

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA



MÁSTER EN MATEMÁTICAS
AVANZADAS

PROYECTO FIN DE MÁSTER

**TEORÍA DE CÓPULAS: CÓPULAS CON
SOPORTE FRACTAL**

JULIA LASTRA GARCÍA
SEPTIEMBRE 2013

DIRECTORES:
ENRIQUE DE AMO ARTERO
WOLFGANG TRUTSCHNIG

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Teoría de Cópulas | 4 |
| 1.1. Introducción | 4 |
| 1.2. El Teorema de Sklar | 8 |
| 1.3. Cópulas y variables aleatorias | 12 |
| 2. Sistemas iterados de funciones | 16 |
| 2.1. La métrica de Hausdorff | 16 |
| 2.2. Sistemas Iterados de Funciones | 18 |
| 2.3. Sistemas Iterados de Funciones con Probabilidades | 21 |
| 3. Espacio de cópulas como espacio métrico | 25 |
| 3.1. Preliminares. Distribuciones condicionales regulares | 25 |
| 3.2. Cópulas y operadores de Markov | 28 |
| 3.3. El espacio métrico (\mathcal{C}, D_1) | 32 |
| 4. Cópulas con soporte fractal | 43 |
| 4.1. Matrices de transformación y cópulas | 43 |
| 4.2. Cópulas invariantes | 48 |
| 4.3. Cópulas autosemejantes | 49 |
| 4.4. Cópulas inducidas por SIF especiales | 53 |
| 4.5. Cópulas con soporte fractal: resultados en términos de funciones de distribución | 57 |
| 4.6. Cópulas idempotentes | 60 |

Introducción

El estudio de las cópulas y sus aplicaciones en estadística es un fenómeno bastante reciente. Hasta hace relativamente poco (principios de la década de los noventa) resultaba difícil encontrar el término ‘cópula’ dentro de la literatura estadística.

La noción de cópula fue introducida por A. Sklar en 1959, respondiendo a un problema planteado por M. Fréchet en [10] sobre la relación entre una función de distribución multivariante y sus marginales unidimensionales. Inicialmente las cópulas se utilizaron mucho en el desarrollo de la teoría de espacios métricos probabilísticos, pero más adelante se usaron para definir medidas no paramétricas de dependencia entre variables aleatorias.

Gracias a la gran flexibilidad que ofrecen las cópulas para modelar las relaciones en una pareja aleatoria de variables, sus aplicaciones se extienden a diversos campos como pueden ser la biomedicina aplicada, donde el interés puede centrarse en los tiempos de ocurrencia de una enfermedad en órganos pares, o los cálculos actuariales, donde el interés puede centrarse en la estimación de la distribución conjunta de los momentos correspondientes a dos tipos de indemnización. Otro campo donde las cópulas han suscitado mucho interés recientemente es en las finanzas y el control de riesgo financiero. En el capítulo 1 se recoge toda la información acerca de la Teoría de Cópulas necesaria para entender y motivar los resultados contenidos en los capítulos posteriores.

El término fractal fue acuñado por B. Mandelbrot en 1975. La primera interpretación que subyace de un fractal es que es un conjunto mucho más ‘irregular’ que los considerados normalmente en la geometría clásica: no importa cuánto se magnifique el conjunto que las irregularidades se verán más y más pequeñas. B. Mandelbrot argumentaba que tales abstracciones geométricas se ajustaban más al mundo físico que los elementos regulares. En la primera página de [18] Mandelbrot escribió: “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos y ni las cortezas de los árboles son suaves

ni los rayos son rectilíneos”. Para dar un sentido matemático a los fractales, B. Mandelbrot los define como: “conjuntos cuya dimensión de Hausdorff [8] es estrictamente mayor que su dimensión topológica”.

Una forma de construir fractales es a través de los Sistemas Iterados de Funciones [17], que se introducirán en el capítulo 2. Hablar de SIFs es hablar de contractividad y muy a menudo también de autosemejanza. Pero para relacionar cópulas con soporte fractal y SIFs es necesario introducir un espacio métrico que sea completo para definir posteriormente operadores contractivos y utilizar el teorema del punto fijo. Para ello, se podría trabajar directamente en el espacio métrico completo (y compacto) (\mathcal{C}, d_∞) pero, tal y como se verá en el capítulo 3, se introducirá la métrica D_1 que también dotará al espacio de cópulas de estructura de espacio métrico completo, ver [25].

En el capítulo 4 se construirán cópulas cuyos soportes son conjuntos fractales. En particular, se verá que los elementos de una familia tienen soportes con dimensión de Hausdorff [8] arbitraria en el intervalo $(1,2)$, ver [11]. También se usarán esas cópulas para construir funciones de distribución bivariadas con soportes fractales. En este capítulo también se comprobará que los resultados presentados en [11] siguen siendo válidos cuando se trabaja en una clase mucho más pequeña, la de las cópulas idempotentes, obteniéndose resultados muy interesantes [26].

Capítulo 1

Teoría de Cópulas

En la Introducción de este trabajo se hizo referencia a las cópulas como aquellas funciones que relacionan una distribución multivariante con sus marginales univariadas. Pero también se podría hacer alusión a las cópulas como ‘funciones de distribución restringidas a $[0, 1] \times [0, 1]$ cuyos marginales unidimensionales son uniformes’. En este capítulo daremos una definición precisa de cópulas bidimensionales, o también 2-cópulas, o directamente cópulas, y sus principales propiedades así como el principal resultado en la Teoría de Cópulas: el teorema de Sklar.

1.1. Introducción

En este contexto es necesario generalizar la noción de ‘no decreciente’ en funciones univariadas a un concepto aplicable a funciones multivariantes (bivariadas en este trabajo). Comenzaremos introduciendo la notación elemental que será utilizada a lo largo de este trabajo. Un *rectángulo* en $\overline{\mathbb{R}}^2$ es el producto cartesiano B de dos intervalos cerrados, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Los vértices del rectángulo B son los puntos (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) y (x_2, y_2) . El cuadrado unidad \mathbb{I}^2 es el producto cartesiano $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Definición 1.1 Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función real de dominio $S_1 \times S_2$. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices están contenidos en el dominio de H . Entonces el H -volumen de B viene dado por

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

Definición 1.2 Se dice que una función bivariada H es 2-creciente si

$$V_H(B) \geq 0,$$

para todos los rectángulos B cuyos vértices estén en $\text{Dom}(H)$.

Notar que una función 2-creciente no es necesariamente no decreciente en cada argumento, y el recíproco tampoco es cierto en general: sea H una función definida en \mathbb{I}^2 por $H(x, y) = (2x-1)(2y-1)$. Entonces, para cualquier rectángulo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ se tiene:

$$\begin{aligned} V_H(B) &= ((2x_2 - 1) - (2x_1 - 1))((2y_2 - 1) - (2y_1 - 1)) \\ &= (2x_2 - 2x_1)(2y_2 - 2y_1) \geq 0, \end{aligned}$$

de modo que H es una función 2-creciente en \mathbb{I}^2 . Sin embargo, es una función decreciente en x para todo $y \in (0, 1/2)$ y decreciente en y para todo $x \in (0, 1/2)$.

Definición 1.3 Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{I}$. Una subcópula es una función C' de dominio $S_1 \times S_2$ con las siguientes propiedades:

- a) $0, 1 \in S_1 \cap S_2$.
- b) C' es 2-creciente,
- c) $\forall u \in S_1, \forall v \in S_2, C'(0, v) = C'(u, 0) = 0$
- d) $\forall u \in S_1, \forall v \in S_2, C'(u, 1) = C'(1, v) = 1$.

En lo que sigue, $\text{Dom}(C')$ y $\text{Ran}(C')$ denotarán el dominio de definición y el rango de una función C' respectivamente.

Notar que $\forall (u, v) \in \text{Dom}(C'), C'(u, v)$ está acotada inferior y superiormente por 0 y 1 respectivamente, de modo que se tiene $\text{Ran}(C') \subseteq \mathbb{I}$.

