcal{I}nj(R))$.*

Además, si R es noetheriano a izquierda entonces C - $G\mathcal{I}nj(S)$ es preenveloping.

Demostración. Por el Teorema 2.5.8 tenemos que $\mathcal{I}nj(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$, así por [8, Proposition 3.2] tenemos que $G\mathcal{I}nj(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. Entonces aplicando la Proposición 6.1.2 tenemos la primera parte.

Ahora, si R es noetheriano a izquierda entonces $G\mathcal{I}nj(R)$ es preenveloping en $R\text{-Mod}$, así por el Corolario 5.1.2 $\text{Hom}_R(C, G\mathcal{I}nj(R))$ es preenveloping en $S\text{-Mod}$. ■

Ahora daremos los resultados duales concernientes a $\text{Add}_R(C)$ -resoluciones completas. Omitimos la demostración por utilizar los argumentos duales.

Proposición 6.1.4 *Sea ${}_R C$ Hom-fiel, auto-pequeño y Σ -auto-ortogonal. Entonces*

$$C\text{-}G\mathcal{P}roj(R) = C \otimes_S (G\mathcal{P}roj(S) \cap \mathcal{A}_C(S)).$$

Corolario 6.1.5 *Sea ${}_R C$ auto-pequeño, Σ -auto-ortogonal, Hom-fiel y sea E es un cogenerador inyectivo en $R\text{-Mod}$ cumpliendo que $\text{pd}_S(\text{Hom}_R(C, E))$ es finita. Entonces $C\text{-GProj}(R) = C \otimes_S \text{GProj}(S)$.*

Ahora, daremos condiciones sobre C para que $C\text{-GProj}(R)$ sea precovering en la categoría $R\text{-Mod}$.

Proposición 6.1.6 *Supongamos que $\text{id}_R(C)$ y $\text{id}_S(C)$ son finitas, que ${}_R C$ es Hom-fiel, Σ -auto-ortogonal, y auto-pequeño con resolución proyectiva de finitamente generados, y que S es noetheriano a derecha y n -perfecto a izquierda. Entonces $C\text{-GProj}(R)$ es precovering en $R\text{-Mod}$.*

Demostración. La clase $\mathcal{B}_C(R)$ y la clase de todos los R -módulos a izquierda con $C\text{-GProj}(R)$ -dimensión finita coinciden por [8, Theorem 3.4], así en particular la clase $C\text{-GProj}(R)$ es precovering en $\mathcal{B}_C(R)$. Entonces, como $\mathcal{B}_C(R)$ es precovering en $R\text{-Mod}$ por el Teorema 5.2.6 tenemos que $C\text{-GProj}(R)$ es precovering en $R\text{-Mod}$. ■

En el Teorema 5.2.1 vimos que, bajo ciertas circunstancias, la clase de Bass, $\mathcal{B}_C(R)$, se podía calcular con los conúcleos de una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución exacta de R . Veamos ahora que, cuando C satisface condiciones adicionales, la clase de Auslander $\mathcal{A}_C(R)$ también se puede caracterizar de una forma parecida.

Corolario 6.1.7 *Supongamos que ${}_R C$ es auto-pequeño y w -tilting (así sea*

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{t_0} C_0 \xrightarrow{t_1} C_1 \rightarrow \dots$$

una $\text{Add}_R(C)$ -corresolución de R y llamamos $K = (C \oplus (\bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{Coker } t_i))^{\perp}$, que $R \cong \text{End}_S(C)$ y que C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces

$$\mathcal{A}_C(R) = \{M \mid \text{Tor}_{i \geq 1}^R(M, K) = 0\} = {}^{\perp}(K^+).$$

Demostración. Usando la Proposición 5.2.4 tenemos que $M \in \mathcal{A}_C(R) \Leftrightarrow M^+ \in \mathcal{B}_C(R)$ y por el Teorema 5.2.1 sabemos que $\mathcal{B}_C(R) = K^{\perp}$, así tenemos

$$M \in \mathcal{A}_C(R) \Leftrightarrow \text{Ext}_R^i(K, M^+) = 0 \quad \forall i \geq 1.$$

Pero $\text{Ext}_R^i(K, M^+) \cong \text{Tor}_i^R(M, K)^+$ ([18, Theorem 3.2.1]) así $M \in \mathcal{A}_C(R) \Leftrightarrow \text{Tor}_i^R(M, K)^+ = 0 \Leftrightarrow \text{Tor}_i^R(M, K) = 0 \quad \forall i \geq 0$.

Análogamente, tenemos $\text{Ext}_R^i(M, K^+) \cong \text{Tor}_i^R(M, K)^+$, así otra vez

$$\text{Ext}_R^i(M, K^+) = 0 \quad \forall i \geq 1 \Leftrightarrow \text{Tor}_i^R(M, K) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

y finalmente tenemos $M \in \mathcal{A}_C(R) \Leftrightarrow \text{Ext}_R^i(M, K^+) = 0 \quad \forall i \geq 1$. \blacksquare

Terminamos esta sección probando que, bajo determinadas condiciones, la parte común de las dos componentes de los pares $(\mathcal{A}_C(S), \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1})$ y $({}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R), \mathcal{B}_C(R))$ es precisamente la clase de los S -módulos a izquierda C -inyectivos y la clase de los R -módulos a izquierda C -proyectivos, respectivamente.

Proposición 6.1.8 *Se cumple:*

1. ${}_R C_S$ es auto-pequeño y Σ -auto-ortogonal si, y solo si,

$$\mathcal{B}_C(R) \cap {}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S).$$

2. Supongamos que ${}_R C$ es Hom-fiel y C_S tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces $R \cong \text{End}_S(C)$ canónicamente y C_S es auto-ortogonal si, y solamente si

$$\mathcal{A}_C(S) \cap \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1} = \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)).$$

Demostración. 1. En primer lugar por la Proposición 5.1.3 sabemos que $\text{Add}_R(C) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$ y por [5, Proposition 5.6] $\text{Add}_R(C) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$. Por otro lado, para cualquier S -módulo a izquierda proyectivo P y cualquier R -módulo a izquierda $B \in \mathcal{B}_C(R)$, tenemos que $\text{Ext}_R^1(C \otimes_S P, B)$ es sumando directo de algún $\text{Ext}_R^1(C \otimes_S S^{(I)}, B)$. Pero

$$\text{Ext}_R^1(C \otimes_S S^{(I)}, B) \cong \text{Ext}_R^1(C^{(I)}, B) \cong \text{Ext}_R^1(C, B)^I = 0$$

así $\text{Ext}_R^1(C \otimes_S P, B) = 0$.

