
SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor:

Francisco Jesús Zamora Picón

Tutor:

Antonio Manuel Puertas López

GRADO EN MATEMÁTICAS



MAYO, 2021
Universidad de Almería

Índice general

1	Introducción	1
1.1.	Objetivos	1
1.2.	Antecedentes	2
	Objetos de estudio: fluidos, 2.— Propiedades de un fluido viscoso, 5.— Ley de viscosidad de Stokes, 6.— Ecuación de Euler. Ecuación de Navier-Stokes, 9.— Ecuación de Navier-Stokes adimensional, 11.— Ecuación de Hagen-Poiseuille, 14.— Fluido entre dos cilindros en rotación, 20.	
2	Resultados: Estudio y cálculo de soluciones de la ecuación en problemas bidimensionales	25
2.1.	Fluido infinito en un disco plano	25
	Resolución numérica del problema, 27.	
2.2.	Soluciones haciendo uso de funciones auxiliares	32
	Flujo de corriente, 32.— Flujo potencial, 33.— Fluido uniforme paralelo, 34.— Flujo en un vórtice, 36.— Estudio de una esfera en un fluido con velocidad uniforme, 37.	
2.3.	Análisis de solución numérica haciendo uso de métodos iterativos	38
3	Conclusión	43
	Bibliografía	45
4	Anexo	47

Abstract in English

In this Project, the flow of viscous fluids in different situations are solved through Navier-Stokes' equation. In all cases, the motion is induced or restricted by solid walls. The work includes three parts:

In the first part, chapter 1, the goals of the work are exposed and it starts studying the basic ideas and concept needed to derive Navier-Stokes' equation. These concepts will be the definition of *viscous liquids*, the continuity equation, the stresses to which fluids subjected, such as pressure; the viscosity coefficient definition, the Stokes' Viscosity Law and the viscous force density. Once all of these concepts are presented and explained, Euler's Equation is deduced as an introduction to the Navier-Stokes' one, due to the similarity between them. The Navier-Stokes' equation is finally derived and alternative expressions of the equations are also given, keeping in mind the incompressibility condition in the continuity equation and, on the other hand, through dimensionless variables and in terms of the vorticity.

Within the same chapter, the resolution of several single problems through the Navier-Stokes' equation will be displayed. In this part, we can find applications like the study of a fluid between two fixed parallel flat plates; flat, parallel plates where one of them is in motion; and also in a pipe with circular section, making use of the Hagen-Poiseuille equation, which is explained before the resolution of these problems. Another application with relevance will be the study of the mechanics of a fluid between two rotating coaxial cylinders. While we are solving the problem, we will be also concerned about other properties of the fluid, such as the stress distribution and the flow rate (often per length unit).

Within chapter 2, we will study the solutions of more difficult bidimensional problems through different techniques. First, we are going to study the mechanics of an infinite fluid which contains a solid rotating disk. For the solution of this problem, presenting a non-linear system of differential equations, we will draw on to a numerical solution. For this purpose, a code in MATLAB ©has been prepared and is discussed.

In second place, we will proceed to the explanation of the concepts of *current flow* and *potential flow*, whose utility is shown by studying a fluid containing a solid object. As an example, we will discuss a sphere embedded in a fluid with uniform flow.

Finally, we will analyze how, based on the implementation of iterative algorithms for Navier-Stokes' equation, problems can be solved. As an example, the solution of the two-dimensional problem of a square cavity of unit length, where one wall is moving with uniform velocity is shown and discussed.

Resumen en español

En este Trabajo Fin de Grado se resuelven, a través de la Ecuación de Navier-Stokes, distintos escenarios en los que un fluido viscoso fluye sobre una superficie. El trabajo comprende tres partes:

En la primera parte, capítulo 1, se exponen los objetivos marcados a lo largo del trabajo y se comienza estudiando las nociones necesarias para deducir la Ecuación de Navier-Stokes. Estos conceptos serán la definición del objeto de estudio: *el fluido viscoso*, la ecuación de continuidad, esfuerzos a los que se someten dicho fluido, como la presión; la definición de coeficiente de viscosidad, la Ley de viscosidad de Stokes y la densidad de la fuerza viscosa. Una vez se exponen las ideas, se deduce la Ecuación de Euler a modo de introducción por la similitud que presenta con la Ecuación de Navier-Stokes y con ello, se termina de deducir dicha ecuación. Tras la deducción, se presentan diferentes expresiones de la misma, teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad en la ecuación de continuidad y, por otro lado, mediante variables adimensionales y la definición de vorticidad.

Dentro del mismo capítulo, se expondrá la resolución de los diversos problemas sencillos mediante la Ecuación de Navier-Stokes. En este apartado se encuentran aplicaciones como el estudio de un fluido entre dos láminas planas, paralelas y fijas; planas, paralelas y una de estas en movimiento; y también en una tubería de sección circular, haciendo uso de la Ecuación de Hagen-Poiseuille, que se explica previamente a la resolución de dichos problemas. Otra aplicación con relevancia será el estudio de la mecánica de un fluido entre dos cilindros en rotación.

En la resolución del problema nos ocuparemos también de estudiar propiedades de la mecánica de fluidos, como son los esfuerzos y el caudal (en la mayoría de casos por unidad de longitud).

En el capítulo 2, estudiaremos soluciones de problemas bidimensionales de mayor dificultad mediante diferentes técnicas. En primer lugar, estudiaremos la mecánica de un fluido infinito en el que situamos un disco rígido en rotación. Para la resolución de este problema, al presentar un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, recurriremos a una solución numérica mediante el entorno de programación MATLAB ©.

En segundo lugar, se procederá a la explicación de los conceptos de *flujo de corriente* y *flujo potencial*, cuya utilidad se enfoca en estudiar el fluido con un objeto sólido introducido en el mismo y como ejemplo analizaremos la esfera.

En último lugar, se analizará como, a partir de la implementación de algoritmos iterativos para la ecuación de Navier-Stokes, se pueden resolver problemas y como ejemplo, se muestra y discute la solución del problema de una cavidad cuadrada de unidad de longitud donde una pared se desplaza con velocidad uniforme.

Introducción

Desde el inicio de la humanidad, tendemos a preguntarnos el porqué de los sucesos que ocurren en nuestro entorno. A partir de ciencias como las Matemáticas y la Física, muchos de estos pueden ser respondidos de forma concisa y, en su mayoría, exactas a través de modelos matemáticos.

Uno de los fenómenos naturales más estudiados ha sido *la mecánica de los fluidos*, es decir, la rama de la física que estudia el comportamiento de los fluidos. Sin embargo, al considerar factores como las fuerzas que intervienen, las superficies con las que están en contacto, etc, provoca que, al modelizar matemáticamente dicho comportamiento, el cálculo de una solución analítica resulte complicada. Por ello, es habitual recurrir a alternativas para, en casos concretos pero de cierto interés, calcular soluciones mediante aproximaciones o mediante el uso de entornos de programación.

Claude-Louis Navier, George Gabriel Stokes y Leonhard Euler fueron grandes celebridades en el campo de la mecánica de los fluidos que dieron nombre a ecuaciones fundamentales, las llamadas *Ecuación de Euler* y *Ecuación de Navier-Stokes*. En este trabajo, enfocaremos nuestro estudio a la Ecuación de Navier-Stokes, teniendo en consideración la de Euler, que será mencionada por la estrecha relación entre estas, una vez conocidos los conceptos necesarios para describirlas.

Predecir fenómenos meteorológicos, simular el siniestro que podría producir una catástrofe natural o recrearla a través de efectos especiales para películas o series son hechos que, a medida que van avanzando los años, se realizan cada vez mejor a través de la Ecuación de Navier-Stokes.

Tanto interés poseen las aplicaciones de esta ecuación que, en el año 2000, fue considerado una de ellas como uno de los problemas matemáticos del milenio premiado a quién lo resuelva con la cantidad de un millón de dólares.

Por último, cabe mencionar que en este trabajo, nos centraremos en el estudio y cálculo de soluciones de problemas bidimensionales.

Además de recopilar y reproducir las soluciones ya conocidas para algunos problemas, en este trabajo se ha realizado un código para la integración numérica de un sistema de ecuaciones no lineal al que llegamos en uno de los casos propuestos, en particular, el de un disco girando en el seno de un fluido infinito.

1.1 Objetivos

En este trabajo nos centraremos en el cumplimiento de los siguientes objetivos:

- Deducir la Ecuación de Navier-Stokes y remarcar su relevancia en la mecánica de fluidos, dado que nos proporcionaría una base sólida a la hora de realizar la resolución de problemas.
- Evaluar problemas de fluidos y establecer la equivalencia que poseen las ecuaciones que determinan el movimiento utilizadas con la Ecuación de Navier-Stokes.
- Plantear ejemplos de estudio de diferente dificultad y enfoque, aportando soluciones numéricas o analíticas.

- Exponer una variada gama de métodos para el planteamiento y análisis de situaciones en las que la Ecuación de Navier-Stokes nos permita describir la mecánica del fluido.

1.2 Antecedentes

Reuniremos en primer lugar todos los conceptos necesarios para deducir la Ecuación de Navier-Stokes. Comenzaremos con el objeto de estudio de este trabajo: los fluidos viscosos, dando su noción y sus propiedades más relevantes. Tras mencionar la propiedad principal de los fluidos, los coeficientes de viscosidad, mencionaremos todos los esfuerzos que influyen sobre un fluido como son las fuerzas másicas, superficiales y viscosa y, ya definido todo lo necesario para describir la ecuación en la que se base el trabajo, la relacionaremos con la Ecuación de Euler introduciendo sus diferencias y semejanzas. Por último, expresaremos la Ecuación de Navier-Stokes mediante variables adimensionales y los cambios necesarios para llegar a esta.

Objetos de estudio: fluidos

Un **fluido** es un medio continuo sin forma fija caracterizado por fluir bajo la acción de una fuerza externa. Al tratarse de un medio continuo, podemos hacer uso de la **Ecuación de continuidad**.

Ecuación de Continuidad

La **ecuación de continuidad** manifiesta el principio de conservación de la masa en fluidos, es decir, la cantidad de masa de un fluido que pasa a través de una superficie cerrada S debe coincidir con la variación de esta contenida en su interior. Expresado matemáticamente,

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1.1)$$

siendo ρ la densidad del material, \mathbf{v} la velocidad del fluido y V el volumen delimitado por la superficie S .

Para llegar a esta expresión, el primer miembro expresará una integral de superficie cerrada S que representa la cantidad de masa que atraviesa la superficie en cada instante, y el segundo miembro representa la masa del fluido en cada instante encerrada en S :

$$m = \int_V \rho dV,$$

y consideramos la variación en el tiempo haciendo uso de la derivada respecto a t :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

Puesto que el vector superficie apunta hacia el exterior de la superficie, el producto escalar $\mathbf{v}d\mathbf{S}$ es positivo cuando el fluido sale del volumen, y por tanto la masa decrece. Para compensar este hecho, se introduce el signo menos en la expresión 1.1.

A partir de la ecuación 1.1, obtendremos un resultado relevante acerca de los fluidos incompresibles. Para ello, haremos uso del teorema de la divergencia de Gauss en el primer miembro de la ecuación,

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \iff \int_V \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (1.2)$$

Puesto que esta integral es nula para cualquier volumen, el integrando debe ser nulo, por lo que obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3)$$

que es la **ecuación de continuidad en forma diferencial o microscópica**, y tiene aplicación en todos los medios continuos. Luego, si consideramos un fluido incompresible, $\rho = cte$ y por consecuencia, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, obtenemos:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Por tanto, consideraremos cuando trabajemos con fluidos incompresibles que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.4)$$

A continuación, definiremos los esfuerzos que actúan sobre un fluido:

Definición 1.1. Definimos **esfuerzos** como las causas externas que provocan el flujo o deformaciones mecánicas en un medio continuo, y en particular en un fluido.