Definición 1.4 Una cópula es una función $C : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ que verifica las siguientes propiedades:

- a) $\forall u, v \in \mathbb{I},$

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0,$$

- b) $\forall u, v \in \mathbb{I},$

$$C(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C(1, v) = v, \quad (1.1)$$

- c) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$, el C -volumen (ver definición 1.1) del rectángulo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ es no negativo, i.e.,

$$V_C(B) \geq 0 \quad (1.2)$$

Como consecuencia de las propiedades de la definición, una cópula es una función 2-creciente y no decreciente en cada argumento.

Teorema 1.1 *Sea C una cópula. Entonces $\forall(u, v) \in \mathbb{I}^2$,*

$$W(u, v) := \max\{u + v - 1, 0\} \leq C(u, v) \leq \min\{u, v\} =: M(u, v). \quad (1.3)$$

Además, las funciones W y M son cópulas.

Demostración Sea $(u, v) \in \mathbb{I}^2$ cualquiera. Como una cópula es una función no decreciente en cada argumento podemos escribir

$$C(u, v) \leq C(u, 1) \stackrel{(1.1)}{=} u \quad \text{y} \quad C(u, v) \leq C(1, v) \stackrel{(1.1)}{=} v,$$

de modo que $C(u, v) \leq \min\{u, v\}$. Además,

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(1.2)}{\leq} V_C([u, 1] \times [v, 1]) \stackrel{def.1.1}{=} C(1, 1) - C(1, v) - C(u, 1) + C(u, v) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} 1 - v - u + C(u, v), \end{aligned}$$

de donde se deduce que $C(u, v) \geq \max\{u + v - 1, 0\}$.

Puede comprobarse fácilmente que W y M son cópulas, pues es inmediato verifican las 3 propiedades de la definición 1.4.

■

La desigualdad (1.3) es la versión para cópulas de la desigualdad de las cotas de Fréchet-Hoeffding. Así mismo, nos referiremos a M como la *cota superior de Fréchet-Hoeffding* y a W como la *cota inferior de Fréchet-Hoeffding*. Otra cópula que aparecerá con frecuencia a lo largo de este capítulo es la *cópula producto*, que se define como $\Pi(u, v) = uv$.

Notar que el teorema 1.1 no es cierto para cópulas de dimensión $d > 2$ (ver [19]).

El siguiente teorema establece la continuidad de las cópulas vía una condición de tipo Lipschitz en \mathbb{I}^2 .

Teorema 1.2 *Sea C una cópula. Entonces, $\forall(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{I}^2$,*

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|,$$

es decir, C es uniformemente continua.

Demostración Es inmediata, basta con tener en cuenta la desigualdad triangular y la definición 1.4 de cópula. ■

Definición 1.5 Sea C una cópula, y $a \in \mathbb{I}$. La sección horizontal de C en el punto a es la función dada por $t \mapsto C(t, a)$. La sección vertical de C en el punto a es $t \mapsto C(a, t)$ y la sección diagonal $t \mapsto \delta_C(t) = C(t, t)$.

Notar que las secciones horizontal, vertical y diagonal de una cópula son funciones no decrecientes y uniformemente continuas en \mathbb{I} .

Una forma sencilla y útil de representar el grafo de una cópula es a través de un *diagrama de contorno* (Conway, 1979), es decir, con grafos de sus conjuntos de nivel en \mathbb{I}^2 dados por $C(u, v) = a$, donde a es una constante cualquiera en \mathbb{I} . Por ejemplo:

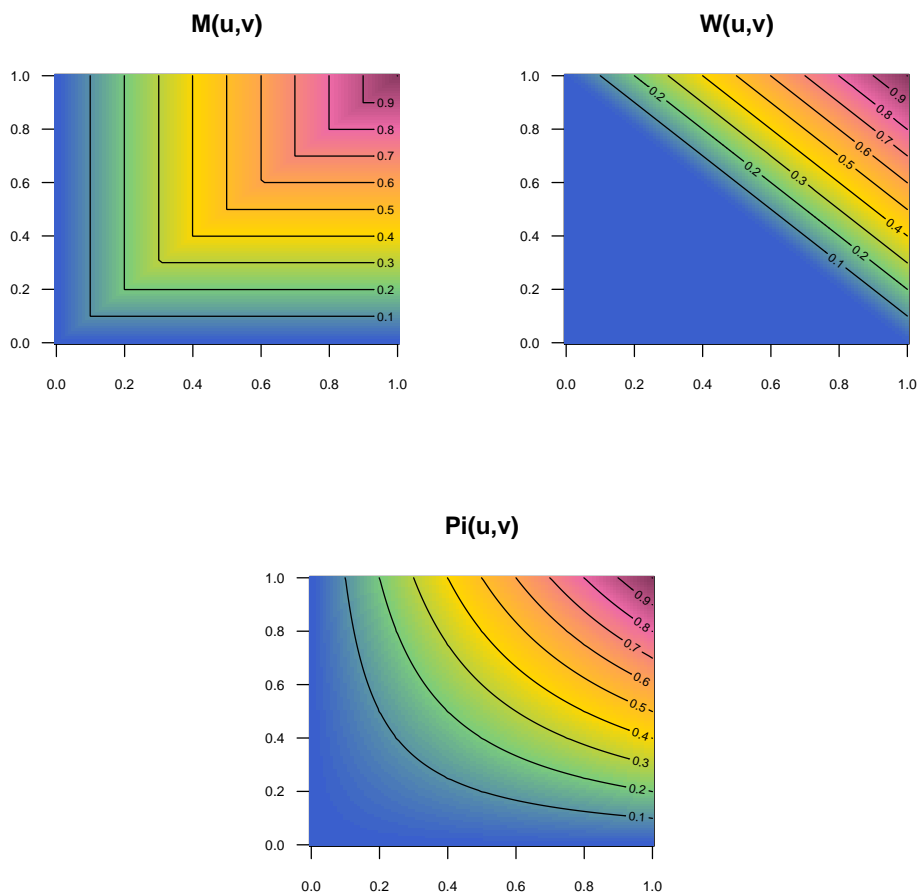


Figura 1.1: Diagramas de contorno de las cotas superior e inferior de Fréchet-Hoeffding y de la cópula producto

A continuación veremos unos resultados acerca de diferenciación en cópulas.

Teorema 1.3 *Sea C una cópula. $\forall v \in \mathbb{I}$, la derivada parcial $\partial C(u, v)/\partial u$ existe para casi todo u . Para tales u y v se tiene*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1 \quad (1.4)$$

Análogamente, $\forall u \in \mathbb{I}$, la derivada parcial $\partial C(u, v)/\partial v$ existe para casi todo v , y para dichos u y v se tiene

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1 \quad (1.5)$$

Además, las funciones $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ y $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ están bien definidas y son no decrecientes en casi todo punto de \mathbb{I} .

Para la demostración consultar [19].

Teorema 1.4 *Sea C una cópula. Si $\partial C(u, v)/\partial v$ y $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v$ son continuas en \mathbb{I}^2 y $\partial C(u, v)/\partial u$ existe para todo $u \in (0, 1)$ cuando $v = 0$, entonces $\partial C(u, v)/\partial u$ y $\partial^2 C(u, v)/\partial v \partial u$ existen en $(0, 1)^2$ y $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v = \partial^2 C(u, v)/\partial v \partial u$.*

Para la demostración ver [24].

1.2. El Teorema de Sklar

El teorema que da título a esta sección es el resultado central de la Teoría de Cópulas. El teorema de Sklar deja claro el papel que juegan las cópulas en la relación entre funciones de distribución bidimensionales y sus marginales. Comenzaremos con las definiciones estándar de función de distribución unidimensional y bidimensional tal y como se recoge en [19]:

Definición 1.6 *Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de distribución si*

- a) F es no decreciente y continua por la derecha.
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Definición 1.7 *Una función $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de distribución conjunta si*

a) H es 2-creciente (ver definición 1.2) y continua por la derecha.

b) $\lim_{y \rightarrow -\infty} H(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} H(x, y) = 0$,

c) $\lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = 1$.