Entonces tenemos $C \otimes_S \mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{B}_C(R) \cap {}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R)$.

A la inversa, elegimos cualquier $M \in \mathcal{B}_C(R) \cap {}^{\perp 1}\mathcal{B}_C(R)$. Por la Proposición 5.1.12 sabemos que M tiene una $\text{Add}_R(C)$ -precubierta épica

$$0 \rightarrow T \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

con núcleo $T \in \mathcal{B}_C(R)$. Pero entonces $\text{Ext}_R^1(M, T) = 0$ luego la sucesión escinde, lo que prueba que $M \in \text{Add}_R(C) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$.

2. Por el Teorema 2.5.8 tenemos que $\mathcal{I}nj(R) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$ y, por tanto, $\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$.

Por otro lado, para cualquier inyectivo $E \in \mathcal{I}nj(R)$ y cualquier $A \in \mathcal{A}_C(S)$ tenemos

$$\text{Ext}_S^1(A, \text{Hom}_R(C, E)) \cong \text{Hom}_R(\text{Tor}_1^S(C, A), E)$$

por [18, Theorem 3.2.1]. Pero $\text{Tor}_1^S(C, A) = 0$ puesto que $A \in \mathcal{A}_C(S)$ así $\text{Hom}_R(C, E) \in \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1}$ y entonces $\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)) \subseteq \mathcal{A}_C(S) \cap \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1}$.

A la inversa, si $M \in \mathcal{A}_C(S) \cap \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1}$, [26, Theorem 2.11] garantiza la existencia de una $\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))$ -precubierta mónica $0 \rightarrow M \rightarrow X$. Ahora, como $\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$, tenemos $M, X \in \mathcal{A}_C(S)$, así por [5, Proposition 5.4] el conúcleo X/M también está en $\mathcal{A}_C(S)$. Pero $M \in \mathcal{A}_C(S)^{\perp 1}$ así aplicando $\text{Hom}_S(X/M, -)$ podemos ver que la sucesión

$$0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow X/M \rightarrow 0$$

escinde, y como $\text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R)) = \text{Prod}_S(C^\vee)$, que es cerrada bajo sumandos directos, tenemos que $M \in \text{Hom}_R(C, \mathcal{I}nj(R))$. ■

6.2 — Precubiertas G_C -planas y G_C -proyectivas

La información existente en la literatura acerca de la existencia de precubiertas Gorenstein planas relativas a un R -módulo C es muy limitada. En esta sección queremos abordar dos problemas naturales que surgen al estudiar esta clase de módulos: ¿cuándo existen las (pre)cubiertas Gorenstein planas relativas? Y, ¿cuándo está la clase de módulos Gorenstein proyectivos relativos, también a C , contenida en la clase módulos Gorenstein planos relativos? Y, relacionado con este último problema, ¿podemos comparar las dimensiones Gorenstein proyectiva y plana relativas a C ?

Para conocer mejor cómo es la clase de módulos Gorenstein planos relativos, estudiaremos sus relaciones con la clase de módulos Gorenstein inyectivos relativos.

Como consecuencia de los resultados que se obtendrán en esta sección, también daremos condiciones suficientes para que la clase de módulos Gorenstein proyectivos relativos sea precovering especial en $R\text{-Mod}$.

Empezamos recordando el concepto de módulo Gorenstein plano relativo a C .

Definición 6.2.1 Un R -módulo a izquierda es G_C -plano si existe una sucesión de R -módulos exacta y $(\text{Hom}_S(C, \text{Inj}(R)) \otimes_R -)$ -exacta

$$\mathbf{X} = \cdots F^1 \rightarrow F^0 \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow C \otimes_S F_1 \rightarrow \cdots$$

conde $F^i \in \mathcal{F}lat(R)$, $F_i \in \mathcal{F}lat(S)$ y $M = \text{Im}(F^0 \rightarrow C \otimes_S F_0)$.

La clase de todos los R -módulos a izquierda G_C -planos la denotaremos por $G_C \mathcal{F}lat(R)$ y decimos que la sucesión \mathbf{X} es una $(\mathcal{F}lat, C \otimes \mathcal{F}lat)$ -resolución completa.

Es inmediato ver que la clase $G_C \mathcal{F}lat(R)$ es cerrada bajo sumas directas.

Proposición 6.2.2 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces $\mathcal{F}lat(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$, $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$ y $\text{Hom}_R(C, C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)) \subseteq \mathcal{F}lat(S)$.*

Demostración. Por [5, Proposition 5.4] sabemos que $\mathcal{P}roj(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$, y como los módulos planos son límite directo de proyectivos, y como ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados (que nos dice que $\text{Hom}_R(C, -)$ y $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C, -)$ preserva límites directos) tenemos que $\mathcal{F}lat(S) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$.

Pero entonces sabemos que $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S) \subseteq \mathcal{B}_C(R)$ y así $\text{Hom}_R(C, C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)) \subseteq \mathcal{A}_C(S)$. De esta forma, para cualquier $F \in \mathcal{F}lat(S)$ tenemos $F \cong \text{Hom}_R(C, C \otimes_S F)$ y así $\text{Hom}_R(C, C \otimes_S F)$ es un S -módulo a izquierda plano. ■

Con el uso de la Proposición 6.2.2 podemos dar condiciones sobre la clase $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ para que sea cerrada bajo productos directos y submódulos puros, que, como consecuencia, serán condiciones para que esta clase sea preenveloping.

Proposición 6.2.3 *Si ${}_R C$ es Hom-fiel, Σ -auto-ortogonal y tiene una resolución proyectiva de finitamente generados, entonces $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es cerrada bajo submódulos puros.*

Si S es coherente a derecha y C_S es finitamente presentado entonces $C \otimes_S$

$\mathcal{F}lat(S)$ es cerrada bajo productos.

Como consecuencia, cuando se cumplen todas las condiciones $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es preenveloping en $R\text{-Mod}$.

Demostración. Para probar que $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es cerrada bajo submódulos puros seguimos [33, Lemma 5.2] y usamos la Proposición 6.2.2.

Que $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es cerrada bajo productos es claro.

Finalmente, sabemos que si es una clase Kaplansky es cerrada bajo productos directos es preenveloping (por [18, Theorem 11.9.4]) así que basta con probar que $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es Kaplansky.