En fluidos, interesa destacar dos tipos de esfuerzos, la presión y los esfuerzos cortantes.

Presión y Esfuerzos cortantes

Definición 1.2. Denominamos **presión** a la fuerza que actúa de forma perpendicular sobre una superficie. Este esfuerzo será denotado con p y viene definido de la siguiente forma:

$$p = \frac{F}{S}$$

siendo S la superficie sobre la que actúa la fuerza F .

La presión también se puede definir de forma diferencial,

$$p = \frac{dF}{dS}.$$

Ambas definiciones coinciden en que la fuerza es homogénea en la superficie S .

La presión describe un esfuerzo compresor que se distribuye de forma continua por toda la superficie. Existen distintos tipos de presiones pero destacaremos la *presión hidrostática*.

Definición 1.3. Llamamos **presión hidrostática** a la presión producida por el peso del fluido en reposo y es expresado como

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h$$

siendo ρ la densidad del fluido, g el módulo de la aceleración de la gravedad y h la profundidad medida desde la superficie libre.

Es decir, la expresión anterior nos indica que la presión en el interior de un fluido, tal como el agua o el aire, aumenta con la profundidad.

Definición 1.4. Denominamos **esfuerzo cortante** a la fuerza que actúa de forma tangencial sobre una superficie. Este esfuerzo será denotado con $\sigma_{x_1x_2}$ y viene definido de la siguiente forma:

$$\sigma_{x_1x_2} = \frac{F_{x_2}}{S_{x_1x_2}}$$

siendo F la fuerza cortante aplicada, S la superficie en la que se aplica la fuerza, x_1 es la coordenada en el plano que representa la dirección normal a la superficie en la que el esfuerzo se aplica y x_2 indica la dirección en la que la fuerza actúa.

Teniendo en cuenta estas definiciones, se debe considerar que en el movimiento de un fluido, al igual que en otros fenómenos estudiados de la física, existen fuerzas de diferente sentido que se aplican de forma simultánea (es decir, puede haber fuerzas normales de fricción, tangenciales...). Así, a la hora de tratar con el fluido, podemos considerar la representación de cada elemento a través del cubo infinitesimal siguiente:

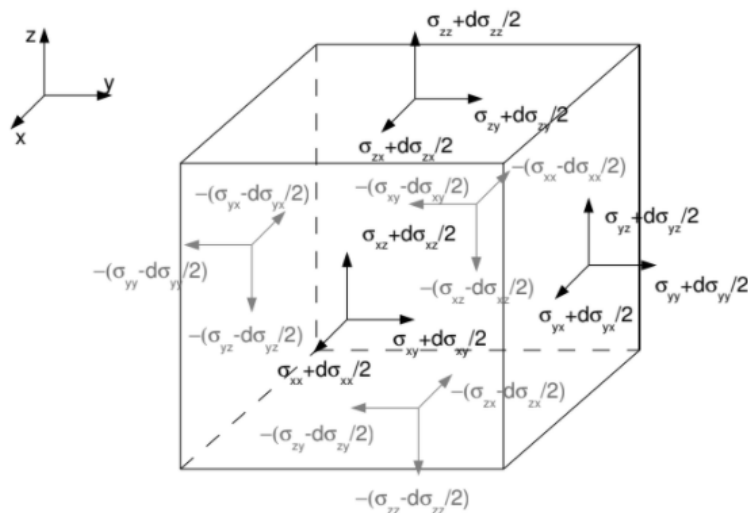


Figura 1.1: Partícula infinitesimal de un fluido expresado mediante un cubo

En dicho cubo, podemos apreciar los esfuerzos normales que actúan de forma perpendicular en cada cara y los esfuerzos cortantes que actúan de forma paralela sobre las caras opuestas, todos estos considerando la variación del esfuerzo debido al tamaño

infinitesimal del cubo. Los esfuerzos que actúan en cada elemento pueden agruparse en forma matricial mediante el *tensor de esfuerzos* que tiene la siguiente expresión:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

siendo la diagonal de la matriz los esfuerzos normales y el resto de elementos los esfuerzos cortantes.

Que existan esfuerzos cortantes implica que, a la hora de moverse un fluido, este debería ser deformado continuamente tanto en forma como en velocidad, y al no observarse eso, debe existir una fuerza de rozamiento, lo que nos lleva directamente al fenómeno de *viscosidad*.

Definición 1.5. Denominamos *viscosidad* al mecanismo por el que toda la energía introducida al fluido a través de las fuerzas externas se va disipando.

En la práctica, partiendo de la implicación mencionada, los fluidos (ya sean en estado gaseoso o líquido) siempre presentan un nivel de viscosidad, y serán conocidos como **fluidos viscosos**. Sin embargo, pueden considerarse algunos fluidos con viscosidad despreciable, y que por tanto a efectos prácticos, dependen únicamente de la presión, a pesar de encontrarse en movimiento. Estos fluidos son conocidos como **fluidos ideales**.

Propiedades de un fluido viscoso

Una vez definidos los objetos de estudio, tendremos en cuenta que cada fluido posee diferentes propiedades como puede ser su estado (líquido, gas, ...), su velocidad de deformación (ya sea por los esfuerzos que intervienen en el movimiento, la temperatura en la que se encuentra, la presión, ...), etc. Como ya hemos visto, una de las propiedades más relevantes será el denominado **coeficiente de viscosidad**.

Definición 1.6. Definimos *coeficiente de viscosidad absoluta o dinámica* como el cociente entre el esfuerzo cortante y el gradiente transversal de velocidad. Esto es,

$$\eta = \frac{\sigma_{yx}}{\frac{dv_x}{dy}}$$

La unidad empleada para la viscosidad en el Sistema Internacional es el pascal segundo ($Pa \cdot s$), pero en la práctica no suele ser la más empleada y se suele recurrir al Poise (P), es decir, al baria segundo ($\frac{dyn}{cm^2} \cdot s$) de tal forma que $1Pa \cdot s = 10P$.

Luego, al aplicar el mismo esfuerzo cortante a dos fluidos distintos, las velocidades de deformación serán **diferentes** al disponer de diferentes coeficientes de viscosidad. Un ejemplo de este suceso puede darse con el aceite y el agua, siendo la velocidad de deformación del agua mayor que la del aceite al poseer un coeficiente de viscosidad mucho menor.

En mecánica de fluidos viscosos, se define también el **coeficiente de viscosidad cinemática**.

Definición 1.7. Definimos *coeficiente de viscosidad cinemática* como el cociente entre coeficiente de viscosidad absoluta y la densidad del fluido. Esto es,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} .$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la velocidad con la que un fluido se deforma y el esfuerzo cortante al que es sometido, distinguiremos dos tipos de fluidos viscosos:

Definición 1.8. Un fluido viscoso es *Newtoniano* cuando la velocidad de deformación y el esfuerzo cortante son directamente proporcionales. En el caso de que estos dos valores no sean proporcionales, el fluido será *no-Newtoniano*.

Así, el coeficiente de viscosidad es constante en un fluido Newtoniano, pero depende del esfuerzo aplicado en el caso de los fluidos no-Newtonianos. Un ejemplo de fluido Newtoniano es el agua, o el aceite, y un ejemplo de fluido no-Newtoniano es la pintura o la pasta de dientes.

Ley de viscosidad de Stokes

Cabe mencionar que la definición 1.6 también se puede enunciar como la **Ley de viscosidad de Newton**, afirmando que el esfuerzo cortante en un punto de la superficie paralela a la dirección del flujo es proporcional al gradiente transversal de velocidad. Esto es cierto dado que la relación de proporcionalidad que nos otorga la definición de fluido newtoniano, nos proporciona la igualdad. Sin embargo, esta ley posee un entorno de trabajo limitado dado que solo se podría aplicar cuando el fluido se encuentra entre dos láminas planas y paralelas separadas.

A partir de esta idea, el entorno de trabajo pasa a cualquier flujo laminar mediante la **Ley de viscosidad de Stokes** para el caso de los fluidos newtonianos y comenzaremos generalizando la definición de viscosidad mediante esfuerzos.

Para el caso bidimensional, asumiremos la representación de un fluido sometido a los esfuerzos cortantes representados en la figura 1.2.

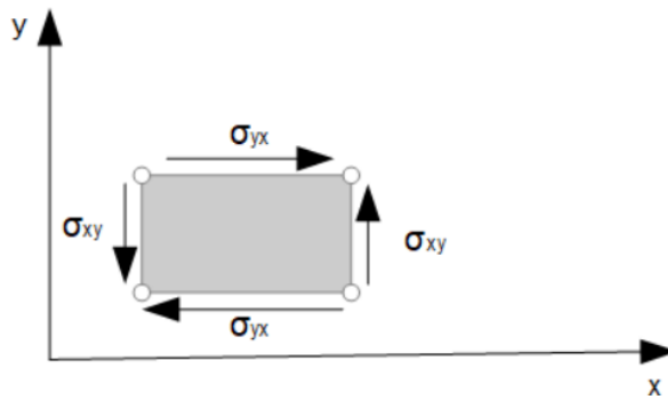
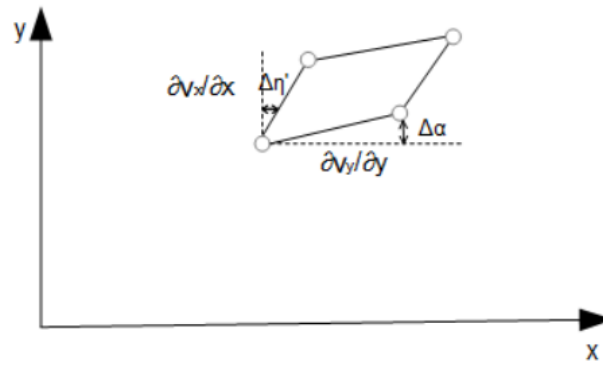


Figura 1.2: Esquema de la partícula del fluido en el instante t

Figura 1.3: Esquema de la partícula del fluido en el instante $t + dt$

Al aplicar un esfuerzo externo, se producen dos efectos en el fluido: por una parte, se produce la deformación instantánea en el instante $t + dt$, responsable del desplazamiento del fluido, y por otro, se produce el cambio de forma del fluido (indicado por el cambio de rectángulo a rombo). El cambio producido a raíz del esfuerzo cortante, por tanto, equivale a:

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (1.5)$$

y para el caso de un flujo laminar tridimensional, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), & (1.6) \\ \sigma_{zy} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \sigma_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

A continuación, deduciremos las componentes diagonales, que se dan para el caso en el que los esfuerzos que se realicen sean normales sobre las caras externas del elemento fluido con el campo de velocidades. Para ello, definiremos en primer lugar el tensor de esfuerzos viscosos (o la velocidad de deformación) expresado como una relación lineal con el tensor de gradientes de la velocidad (al ser un fluido Newtoniano):

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \bar{\bar{A}} : \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1.7)$$

siendo $\bar{\bar{A}}$ la matriz de comportamiento del sistema, un tensor de esfuerzos de cuarto orden con 3^4 elementos, que, al ser simétrica, solo serán necesarios los elementos escalares de la diagonal superior.