Teorema 1.5 (de Sklar, 1959). Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una cópula C tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1.6)$$

Si además F y G son continuas, entonces C es única. Si no, C está unívocamente determinada en $\text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$. Recíprocamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida en (1.6), es una función de distribución conjunta con marginales F y G .

La demostración de este teorema se basa en dos resultados auxiliares:

Lema 1.1 Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una única subcópula C' tal que

a) $\text{Dom}(C') = \text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$,

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

Demostración La distribución conjunta H satisface:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|,$$

de modo que si $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$, se tiene que

$$H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1).$$

Así, se puede definir una función

$$\begin{aligned} C' : \text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G) &\longrightarrow [0, 1] \\ (F(x), G(y)) &\longmapsto C'(F(x), G(y)) = H(x, y) \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada $u \in \text{Ran}(F)$, existe un $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$, y en consecuencia, $C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = u$. Utilizando un razonamiento análogo, se tiene que $C'(1, v) = 1$ y $C'(u, 0) = C'(0, v) = 0$.

Por último, sean $u_1, u_2 \in \text{Ran}(F)$ tales que $u_1 < u_2$. Entonces, existen $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $F(x_1) = u_1$, $F(x_2) = u_2$ y además $x_1 < x_2$, pues F es no

decreciente. Análogamente, sean $v_1, v_2 \in \text{Ran}(G)$ tales que $v_1 < v_2$. Entonces existen $y_1, y_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $G(y_1) = v_1$, $G(y_2) = v_2$ y $y_1 < y_2$. Así,

$$\begin{aligned} V_{C'}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) &\stackrel{\text{def.1.1}}{=} C'(u_2, v_2) - C'(u_2, v_1) - C'(u_1, v_2) + C'(u_1, v_1) \\ &= C'(F(x_2), G(y_2)) - C'(F(x_2), G(y_1)) \\ &\quad - C'(F(x_1), G(y_2)) + C'(F(x_1), G(y_1)) \\ &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\ &\stackrel{H \text{ 2-crec.}}{\geq} 0, \end{aligned}$$

quedando demostrado que C' es una subcópula.

■

Lema 1.2 *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que $\forall(u, v) \in \text{Dom}(C')$,*

$$C(u, v) = C'(u, v), \quad (1.7)$$

es decir, toda subcópula puede extenderse a una cópula. Esta extensión no es, en general, única.

Demostración Por ser C' una subcópula es no decreciente en cada argumento, de modo que por continuidad se puede extender a una función C'' cuyo dominio sea $\overline{S_1} \times \overline{S_2}$, siendo $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$ las clausuras de S_1 y S_2 respectivamente. Es evidente que C'' es otra subcópula, ya que todas las propiedades de subcópula siguen siendo ciertas.

A continuación extenderemos C'' a una función C cuyo dominio sea \mathbb{I}^2 . Para ello, se toma un punto cualquiera $(a, b) \in \mathbb{I}^2$, y se consideran a_1 y a_2 los elementos máximo y mínimo de $\overline{S_1}$ que satisfacen $a_1 \leq a \leq a_2$. Análogamente, se toman $b_1, b_2 \in \overline{S_2}$ tales que sean el mayor y menor elemento que satisfacen $b_1 \leq b \leq b_2$. Notar que si $a \in \overline{S_1}$, entonces $a_1 = a = a_2$, y si $b \in \overline{S_2}$, $b_1 = b = b_2$.

Ahora, se toman

$$\lambda_1 = \begin{cases} a^{-a_1/a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2, \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2 \end{cases}$$

y

$$\mu_1 = \begin{cases} b^{-b_1/b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2, \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases}$$

y se define

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Notar que la interpolación definida en esta expresión es lineal en cada argumento, pues λ_1 y μ_1 son lineales en a y en b respectivamente.

Es evidente que $Dom(C) = \mathbb{I}^2$ y que

$$C(a, b) = C''(a, b), \quad \forall (a, b) \in DomC''.$$

Se puede comprobar fácilmente que $\forall a, b \in \mathbb{I}$, $C(a, 0) = C(0, b) = 0$ y que $C(1, b) = b$ y $C(a, 1) = a$.

Ahora sólo queda comprobar la última propiedad que define a las cópulas. Para ello, sea $a, b, c, d \in \mathbb{I}$ tales que $c \geq a$ y $d \geq b$. Sean $c_1, c_2, d_1, d_2, \lambda_2, \mu_2$ tales que están relacionados con c y d en la misma manera en que lo están $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \mu_1$ con a y b . Notar que como $c \geq a$ y $d \geq b$ entonces $\lambda_2 \geq \lambda_1$ y $\mu_2 \geq \mu_1$. Llamamos B al rectángulo $[a, c] \times [b, d]$. Evaluando $V_C(B)$ se distinguen varios casos, dependiendo de si existe o no algún punto en $\overline{S_1}$ entre a y c y si existe o no algún punto en $\overline{S_2}$ entre b y d .

- Si no existe ningún punto de $\overline{S_1}$ entre a y c y no existe ningún punto en $\overline{S_2}$ entre b y d , es decir, si $c_1 = a_1, c_2 = a_2, d_1 = b_1, d_2 = b_2$, se tiene

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \stackrel{C'' \text{ cóp.}}{\geq} 0, \end{aligned}$$

- El caso más complicado se presenta cuando existe al menos un punto en $\overline{S_1}$ entre a y c y existe al menos un punto en $\overline{S_2}$ entre b y d , es decir, cuando $a < a_2 \leq c_1 < c$ y $b < b_2 \leq d_1 < d$. En esta situación, se tiene

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\ &= (1 - \lambda_1)\mu_2 V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1 - \lambda_1) V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2 V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + (1 - \mu_1) V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) + \lambda_2 (1 - \mu_1) V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \end{aligned}$$

Es decir, $V_C(B)$ es una combinación de los volúmenes de 9 rectángulos con coeficientes no negativos, de modo que $V_C(B) \geq 0$.

- El resto de casos se demuestran de forma análoga.

Queda probado entonces que C es una cópula y que verifica (1.7).

■

Demostración (teorema de Sklar). La existencia de la cópula C expresada en (1.6) queda garantizada por el lema 1.1 y el lema 1.2.

Si F y G son continuas, entonces $\text{Ran}(F) = \text{Ran}(G) = \mathbb{I}$, de modo que la única subcópula del lema 1.1 es en realidad una cópula. Puede comprobarse de forma inmediata que el recíproco es cierto.

■

F. Durante, J. Fernández-Sánchez y C. Sempi encontraron otras dos formas de demostrar la veracidad del teorema de Sklar, ver [6] y [7].

El teorema de Sklar ofrece una expresión para funciones de distribución conjunta en términos de una cópula y dos funciones de distribución univariadas. Pero también puede invertirse para expresar cópulas en términos de funciones de distribución conjunta y de ‘inversas’ de sus marginales. Sin embargo, la función de distribución H no es necesariamente una función estrictamente creciente, de modo que no tiene inversa en el sentido habitual. Es necesaria entonces la definición de ‘cuasi-inversa’ de una función de distribución.

Definición 1.8 *Sea F una función de distribución. Se define la cuasi-inversa de F , $F^{(-1)}$, como una función cuyo dominio es \mathbb{I} tal que*

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}, \quad (1.9)$$

Consideraremos $\inf \emptyset = -\infty$.

Si F es estrictamente creciente, entonces tiene una única cuasi-inversa que coincide con la inversa habitual, que denotaremos por F^{-1} . Utilizando el concepto de cuasi-inversa, se tiene el siguiente corolario de acuerdo con [19].

Corolario 1.1 *Sean H, F, G y C' como en el lema 1.1, y sean $F^{(-1)}, G^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F y G respectivamente. Entonces,*

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^2.$$

Este resultado se utiliza frecuentemente como método de construcción de cópulas a partir de funciones de distribución conjunta.