Para ello sea $F \in \mathcal{F}lat(S)$ cualquier S -módulo a izquierda plano y $x \in C \otimes_S F$ cualquier elemento. Entonces podemos escribir x como $x = \sum_{i=1}^n c_i \otimes x_i$, y por el Lema [18, Lemma 5.3.12] sabemos que hay un cardinal α (dependiendo sólo de $|R|$) tal que para cualquier i existe un submódulo puro $A_i \leq F$ conteniendo a x_i tal que $|A_i| < \alpha$. Pero entonces $A = \sum_{i=1}^n A_i \leq F$ es un submódulo puro de F y por supuesto $|A| < \alpha$. Si elegimos cualquier número cardinal $\aleph > \max\{|C|, \alpha\}$ tenemos que $|C \otimes_S A| \leq |C \times A| < \aleph$. De esta forma tenemos que $x \in C \otimes_S A \in C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ y $|C \otimes_S A| < \aleph$.

Ahora, $A \leq F$ nos da la sucesión pura

$$0 \rightarrow C \otimes_S A \rightarrow C \otimes_S F \rightarrow C \otimes_S F/A \rightarrow 0$$

exacta, así como F/A es plano inmediatamente tenemos que $\frac{C \otimes_S F}{C \otimes_S A}$ está en $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$, luego $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es Kaplansky. ■

Una pregunta muy interesante es saber cuándo la clase de R -módulos a derecha C -inyectivos, es decir, la clase $\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S))$, está contenida en la clase de los módulos G_C -inyectivos. Se sabe que si C es semidualizante entonces la respuesta es sí, pero, ¿es cierto para casos más generales?

Proposición 6.2.4 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y que tiene una resolución de proyectivos finitamente generados. Entonces, la clase de R -módulos a derecha $\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S))$ está contenida en la clase $G_C \mathcal{I}nj(R)$ de todos los R -módulos a derecha G_C -inyectivos.*

Demostración. Observemos en primer lugar que

$$G_C G\mathcal{I}nj(R) = \mathcal{G}(\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)), \mathcal{I}nj(R)).$$

Ahora, se tiene que al ser ${}_R C$ un módulo Σ -auto-ortogonal entonces $\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S))$ es auto-ortogonal, y como

$${}^\perp \mathcal{I}nj(R) = \widehat{\text{cores}} \mathcal{I}nj(R) = \text{Mod-}R,$$

basta aplicar la Proposición 3.3.1. ■

Veamos ahora una ligera modificación del dual de Holm [29, Corolary 2.11] para módulos Gorenstein proyectivos, extendido por White [40, Corolary 3.8] al caso de módulos G_C -proyectivos relativos a un módulo semidualizante C .

Proposición 6.2.5 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Si*

$$0 \rightarrow M \rightarrow \text{Hom}_S(C, I) \rightarrow G \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R -módulos a derecha donde I es un S -módulo a derecha inyectivo, G es G_C -inyectivo y $\text{Ext}_R^1(A, M) = 0$ para todo R -módulo a derecha C -inyectivo A , entonces M es G_C -inyectivo también.

Demostración. Observemos que estamos en la misma situación de la Proposición anterior, por tanto, basta aplicar [44, Theorem 3.10]. ■

El siguiente resultado está probado cuando C es semidualizante ([42, Proposition 2.5]). Sigamos extendiéndolo a un caso más general.

Proposición 6.2.6 *Sea M cualquier R -módulo a izquierda. Se cumple:*

1. *Si M es G_C -plano entonces M^+ es G_C -inyectivo.*
2. *Supongamos ahora que R es coherente a izquierda, que S es coherente a derecha, que ${}_R C$ es finitamente presentado, Σ -auto-ortogonal y Hom-fiel, y que C_S es finitamente presentado. Si $M^+ \in G_C \mathcal{I}nj(R)$ entonces $M \in G_C \mathcal{F}lat(R)$.*

Demostración. 1. Sea M un R -módulo a izquierda G_C -plano. Sea

$$\mathbf{X} = \cdots \rightarrow F^1 \rightarrow F^0 \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow C \otimes_S F_1 \rightarrow \cdots$$

una $(\mathcal{F}lat, C \otimes \mathcal{F}lat)$ -resolución completa de M .

Aplicando el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tenemos la sucesión exacta

$$\mathbf{X}^+ = \cdots \rightarrow (C \otimes_S F_0)^+ \rightarrow (C \otimes_S F_0)^+ \rightarrow (F^0)^+ \rightarrow (F^1)^+ \rightarrow \cdots$$

tal que $M^+ \cong \text{Im}((C \otimes_S F_0)^+ \rightarrow (F^0)^+)$. Por [18, Theorem 3.2.10] $(F^i)^+$ es un R -módulo a derecha inyectivo y, por la adjunción del Hom y el tensor, tenemos que $(C \otimes_S F_i)^+ \cong \text{Hom}_S(C, F_i^+) \in \text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)) \subseteq \text{Prod}_R(C^\vee)$ y que el complejo $(\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R \mathbf{X})^+ \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(C, I), \mathbf{X}^+)$ es exacto para todo S -módulo a derecha inyectivo. Luego M^+ es un R -módulo a derecha G_C -inyectivo.

2. Supongamos que M^+ es un R -módulo a derecha G_C -inyectivo, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow A \rightarrow M^+ \rightarrow 0$$

con $A \in \text{Prod}_R(C^\vee) \cong \text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S))$ (ya que al ser ${}_R R$ coherente y ${}_R C$ finitamente presentado entonces ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados y podemos aplicar la Proposición 5.1.7), luego existe un R -módulo a derecha inyectivo I tal que $A = \text{Hom}_S(C, I)$. Aplicando ahora el funtor exacto $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M^{++} \rightarrow \text{Hom}_S(C, I)^+ \rightarrow K^+ \rightarrow 0.$$

Como la aplicación canónica $M \rightarrow M^{++}$ es inyectiva, componiendo, tenemos el monomorfismo $M \rightarrow \text{Hom}_S(C, I)^+$. Por el Teorema [18, Theorem 3.2.11] tenemos $\text{Hom}_S(C, I)^+ \cong C \otimes_S I^+$, como S es coherente a derecha, entonces I^+ es un S -módulo a izquierda plano, por tanto tenemos el monomorfismo $\beta : M \rightarrow C \otimes_S I^+$ con I^+ plano. Notemos que por la Proposición 6.2.3, $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ es preenveloping. Sea $\phi : M \rightarrow C \otimes_S F_0$ una $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ -preenvolvente de M , entonces ϕ es monomorfismo por serlo β . Así tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\phi} C \otimes_S F_0 \rightarrow K_1 \rightarrow 0,$$

donde $K_1 = \text{Coker } \phi$. Aplicando el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_1^+ \rightarrow (C \otimes_S F_0)^+ \rightarrow M^+ \rightarrow 0.$$