Si consideramos que el fluido es **isótropo**, es decir, las propiedades del fluido muestran independencia en cuanto a la dirección, podemos expresar la expresión 1.7 como:

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{\gamma}},$$

siendo $\bar{\gamma}$ el tensor de velocidad de deformación (la parte simétrica de $\nabla \cdot \mathbf{v}$) y de orden dos con 3^2 elementos. En coordenadas cartesianas:

$$\sigma'_{xy} = \sum_{z,w=1}^3 A_{xyzw} \gamma_{zw} = \sum_{z,w=1}^3 A_{xyzw} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x_w} + \frac{\partial v_w}{\partial x_z} \right),$$

y como poseen elementos en común, haciendo uso de la propiedad isotrópica del fluido, reduciremos los tensores definiendo una nueva matriz de comportamiento, pero esta vez de 9 elementos, denotada por $\bar{\bar{B}}$ obteniendo así:

$$\bar{\sigma}' = \bar{\bar{B}} \cdot \gamma.$$

Tanto $\bar{\sigma}'$ como γ , son tensores de esfuerzo y simétricos, y por tanto pueden diagonalizarse. Sus autovalores, que designaremos como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, mantienen una relación lineal de tal manera que σ_i depende de γ_i siendo $i = 1, 2, 3$,y a su vez de la traza, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

En coordenadas cartesianas,

$$\sigma'_i = 2\eta\gamma_i + \eta'(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3),$$

siendo η' el *segundo coeficiente de viscosidad*.

Por tanto, los esfuerzos normales sobre las caras externas del elemento fluido dependen del campo de velocidades como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \eta' \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \eta' \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \eta' \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

siendo $\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}$ el resultado de aplicar esfuerzos normales. Estos esfuerzos serán la suma resultante de la velocidad de deformación del fluido de los lados opuestos del fluido al considerarlo laminar y teniendo en cuenta la variación de los elementos diagonales del tensor de esfuerzos, proporcional a un segundo coeficiente de viscosidad.

Tras estudiar la Ley de Stokes, distinguiremos entre dos tipos de fuerzas: fuerzas másicas y fuerzas superficiales.

Definición 1.9. Definimos **fuerzas másicas** como aquellas fuerzas que actúan sobre la masa del fluido sin ningún tipo de contacto directo.

Un ejemplo de fuerza másica es el peso del fluido.

Definición 1.10. Denominamos **fuerzas superficiales** a aquellas fuerzas que actúan sobre el contorno del fluido, ya sea por el propio fluido o el entorno en el que se encuentre.

De esta forma,

Definición 1.11. Llamamos *densidad de fuerza viscosa* y será denotada por f_{visc} a la fuerza en cada coordenada:

$$\begin{aligned}(f_{visc})_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}, \\(f_{visc})_y &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}, \\(f_{visc})_z &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Si usamos las ecuaciones resultantes de la ley de viscosidad de Stokes mencionadas en 1.8 para expresar la fuerza viscosa en función del campo de velocidades y no en el campo de esfuerzos,

$$\begin{aligned}(f_{visc})_x &= \left(2\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \eta' \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right) + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y}\right) + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) = \\&= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \eta' \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \\&= \eta(\nabla^2 v_x) + \eta \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \eta' \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \eta \nabla^2 v_x + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}$$

De forma análoga se realizaría para cada coordenada obteniendo de esta forma:

$$\begin{aligned}(f_{visc})_x &= \eta \nabla^2 v_x + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\(f_{visc})_y &= \eta \nabla^2 v_y + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\(f_{visc})_z &= \eta \nabla^2 v_z + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Así,

$$\mathbf{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).\tag{1.11}$$

Una vez definidos todos los conceptos necesarios, deducimos la ecuación en la que se va a basar el trabajo.

Ecuación de Euler. Ecuación de Navier-Stokes

La **Ecuación de Euler** describe el movimiento de un fluido no viscoso y se expresa de la siguiente manera:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g},\tag{1.12}$$

El primer miembro de la ecuación manifiesta el producto de la densidad del fluido por la aceleración total del mismo. Dicha aceleración resulta de la suma de la *aceleración local*, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, que expresa el cambio de velocidad respecto al tiempo que toma el fluido en cada punto del flujo a consecuencia de ser no-estacionario; y de la *aceleración convectiva*, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, que existe a raíz del cambio que puede manifestar el cambio del perfil de velocidad. Se encuentra expresado en notación vectorial y es producto de derivar en sus coordenadas, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$, el campo de velocidades. Las derivadas son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

En cuanto al segundo miembro, considera las fuerzas másicas y superficiales que actúan sobre el fluido sin incluir las tangenciales, ya que los fluidos ideales no tienen viscosidad.

En base a la Ecuación de Euler, puede ser formulada la Ecuación de Navier-Stokes.

La **Ecuación de Navier-Stokes** es una ecuación en derivadas parciales no lineal expresada de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (1.13)$$

La ecuación de Navier-Stokes nos permite determinar el movimiento que toma en cada instante un fluido, ya sea ideal o viscoso.

En el caso de trabajar con fluidos incompresibles, recordemos que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ y además, $\rho = cte$ obteniendo:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.14)$$

Como mencionamos en la introducción, podemos exponer la relación que mantiene con la Ecuación de Euler. La Ecuación de Euler viene dada por la Ecuación de Navier-Stokes considerando el término disipativo, $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$, despreciable frente al término convectivo. Además, se puede llegar a esta en los siguientes casos:

- En el caso trivial, es decir, $\eta = 0$.
- En flujos irrotacionales ($\Omega = \nabla \times \mathbf{v} = 0$) e incompresibles que no posean manantiales ni sumideros dado que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ por la ecuación de continuidad.
- En flujos con una rotación de una masa fluida, dado que el operador rotacional se muestra constante ($\nabla \times \mathbf{v} = cte$) y por consecuencia, no manifiesta cambios la distribución de la masa, es decir, $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$.

Sin embargo, ambas presentan diferencias. La diferencia más evidente es que, la Ecuación de Euler no considera la viscosidad mientras que la Ecuación de Navier-Stokes sí. Matemáticamente, esto implica que el término $\nabla^2 v$ aumente a un segundo orden la ecuación diferencial y hace que sea más difícil de resolver.

Ecuación de Navier-Stokes adimensional

Ya presentada la Ecuación de Navier-Stokes, definiremos nuevas variables sin dimensiones con el fin de obtener la Ecuación de Navier-Stokes adimensional. Estas variables serán las siguientes:

- En primer lugar, para establecer las unidades de longitud, haremos el cambio:

$$\begin{aligned}x &= Lx^*, \\y &= Ly^*, \\z &= Lz^*,\end{aligned}\tag{1.15}$$

siendo L una longitud característica del problema (como la longitud de una tubería, o el radio de una cavidad)

- En segundo lugar, para definir las unidades de velocidad,

$$\begin{aligned}v_x &= Vv_x^*, \\v_y &= Vv_y^*, \\v_z &= Vv_z^*,\end{aligned}\tag{1.16}$$

siendo V la velocidad característica del fluido.

- Con las anteriores, podemos introducir las unidades de tiempo y presión,

$$\begin{aligned}t &= \frac{L}{V}t^*, \\p &= V^2\rho p^*\end{aligned}\tag{1.17}$$

Con las unidades ya definidas, procedemos a determinar los operadores diferenciales implicados en la ecuación para poder expresarla con las nuevas variables adimensionales. Los operadores serán de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y^*}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z^*}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{V}{L} \frac{\partial}{\partial t^*}, \\ \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^*.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Sustituyendo 1.15, 1.16, 1.17 y 1.18 en 1.13 obtenemos:

$$\rho \frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right) = \frac{-\rho V^2}{L} \nabla^* p^* + \eta \frac{V}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \rho \mathbf{g}. \quad (1.19)$$

Multiplicamos $\frac{L}{V^2 \rho}$ en ambos miembros:

$$\frac{L}{V^2 \rho} \left(\rho \frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right) \right) = \frac{L}{V^2 \rho} \left(\frac{-\rho V^2}{L} \nabla^* p^* + \eta \frac{V}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \rho \mathbf{g} \right), \quad (1.20)$$

obteniendo así:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* \right) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{\Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*. \quad (1.21)$$

conocido como **Ecuación de Navier-Stokes adimensional**.

A partir de esta deducción, podemos estudiar qué tipo de flujo presenta el fluido en función de la viscosidad. El valor que determinará la clasificación se conoce como *número de Reynolds*.

Definición 1.12. Definimos *número de Reynolds* como el cociente de las fuerzas de inercia y de viscosidad que presenta un fluido y se expresa de la siguiente forma:

$$\Re = \frac{\rho V L}{\eta}$$

El número de Reynolds permite comparar dos corrientes fluidas distintas y encontrar sus semejanzas y posee la peculiaridad de que es una magnitud adimensional.

Por otro lado, tenemos en la ecuación el valor adimensional Fr , conocido como *número de Froude*.

Definición 1.13. Definimos *número de Froude* como el cociente de las fuerzas de inercia y de gravedad que presenta un fluido y se expresa de la siguiente forma:

$$Fr = \sqrt{\frac{V^2}{gL}}$$

Una vez definida la Ecuación de Navier-Stokes, veamos otra forma de expresarla, también de una forma adimensional, centrándonos ahora en la rotación del fluido. Definimos en primer lugar la vorticidad Ω como $\Omega = \nabla \times \mathbf{v} \neq 0$, y diremos cuando exista en el fluido que este es *rotacional*. Haciendo uso de la definición y de la siguiente propiedad $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2$ en la ecuación 1.13 obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) &= -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \implies \\ \implies \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) &= -\nabla p - \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \end{aligned}$$

y aplicando el operador rotacional en ambos miembros y haciendo uso de sus propiedades,

$$\begin{aligned}\nabla \times \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) \right] &= \nabla \times [-\nabla p - \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}] \\ \rho \left[\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) + \nabla \times \left(\frac{1}{2} \nabla v^2 \right) \right] &= -\nabla \times (\nabla p) - \nabla \times (\rho \mathbf{g}) + \nabla \times (\eta \nabla^2 \mathbf{v}) \\ \rho \left[\frac{\partial \nabla \times \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \cdot 0 \right] &= -0 - 0 + \eta \cdot \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) \\ \rho \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) \right] &= \eta \nabla^2 \Omega.\end{aligned}$$

donde se ha usado que el rotacional del gradiente de un campo escalar es idénticamente nulo.

Despejando ρ al segundo miembro, obtenemos la **Ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible**:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega. \quad (1.22)$$

Haciendo uso el cambio a las variables adimensionales que ya vimos al principio de esta sección, tenemos:

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{L} \nabla^* \times (V \mathbf{v}^*) = \frac{V}{L} \nabla^* \times \mathbf{v}^* = \frac{V}{L} (\nabla \times \mathbf{v})^* = \frac{V}{L} \Omega^*. \quad (1.23)$$

Sustituyendo 1.15, 1.16, 1.17, 1.18 y 1.23 en 1.13 conseguimos deducir:

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + \nabla \times (\Omega^* \times \mathbf{v}^*) = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla^{*2} \Omega^*. \quad (1.24)$$

Por tanto, la Ecuación de Navier-Stokes adimensional en términos de la vorticidad viene dada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial t^*} + \nabla \times (\Omega^* \times \mathbf{v}^*) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \Omega^*. \quad (1.25)$$

donde de nuevo aparece el número de Reynolds.

Cuando la viscosidad es muy grande, el número de Reynolds es pequeño y entonces el miembro de la derecha es mucho más grande que el de la izquierda y la ecuación se puede escribir como $\nabla^{*2} \Omega^* = 0$, o también $\nabla^{*2} \mathbf{v}^* = 0$ a partir de la ecuación 1.21.

Tras finalizar la primera subsección, comenzaremos a aplicar la Ecuación de Navier-Stokes en distintos ámbitos de la mecánica de fluidos. Daremos uso a conocimientos de ecuaciones diferenciales y a nociones físicas como las que conforman la Ecuación de Hagen-Poiseuille y el flujo potencial. Además, se mencionarán los factores que hacen posible el cálculo de soluciones de forma exacta y lo pondremos en práctica con aplicaciones como el flujo de Couette y el fluido entre dos cilindros en rotación.