1.3. Cópulas y variables aleatorias

Como las funciones de distribución y las variables aleatorias están directamente relacionadas, se sigue que una cópula asocia dos variables aleatorias. En particular, si las funciones de distribución marginales son continuas entonces la cópula correspondiente es única. En lo que sigue, usaremos

mayúsculas para representar las variables aleatorias y minúsculas para sus valores. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad sobre el que se define una variable aleatoria X . Diremos que F es la función de distribución de X si $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, F(x) = \mathcal{P}[X \leq x]$.

A continuación se enuncia el teorema de Sklar en términos de variables aleatorias.

Teorema 1.6 (de Sklar). *Sean X e Y variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ cuyas funciones de distribución son F_X y F_Y respectivamente, y su función de distribución conjunta es $F_{X,Y}$. Entonces existe una cópula C tal que*

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.10)$$

Si además F_X y F_Y son continuas, C es única. Si no, C está unívocamente determinada en $\text{Ran}(F_X) \times \text{Ran}(F_Y)$.

Cuando F_X y F_Y son continuas la cópula C de (1.10) se llama *cópula de X e Y* , y se denota por C_{XY} para enfatizar la relación entre las variables aleatorias X e Y . Sin embargo, el teorema de Sklar no es la única manera en la que las cópulas y las variables aleatorias están relacionadas. Notar que, extendiéndose adecuadamente a \mathbb{R}^2 , toda cópula puede asociarse a una función de distribución conjunta cuyos marginales sean uniformes en \mathbb{I} . De forma más precisa, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 1.9 *Sea C una cópula. La función $H_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida como*

$$H_C(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \text{ o } v < 0, \\ C(u, v) & \text{si } (u, v) \in \mathbb{I}^2, \\ u & \text{si } u \in \mathbb{I} \text{ y } v > 1, \\ v & \text{si } v \in \mathbb{I} \text{ y } u > 1, \\ 1 & \text{si } u, v > 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

es la función de distribución asociada a C .

Es evidente que una cópula C define unívocamente la función H_C y viceversa. También se puede comprobar fácilmente que H_C es una función de distribución bivariada con marginales uniformes en \mathbb{I} . Notar que todas las funciones de distribución asociadas a cópulas coinciden en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{I}^2$ y que $\mathcal{P}(B) = 0$, para todo conjunto de Borel $B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{I}^2$. De este modo y sin perder información, toda cópula puede verse como una restricción a \mathbb{I}^2 de una función de distribución cuyos marginales sean uniformes en \mathbb{I} .

Entonces, toda cópula C induce una medida de probabilidad μ_C en la σ -álgebra de conjuntos de Borel de $[0, 1]^2$, denotada en lo que sigue por $\mathcal{B}([0, 1]^2)$, vía

$$\mu_C([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) = V_C([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]), \quad (1.12)$$

donde V_C es el C -volumen (ver definición 1.1) del rectángulo $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Esta medida de probabilidad μ_C puede extenderse de forma estándar a los subconjuntos de Borel de \mathbb{R}^2 utilizando técnicas conocidas de Teoría de la Medida, ver [15].

De forma intuitiva, la C -medida de un subconjunto de $[0, 1]^2$ es la probabilidad de que dos variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ con distribución uniforme en $(0, 1)$, U y V , y con función de distribución conjunta H_C , tomen valores en ese subconjunto. Con frecuencia las C -medidas se llaman *medidas doblemente estocásticas*, ya que para cualquier subconjunto medible S de \mathbb{I} ,

$$\mu_C(S \times I) = \mu_C(I \times S) = \lambda(S),$$

donde λ denota la medida estándar de Lebesgue en \mathbb{I} . El término ‘doblemente estocástica’ viene de la teoría matricial, donde las matrices doblemente estocásticas tienen todos sus elementos no negativos y todas las filas y columnas suman 1.

Enunciamos a continuación el teorema de descomposición de Lebesgue, aunque no sin antes recordar que los conceptos de medida singular y de medida absolutamente continua con respecto a otra medida: dos medidas ν, μ definidas sobre (Ω, \mathcal{A}) se dice que son singulares una respecto de la otra si están concentradas sobre conjuntos disjuntos, es decir, si existen $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$ y tales que

$$\nu(E) = \nu(E \cap A), \quad \mu(E) = \mu(E \cap B), \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

y se denota por $\nu \perp \mu$. Por otro lado, se dice que μ es absolutamente continua con respecto de ν si se cumple

$$\nu(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{A},$$

y se denota por $\mu \ll \nu$.

Teorema 1.7 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida finito y sea μ una medida finita sobre (Ω, \mathcal{A}) . Entonces existe un único par de medidas finitas μ_s, μ_a sobre (Ω, \mathcal{A}) tales que*

$$\mu = \mu_s + \mu_a, \quad \mu_s \perp \nu, \quad \mu_a \ll \nu.$$

Como consecuencia de este teorema y de la estrechísima relación entre cópulas y medidas, toda cópula C admite una descomposición en una componente absolutamente continua y en una componente singular. De acuerdo con [19] podemos escribir

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v)$$

donde

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds, \quad \text{y} \quad S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v).$$

Considerar la segunda derivada de una cópula entra dentro del marco de la legalidad del análisis matemático, tal y como se recoge en el teorema 1.4 contenido en [24].

Si $C \equiv A_C$ en \mathbb{I}^2 , es decir, si consideramos C directamente como función de distribución conjunta, su densidad viene dada por $\partial^2 C(u, v) / \partial u \partial v$, y entonces C es *absolutamente continua*, mientras que si $C \equiv S_C$ en \mathbb{I}^2 , i.e., si $\partial^2 C(u, v) / \partial u \partial v = 0$ en casi todo punto de \mathbb{I}^2 , entonces C es *singular*. En otro caso, C tiene una componente absolutamente continua A_C y una componente singular S_C . En este caso ni A_C ni S_C son cópulas, pues ninguna tiene marginales uniformes en $(0, 1)$.

Notar que la C -medida de la componente absolutamente continua es $A_C(1, 1)$ y la de la singular es $S_C(1, 1)$ [19].

Definición 1.10 *El soporte de una cópula C es el complementario de la unión de todos los subconjuntos abiertos de \mathbb{I}^2 de C -medida nula. Cuando el soporte de una cópula es \mathbb{I}^2 , diremos que tiene soporte completo.*

Notar que el soporte de una cópula es un conjunto cerrado. Otra definición alternativa para el soporte de una cópula es la del conjunto formado por todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{I}^2$ tales que para cada $\epsilon > 0$, se tiene que el rectángulo $R_\epsilon = (x - \epsilon, x + \epsilon) \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$ cumple

$$V_C(R_\epsilon) > 0.$$

Capítulo 2

Sistemas iterados de funciones

En este capítulo, introduciremos los conceptos de *Sistema Iterado de Funciones* y de *Sistema Iterado de Funciones con Probabilidades*, enumeraremos sus principales propiedades, e incluiremos algún resultado que ayude a entender la forma de construir los soportes fractales de las cópulas que se incluyen en este trabajo. A lo largo de las tres secciones que lo componen, consideraremos siempre que (Ω, ρ) es un espacio métrico completo, denotaremos por $\mathcal{K}(\Omega)$ a la familia de todos los subconjuntos no vacíos compactos de Ω y por $\mathcal{P}(\Omega)$ a la familia de todas las medidas de probabilidad definidas sobre la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$.

2.1. La métrica de Hausdorff

El espacio sobre el que se define la métrica que da nombre a esta sección es precisamente $\mathcal{K}(\Omega)$. Esta métrica es en realidad una distancia entre conjuntos compactos basada en la métrica subyacente que mide la distancia entre puntos. Si se modifica la métrica subyacente, también se modifica la métrica de Hausdorff resultante. Sin embargo, la topología inducida por la métrica de Hausdorff no dependerá de la métrica subyacente elegida [17].

Definición 2.1 Sean $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$. Se define la distancia de Hausdorff como

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) \right\}.$$

Notar que como la distancia de un punto a un conjunto es

$$\rho(a, B) := \inf_{b \in B} \rho(a, b)$$

y la distancia unilateral entre dos conjuntos es

$$\rho(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b),$$

la distancia de Hausdorff es el máximo entre una de las distancias unilaterales entre conjuntos.