Veamos que K_1^+ es G_C -inyectivo. Como $(C \otimes_S F_0)^+ \cong \text{Hom}_S(C, F_0^+)$ es G_C -inyectivo (F_0^+ es inyectivo), solo falta ver que $\text{Ext}_R^1(\text{Hom}_S(C, I'), K_1^+) = 0$ ([44, Theorem 3.10]) para todo S -módulo a derecha inyectivo. Pero, siendo I' cualquier S -módulo a derecha inyectivo, $\text{Ext}_R^1(\text{Hom}_S(C, I'), K_1^+) = 0$ si, y solo si

$$\text{Hom}_R(\text{Hom}_S(C, I'), (C \otimes_S F_0)^+) \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(C, I'), M^+)$$

es epimorfismo. Por la adjunción entre Hom y el tensor tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(C, I'), (C \otimes_S F_0)^+) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(C, I'), M^+) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ (\text{Hom}_S(C, I') \otimes_R C \otimes_S F_0)^+ & \longrightarrow & (\text{Hom}_S(C, I') \otimes M)^+ \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_R(C \otimes_S F_0, \text{Hom}_S(C, I')^+) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(C, I')^+) \end{array}$$

Como el módulo $\text{Hom}_S(C, I')^+ \cong C \otimes_S I'^+$ ([18, Theorem 3.2.11]) está en $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ y $M \rightarrow C \otimes_S F_0$ es una $C \otimes_S \mathcal{F}lat(S)$ -preenvolvente, entonces la última fila es un epimorfismo. Luego también lo es la primera fila. Por tanto K_1^+ es G_C -inyectivo. Podemos proceder de la misma forma hasta obtener la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow C \otimes_S F_1 \rightarrow \dots$$

con $F_i \in \mathcal{F}lat(S)$ e $\text{Im}(C \otimes_S F_i \rightarrow C \otimes_S F_{i+1}) = K_i$. Además, notemos que $\text{Ext}_R^1(\text{Hom}_S(C, I'), K_i^+) = 0 = \text{Ext}_R^i(\text{Hom}_S(C, I'), M^+)$ para $i \geq 1$, entonces, por [18, Theorem 3.2.1]

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Ext}_R^1(\text{Hom}_S(C, I'), K_i^+) \cong \text{Tor}_1^R(\text{Hom}_S(C, I'), K_i)^+ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Tor}_1^R(\text{Hom}_S(C, I'), K_i) = 0, \end{aligned}$$

así la sucesión anterior también es $\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)) \otimes_R --$ exacta. De la misma forma se ve que $\text{Tor}_i^R(\text{Hom}_S(C, I'), M) = 0$.

Por otro lado, como $\mathcal{F}lat(R)$ es covering, existe la sucesión exacta y $\text{Hom}_R(\mathcal{F}lat(R), -)$ -exacta

$$\dots \rightarrow F^1 \rightarrow F^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

con $F^i \in \mathcal{F}lat(R)$. Y como $\text{Tor}_i^R(\text{Hom}_S(C, I'), M) = 0 \forall i \geq 1$ entonces también es $\text{Hom}_S(C, I') \otimes_R$ --exacta.

Juntando ambas sucesiones, tenemos la sucesión exacta y $\text{Hom}_S(C, I') \otimes_R$ --exacta

$$\mathbf{X} = \dots \rightarrow F^1 \rightarrow F^0 \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow C \otimes_S F_1 \rightarrow \dots$$

con $F^i \in \mathcal{F}lat(R)$, $F_i \in \mathcal{F}lat(S)$ y $M = \text{Im}(F^0 \rightarrow C \otimes_S F_0)$. Luego M es un R -módulo a izquierda G_C -plano. ■

Corolario 6.2.7 *Supongamos que C_S es finitamente presentado, que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal y Hom-fiel, y que tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Si R es coherente a derecha entonces la clase $G_C \mathcal{F}lat(R)$ es covering en $R\text{-Mod}$.*

Demostración. Por la Proposición 6.2.6 el par $(G_C \mathcal{F}lat, G_C \mathcal{I}nj(R))$ es de dualidad perfecto y así el resultado viene dado por el Teorema[31, Theorem 3.1]. ■

Lema 6.2.8 *Supongamos que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal. Dada \mathbf{X}^\bullet cualquier $(\text{Proj}(R), C \otimes_S \text{Proj}(S))$ -resolución completa, si*

$$0 \rightarrow C \otimes_S Q_n \rightarrow C \otimes_S Q_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C \otimes_S Q_0 \rightarrow L \rightarrow 0$$

es exacta con todos los Q_i S -módulos a izquierda proyectivos, entonces la sucesión de complejos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}^\bullet, C \otimes_S Q_n) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}^\bullet, C \otimes_S Q_{n-1}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}^\bullet, C \otimes_S Q_0) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}^\bullet, L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

es también exacta.

Demostración. Tenemos que probar que para cualquier entero m , la sucesión

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_n) \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_{n-1}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_0) \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

es exacta.

Si $m \leq 0$ entonces X^m es proyectivo y, por tanto, la sucesión correspondiente es exacta.

Por otro lado, si $m \geq 1$ entonces $X^m = C \otimes_S K$ para algún S -módulo a izquierda proyectivo K . Entonces, K es sumando directo de $S^{(J)}$ para algún conjunto J , e igualmente, Q_n es un sumando directo de algún $S^{(I)}$. De esta forma $\text{Ext}_R^i(C \otimes_S K, C \otimes_S Q_n)$ es (isomorfo a) un sumando directo de $\text{Ext}_R^i(C \otimes_S S^{(J)}, C \otimes_S S^{(I)}) \cong \text{Ext}_R^i(C, C^{(I)})^J$.

Pero ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal, luego $\text{Ext}_R^i(C, C^{(I)})^J = 0$ y entonces se tiene que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C \otimes_S K, C \otimes_S Q_n) = 0$.