Ecuación de Hagen-Poiseuille

En primer lugar, realizaremos un estudio en aplicaciones donde la ecuación de Navier-Stokes sea resoluble analíticamente. Empezaremos deduciendo la Ecuación de Hagen-Poiseuille y lo pondremos en práctica en varios problemas. A través de esta ecuación, podremos conocer la Ley de Hagen-Poiseuille y el flujo de Couette. Para ello, supondremos que nos encontramos en un flujo laminar, estacionario y sometido a un gradiente de presión entre sus extremos, $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Veamos la deducción de la Ecuación de Hagen-Poiseuille. Para ello, supondremos que la dirección del flujo coincide con el eje x , sin pérdida de generalidad, y considerando también las condiciones mencionadas anteriormente, al ser el fluido laminar, la ecuación se simplifica:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v. \quad (1.26)$$

siendo nulo el término convectivo al tratarse de un flujo estacionario y paralelo.

Al ser un flujo estacionario, $\frac{dv}{dt} = 0$; y unidimensional considerando una gran extensión de la dimensión z (para trasladar el problema a uno bidimensional), $\nabla^2 v = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 + \frac{d^2 v}{dy^2} + 0$, se obtiene así la **Ecuación de Hagen-Poiseuille** en coordenadas cartesianas:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}. \quad (1.27)$$

Estudio de un fluido entre dos láminas planas, paralelas y fijas

Daremos comienzo a la sección analizando un flujo laminar entre dos láminas planas, de forma paralela y que se encuentran fijas y provocado por un gradiente de presión.

Trasladaremos el problema a uno bidimensional considerando que las láminas poseen una gran longitud en la dirección del eje z (perpendicular al dibujo) obteniendo así un flujo unidimensional.

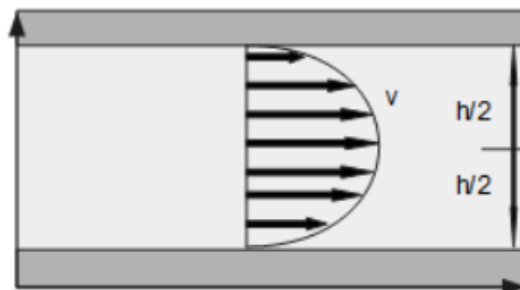


Figura 1.4: Esquema del problema

Estudiemos de forma general la expresión del perfil de velocidad y a partir de este, los esfuerzos, el caudal, ... que nos describen el problema. Para ello, daremos uso a la ecuación 1.27 obtenida a partir de la Ecuación de Navier-Stokes general:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

siendo $\frac{\partial p}{\partial x}$ el gradiente de presión impuesto, que supondremos conocido.

Luego procedemos a resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con las siguientes condiciones de contorno:

$$v\left(\frac{h}{2}\right) = 0; \quad v\left(-\frac{h}{2}\right) = 0.$$

Integrando la ecuación respecto a y :

$$\int \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dy = \int \frac{d^2 v}{dy^2} dy \implies \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{\eta} + C_1 = \frac{dv}{dy} : C_1 \in \mathbb{R},$$

e integrando nuevamente respecto a y ,

$$\int \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{\eta} + C_1 \right) dy = \int \frac{dv}{dy} dy \implies \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2\eta} + C_1 y + C_2 = v : C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

La solución general del problema queda expresada de la siguiente forma:

$$v = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 y + C_2 : C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Calculemos ahora los valores de C_1 y C_2 . Haciendo uso de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet, $v = 0$ (al no existir deslizamiento en el fluido adyacente a las láminas) en $y = \pm \frac{h}{2}$, lo sustituimos en 1.28:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \cdot \frac{h}{2} + C_2, \\ 0 &= \frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \cdot \frac{-h}{2} + C_2 \end{aligned}$$

Así,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{h^2}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Sustituyendo en 1.28,

$$v = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2\eta} \left[\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right]. \quad (1.29)$$

De esta forma, obtenemos la solución particular que nos describe el perfil de velocidad parabólico que tomará el fluido en este problema.

Tras calcular el perfil de velocidad, procedemos a calcular la distribución de esfuerzos cortantes y el caudal por unidad de longitud:

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{dv}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (1.30)$$

Para calcular el caudal por unidad de longitud, usamos:

$$Q = \int_S v dS = \int v l dy.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{l} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2\eta} \left[\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2\eta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4} \right] dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

La longitud l se refiere a la dirección transversal, z , permitiendo así considerar el caudal en láminas infinitas en las que no existen paredes y transformando la integral en superficie en una integral en y .

En el caso de que no exista presión, tanto la velocidad, como el caudal y el esfuerzo serán nulos. Por otra parte, el signo negativo en la ecuación 1.31 indica que el flujo se produce en el sentido en que disminuye la presión.

Estudio de un fluido entre dos láminas planas, paralelas y una de estas no es fija

El siguiente problema consistirá en analizar un fluido con flujo laminar entre dos láminas paralelas, de las cuales una se encuentra fija y la otra se desplaza manteniendo la distancia con la otra lámina, con una velocidad constante. A diferencia del anterior problema, donde el flujo se producía por un cambio de presión conocido, en este caso, veremos que se produce flujo en ausencia de gradiente de presión. Este flujo recibe el nombre de **flujo de Couette**.

De forma análoga al primer problema, trasladamos el problema a uno bidimensional.

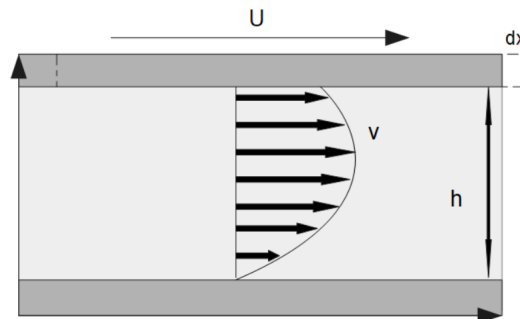


Figura 1.5: Esquema del problema

siendo U la velocidad de la placa superior y donde se ha supuesto que también existe un gradiente de presión en la dirección x .

Daremos uso a la ecuación 1.28 dado que la ecuación que describe el movimiento del fluido corresponde con la misma ecuación del ejemplo anterior. Sin embargo, en este problema disponemos de diferentes condiciones de frontera. La ecuación figura de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}, \\ v(0) = 0, \\ v(h) = U. \end{cases}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera $v = 0$ para $y = 0$ y $v = U$ para $y = h$ en 1.28,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0}{2\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 \cdot 0 + C_2 \implies C_2 = 0. \\ U &= \frac{h^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + C_1 h + 0 \implies C_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego,

$$C_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad C_2 = 0.$$

Por tanto,

$$v = \frac{y^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U}{h} y - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y = \frac{U}{h} y + \frac{h^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\left(\frac{y}{h} \right)^2 - \frac{y}{h} \right]. \quad (1.32)$$

De esta forma, obtenemos la solución particular que nos describe el perfil de velocidad parabólico que tomará el fluido en este problema. Si consideramos ausencia de gradiente de presión, tenemos que la velocidad pasa a poseer un perfil de velocidad lineal.

Tras calcular el perfil de velocidad, procedemos a calcular la distribución de esfuerzos cortantes y el caudal por unidad de longitud.

$$\sigma_{yx} = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{2y}{h} - 1 \right]. \quad (1.33)$$

$$\frac{Q}{l} = \int_S \frac{v}{l} dS = \int_0^h \frac{U}{h} y + \frac{h^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left[\left(\frac{y}{h} \right)^2 - \frac{y}{h} \right] dy = \frac{hU}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.34)$$

De nuevo, en ausencia de presión, podemos apreciar que los esfuerzos y el caudal son proporcionales a U , la velocidad de la placa en movimiento.

Estudio de un fluido en una tubería de sección circular

Analicemos la mecánica de un fluido viscoso e incompresible, con flujo laminar y estacionario que se encuentra en una tubería de sección circular.

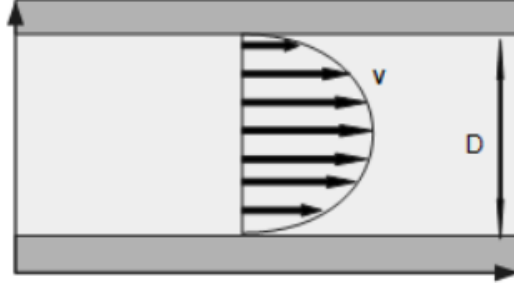


Figura 1.6: Esquema del problema

La condición de contorno es que la velocidad debe anularse en las paredes de la tubería, es decir, $v(\frac{D}{2}) = 0$.

Debido a la simetría del problema, comenzaremos expresando las componentes de la ecuación de Navier-Stokes general en coordenadas cilíndricas:

- Componente r (radial):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \eta \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right). \quad (1.35)$$

- Componente ϕ (angular):

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_\phi + \frac{v_\phi \cdot v_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g_\phi + \eta \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right). \quad (1.36)$$

- Componente z (axial):

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \eta \nabla^2 v_z. \quad (1.37)$$

y consideramos que $v = v_z(r)$ (al poder considerar el flujo axilsimétrico respecto al eje de la tubería). Además, tendremos en cuenta que el operador laplaciano en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.38)$$

y la siguiente relación:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{d}{dr} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.39)$$

De esta forma, tomaremos las ecuaciones 1.35, 1.36 y 1.37 y despreciamos la gravedad:

- En primer lugar, tomamos la componente r de la ecuación:

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_r.$$

Aplicando 1.38,

$$\rho \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_r}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right],$$

y como v solo tiene componente en la dirección z , esta ecuación no nos proporciona ninguna información.

- En segundo lugar, la componente ϕ de la ecuación en este problema conllevará al mismo resultado que para la componente r .
- En último lugar, calculamos la componente z de la ecuación:

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z.$$

Aplicando 1.38,

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right],$$

y como v_z depende únicamente de r ,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right].$$

Luego, pasamos a resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right), \\ v\left(\frac{D}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Integramos respecto a r :

$$\int \frac{1}{\eta} r \frac{\partial p}{\partial z} dr = \int \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right) dr \iff \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2\eta} + C_1 = r \frac{dv}{dr} \implies \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2\eta} + \frac{C_1}{r} = \frac{dv}{dr} \quad : C_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

Integrando por segunda vez respecto a r ,

$$\int \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2\eta} + \frac{C_1}{r} \right) dr = \int \frac{dv}{dr} dr \implies \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{4\eta} + C_1 \cdot \ln(r) + C_2 = v \quad : C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la condición de contorno $v\left(\frac{D}{2}\right) = 0$ a la ecuación y teniendo en cuenta que $C_1 = 0$ para dar sentido a la expresión (dado que si no fuera cero, la velocidad sería infinita en r igual a cero, hecho que no es posible),

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{D^2}{16\eta} + C_2 = 0,$$

y obteniendo:

$$C_2 = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{D^2}{16\eta}.$$

Por tanto, la expresión que define el perfil de la velocidad de dicho problema es:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right). \quad (1.41)$$

Una vez calculada 1.41, determinemos el resto de variables que caracterizan la mecánica del fluido.

La distribución de esfuerzos tangenciales viene dada por:

$$\sigma_{rz} = \eta \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) r. \quad (1.42)$$

En el caso de que no se manifieste diferencia de presión, a partir de dicha expresión podemos afirmar que los esfuerzos serían nulos, y no habría movimiento del fluido.