Definición 2.2 Sea (Ω, ρ) un espacio métrico, $A \subset \Omega$ y $\epsilon > 0$. Entonces, se define la ϵ -expansión de A como el conjunto

$$A_\epsilon = \{x : \rho(x, a) < \epsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Una vez hechas las presentaciones, comprobaremos que el espacio métrico $(\mathcal{K}(\Omega), \rho_H)$ es un espacio métrico completo cuando así lo sea el espacio métrico subyacente [17].

Teorema 2.1 Si (Ω, ρ) es completo entonces también lo es $(\mathcal{K}(\Omega), \rho_H)$.

Demostración Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Veamos que es convergente. Para ello, definimos

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n \geq m} A_n},$$

donde la barra superior denota la clausura. Probaremos que $\rho_H(A_n, A) = 0$ y que $A \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Comenzaremos demostrando que $A \in \mathcal{K}(\Omega)$. Como (Ω, ρ) es un espacio métrico completo, la compacidad es equivalente a ser cerrado y totalmente acotado. Mostraremos que cada

$$B_m = \overline{\bigcup_{n \geq m} A_n}$$

es un conjunto compacto y no vacío, pues esto implicaría que A es compacto y no vacío también. Es evidente que cada B_m es cerrado y que $B_{m+1} \subseteq B_m$, de modo que bastará con probar que B_1 es compacto. Para demostrar que B_1 está totalmente acotado, tomamos un $\epsilon > 0$ cualquiera pero fijo.

Ahora bien, como $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$, $\rho_H(A_m, A_n) < \epsilon/2$, lo que implica que $A_n \subseteq (A_m)_{\epsilon/2}$, donde $(A_m)_{\epsilon/2}$ es la $\epsilon/2$ -expansión de A_m . Entonces, $B_m \subseteq (A_m)_{\epsilon/2}$, de modo que B_m está totalmente acotado (y es compacto) por estar A_m totalmente acotado. Notar que

$$B_1 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m-1} \cup B_m},$$

es decir, B_1 es la clausura de una unión finita de conjuntos compactos, luego B_1 es compacto.

Ahora demostraremos que $A_n \rightarrow A$ en la métrica de Hausdorff. Sea $\epsilon > 0$ fijo. Entonces, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m$ se tiene

$$\rho_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto significa que $A_n \subseteq (B_m)_{\epsilon/2}$ y que $B_m \subseteq (A_n)_{\epsilon/2}$. Como $A \subseteq B_m$, se tiene que $A \subseteq (A_n)_{\epsilon/2}$.

Para demostrar el contenido inverso, tomamos un $x \in A_n$. Como $\rho_H(A_n, A_k) < \epsilon/2$ para todo $k > n$, tenemos una subsucesión de elementos $x_k \in A_k$ tal que $\rho(x_k, x) < \epsilon/2$. Esto significa que $x_k \in B_n$, y B_n es compacto, de modo que x_k contiene un punto de acumulación $y \in B_n$ y por tanto $\rho(y, x) < \epsilon/2$.

Sabemos que $x_k \in B_l, \forall l > n$, por lo que $y \in A$ y en consecuencia $A_n \subseteq A_\epsilon$. Así,

$$\rho_H(A, A_n) < \epsilon,$$

de modo que $A_n \rightarrow A$ en $\mathcal{K}(\Omega)$.

■

Algunas de las propiedades de la métrica de Hausdorff son:

- Una sucesión de conjuntos finitos puede converger a un conjunto no numerable. Por ejemplo: $\forall n \in \mathbb{N}$, tomamos $A_n = \{i/n : 0 \leq i \leq n\} \subset [0, 1]$. Entonces,

$$\rho_H(A_n, [0, 1]) = \frac{1}{2n},$$

luego $A_n \rightarrow [0, 1]$ en $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), \rho_H)$.

- Añadir o quitar un único punto puede cambiar drásticamente la distancia entre dos conjuntos: sean $A = [0, 1]$ y $B = [0, 1] \cup \{x\}$, con $x \notin [0, 1]$. Entonces $\rho_H(A, B) = \max\{-x, 1 - x\}$, de modo que puede ser arbitrariamente grande.

2.2. Sistemas Iterados de Funciones

Tal y como se menciona en la Introducción, hablar de SIF's es hablar de contracciones y frecuentemente de semejanzas. En esta sección nos familiarizaremos con estos conceptos e introduciremos el operador de Hutchinson y el atractor del SIF.

Definición 2.3 Una aplicación $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$ es una semejanza en el espacio métrico (Ω, ρ) si existe una constante positiva $r > 0$ tal que

$$\rho(\omega(x), \omega(y)) = r\rho(x, y), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Definición 2.4 Una aplicación $\omega : \Omega \rightarrow \Omega$ es una contracción si existe una constante $L < 1$ tal que

$$\rho(\omega(x), \omega(y)) \leq L\rho(x, y), \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Definición 2.5 Un Sistema Iterado de Funciones (SIF) es una familia de contracciones en Ω , $\{\omega_i\}_{i=1}^n$, $n \geq 2$, y se denotará por $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n\}$.

La contractividad del SIF es el valor $L := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} L_i < 1$, donde L_i es la constante de contracción de la correspondiente ω_i .

Todo SIF induce un operador $\mathcal{H} : \mathcal{K}(\Omega) \rightarrow \mathcal{K}(\Omega)$, conocido como *operador de Hutchinson* y definido por:

$$\mathcal{H}(Z) := \bigcup_{i=1}^n \omega_i(Z). \quad (2.1)$$

Para más detalles en su definición ver [13].

Proposición 2.1 Sea $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n\}$ un SIF con constante de contractividad $L < 1$. Entonces el operador de Hutchinson inducido por el SIF es contractivo en $(\mathcal{K}(\Omega), \rho_H)$ con constante de contractividad L .

Demostración Esto es muy sencillo de ver, pues para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\rho(\omega_i(x), \omega_i(y)) \leq L_i\rho(x, y)$ implica que $\inf_{b \in B} \rho(\omega_i(a), \omega_i(b)) \leq L_i \inf_{b \in B} \rho(a, b)$, y entonces se tendría que

$$\rho(\mathcal{H}(A), \mathcal{H}(B)) \leq L\rho(A, B)$$

Entonces, bastará con demostrar que $\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\rho_H(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\rho_H(A_1, B_1), \rho_H(A_2, B_2)\}. \quad (2.2)$$

Para ello, hay que destacar que para cualquier $C \in \mathcal{K}(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(A_1 \cup A_2, C) &= \sup_{a \in A_1 \cup A_2} \rho(a, C) \\ &= \max\left\{ \sup_{a \in A_1} \rho(a, C), \sup_{a \in A_2} \rho(a, C) \right\} \\ &= \max\{\rho(A_1, C), \rho(A_2, C)\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

y

$$\rho(a, B_1 \cup B_2) = \min\{\rho(a, B_1), \rho(a, B_2)\} \quad (2.4)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \rho_{\mathbb{H}}(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ &= \max\{\min\{\rho(A_1, B_1), \rho(A_1, B_2)\}, \min\{\rho(A_2, B_1), \rho(A_2, B_2)\}, \\ & \quad \min\{\rho(B_1, A_1), \rho(B_1, A_2)\}, \min\{\rho(B_2, A_1), \rho(B_2, A_2)\}\} \\ &\leq \max\{\rho(A_1, B_1), \rho(B_1, A_1), \rho(A_2, B_2), \rho(B_2, A_2)\} \\ &= \max\{\rho_H(A_1, B_1), \rho_H(A_2, B_2)\} \end{aligned}$$

■

Corolario 2.1 *El operador de Hutchinson \mathcal{H} inducido por un SIF tiene un único punto fijo de atracción global $Z^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ que satisface*

$$Z^* = \bigcup_{i=1}^n \omega_i(Z^*)$$

Demostración Como $(\mathcal{K}(\Omega), \rho_H)$ es un espacio métrico compacto es también completo y separable, de modo que estamos en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo de Banach a la contracción ρ_H , de donde se obtiene el resultado.