Con el mismo argumento demostramos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(C \otimes_S K, C \otimes_S Q_i) = 0$ para todo i , así haciendo uso de la sucesión exacta larga asociada a

$$0 \rightarrow C \otimes_S Q_n \rightarrow C \otimes_S Q_{n-1} \rightarrow A_{n-1} \rightarrow 0$$

se prueba que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(X^m, A_{n-1}) = 0$.

Con un proceso inductivo tenemos que $\text{Ext}_R^{\geq 1}(X^m, A_i) = 0$ para todo i , y por tanto, las sucesiones

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_n) \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_{n-1}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, C \otimes_S Q_0) \rightarrow \text{Hom}_R(X^m, L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

son exactas para todo $m \geq 1$. ■

Teorema 6.2.9 *Supongamos que S es coherente a derecha, que C_S es finitamente presentado y que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal. Si $\mathcal{P}_C\text{-pd}(C \otimes_S F) < \infty$ para cualquier S -módulo a izquierda plano cotorsión F . Entonces $G_C \text{Proj}(R) \subseteq G_C \text{Flat}(R)$.*

Demostración. Sea $M \in G_C \text{Proj}(R)$ y sea \mathbf{X} una $(\text{Proj}, C \otimes \text{Proj})$ -resolución completa de M .

Tenemos que probar que el complejo $\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R \mathbf{X}$ es exacto para cualquier S -módulo a derecha inyectivo I , y entonces tendremos que M es G_C -plano.

Pero por la adjunción entre $\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R -$ y $\text{Hom}_Z(\text{Hom}_S(C, I), -)$ y por [18, Theorem 3.2.11]

$$(\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R \mathbf{X})^+ \cong \text{Hom}_R(\mathbf{X}, \text{Hom}_S(C, I)^+) \cong \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S I^+).$$

Como S es coherente a derecha, I^+ es plano y cotorsión y como $\mathcal{P}_C\text{-pd}(C \otimes_S I^+) < \infty$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow C \otimes_S Q^n \rightarrow C \otimes_S Q^{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C \otimes_S Q^0 \rightarrow C \otimes_S I^+ \rightarrow 0$$

con todos los Q_i S -módulos a izquierda proyectivos.

Pero todo $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S Q^i)$ un complejo acíclico, así por el Lema 6.2.8 e inducción sobre n tenemos que $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S I^+)$ es acíclico también y hemos terminado. ■

Nuestro siguiente objetivo será encontrar condiciones para que cada módulo G_C -plano tenga G_C -dimensión proyectiva finita. Necesitaremos el siguiente resultado, inspirado en la prueba de [1, Proposition 3.1].

Recordemos que un módulo M se dice que tiene dimensión plana cotorsión menor o igual a un entero no negativo n si existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n \rightarrow 0$$

donde los F_i son módulos planos cotorsión.

El siguiente resultado proporciona una propiedad interesante de módulos planos sobre anillos n -perfectos. Aunque es probable que sea conocido, no hemos encontrado su prueba en la literatura, por lo que lo probamos a continuación.

Proposición 6.2.10 *La dimensión plana cotorsión de cualquier R -módulo a izquierda plano sobre un anillo R n -perfecto es siempre menor o igual que n .*

Demostración. Sea F cualquier R -módulo a izquierda plano y

$$0 \rightarrow F \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \cdots$$

una resolución cotorsión de F . Si llamamos $K_i = \text{Ker}(C_i \rightarrow C_{i+1})$ para todo $i \geq 1$ entonces sabemos que K_i por el Lema de Wakamatsu (véase [43, Lemma 2.1.2] se tiene que cada C_i es plano cotorsión. De esta forma, solo necesitamos probar que K_n es cotorsión. Pero para todo módulo plano \overline{F} tenemos $\text{Ext}_R^{\geq 1}(\overline{F}, C_i) = 0 \forall i$, así

$$\text{Ext}_R^i(\overline{F}, K_j) \cong \text{Ext}_R^{i+j}(\overline{F}, F) \forall i, j \geq 1.$$

Ahora, como R es n -perfecto a izquierda, tenemos $\text{Ext}_R^i(\overline{F}, F) = 0 \forall i \geq n + 1$ así

$$\text{Ext}_R^1(\overline{F}, K_n) \cong \text{Ext}_R^{n+1}(\overline{F}, F) = 0$$

y K_n es cotorsión. ■

Lema 6.2.11 *Supongamos que S es n -perfecto a izquierda, que C_S es finitamente presentado y que ${}_R C$ es Σ -auto-ortogonal. Entonces, dado \mathbf{X} un complejo exacto de R -módulos a izquierda tal que todas las componentes son G_C -proyectivas, tenemos: si $\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R \mathbf{X}$ es exacto para cualquier S -módulo a derecha inyectivo I entonces $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S P)$ es un complejo exacto para cualquier S -módulo a izquierda proyectivo P .*

Demostración. En primer lugar notemos el morfismo natural de S -módulos a izquierda $F \rightarrow F^{++}$ es una inyección pura, así si F es un plano cotorsión entonces F es sumando directo de F^{++} .

Ahora, como C_S es finitamente presentado, tenemos un isomorfismo natural de complejos

$$(\text{Hom}_S(C, I) \otimes_R \mathbf{X})^+ \cong \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F^{++}).$$

Entonces, como F^+ es un S -módulo a derecha inyectivo, se tiene que el complejo $(\text{Hom}_S(C, F^+) \otimes_R \mathbf{X})^+$ (y también el complejo $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F^{++})$) son exactos por hipótesis, y de esta forma, el sumando directo $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F)$ es exacto. Así $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F)$ es un complejo exacto para todo S -módulo a izquierda plano cotorsión.

Ahora, como S es n perfecto a izquierda, por la Proposición 6.2.10 tenemos que si P es cualquier S -módulo a izquierda proyectivo, podemos encontrar una sucesión exacta

$$0 \rightarrow P \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n \rightarrow 0$$

con todos los F_i S -módulos a izquierda planos cotorsión. Entonces, la sucesión de R -módulos a izquierda

$$0 \rightarrow C \otimes_S P \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow \cdots \rightarrow C \otimes_S F_0 \rightarrow 0$$

es exacta y, si probamos que

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S P) \rightarrow \text{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F_0) \rightarrow \dots$$

$$\cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F_{n-1}) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F_n) \rightarrow 0$$

es exacta, habremos probado que el complejo $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S P)$ es exacta y quedaría probado que todos los complejos $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}, C \otimes_S F_i)$ son exactos.