Usando el perfil de velocidades, podemos determinar el caudal del fluido en toda la sección de la tubería, denotado por Q :

$$Q = \int_S v dS = \int_S \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right) dS = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \int_0^{\frac{D}{2}} \left[r^2 - \frac{D^2}{4} \right] r dr = -\frac{\pi D^4}{128\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (1.43)$$

Este resultado recibe el nombre de *Ley de Hagen-Poiseuille* y afirma que el caudal en una tubería de un fluido newtoniano cuando su régimen es laminar es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido y directamente proporcional a la diferencia de presiones de los extremos de la misma. Al ser la diferencia de presiones de los extremos de la tubería un valor negativo, el caudal deberá ser una cantidad positiva. Además, es proporcional al diámetro a la cuarta (la sección al cuadrado) dado que en las paredes de la tubería anulan la velocidad del fluido.

Fluido entre dos cilindros en rotación

Otra de las aplicaciones que pueden estudiarse mediante la solución analítica de la Ecuación de Navier-Stokes es el problema de rotación alrededor de un eje. Consideremos un fluido encerrado entre dos cilindros coaxiales infinitos de radios R_1 y R_2 : $R_2 > R_1$, girando alrededor de sus ejes con velocidades angulares Ω_1 y Ω_2 respectivamente como se muestra en la figura:

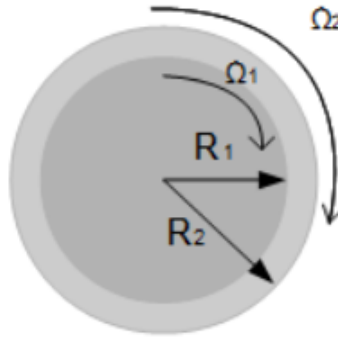


Figura 1.7: Esquema del problema

Para la resolución de dicho problema, daremos uso a las coordenadas cilíndricas y consideraremos, como en el anterior punto, la extensión infinita de la dimensión z . Además, por la simetría del problema podemos eliminar la dependencia angular, con lo que el problema se convierte en bidimensional, y consideramos el flujo unidimensional. Así,

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\phi = v(r), \quad p = p(r). \quad (1.44)$$

La ecuación de Navier-Stokes expresada en coordenadas cilíndricas para este problema viene definida de la siguiente forma:

- En primer lugar, consideramos la ecuación 1.35:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \eta \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right).$$

Despreciando la gravedad y haciendo uso de las expresiones 1.38 y 1.39 llegamos a:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_r}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right].$$

y aplicando las condiciones 1.44 nos queda:

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

que equivale a:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}. \quad (1.45)$$

- En segundo lugar, consideramos la ecuación 1.36:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_\phi + \frac{v_\phi \cdot v_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + g_\phi + \eta \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right)$$

Despreciando la gravedad y haciendo uso de la expresión 1.38 y 1.39:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{dv_\phi}{dr} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi \cdot v_r}{r} = \\ & = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_\phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} - \frac{v_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]. \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones 1.44 nos queda:

$$0 = \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \frac{v}{r^2} \right]$$

obteniendo así:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \quad (1.46)$$

dado que el coeficiente de viscosidad, η , no puede ser nulo al trabajar con fluidos viscosos.

- En último lugar, consideramos la coordenada z , que viene dada por la ecuación 1.37:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \eta \nabla^2 v_z.$$

Despreciando la gravedad y haciendo uso de las expresiones 1.38 y 1.39:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{dv_z}{dr} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right].$$

y aplicando las condiciones 1.44, llegamos a que se anulan ambos miembros.

Una vez calculadas las componentes, procedemos a resolver el problema.

Tendremos en cuenta las condiciones de contorno concernientes a la velocidad del fluido en las superficies de los cilindros, es decir,

$$v = R_1 \Omega_1 \text{ en } r = R_1; \quad v = R_2 \Omega_2 \text{ en } r = R_2.$$

Luego, la EDO figura de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0, \\ \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}, \\ v(R_1) = R_1 \Omega_1, v(R_2) = R_2 \Omega_2. \end{array} \right.$$

siendo $R_2 > R_1 > 0$.

En primer lugar resolveremos la ecuación 1.46. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de Euler de segundo orden y los pasos para solucionarlo son los siguientes.

Asumimos la solución de la forma $v(r) = r^n$ y sustituimos:

$$(r^n)'' + \frac{(r^n)'}{r} - \frac{r^n}{r^2} = 0 \implies r^{n-2}(n^2 - 1) = 0 \iff n = \pm 1$$

Por tanto, la solución general del problema viene dado por:

$$v(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$v(R_1) = C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} \iff R_1 \Omega_1 = C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1}.$$

$$v(R_2) = C_1 R_2 + \frac{C_2}{R_2} \iff R_2 \Omega_2 = C_1 R_2 + \frac{C_2}{R_2}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$C_1 = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

$$C_2 = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Obteniendo así el perfil de velocidad del problema del fluido en rotación:

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Una vez determinado el perfil de velocidad, obtenemos la distribución de presiones resolviendo la ecuación 1.45.

$$\int \frac{dp}{dr} dr = \int \rho \left[\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \right] dr$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación respecto a r:

$$p = \rho \left[\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r - \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right] + C_3 : C_3 \in \mathbb{R}.$$

Tras calcular el perfil de velocidad y la distribución de presiones, procedemos a calcular la distribución de esfuerzos cortantes y el caudal.

$$\sigma_{r\phi} = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \left[\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2} \right]. \quad (1.47)$$

$$\frac{Q}{l} = \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \right) dr = \left[\frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{r^2}{2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln(r) \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\frac{Q}{l} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\ln(R_2) - \ln(R_1)). \quad (1.48)$$

Luego, si consideramos $\Omega_1 = \Omega_2$, tenemos que tanto el esfuerzo como el caudal son proporcionales a la velocidad angular.

Resultados: Estudio y cálculo de soluciones de la ecuación en problemas bidimensionales

Una vez introducidos todos los conceptos de la Ecuación de Navier-Stokes, se resolverán problemas tridimensionales que pueden reducirse a problemas de dos coordenadas por la simetría que presentan. De esta forma, se realizarán problemas bidimensionales de mayor dificultad a los planteados en el primer capítulo mediante la Ecuación de Navier Stokes.

De esta forma, comenzaremos estudiando la mecánica de un fluido infinito en el que se ha introducido un disco que rota respecto a su eje, y que presentará como factor a considerar que el término no lineal no se anula. Como se verá, la solución solo puede calcularse numéricamente y, tras deducirse las ecuaciones en términos de unas funciones auxiliares, obtendremos las relaciones de recurrencia y se resolverán analíticamente mediante MATLAB ©.

Una vez se haya finalizado este problema, se analizarán otras situaciones haciendo uso del flujo potencial y flujo de corriente. Daremos comienzo con las definiciones y con problemas elementales y, una vez introducidos los conceptos, realizaremos el problema de una esfera introducida en un fluido con velocidad uniforme, calculando el campo de velocidades.

Para finalizar el capítulo, analizaremos un problema resuelto mediante un método iterativo con integración numérica directa de la ecuación de Navier-Stokes. Se discutirá el método y se presentarán los resultados.

2.1 Fluido infinito en un disco plano

Tras haber estudiado y calculado las soluciones de los problemas analíticos en el capítulo anterior, destacamos que, al hacer uso a la Ecuación de Navier-Stokes, hemos considerado la aceleración convectiva nula, es decir, que el perfil de velocidades no manifiesta cambios. Este hecho provoca que la ecuación pase a ser lineal y se simplifiquen los problemas.

En el caso de que este término no lineal no se anule, la obtención de soluciones exactas resulta más ardua y el número de casos resolubles analíticamente se reduce. Estudiemos un problema en el que el término no lineal no sea nulo.

Supongamos que sumergimos en un fluido infinito un disco plano y que este gira con velocidad uniforme alrededor de su eje.

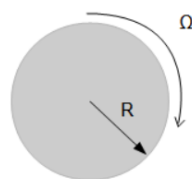


Figura 2.1: Esquema del problema

Para realizar el estudio de este problema, consideraremos que situamos el origen de coordenadas en el centro del disco, y el eje de rotación del disco fija el eje z . Tomaremos coordenadas cilíndricas y establecemos las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\phi = \Omega r, \quad v_z = 0 \quad \text{en } z = 0. \\ v_r = 0, \quad v_\phi = 0 \quad \text{en } z = +\infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

siendo Ω la velocidad angular del disco. Para que satisfaga la ecuación de continuidad, en el caso de que $z = +\infty$, se considera que tiene que existir un flujo vertical constante al alejarse el fluido del eje de rotación.

Para el cálculo de la solución general, buscaremos soluciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_r = r\Omega F(z_1); \quad v_\phi = r\Omega G(z_1); \quad v_z = H(z_1)\sqrt{\nu\Omega}; \\ p = -\rho\nu\Omega P(z_1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

siendo $z_1 = z\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}$ con ν la viscosidad cinemática.

Sustituyendo dichas soluciones en la ecuación de Navier-Stokes y en la ecuación de continuidad, todas ellas en coordenadas cilíndricas, obtenemos:

- Para la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 &\iff 2\rho\Omega F(z_1) + \rho\sqrt{\nu\Omega}H'(z_1)\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} = 0 \\ &\iff 2\rho\Omega F(z_1) + \rho\Omega H'(z_1) = 0 \implies \Omega\rho[2F(z_1) + H'(z_1)] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$2F(z_1) + H'(z_1) = 0.$$

- Para la coordenada radial, tomamos la ecuación 1.35,

$$\begin{aligned} r\Omega F(z_1)\Omega F(z_1) + H(z_1)\sqrt{\nu\Omega}r\Omega F'(z_1)\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} = \eta \left(\frac{\Omega F(z_1)}{r} - \frac{\Omega F(z_1)}{r} + r\Omega F''(z_1)\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \right) &\iff \\ \iff r\Omega^2 F^2(z_1) + H(z_1)r\Omega^2 F'(z_1) - r\Omega^2 G^2(z_1) = r\Omega^2 F''(z_1)\rho &\iff \\ \iff r\Omega^2(F^2(z_1) - G^2(z_1) + F'(z_1)H(z_1)) = r\Omega^2 F''(z_1) &\implies \\ \implies F^2(z_1) - G^2(z_1) + F'(z_1)H(z_1) = F''(z_1). \end{aligned}$$

- De la misma forma, podemos calcular las ecuaciones para la coordenada angular y axial.

Se obtiene finalmente el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$F^2(z_1) - G^2(z_1) + F'(z_1)H(z_1) = F''(z_1), \quad (2.3)$$

$$2F(z_1)G(z_1) + G'(z_1)H(z_1) = G''(z_1), \quad (2.4)$$

$$H(z_1)H'(z_1) = P'(z_1) + H''(z_1), \quad (2.5)$$

$$2F(z_1) + H'(z_1) = 0, \quad (2.6)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$F(z_1) = 0; \quad G(z_1) = 1; \quad H(z_1) = 0 \quad \text{siendo } z = 0. \quad (2.7)$$

$$F(z_1) = 0; \quad G(z_1) = 0; \quad \text{siendo } z = +\infty. \quad (2.8)$$

trasladando el problema a un problema de integración de ecuaciones diferenciales con una sola variable, z_1 . Debido a su dificultad, mostraremos la solución que se obtiene en este problema mediante el entorno de programación MATLAB ©.

Resolución numérica del problema

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones, debemos notar que tenemos condiciones de tipo Dirichlet en $z = 0$ y $z \rightarrow \infty$. Sin embargo, al ser el sistema de ecuaciones de segundo orden, necesitamos dos condiciones iniciales. Por tanto, usaremos la condición inicial en $z = 0$ (paso 2), y supondremos la segunda condición inicial en el paso 1. Para encontrar las condiciones iniciales apropiadas, que conducen a la condición correcta en $z \rightarrow \infty$, utilizaremos un algoritmo simple, basado en el método de Montecarlo. Por tanto, iremos probando diferentes valores buscando minimizar F y G para altos valores de z_1 . El código MATLAB ©realizado comprenderá dos scripts.