■

De este modo, ver [17] y [2] para más detalles, para todo $R \in \mathcal{K}(\Omega)$ se tiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_H(\mathcal{H}^m(R), Z^*) = 0,$$

donde $\mathcal{H}^m(Z) = \mathcal{H}^{m-1}(\mathcal{H}(Z)) = \dots = \mathcal{H} \circ \overset{m-2}{\curvearrowright} \circ \mathcal{H}(Z)$.

El punto fijo del SIF se llama *atractor del SIF*. Si $Z \subseteq \Omega$ es cerrado y no vacío y además $\bigcup_{i=1}^n \omega_i(Z) \subseteq Z$, entonces es sencillo ver que el atractor $Z^* \subseteq Z$. Análogamente, si $\bigcup_{i=1}^n \omega_i(Z) \supseteq Z$ y Z es compacto, entonces $Z \subseteq Z^*$.

El atractor Z^* se dice *autosemejante* si todas las contracciones son semejanzas (ver definición 2.3).

Un SIF $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n\}$ está *totalmente desconectado* o *disjunto* si los conjuntos $\omega_1(Z^*), \dots, \omega_n(Z^*)$ son disjuntos dos a dos. Un SIF se dice que es ‘just touching’ o que satisface la propiedad de conjunto abierto si no está totalmente desconectado pero existe un conjunto abierto no vacío $U \subset \Omega$ tal que $\omega_1(U), \dots, \omega_n(U)$ son disjuntos dos a dos.

2.3. Sistemas Iterados de Funciones con Probabilidades

En esta sección se define un SIF que actúa sobre un nuevo espacio, el espacio de las medidas de probabilidad. El atractor de esos SIF ya no será un conjunto sino una medida (de Borel) de probabilidad.

Definición 2.6 *Un SIF junto con un vector $(p_i)_{i=1}^n \in (0, 1]^n$ tal que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ es un Sistema Iterado de Funciones con probabilidades, que abreviaremos por SIFP y denotaremos por $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n, (p_i)_{i=1}^n\}$.*

Además del operador de Hutchinson \mathcal{H} , un SIFP induce un operador $\mathcal{V} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ definido por

$$\mathcal{V}(\mu) := \sum_{i=1}^n p_i \mu^{\omega_i}, \quad (2.5)$$

donde $\mu^{\omega_i} := \mu \circ \omega_i^{-1}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

La idea intuitiva que subyace detrás de la definición del operador \mathcal{V} es que utiliza las aplicaciones ω_i para ‘moverse dentro’ de Ω , contraer el soporte de μ y los p_i reescalan la masa de modo que continúe siendo una medida de probabilidad.

En lo que sigue de sección, se recogen resultados contenidos en [17] necesarios para los capítulos siguientes.

Sea $a \in \Omega$ y ρ una métrica definida sobre Ω . Se define

$$\mathcal{P}_1(\Omega) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\Omega) : \int_{\Omega} \rho(a, x) d\mu(x) < \infty \right\},$$

Definición 2.7 *Se define la métrica de Hutchinson¹ h en $\mathcal{P}_1(\Omega)$ por*

$$h(\mu, \nu) := \sup \left\{ \int_{\Omega} f d\mu - \int_{\Omega} f d\nu : f \in Lip_1(\Omega, \mathbb{R}) \right\}, \quad (2.6)$$

donde $Lip_1(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y), \quad x, y \in \Omega\}$.

Esta definición es necesaria para conseguir un espacio métrico completo con la métrica de Hutchinson definida en (2.6). La demostración de este teorema puede encontrarse en [17].

Teorema 2.2 *Sea (Ω, ρ) un espacio métrico completo. Entonces $(\mathcal{P}_1(\Omega), h)$ es completo. Además, si Ω es compacto entonces $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}_1(\Omega)$ y ambos son compactos con la métrica de Hutchinson.*

¹también conocida como la métrica de Kantorovich o la métrica de Wasserstein

Teorema 2.3 Sea $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n, (p_i)_{i=1}^n\}$ un SIFP, y sea L_i la constante de contracción de la correspondiente ω_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Denotamos por $L := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} L_i$. El operador inducido por el SIFP satisface

$$h(\mathcal{V}(\mu), \mathcal{V}(\nu)) \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i p_i \right) h(\mu, \nu), \quad \forall \mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega) \quad (2.7)$$

De este modo, si $\sum_{i=1}^n p_i L_i < 1$, \mathcal{V} es una contracción en $(\mathcal{P}_1(\Omega), h)$.

Demostración Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\Omega)$, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función con constante de Lipschitz igual a 1. Tenemos que probar que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) d(\mathcal{V}(\mu) - \mathcal{V}(\nu))(x) &= \int_{\Omega} f(x) \sum_{i=1}^n p_i d(\mu^{\omega_i})(x) - \int_{\Omega} f(x) \sum_{i=1}^n p_i d(\nu^{\omega_i})(x) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n p_i f(\omega_i(y)) d\mu(y) - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n p_i f(\omega_i(y)) d\nu(y) \end{aligned}$$

Tomamos $\hat{f} := \sum_{i=1}^n p_i f \circ \omega_i$ y veamos que es una función lipschitziana con constante de lipschitz $\sum_{i=1}^n p_i L_i$. Para todo $x, y \in \Omega$, se tiene

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| &= \left| \sum_{i=1}^n p_i f \circ \omega_i(x) - \sum_{i=1}^n p_i f \circ \omega_i(y) \right| = \left| \sum_{i=1}^n p_i (f(\omega_i(x)) - f(\omega_i(y))) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n p_i |f(\omega_i(x)) - f(\omega_i(y))| \leq \sum_{i=1}^n p_i \rho(\omega_i(x), \omega_i(y)) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n p_i L_i \right) \rho(x, y), \end{aligned}$$

luego \hat{f} es lipschitziana con la constante de Lipschitz deseada. Como esto es cierto para una función lipschitziana f cualquiera, se tiene el resultado. ■

Corolario 2.2 El operador \mathcal{V} inducido por un SIFP $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}, (p_i)_{i=1}^{\infty}\}$ tiene un único punto fijo de atracción global $\mu^* \in \mathcal{P}_1(\Omega)$, i.e., $\forall \nu \in \mathcal{P}_1(\Omega)$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\mathcal{V}^n(\mu), \mu^*) = 0.$$

Demostración Es consecuencia del teorema del punto de fijo de Banach aplicado a \mathcal{V} , que se puede aplicar gracias a la completitud del espacio $(\mathcal{P}_1(\Omega), h)$ obtenida en el teorema 2.2. ■

La medida μ^* recibe el nombre de *medida invariante*. La medida μ^* se dice que es *autosemejante* si Z^* es autosemejante.

Los atractores de los SIFs están fuertemente relacionados con la Dinámica Simbólica a través de la llamada *aplicación de dirección*: para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio código de n símbolos se denota por Σ^n , i.e.

$$\Sigma^n := \{(1, 2, \dots, n)^{\mathbb{N}}\} = \{(k_i)_{i \in \mathbb{N}} : 1 \leq k_i \leq n, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Los símbolos en negrita denotarán a los elementos de Σ^n . σ es el operador ‘shift’ (a izquierda) definido en Σ^n , i.e.

$$\sigma((k_1, k_2, \dots)) = (k_2, k_3, \dots).$$

Se puede definir en Σ^n la siguiente métrica:

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{k} = \mathbf{l}, \\ 2^{1-\min\{i:k_i \neq l_i\}} & \text{si } \mathbf{k} \neq \mathbf{l} \end{cases}$$

Fijado $x \in \Omega$, se define la *aplicación dirección* G como sigue:

$$G(k) := \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{k_1} \circ \dots \circ \omega_{k_m}(x),$$

Puede verse en [17] que G está bien definida y que además es independiente del punto $x \in \Omega$ que se fija en la definición. Para otras propiedades de G , ver [1].