Pero todos los F_i son planos así que tiene dimensión proyectiva finita y cada $C \otimes_S F_i$ tiene \mathcal{P}_C -dimensión proyectiva. De esta forma $\mathrm{Ext}_R^i(\mathbf{X}^j, C \otimes_S F_i) = 0$ para todo $i \geq 1$ y para todo j ya que X^j es G_C -proyectivo (véase [7, Corollary 2.5]). ■

Daremos ahora una extensión del concepto de anillo n -perfecto, adaptado a estos nuevos conjuntos C -relativos.

Definición 6.2.12 Dado un entero no negativo n , un anillo R se dice (C, n) -perfecto a izquierda si todo R -módulo plano a izquierda tiene \mathcal{P}_C -dimensión proyectiva menor o igual que n .

Llegamos así al siguiente resultado, que va a ser la respuesta a una de las preguntas que nos hacíamos al principio de esta sección y la antesala de la prueba de cuándo la clase $G_C \mathcal{P}roj(R)$ es precovering.

Teorema 6.2.13 *Supongamos que R es (C, n) -perfecto a izquierda, que S es n -perfecto a izquierda y coherente a izquierda ay que ${}_R C$ es w -tilting y tiene una resolución proyectiva de finitamente generados. Entonces todo R -módulo a izquierda G_C -plano tiene G_C -dimensión proyectiva finita.*

Demostración. Sea M un R -módulo a izquierda G_C -plano. Entonces existe un complejo exacto y $(\mathrm{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)) \otimes_R -)$ -exacto

$$\mathbf{X} : \cdots \rightarrow \mathbf{X}^{-1} \rightarrow \mathbf{X}^0 \rightarrow \mathbf{X}^1 \rightarrow \cdots$$

en el que $M = \mathrm{Im}(\mathbf{X}^0 \rightarrow \mathbf{X}^1)$, \mathbf{X}^i es un R -módulo a izquierda plano para todo $i \leq 0$ y $\mathbf{X}^i \cong C \otimes_S F^i$ con F^i un S -módulo a izquierda plano para todo $i > 0$.

De esta forma, $\mathcal{P}_C\text{-pd}(\mathbf{X}^i) \leq n$ para todo $i \leq 0$ ya que R es (C, n) -perfecto a izquierda, y $\mathrm{pd}_S(F^i) \leq n$ para todo $i \geq 1$ por ser S n -perfecto a izquierda. Entonces, $\mathcal{P}_C\text{-pd}(C \otimes_S F^i) \leq n$ para todo $i \geq 1$ y, por tanto, por [7, Theorem 3.6] tenemos $G_C\text{-pd}(\mathbf{X}^i) \leq n \forall i$.

Ahora, para cada $i \leq 0$ sea

$$0 \rightarrow K^i \rightarrow P^i \rightarrow \mathbf{X}^i \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $R\text{-Mod}$ con los P^i proyectivos, y si $i \geq 1$ consideremos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow K^i \rightarrow P^i \rightarrow F^i \rightarrow 0$$

en $S\text{-Mod}$ con los P^i proyectivos, por lo tanto, las sucesiones de R -módulos

$$0 \rightarrow C \otimes_S K^i \rightarrow C \otimes_S P^i \rightarrow C \otimes_S F^i = \mathbf{X}^i \rightarrow 0$$

es también exacta.

Para cualquier $i \leq -1$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^i & \xlongequal{\quad} & P^i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i-1} & \longrightarrow & \mathbf{X}^i & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i+1} & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

con filas y columnas exactas. Similarmente, si $i \geq 1$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C \otimes_S P^i & \xlongequal{\quad} & C \otimes_S P^i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i-1} & \longrightarrow & \mathbf{X}^i & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i+1} & \longrightarrow & \mathbf{X}^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

y si $i = 0$ tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P^0 & \xlongequal{\quad} & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbf{X}^{-1} & \longrightarrow & \mathbf{X}^0 & \longrightarrow & \mathbf{X}^1 & \longrightarrow & \mathbf{X}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

De esta forma, si para cualquier modulo N llamamos $\overline{N}[i]$ al disco

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow N \xlongequal{\quad} N \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

con N en las i -ésima e $(i + 1)$ -ésima posiciones, tenemos la sucesión exacta de complejos

$$0 \rightarrow \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{P}_0 = \left(\bigoplus_{i \leq 0} \overline{P^i[i]} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \geq 1} \overline{C \otimes_S P^i[i]} \right) \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow 0$$

donde cada \mathbf{W}^i se obtiene de la siguiente manera: para $i \leq 0$ como el pullback

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^i & \longrightarrow & \mathbf{W}^i & \longrightarrow & P^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K^i & \longrightarrow & P^i & \longrightarrow & X^i \longrightarrow 0, \end{array}$$

para $i \geq 2$ como el pullback

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C \otimes_S K^i & \longrightarrow & \mathbf{W}^i & \longrightarrow & C \otimes_S P^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C \otimes_S K^i & \longrightarrow & C \otimes_S P^i & \longrightarrow & C \otimes_S F^i \longrightarrow 0 \end{array}$$

y para $i = 1$ como el pullback

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C \otimes_S K^1 & \longrightarrow & \mathbf{W}^1 & \longrightarrow & P^0 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C \otimes_S K^1 & \longrightarrow & C \otimes_S P^1 & \longrightarrow & C \otimes_S F^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pero \mathbf{P}_0 y \mathbf{X} son complejos exactos, luego \mathbf{W} también lo es. Entonces, como \mathbf{P}_0 y \mathbf{X} son $(\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)) \otimes_R -)$ -exactos, también lo es \mathbf{W} .