1. El script principal, nombrado como `problemanum.m`. Calculará y reflejará en consola, los valores de la condición inicial probados, y el mínimo conseguido hasta el momento.

En esta función, comenzaremos definiendo un vector de valores para z_1 que lo denotaremos mediante `t` y para ello, consideraremos un paso h , expresado como `del ta`, para que estos valores sean equiespaciados.

```
%%% DISCRETIZACION %%%
```

```
N = 200; % numero de valores del vector.
```

```
a = 0; % a representa el valor inicial del intervalo.
```

2. RESULTADOS: ESTUDIO Y CÁLCULO DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN EN PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

```
b = 10; %b representa el valor final.
delta =(b-a) ./N;
for i=1:N+1
t(i) = a + (i-1).*delta;
end
```

Reservaremos la memoria mediante el comando zeros, indicando así que necesitaremos un vector de N+1 elementos para cada función.

```
%%% RESERVA DE MEMORIA %%%
```

```
f=zeros(1,N+1);
g=zeros(1,N+1);
h=zeros(1,N+1);
p=zeros(1,N+1);
```

Para resolver el problema numéricamente, además de considerar las funciones de recurrencia, que serán deducidas y expresadas en el script complementario, tendremos en cuenta la resolución gráfica aportada en [2]. Para comprobar que F y G converjan a cero en infinito, calcularemos $\int_Z^\infty (F^2 + G^2)dz$, siendo Z un número grande. Supondremos unos valores iniciales, minf , ming , el valor máximo que alcanza la integral $F^2 + G^2$ mediante sumamax y las iteraciones. Una vez definidos los valores necesarios, ejecutamos un bucle `while` hasta que el número sumamax sea menor que 0,1. El bucle se encargará de buscar el mínimo valor de la suma considerando si, al suponer otros valores de f_0 y g_0 aleatorios, la integral resultante es menor. En el caso de que sea menor, se considerará como la nueva sumamax y se tomarán los valores de f_0 y g_0 como los nuevos minf , ming . El proceso se repetirá hasta que la condición deje de cumplirse.

```
%%% CALCULO DEL MINIMO EN FUNCION DE f0 Y g0 %%%
```

```
% Tomaremos unos valores iguales a los de la condicion
% inicial del segundo punto.
minf = 0; % Al disponer de pendiente positiva y comenzar en
% 0, debe poseer un nro negativo.
ming = 1;

sumamax = 1e30;
iter = 0;
[ss,f1,g1,h1] = suma_infty(f,g,h,p,minf,ming);
while sumamax > 0.5
iter = iter + 1;
deltaf = 0.01.*(rand - 0.5);
deltag = 0.01.*(rand - 0.5);
f0 = minf + deltax;
g0 = ming + deltag;
[ss0,f2,g2,h2] = suma_infty(f,g,h,p,f0,g0);
if ss0 < sumamax
minf = f0;
```

```

    ming = g0;
    sumamax = ss0;
end

```

Siguiendo en dicho bucle, con la intención de reflejar el resultado del programa, le indicaremos al programa que muestre en pantalla la iteración y la integral resultante.

```

    %%% RESULTADO DEL PROGRAMA EN CONSOLA %%%

    fprintf('Iteracion numero')
    disp(iter)
    fprintf('Resultado de la integral')
    disp(sumamax)
end % para finalizar el bucle while

```

Una vez mostrada y calculada la integral, procedemos a representar las funciones F, G y H :

```

    %%% REPRESENTACION DE LA GRAFICA %%%

    plot(t, f2, 'Color', [0, 1, 1]), hold on
    plot(t, g2, 'Color', [1, 0, 0]), hold on
    plot(t, -h2, 'Color', [0, 1, 0]), hold on

    legend('F', 'G', 'H', 'Location', 'best') % Leyenda de la
        grafica.
    title('Solucion numerica del fluido') % Para poner titulo a
        la grafica.
    xlabel('z_1') % Crea una etiqueta en el eje x para indicar
        que los valores del eje x representan al valor 'z_1'.

```

2. El segundo script, nombrado como `suma_infty.m`. Será el script que calcula la integral de $F^2 + G^2$ utilizado para la optimización de las soluciones.

Para realizar dicha integral, definiremos la función con valores a introducir f, g, h, p, f_0, g_0 siendo f, g, h, p las funciones F, G, H, P y f_0, g_0 las condiciones iniciales en el primer paso, que serán introducidos. Esta función devolverá el resultado de la integral, expresado de la forma `suma`.

```
function [suma, f, g, h] = suma_infty(f, g, h, p, f0, g0)
```

En primer lugar definiremos la discretización de forma análoga al anterior script:

```

    %%% DISCRETIZACION %%%

    N = 200; % numero de valores del vector.
    a = 0;   % a representa el valor inicial del intervalo.
    b = 10;  % b representa el valor final.
    delta =(b-a)./N;

```

```
for i=1:N+1
t(i) = a + (i-1).*delta;
end
```

Tras considerar la discretización, declararemos las condiciones iniciales en el primer y segundo punto.

```
%%% CONDICIONES INICIALES %%%
```

```
f(:) = 0; %F = 0 en z1
g(:) = 0;
h(:) = 0; %H = 0 en z1
p(:) = 0; %P = 0 en z1
```

```
g(2) = 1; %G = 1 en z1 = 0
```

```
% Para  $F_{-1}$  y  $G_{-1}$  supondremos valores numericos.
```

```
f(1) = f0; % Condiciones en -1
g(1) = g0;
```

A continuación deducimos las fórmulas de recurrencia que obtendremos siguiendo el esquema de Euler:

- Considerando la derivada primera y la derivada segunda de orden 1:

$$F' = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \implies F'_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{h}$$

$$F'' = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} \implies F''_n = \frac{F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1}}{h^2}$$

y sustituyendo en 2.3:

$$\frac{F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1}}{h^2} = \left(\left(\frac{F_n - F_{n-1}}{h} \right)^2 - G_n^2 + \frac{F_n - F_{n-1}}{h} H_n \right),$$

que despejando F_{n+1} nos proporciona la relación de recurrencia:

$$F_{n+1} = 2F_n - F_{n-1} + h^2(F_n^2 - G_n^2) + h(F_n - F_{n-1})H_n.$$

- De forma análoga, la segunda fórmula de recurrencia se obtiene a partir de 2.4:

$$G_{n+1} = 2G_n - G_{n-1} + h^2 2F_n G_n + h(G_n - G_{n-1})H_n.$$

- La fórmula de recurrencia de H se obtiene, evitando el uso de la función aún sin definir P , en función de F a partir de 2.6:

$$H_{n+1} = H_n - 2hF_n.$$

- Por último, la fórmula para P :

$$P_{n+1} = P_n - 2F_n H_n h - \frac{H_{n+1} - 2H_n + H_{n-1}}{h}.$$

Teniendo en cuenta el cambio de notación para que los índices sean positivos, aumentaremos el valor de los índices en 2 unidades y, una vez implementadas dichas ecuaciones, lo calcularemos mediante un bucle for que ejecuta desde $n = 1$ (tercer valor de las funciones) a $n = N - 2$ (los N -ésimos valores). Para evitar posibles overflow a la hora de ejecutar las funciones de recurrencia, consideraremos, mediante el comando if, que si algún valor resultante es mayor en valor absoluto que 10^{10} o -10^{10} , lo consideraremos como 10^{10} .

```

%%% FORMULAS DE RECURRENCIA %%%

for i=1:N-2
f(i+2) = 2.*f(i+1) - f(i) + delta.^2 *(f(i+1)*f(i+1) - g(i
+1)*g(i+1)) + delta.* (f(i+1) - f(i))*h(i+1);
g(i+2) = 2.*g(i+1) - g(i) + delta*delta*2*f(i+1)*g(i+1) +
delta.*(g(i+1)- g(i))*h(i+1);
h(i+2) = h(i+1) - 2.*delta*f(i+1);
p(i+2) = p(i+1) - 2.*f(i+1)*h(i+1).*delta - (h(i+2) - 2.*h(
i+1) + h(i))./delta;

% Para evitar que el script se interrumpa por overflow:
if abs(f(i+2)) > 1e10
    f(i+2)=1e10;
end
if abs(g(i+2)) > 1e10
    g(i+2)=1e10;
end
if abs(h(i+2)) > 1e10
    h(i+2)=1e10;
end
end
end

```

Por último, para el cálculo de $\int_Z^\infty (F^2 + G^2) dz$, siendo Z un número grande, consideraremos el bucle para definirlo:

```

%%% CALCULO DE LA INTEGRAL %%%

suma = 0;
for j=N-150:N
    suma = suma + f(j).*f(j)+g(j).*g(j);
end

% para cerrar function
end

```

A partir de lo obtenido en los scripts y contrastando con el material utilizado para el planteamiento del problema [2], se obtienen los mismos resultados. La gráfica de las distribuciones de velocidades resultantes del primer script es la siguiente:

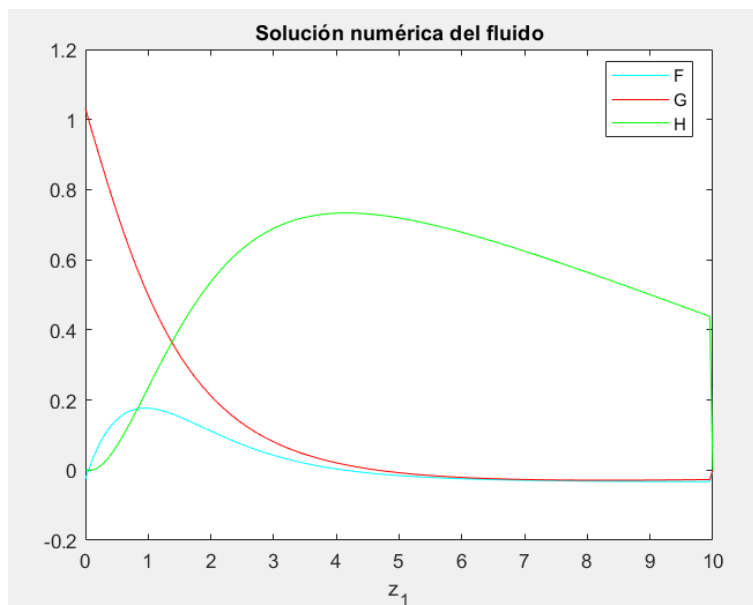


Figura 2.2: Distribución de velocidades del problema de las funciones F , H y G

representando la velocidad radial, F con la curva azul; la velocidad axial, H con la curva verde; y la velocidad tangencial, G , con la curva roja que presenta el fluido infinito en el que se encuentra un disco girando en el seno.

Por otro lado, la distribución de esfuerzos cortantes se definirá de la siguiente forma:

$$\sigma_{z\phi} = \eta \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial z} \right) = \eta r \Omega G'(0) \text{ siendo } z = 0,$$

que es lineal con la coordenada radial.

2.2 Soluciones haciendo uso de funciones auxiliares

Tras realizar el estudio de forma numérica del problema del disco, introduciremos los conceptos de flujo de corriente y flujo potencial para resolver otro tipo de problemas.

Flujo de corriente

Si consideramos un fluido incompresible, recordemos que se cumple la expresión 1.4, es decir, la divergencia de la velocidad es nula. Si recordamos que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es idénticamente nulo, podemos escribir el campo de velocidades como el rotacional de un campo vectorial.

Definición 2.1. Denominamos **flujo de corriente** a aquel cuyo campo de velocidades puede ser expresado como:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}$$

siendo \mathbf{A} un campo vectorial.