Teorema 2.4 *Sea $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n, (p_i)_{i=1}^n\}$ un SIFP en el que $p_i > 0$ y $L_i < 1$, $\forall i = 1, \dots, n$. Entonces el soporte de la medida invariante μ^* del SIFP es el atractor del SIF $\{\Omega, \{\omega_i\}_{i=1}^n\}$.*

Demostración En primer lugar, veremos que $\mu(Z_\epsilon^*) = 1$ (ver definición 2.2) para todo $\epsilon > 0$ excepto para una cantidad a lo sumo numerable de ϵ 's. Sea $a \in Z^*$ y la medida $\nu = \delta_a$, un punto de masa en a . Entonces, $\forall m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\mathcal{V}^m \nu = \sum_{\sigma \in \Sigma^m} p_\sigma \nu \circ \omega_\sigma^{-1}$$

Ahora bien, $\nu \circ \omega_\sigma^{-1}(Z^*) = 1$, pues $\omega_\sigma(a) \in Z^* \subset Z^*$, para toda $\sigma \in \Sigma^m$. Esto es,

$$\mathcal{V}^m \nu(Z^*) = 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$, $\mathcal{V} \nu(Z_\epsilon^*) = 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ahora bien, no tiene por qué darse necesariamente el caso en el que $\mathcal{V}^m \nu(B) \rightarrow \nu(B)$ para todo conjunto de Borel B , esto es cierto solamente para los conjuntos de continuidad de la medida límite μ^* .

Esto significa que si $\mu^*(\partial B) = 0$, siendo ∂B la frontera de B , entonces $\mathcal{V}^m \nu(B) \rightarrow \mu^*(B)$. Pero tampoco es necesariamente cierto que $\mu^*(\partial Z_\epsilon^*) =$

0, para cualquier ϵ dado. Sin embargo, habrá como mucho una cantidad numerable de $\epsilon > 0$ para los que $\mu^*(\partial Z_\epsilon^*) > 0$, y en consecuencia, $\mu^*(Z_\epsilon^*) = 1$.

Supongamos que $x \notin Z^*$. Entonces existe algún $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap Z^* = \emptyset$. Pero por lo que acabamos de demostrar, $\mu^*(Z_\delta^*) = 1$ para algún $\delta \in (0, \epsilon/2)$. Pero entonces $\mu^*(B_\delta(x)) = 0$ y $x \notin \text{sop}(\mu^*)$, luego $\text{sop}(\mu^*) \subseteq Z^*$. Para obtener el contenido inverso, consideramos $a \in Z^*$ y un $\epsilon > 0$ dado. Sea $\sigma \in \Sigma$ una dirección de a . Entonces, para un n suficientemente grande se tiene que $\omega_{\sigma^n}(Z^*) \subseteq B_\epsilon(a)$. Pero así, $\mu^*(B_\epsilon(a)) \geq \mu^*(\omega_{\sigma^n}(Z^*)) = p_{\sigma^n} > 0$. Como esto es cierto para todo ϵ , se tiene que $a \in \text{sop}(\mu^*)$ y por tanto $Z^* \subseteq \text{sop}(\mu^*)$.

■

Capítulo 3

Espacio de cópulas como espacio métrico

Como la métrica uniforme estándar en \mathcal{C} dada por

$$d_\infty(A, B) := \max_{(x,y) \in [0,1]^2} \|A(x, y) - B(x, y)\|, \quad \forall A, B \in \mathcal{C},$$

es incapaz de distinguir entre distintos tipos de dependencia estadística, se introduce en [25] la métrica D_1 , basada en la relación biyectiva que existe entre las cópulas y los operadores de Markov. Estos dos universos, el de las cópulas y el de los operadores de Markov, se entienden perfectamente cuando utilizan el lenguaje de las distribuciones condicionales regulares (núcleos de Markov). Para llegar al resultado principal de este capítulo, la completitud del espacio métrico de las cópulas [25], se hará un repaso de todo el elenco de funciones y operadores que intervienen en el proceso.

3.1. Preliminares. Distribuciones condicionales regulares

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y sean X, Y dos variables aleatorias definidas en ese espacio. Denotaremos a las distribuciones de X e Y por \mathcal{P}^X y \mathcal{P}^Y respectivamente, y a su distribución conjunta por $\mathcal{P}^{X \otimes Y}$. Denotaremos también

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}) = \mathcal{L}^1(\mathcal{P}) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible y tal que } \int_{\Omega} |f| d\mathcal{P} < \infty \right\}. \quad (3.1)$$

Definición 3.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad, $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ y $A \in \mathcal{A}$. Se define

$$\mathbb{E}[X|A] := \int X(\omega) \mathcal{P}[d\omega|A] = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]}{\mathcal{P}(A)}, & \text{si } \mathcal{P}(A) > 0, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{P}[\cdot|A]$ denota la probabilidad condicionada de un suceso dado $A \in \mathcal{A}$. La probabilidad condicionada de $B \in \mathcal{A}$ dado $A \in \mathcal{A}$ viene dada por

$$\mathcal{P}[B|A] = \begin{cases} \frac{\mathcal{P}[A \cap B]}{\mathcal{P}[A]}, & \text{si } \mathcal{P}(A) > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Definición 3.2 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Sea $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Una variable aleatoria Y es la esperanza condicional de X dada \mathcal{F} , denotado por $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] := Y$, si

- a) Y es \mathcal{F} -medible.
- b) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$, es decir,

$$\int_A X d\mathcal{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] d\mathcal{P} = \int_A Y d\mathcal{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Notar que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ siempre existe y es única (c.s. \mathcal{P}). La demostración puede encontrarse en [15].

Denotamos por $\sigma(Y)$ a la σ -álgebra generada por una variable aleatoria Y , es decir, $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{A}$.

Si Y es una variable aleatoria y $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$, se define

$$\mathbb{E}[X|Y] := \mathbb{E}[X|\sigma(Y)].$$

Por definición $\mathbb{E}[X|Y]$ es \mathcal{A} -medible, luego existe una función medible $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{E}[X|Y] = g \circ Y, \quad \text{c.s.}[\mathcal{P}].$$

Entonces, podemos escribir $\mathbb{E}[X|Y = y] = g(y)$ y diremos que g es una *versión de la esperanza condicional de X dada Y* .

Podemos entonces caracterizar las versiones de la esperanza condicional como las funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medibles que verifican

$$\int_B g(y) d\mathcal{P}^Y = \int_{Y^{-1}(B)} X d\mathcal{P}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Para más información, ver [3, 15, 14].

Definición 3.3 Un núcleo de Markov de \mathbb{R} en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es una función

$$K : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, 1]$$

tal que

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $K(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad,

(ii) $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $K(\cdot, B)$ es Borel-medible.

Definición 3.4 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad sobre el que se definen dos variables aleatorias X, Y . Se dice que un núcleo de Markov $K : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ es una distribución condicional regular de X dada Y si

$$K(Y(\omega), B) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_B | Y)(\omega) \quad c.s.[\mathcal{P}], \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Dada una cópula $A \in \mathcal{C}$ denotaremos por $K_A(\cdot, \cdot)$ a la versión de la distribución condicional regular de Y dada X pero nos referiremos a ella como la distribución condicional regular de A directamente.

El teorema de descomposición recogido en [14] con el nombre de ‘disintegration theorem’, dice que $\forall A \in \mathcal{C}$, su distribución condicional regular $K_A(\cdot, \cdot)$ y para todo conjunto de Borel $E, F \in \mathcal{B}([0, 1])$ se tiene

$$\int_F K_A(x, E) d\lambda(x) = \mu_A(F \times E), \quad (3.4)$$

de modo que en particular

$$\int_{[0,1]} K_A(x, E) d\lambda(x) = \lambda(E) \quad (3.5)$$

Denotamos por $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ al espacio de todas las medidas de probabilidad para las que la correspondiente función de distribución es una cópula. Notar que todo núcleo de Markov $K : [0, 1] \times \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ que verifique (3.5) induce un único $\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}([0, 1]^2)$ vía

$$\int_{[0,1]} K(x, G_x) d\lambda(x) = \mu(G), \quad \forall G \in \mathcal{B}([0, 1]^2),$$

donde $G_x = \{y \in [0, 1] : (x, y) \in G\}$.