Además, de los pullbacks anteriores podemos ver que

$$\mathbf{W}^i \cong \begin{cases} K^i \oplus P^{i-1} & \text{si } i \leq 0 \\ y \\ (C \otimes_S K^i) \oplus P^0 & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Ahora, para cualquier $i > 1$ sabemos que $C \otimes_S P^{i-1}$ es un sumando directo de $C \otimes_S S^{(I)} \cong C^{(I)}$, entonces $\text{Ext}_R^1(C \otimes_S P^{i-1}, C \otimes_S K^i)$ es un sumando directo de

$$\text{Ext}_R^1(C^{(I)}, C \otimes_S K^i) \cong \text{Ext}_R^1(C, C \otimes_S K^i)^I.$$

Pero ${}_R C$ tiene una resolución proyectiva de finitamente generados, luego, por el [18, Theorem 3.2.15], tenemos

$$\text{Ext}_R^1(C, C \otimes_S K^i) \cong \text{Ext}_R^1(C, C) \otimes_S K^i = 0$$

y, por tanto, tenemos que

$$\mathbf{W}^i \cong (C \otimes_S K^i) \oplus (C \otimes_S P^{i-1}) \quad \forall i > 1.$$

De esta forma, el complejo \mathbf{W} es

$$\dots \rightarrow K^0 \oplus P^{-1} \rightarrow (C \otimes_S K^1) \oplus P^0 \rightarrow (C \otimes_S K^2) \oplus (C \otimes_S P^1) \rightarrow \dots$$

Además, para todo $i \in \mathbb{Z}$ se comprueba fácilmente que \mathbf{P}_0^i es un R -módulo a izquierda G_C -proyectivo, así en la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{P}_0 \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow 0$$

tenemos que

$$\sup \{ G_C\text{-pd}(\mathbf{P}_0^i), G_C\text{-pd}(\mathbf{X}^i) - 1 \} = G_C\text{-pd}(\mathbf{X}^i) - 1 \leq n - 1$$

salvo que \mathbf{X}^i sea G_C -proyectivo, en cuyo caso \mathbf{W}^i también lo será por la Proposición 3.2.6.

Así, aplicando la Proposición 4.1.14 tenemos que $G_C\text{-pd}(\mathbf{W}^i) \leq n - 1 \quad \forall i$.

Llegados a este punto, podemos aplicar los mismos argumentos sobre el complejo \mathbf{W} para iniciar un procedimiento inductivo obteniendo la sucesión exacta y $(\text{Hom}_S(C, \mathcal{I}nj(S)) \otimes_R -)$ -exacta de complejos exactos

$$0 \rightarrow \mathbf{W}_t \rightarrow \mathbf{P}_{t-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{P}_0 \rightarrow \mathbf{X} \rightarrow 0$$

con $t \leq n$ y $G_C\text{-pd}(\mathbf{W}_t^i) = 0 \quad \forall i$.

Ahora, $\text{Add}_R(C) = C \otimes_S \mathcal{P}roj(S)$ ya que ${}_R C$ es auto-pequeño (debido a que tiene una resolución proyectiva de finitamente generados). Entonces por el Teorema 3.3.7 se tiene $G_C \mathcal{P}roj^2(R) = G_C \mathcal{P}roj(R)$, y como cada \mathbf{W}_t^i es G_C -proyectivo (tiene G_C -dimensión proyectiva cero), tenemos que $Z^0(\mathbf{W}_t)$ es un R -módulo a izquierda G_C -proyectivo. Pero, de la misma forma tenemos que

todos los R -módulos $Z^0(\mathbf{P}_i)$ son también G_C -proyectivos, es decir, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Z^0(\mathbf{W}_t) \rightarrow Z^0(\mathbf{P}_{t-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow Z^0(\mathbf{P}_0) \rightarrow Z^0(\mathbf{X}) = M \rightarrow 0$$

lo que prueba que $G_C\text{-pd}(M) \leq n$. ■

Para acabar, damos condiciones para que la clase $G_C \mathcal{P}roj(R)$ sea precovering especial.

Corolario 6.2.14 *Sea R un anillo (C, n) -perfecto a izquierda, S n -perfecto a izquierda y coherente a derecha, ${}_R C$ Hom-fiel, w -tilting y con una resolución proyectiva de finitamente generados, y C_S finitamente presentado. Entonces $G_C \mathcal{P}roj(R)$ es precovering especial en $R\text{-Mod}$.*

Demostración. Por los Teoremas 6.2.13 y 6.2.9 tenemos las inclusiones

$$G_C \mathcal{P}roj(R) \subseteq G_C \mathcal{F}lat(R) \subseteq \overline{G_C \mathcal{P}roj(R)}$$

donde $\overline{G_C \mathcal{P}roj(R)}$ denota la clase de R -módulos a izquierda con G_C -dimensión proyectiva finita.

Ahora, dado cualquier R -módulo a izquierda M , por el Corolario 6.2.7 tenemos una $G_C \mathcal{F}lat(R)$ -cubierta $\varphi : F \rightarrow M$, y entonces, por [5, Theorem 3.5] (extendido por Corolario 4.1.9), F tiene una $G_C \mathcal{P}roj(R)$ -precubierta especial $\psi : P \rightarrow F$. Comprobemos que $\varphi\psi : P \rightarrow M$ es una $G_C \mathcal{P}roj(R)$ -precubierta especial de M .

Como φ es una cubierta y ψ es una precubierta especial, tenemos que $\text{Ker } \varphi$ está en $G_C \mathcal{F}lat(R)^{\perp 1}$ y que $\text{Ker } \psi$ está en $G_C \mathcal{P}roj(R)^{\perp 1}$. Pero como $G_C \mathcal{F}lat(R)^{\perp 1} \subseteq G_C \mathcal{P}roj(R)^{\perp 1}$, entonces ambos núcleos están contenidos en

$G_C \mathcal{P}roj(R)^{\perp 1}$. Así, de la columna de la izquierda del diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker } \psi & \longleftarrow & \text{Ker } \psi & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\psi\varphi} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \psi & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{ker } \varphi & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

tenemos que D está en $G_C \mathcal{P}roj(R)^{\perp 1}$, y esto implica que el morfismo $\varphi\psi$ es una $G_C \mathcal{P}roj(R)$ -precubierta especial. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. ASADOLLAHI, T. DEHGHANPOUR Y R. HAFEZI. *On the existence of Gorenstein projective precovers*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **136** (2016), 257-264.
- [2] L. L. AVRAMOV Y A. MARTSINKOVSKY. *Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension*. Proc. London Math. Soc. **85** (2) (2002), 393-440.
- [3] D. BENNIS, E. DUARTE, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ -Gorenstein categories and dimensions*. Preprint.
- [4] D. BENNIS, E. DUARTE, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *The role of w -tilting modules in relative Gorenstein (co)homology*. Por aparecer en Open Mathematics.
- [5] D. BENNIS, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *Relative Gorenstein dimensions*. Mediterr. J. Math. **13** (2016), 65-91.
- [6] D. BENNIS, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *Relative global dimensions*. Int. J. Algebra Comput. **26** (2016), 1597-1615.
- [7] D. BENNIS, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *Relative projective and injective dimensions*. Comm. Algebra **44**(8) (2016), 3383-3396.
- [8] D. BENNIS, J. R. GARCÍA ROZAS Y L. OYONARTE. *When do Foxby classes coincide with the classes of modules of finite Gorenstein Dimensions?*. Kyoto J. Math. **56**(4) (2016), 785-802.
- [9] D. BENNIS Y N. MAHDOU. *Global Gorenstein dimensions*. Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2) (2010), 461-465.