La importancia de esta definición se debe a que, mediante el cambio de expresión en un entorno bidimensional, cuando la velocidad sea no nula únicamente en dos coordenadas (variables dependientes), podemos expresar el campo de velocidades mediante una única componente de A . De esta forma, podemos tomar v invariante en el eje z y podemos afirmar:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.9)$$

y a partir de esta ecuación, podemos considerar una función escalar Ψ de tal forma que:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Introduciendo estas ecuaciones en la expresión 2.1, obtenemos que:

$$\Psi \equiv A_z$$

Esta función escalar se denominará **función de corriente** y representará la componente de A_z .

Para futuros cálculos, es conveniente expresar en coordenadas polares las componentes de la velocidad en función de la función de corriente:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}; \quad (2.11)$$

$$v_\phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (2.12)$$

Flujo potencial

Consideremos un entorno en el que se encuentra un fluido incompresible y no presente viscosidad. Por la Ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles en términos de la vorticidad, ecuación 1.24, la vorticidad permanecerá constante. Esto implica que, si nos encontramos en una situación inicial en la que no existiera vorticidad, no se presentaría en el resto del tiempo.

Igualmente, aunque un sistema sí presente viscosidad, si en algún punto la vorticidad es cero y constante, por la Ecuación de Navier-Stokes podemos apreciar que la derivada de la vorticidad respecto al tiempo es cero y por lo tanto, la vorticidad permanece constante.

En ambas situaciones nos encontramos ante un flujo potencial.

Definición 2.2. Definimos **flujo potencial** como aquel que no posee vorticidad en todo el espacio.

Si el rotacional del campo es nulo, entonces existe un campo escalar tal que podemos escribir la velocidad como el gradiente de ese campo, al ser el rotacional del gradiente de un campo escalar idénticamente nulo:

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi$$

de tal forma que debe satisfacer la ecuación de Euler y la condición de fluido incompresible, ecuación 1.4.

Haciendo uso de la condición de fluido incompresible, podemos llegar a la siguiente ecuación para el campo escalar:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = 0, \quad (2.13)$$

reduciendo el campo de velocidades a una solución escalar de la ecuación de Laplace.

Mediante el flujo potencial, podemos realizar un estudio de mecánica de fluidos en el caso de que un elemento sólido, como puede ser una esfera, es introducido en un fluido con un número de Reynolds pequeño. Al poseer un número de Reynolds pequeño, la aceleración convectiva se desprecia, de tal forma que, el flujo incide en el sólido de forma uniforme y con velocidad constante por lo que nos encontramos en un flujo potencial al tratarse de una vorticidad nula.

A continuación, se expondrán dos ejemplos elementales de flujo potencial, que podrán ser utilizados más adelante para la resolución de problemas:

Fluido uniforme paralelo

Como primer ejemplo, consideraremos un fluido con velocidad uniforme, U , en el eje x , es decir:

$$v_x = U; \quad v_y = 0.$$

Podemos expresar las componentes de velocidad mediante velocidades potenciales. Al considerar un flujo incompresible,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

y haciendo uso de los flujos de corrientes, tenemos:

- Por un lado, por la ecuación 2.10:

$$U = v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

y en términos del flujo potencial por la ecuación 2.13:

$$U = v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

- Por otro lado, debe satisfacer además:

$$0 = v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

y en términos del flujo potencial por la ecuación 2.13:

$$0 = v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Así, obtenemos:

$$\Phi = Ux; \quad \Psi = Uy. \quad (2.14)$$

Luego, las líneas de corriente son paralelas a la velocidad U y las equipotenciales, perpendiculares.

Este problema puede también tratarse de forma tridimensional, e incluso puede realizarse de dos formas. Para ello, consideraremos que el flujo es axilsimétrico y, considerando U como la velocidad de flujo uniforme, con componentes de velocidad:

$$v_x = U; \quad v_y = v_z = 0.$$

- En coordenadas cilíndricas:

Haciendo uso de la condición de fluido incompresible expresada en dichas coordenadas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

y al ser el flujo es axilsimétrico,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

obteniendo:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Así, de forma análoga al caso bidimensional para la función corriente, Ψ , y el flujo potencial, Φ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= v_z = U; & \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= v_z = U, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= v_r = 0; & \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= v_r = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos:

$$\Phi = Uz; \quad \Psi = -\frac{Ur^2}{2},$$

siendo la velocidad potencial proporcional a la coordenada axial y paralela a la velocidad del flujo.

- En coordenadas esféricas:

Haciendo uso de la condición de fluido incompresible expresada en dichas coordenadas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sin \phi v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

y al ser el flujo axilsimétrico,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

obteniendo:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}; \quad v_\theta = \frac{-1}{r \sin \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

De forma análoga al caso bidimensional podemos escribir las ecuaciones para el flujo potencial y la función corriente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = U \cos \phi; \quad \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = v_r = U \cos \phi, \\ -\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\phi = -U \sin \phi; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = v_\phi = -U \sin \phi. \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\Phi = U r \cos \phi; \quad \Psi = \frac{U r^2 \sin^2 \phi}{2}. \quad (2.15)$$

Flujo en un vórtice

Se trata de un problema bidimensional en el que un fluido se encuentra girando alrededor de un eje perpendicular al plano xy . Las componentes de velocidad son:

$$v_r = 0, \quad v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

siendo Γ una constante.

Mediante la condición de fluido incompresible y con las expresiones 2.11 y 2.12:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r}; \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = v_r = 0.$$

Así,

$$\Phi = \frac{\Gamma \phi}{2\pi}; \quad \Psi = \frac{-\Gamma}{2\pi} \ln(r).$$

A continuación, aplicaremos estos conceptos a un problema de más interés.

Estudio de una esfera en un fluido con velocidad uniforme

Supongamos una esfera de radio R , estacionada en un fluido con velocidad uniforme U . Al presentarse una simetría axial, el problema pasará a ser un problema bidimensional considerando coordenadas esféricas, siendo la coordenada angular irrelevante.

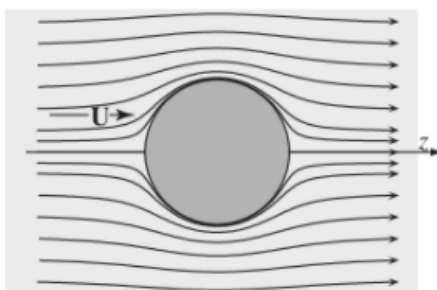


Figura 2.3: Esquema del problema

Este problema se resuelve fácilmente con el flujo potencial. Para la perturbación inducida por la esfera en el fluido, sumaremos al flujo uniforme homogéneo dado por la ecuación 2.15, la solución:

$$\Phi = -\frac{p \cos \phi}{4\pi r^2}. \quad (2.16)$$

siendo p una constante que debemos calcular.

Expresando la suma de 2.15 (que corresponde al flujo unidimensional) y 2.16 en coordenadas esféricas,

$$\Phi = U r \cos \phi - \frac{p \cos \phi}{4\pi r^2} = \left(U r - \frac{p}{4\pi r^2} \right) \cos \phi. \quad (2.17)$$

Luego, las componentes de la velocidad son:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^3} \right) \cos \phi; \quad v_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\left(U - \frac{p}{4\pi r^3} \right) \text{sen} \phi; \quad v_\theta = 0.$$

Consideramos a continuación la condición de contorno en la superficie de la esfera:

$$0 = \frac{\partial \Phi(R)}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi R^3} \right) \cos \phi$$

y despejando obtenemos:

$$p = -2\pi UR^3.$$

La velocidad que hemos obtenido, con estas componentes, verifica la ecuación de Navier-Stokes por ser flujo irrotacional. Comprobemos ahora que se cumplen las condiciones de contorno.

A partir del valor p , calculamos la velocidad potencial sustituyendo en 2.17:

$$\Phi = \left(Ur - \frac{-2\pi UR^3}{4\pi r^2} \right) \cos\phi = \left(Ur + \frac{UR^3}{2r^2} \right) \cos\phi. \quad (2.18)$$

El campo de velocidades resultante es de la forma:

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(U - \frac{UR^3}{r^3} \right) \cos\phi; \quad v_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = - \left(U + \frac{UR^3}{2r^3} \right) \sin\phi; \quad v_\theta = 0,$$

siendo proporcional a U .

La expresión de velocidad potencial utilizada en este ejemplo, $\Phi = -\frac{p\cos\phi}{4\pi r^2}$, es conocida como fluido dipolar, un fluido en el que, suponiendo la existencia de un manantial y de un sumidero separados y con el mismo caudal, al superponerlos considerando la distancia con límite 0 se mantiene el producto del caudal por la distancia constante, p .

2.3 *Análisis de solución numérica haciendo uso de métodos iterativos*

A continuación, realizaremos un estudio de resolución numérica de la ecuación de Navier-Stokes sin funciones auxiliares. En él, analizaremos un ejemplo de introducción de matrices de paso en métodos iterativos para un caso concreto.

Comenzaremos utilizando la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles 1.14 suponiendo un nuevo entorno de trabajo Ω que representa la región del espacio donde resolvemos la ecuación:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{en } \Omega \times]0, T],$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T],$$

introduciendo la siguiente condición de contorno e inicial respectivamente:

$$\mathcal{B}\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad \text{en } \Omega \times [0, T],$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{en } \Omega,$$

siendo $\mathcal{B}\mathbf{v}$ la condición de frontera, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i) : i = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n : n = \{1, 2, \dots\}$.

A partir de dicha ecuación, podemos calcular el movimiento que toma en cada instante un fluido. Sin embargo, hay casos inestables que conducen a la existencia de

puntos aislados que esta ecuación no puede abarcar con exactitud. Para realizar el estudio de estos puntos, utilizaremos la aproximación de Oseen expresada de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.19)$$

realizando una partición de $\Omega = [0, T] \Delta = \{v_i\}$ con $v_0 = 0$ y $v_N = T$ con paso equiespaciado, $h = v_{i+1} - v_i$ para $i = 0, \dots, N - 1$.

A partir de la aproximación de Oseen, para el cálculo de soluciones numéricas, podemos reescribir la ecuación de Navier Stokes como un sistema lineal de ecuaciones diferenciales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1^T \\ 0 & A_2 & B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

una matriz de operadores donde:

$$A_1 \approx \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) - \eta \nabla^2; \quad A_2 \approx \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) - \eta \nabla^2.$$

$$B_1 \approx \frac{\partial}{\partial x}; \quad B_2 \approx \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ p \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{pmatrix}.$$

que depende de la elección del sistema de referencia para resolver el problema.

Nótese que en la ecuación anterior se utiliza \mathbf{v}_i , es decir la velocidad de la iteración anterior, para calcular la aceleración convectiva. Para realizar el análisis, consideraremos las soluciones aportadas en [10] en el cual se trabaja con una cavidad cuadrada de una unidad de longitud y coeficiente de viscosidad $\eta = 0,1$ y donde el borde superior se desplaza con velocidad horizontal $v_x = 1$. Las condiciones iniciales son:

$$v_x = 0; \quad v_y = 0; \quad p = 0,$$

y las condiciones de frontera son:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = 1 \text{ siendo } y = 2, \\ v_x = 0 \quad v_y = 0 \text{ en el resto de paredes,} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0, \\ p = 0 \text{ en } y = 2. \end{array} \right.$$

Comenzamos mostrando la primera iteración del código, en el que se puede apreciar el efecto introducido por la condición en el borde superior, dado que se aprecia movimiento hacia la derecha, siendo representado por flechas:

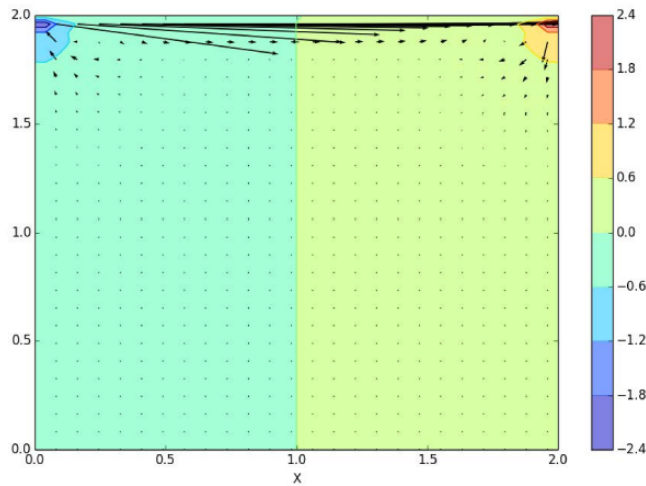


Figura 2.4: Resultado de la simulación en $t = 1$

A medida que avanza el tiempo, la solución es más estable, como se puede ver en la siguiente imagen para $t = 500$.

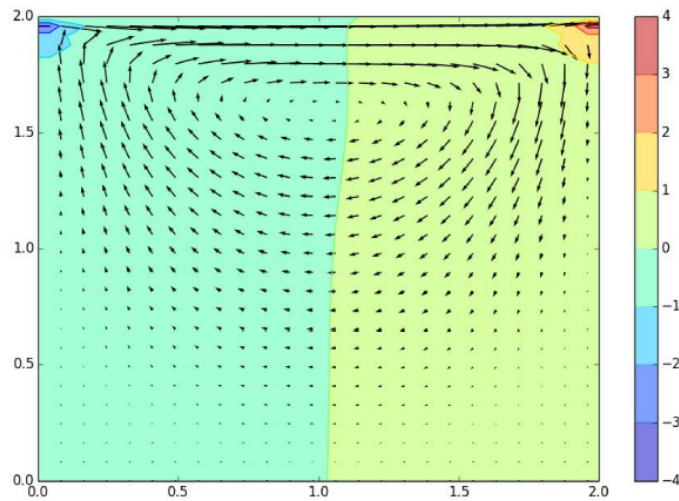


Figura 2.5: Resultado de la simulación en $t = 500$

De esta forma, si decidimos obtener una solución más exacta, seguiremos aplicando el programa obteniendo la solución aproximada en la siguiente figura:

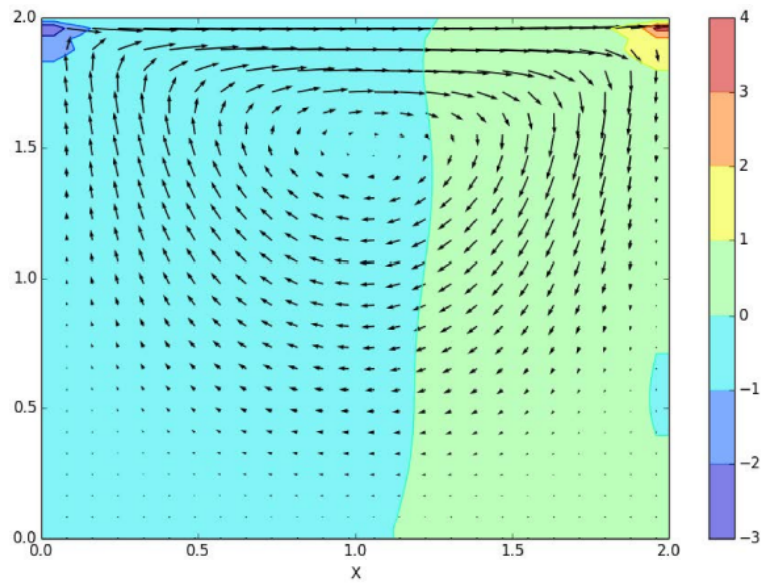


Figura 2.6: Resultado de la simulación en $t = 2000$

Una vez mostradas las distintas soluciones obtenidas, se puede extraer que el método iterativo aportado al problema permite una buena resolución. En el artículo [10] se aporta además un método iterativo haciendo uso de matrices de paso (o matrices de preconditionamiento) obteniendo así una solución más eficaz, pero debido a su extensión no será expuesto.

Conclusión

En relación a lo expuesto, a la hora de resolver, ya sea analíticamente o numéricamente, problemas bidimensionales, se ha podido comprobar que existen diversos métodos para satisfacer el principal objetivo del proyecto, destacar la relevancia que merece la Ecuación de Navier-Stokes.

En el primer capítulo, el objetivo de la primera subsección era deducir la Ecuación de Navier-Stokes y todos los conceptos previos para facilitar y mejorar el entendimiento de las soluciones que se han calculado a lo largo del trabajo. Para ello, se ha orientado dicha parte a la fenomenología y, a partir de conceptos como la ecuación de continuidad, pudimos obtener resultados relevantes con la ecuación de nuestro estudio. También, se ha podido apreciar la relación existente con la Ecuación de Euler y la diferencia clave que se origina en el objeto de estudio. Por otro lado, el objetivo en la segunda subsección era introducir los casos más elementales de problemas en los que se usa la ecuación. A partir de estos, se han obtenido resultados que determinan las propiedades del fluido de una forma analítica.

En el segundo capítulo, el objetivo ha sido estudiar problemas con mayor dificultad como por ejemplo un disco en rotación en el seno de un fluido infinito y se encontró, en cada uno de los problemas, un resultado aplicado a la resolución que resultara una novedad. De esta parte, destaca la resolución numérica a partir de entornos de programación dado que solventan la dificultad que puede ocasionarse si se realizara analíticamente.

A pesar de haber hecho hincapié principalmente en problemas bidimensionales, hemos comprobado que se pueden realizar estudios, mediante los cambios pertinentes, de problemas tridimensionales (aunque no serán aplicables a cualquier problema tridimensional), reduciendo así su dificultad.

Finalmente, este proyecto se ha centrado en la resolución de problemas aportando una gama variada de herramientas desde las más habituales como la resolución analítica de ecuaciones diferenciales hasta la programación de un script de MATLAB ©. Cada una de ellas aportando resultados, a la par de interesantes, útiles para estudiar la mecánica del fluido haciendo uso de la Ecuación de Navier-Stokes.

Bibliografía

- [1] E. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, C. D. Matescu, *Physical Hydrodynamics*, Oxford University Press, 2015.
- [2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mecánica de fluidos. Volumen 6*, Editorial Reverté, S. A., 2001.
- [3] M. R. Ortega Girón, *Lecciones de Física (Mecánica 3)*, 2011.
- [4] Página web de los usuarios de ICMAT: https://www.icmat.es/cultura/graffiti/ideas_basicas.html.
- [5] Página web de los usuarios de EcuRed: <https://www.ecured.cu/Presi%C3%B3n>
- [6] Página web de los usuarios de la UEX: <https://www.eweb.unex.es/eweb/fisteor/vicente/fluidos/p202011.pdf>
- [7] Página web de los usuarios de Wikipedia: https://es.wikipedia.org/wiki/Problemas_del_milenio.
- [8] Página web de los usuarios del Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Universidad de La Coruña: <https://lim.ii.udc.es/docencia/din-sismec/circulos.pdf>
- [9] R. Fernández Fera, J. Ortega Casanova, *MECÁNICA DE FLUIDOS. Notas de clase: Teoría, problemas y prácticas*, 2017.
- [10] X. Fang, J. Liu, L. Wu, *Using Python to Solve the Navier-Stokes Equations-Applications in the Preconditioned Iterative Methods*, J. Sci. Res. Rep., **7(3)**(2015), 208-215.

Anexo

En este capítulo se adjuntará el código utilizado en la sección 2.1:

- Script principal:

```

        %%% DISCRETIZACION %%%
N = 200; % numero de valores del vector.
a = 0;   % a representa el valor inicial del intervalo.
b = 10;  % b representa el valor final.
delta =(b-a)./N;

for i=1:N+1
t(i) = a + (i-1).* delta ;
end

        %%% RESERVA DE MEMORIA %%%
% Reservaremos la memoria mediante zeros , indicando a s
% que necesitaremos
% un vector de N+1 elementos para cada variable .
f=zeros(1 ,N+1);
g=zeros(1 ,N+1);
h=zeros(1 ,N+1);
p=zeros(1 ,N+1);

        %%% CALCULO DEL MINIMO EN FUNCION DE f0 Y g0 %%%
% Tomaremos unos valores iguales a los de la condicion
% inicial del segundo punto.
minf = 0; % Al disponer de pendiente positiva y comenzar en
% 0, debe poseer un nro negativo.
ming = 1;

sumamax = 1e30;
iter = 0;
[ss ,f1 ,g1 ,h1] = suma_infty ( f , g , h , p , minf , ming );
while sumamax > 0.5
iter = iter + 1;
deltaf = 0.01.*(rand - 0.5);
deltag = 0.01.*(rand - 0.5);
f0 = minf + deltax;
g0 = ming + deltag;
[ss0 ,f2 ,g2 ,h2] = suma_infty ( f , g , h , p , f0 , g0 );
if ss0 < sumamax
minf = f0;
ming = g0;
sumamax = ss0;

```

```
end
```

```
%%% RESULTADO DEL PROGRAMA EN CONSOLA %%%
```

```
fprintf('Iteracion numero')
disp(iter)
fprintf('Resultado de la integral')
disp(sumamax)
```

```
end
```

```
%%% REPRESENTACION DE LA GRAFICA %%%
```

```
plot(t,f2,'Color',[0,1,1]), hold on
plot(t,g2,'Color',[1,0,0]), hold on
plot(t,-h2,'Color',[0,1,0]), hold on
```

```
legend('F','G','H','Location','best') % Leyenda de la
grafica.
title('Solucion numerica del fluido') % Para poner titulo a
la grafica.
xlabel('z_1') % Crea una etiqueta en el eje x para indicar
que los valores del eje x representan al valor 'z_1'.
```

- Script secundario:

```
function [suma,f,g,h] = suma_infty(f,g,h,p,f0,g0)

    %%% DISCRETIZACION %%%
N = 200; % numero de valores del vector.
a = 0; % a representa el valor inicial del intervalo.
b = 10; % b representa el valor final.
delta =(b-a)./N;

for i=1:N+1
t(i) = a + (i-1).*delta;
end

    %%% CONDICIONES INICIALES %%%

f(:) = 0; % F = 0 en z1
g(:) = 0;
h(:) = 0; % H = 0 en z1
p(:) = 0; % P = 0 en z1

g(2) = 1; % G = 1 en z1 = 0
```

```

% Para  $F_{-1}$  y  $G_{-1}$  supondremos valores numericos.
f(1) = f0; % Condiciones en -1
g(1) = g0;

%%% FORMULAS DE RECURRENCIA %%%

for i=1:N-2
f(i+2) = 2.*f(i+1) - f(i) + delta.^2 *(f(i+1)*f(i+1) - g(i
+1)*g(i+1)) + delta.*(f(i+1) - f(i))*h(i+1);
g(i+2) = 2.*g(i+1) - g(i) + delta*delta*2*f(i+1)*g(i+1) +
delta.*(g(i+1)- g(i))*h(i+1);
h(i+2) = h(i+1) - 2.*delta*f(i+1);
p(i+2) = p(i+1) - 2.*f(i+1)*h(i+1).*delta - (h(i+2) - 2.*h(
i+1) + h(i))./delta;

% Para evitar que el script se interrumpa por overflow:
if abs(f(i+2)) > 1e10
f(i+2)=1e10;
end
if abs(g(i+2)) > 1e10
g(i+2)=1e10;
end
if abs(h(i+2)) > 1e10
h(i+2)=1e10;
end
end

%%% CALCULO DE LA INTEGRAL %%%
suma = 0;
for j=N-150:N
suma = suma + f(j).*f(j)+g(j).*g(j);
end

end

```