-
- [10] H. CARTAN Y S. EILENBERG. *Homological algebra*. Princeton University Press 1956.
- [11] L. W. CHRISTENSEN Y S. SATHER-WAGSTAFF. *Transfer of Gorenstein dimensions along ring homomorphisms*. J. Pure Appl. Algebra **214** (6) (2010), 982-989.
- [12] E. E. ENOCHS. *Injective and flat covers, envelopes and resolvents*. Israel J. Math. **39** (1981), 189-209.
- [13] E. E. ENOCHS, S. ESTRADA Y J. R. GARCÍA ROZAS. *Gorenstein categories and Tate cohomology on projective schemes*. Math. Nachr. **281** (2008), 525-540.
- [14] E. E. ENOCHS, J. R. GARCÍA ROZAS, L. OYONARTE Y B. TORRECILLAS. *Gorenstein flat precovers and Gorenstein injective preenvelopes in Grothendieck categories*. Ark. Mat. **57** (2019), 55-83.
- [15] E. E. ENOCHS Y O. M. G. JENDA. *Gorenstein injective and flat dimensions*. Math. Japon. **44** (2) (1996), 261-268.
- [16] E. E. ENOCHS Y O. M. G. JENDA. *Gorenstein injective and projective modules*. Math. Z. **220** (1995), 611-633.
- [17] E. E. ENOCHS Y O. M. G. JENDA. *Ω -Gorenstein projective and flat covers and Ω -Gorenstein injective envelopes*. Comm. Alg. **32** (4) (2004), 1453-1470
- [18] E. E. ENOCHS Y O. M. G. JENDA. *Relative homological algebra*. De Gruyter Expositions in Mathematics Vol. 30 2nd Edition, Walter de Gruyter, 2011.
- [19] E. E. ENOCHS, O. M. G. JENDA Y J. A. LÓPEZ-RAMOS. *Dualizing modules and n -perfect rings*. Proc. Edinburgh Math. Soc. **48**(2) (2005), 75-90.
- [20] E. E. ENOCHS, O. M. G. JENDA, Y B. TORRECILLAS. *Gorenstein flat modules*. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan **10** (1993), no. 1, 1-9

- [21] E. E. ENOCHS, O. M. G. JENDA Y J. XU. *Foxby duality and Gorenstein injective and projective modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **348**(8) (1996), 3223-3234.
- [22] E. E. ENOCHS, O. M. G. JENDA Y J. XU. *Covers and envelopes over Gorenstein rings*. Tsukuba J. Math. **20** (2) (1996), 487-503.
- [23] E. E. ENOCHS Y J. A. LÓPEZ RAMOS. *Gorenstein injective envelopes and covers over n -perfect rings*. Quaest. Math. **30** (1) (2007), 35-44.
- [24] H. B. FOXBY. *Quasi-perfect modules over Cohen-Macaulay rings*. Math. Nachr. **66** (1975), 103-110.
- [25] J. R. GARCÍA ROZAS. *Covers and envelopes in the category of complexes of modules*. Research Notes in Mathematics Vol. 407 (Chapman & Hall/CRC, Boca-Raton, FL, 1999).
- [26] J. R. GARCÍA ROZAS, J. A. LÓPEZ RAMOS Y B. TORRECILLAS. *Semidualizing and tilting adjoint pairs, applications to comodules*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **38**(1) (2015), 197-218.
- [27] Y. GENG Y N. DING. *W -Gorenstein modules*. J. Algebra **325** (2011), 132-146.
- [28] J. GILLESPIE. *Models for homotopy categories of injectives and Gorenstein injectives*. Comm. Alg. 45(6), 2520-2545 (2017).
- [29] H. HOLM. *Gorenstein homological dimensions*. J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), 167-193.
- [30] H. HOLM. *Rings with finite Gorenstein injective dimension*. Proc. Amer. Math. Soc. **132** (5) (2003), 1279-1283.
- [31] H. HOLM Y P. JØRGENSEN. *Cotorsion pairs induced by duality pairs*. J. Commut. Algebra **1**(4) (2009) 621-633.
- [32] H. HOLM Y P. JØRGENSEN. *Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions*. J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), 423-445.
- [33] H. HOLM Y D. WHITE. *Foxby equivalence over associative rings*. J. Math. Kyoto Univ. **47** (2007) 781-808.

-
- [34] M. KASHIWARA Y P. SCHAPIRA. *Categories and Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol 332, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [35] H. KRAUSE. *The stable derived category of a noetherian scheme*. Compos. Math. **141** (2005), 1128-1162.
- [36] Z. LIU, Z. HUANG Y A. XU. *Gorenstein projective dimension relative to a semidualizing bimodule*. Comm. Algebra **41** (2013), 1-18.
- [37] B. MITCHELL. *Theory of categories*. Academic Press Inc. 1965.
- [38] S. SATHER-WAGSTAFF, T. SHARIF Y D. WHITE. *Stability of Gorenstein categories*. J. London Math. Soc. **77 (2)** (2008), 481-502.
- [39] B. STENSTRÖM. *Rings of quotients*. Springer-Verlag, 1975.
- [40] D. WHITE. *Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module*. J. Comm. Algebra **2** (2010), 111-137.
- [41] R. WISBAUER. *Cotilting objects and dualities*. Representations of algebras (Sao Paulo, 1999). 215-233, Lecture Notes in Pure Appl. Math., **224**, Dekker, New York, 2002.
- [42] A. XU Y N. DING. *Semidualizing bimodules and related Gorenstein homological dimensions*. J. Algebra Appl. **15(10)** (2016), 1650193.
- [43] J. XU. *Flat covers of modules*. Lecture notes in Math. 1634 Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- [44] G. ZHAO Y J. SUN. *UW-Gorenstein categories*. Turk. J. Math. **40** (2016), 365-375.
- [45] A. ZIMMERMANN. *Representation Theory: A Homological Algebra Point of View*, Algebra and Applications Vol. 19, Springer International Publishing, 2014.