Se pueden encontrar más detalles en [15, 14].

3.2. Cópulas y operadores de Markov

Definición 3.5 *Un operador lineal T definido sobre $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ (ver (3.1)) es un operador de Markov si verifica¹*

- i) T es positivo, i.e. si $f \geq 0$ entonces $T(f) \geq 0$,
- ii) $T(\mathbf{1}_{[0,1]}) = \mathbf{1}_{[0,1]}$,
- iii) $\int_{[0,1]} (Tf)(x)d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f(x)d\lambda(x)$.

Por un abuso del lenguaje, es frecuente encontrar el operador definido en (2.5) como operador de Markov asociado a un SIFP, pero en realidad el operador de (2.5) actúa sobre medidas y el operador de la definición 3.5 sobre funciones de $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Notar que los operadores de Markov tienen norma 1, pues si T es un operador de Markov se tiene que $\|T\| := \sup \{\|Tf\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\} = 1$. Denotaremos por \mathcal{M} la clase de los operadores de Markov definidos sobre $L^1([0, 1]) = \mathcal{L}^1([0, 1]) := L^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

A continuación, veremos unos resultados que relacionan directamente cópulas y operadores de Markov, recogidos en [20]. Denotamos por $L^\infty([0, 1])$ al espacio

$$\left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} \mid \inf\{a \in \mathbb{R} : \lambda(\{x \in [0, 1] : |f(x)| \geq a\}) = 0\} < \infty \right\}.$$

Lema 3.1 *Sea $A \in \mathcal{C}$ una cópula. Se define T_A como*

$$(T_A f)(x) := \frac{d}{dx} \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) f(t) d\lambda(t), \quad (3.6)$$

donde $A_{,2}$ denota la derivada parcial respecto de la segunda componente. Entonces T_A es un operador de Markov en² $L^\infty([0, 1])$.

Demostración Comenzaremos probando que si $f \in L^\infty([0, 1])$, entonces la función dada por

$$g(x) = \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) f(t) dt \quad (3.7)$$

¹las condiciones que aparecen en la definición son condiciones del tipo ‘en casi todo punto’.

²notar que hemos definido los operadores de Markov en todo el espacio $L^1([0, 1])$, pero bajo condiciones no demasiado restrictivas se tiene que $L^\infty([0, 1])$ es denso en $L^1([0, 1])$, ver [4].

es lipschitziana con constante de Lipschitz $\|f\|_{0,\infty}$.

Para ello, tomamos $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|g(x_2) - g(x_1)| &= \left| \int_{[0,1]} A_{,2}(x_2, t) f(t) dt - \int_{[0,1]} A_{,2}(x_1, t) f(t) d\lambda(t) \right| \\
&= \left| \int_{[0,1]} (A_{,2}(x_2, t) - A_{,2}(x_1, t)) f(t) d\lambda(t) \right| \\
&\leq \|f\|_{0,\infty} \int_{[0,1]} |A_{,2}(x_2, t) - A_{,2}(x_1, t)| d\lambda(t) \quad (3.8) \\
&\stackrel{A_{,2}(\cdot, t) \text{ estr. crec.}}{=} \|f\|_{0,\infty} \int_{[0,1]} (A_{,2}(x_2, t) - A_{,2}(x_1, t)) d\lambda(t) \\
&\stackrel{A \text{ abs. cont.}}{=} \|f\|_{0,\infty} (A(x_2, 1) - A(x_1, 1) - A(x_2, 0) + A(x_1, 0)) \\
&\stackrel{A_{\text{cóp.}}}{=} \|f\|_{0,\infty} (x_2 - x_1),
\end{aligned}$$

de modo que g es lipschitziana de constante $\|f\|_{0,\infty}$. Ahora veremos que la derivada que aparece en (3.6) existe. Como la función $x \mapsto A_{,2}(x, t)$ es creciente c.s., también lo son las funciones

$$x \mapsto \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) (|f(t)| - f(t)) d\lambda(t) \quad \text{y} \quad x \mapsto \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) (|f(t)| + f(t)) d\lambda(t)$$

y por tanto, tienen derivada puntual en c.t.p. Notar que g es una combinación lineal de estas funciones, luego también existe la derivada de g en c.t.p. Además, la lipschitzianidad de g demuestra que la derivada está acotada por $\|f\|_{0,\infty}$, de modo que $T_A f \in L^\infty([0, 1])$. La positividad de $T_A f$ se deduce de consideraciones similares. $T_A \mathbf{1}_{[0, 1]} = \mathbf{1}_{[0, 1]}$ es inmediato.

Por último, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} T_A f(x) d\lambda(x) &= \int_{[0,1]} \frac{d}{dx} \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) f(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\
&= \int_{[0,1]} (A_{,2}(1, t) - A_{,2}(0, t)) f(t) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0,1]} f(t) d\lambda(t),
\end{aligned}$$

pues $A_{,2}(1, t) = 1$ y $A_{,2}(0, t) = 0$, con lo que finalmente queda probado que T_A definido en (3.6) es un operador de Markov.

■

Lema 3.2 Sea T un operador de Markov en $L^\infty([0, 1])$. Se define la función

$$A_T(x, y) = \int_{[0, x]} T\mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t). \quad (3.9)$$

Entonces, A_T es una cópula y las funciones

$$\begin{aligned} \phi(A)(f)(x) &:= (T_A f)(x) := \frac{d}{dx} \int_{[0, 1]} A_2(x, t) f(t) d\lambda(t) \\ \varphi(T)(x, y) &:= A_T(x, y) := \int_{[0, x]} T\mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

verifican

$$\varphi \circ \phi = id_{\mathcal{C}} \quad y \quad \phi \circ \varphi = id_{\mathcal{M}} \quad (3.11)$$

Demostración Para ver que A_T es una cópula se consideran $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ tales que $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_T(x_2, y_2) - A_T(x_2 - y_1) - A_T(x_1, y_2) + A_T(x_1, y_1) = \\ \int_{[0, x_2]} (T\mathbf{1}_{[0, y_2]}(t) d\lambda(t) - T\mathbf{1}_{[0, y_1]}(t) d\lambda(t)) - \int_{[0, x_1]} (T\mathbf{1}_{[0, y_2]}(t) - T\mathbf{1}_{[0, y_1]}(t)) d\lambda(t) = \\ \int_{[x_1, x_2]} [T\mathbf{1}_{(y_1, y_2]}(t)] d\lambda(t) \geq 0, \end{aligned}$$

por la positividad de T . Veamos ahora que se A verifica las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} A_T(x, 1) &= \int_{[0, x]} T\mathbf{1}_{[0, 1]}(t) d\lambda(t) = \int_{[0, x]} d\lambda(t) = x, \\ A_T(1, y) &= \int_{[0, 1]} T\mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \stackrel{(ii)}{=} \int_{[0, 1]} \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) = y, \end{aligned}$$

El resto de propiedades son inmediatas, quedando demostrado que A_T es una cópula. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \phi)(A)(x, y) &= A_{\phi(A)}(x, y) \\
&= \int_{[0, x]} \phi(A) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0, x]} \frac{d}{dx} \int_{[0, 1]} A_{,2}(x, t) \mathbf{1}_{[0, 1]}(t) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\
&= \int_{[0, x]} \frac{d}{dx} \int_{[0, 1]} A_{,2}(x, t) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\
&= \int_{[0, 1]} A_{,2}(x, t) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0, y]} A_{,2}(x, t) d\lambda(t) = A(x, y)
\end{aligned}$$

En la otra dirección, se tiene

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \varphi)(T)(\mathbf{1}_{[0, y]})(x) &= T_{\varphi(T)} \mathbf{1}_{[0, y]}(x) \\
&= \frac{d}{dx} \int_{[0, 1]} A_{T,2}(x, t) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \\
&= \frac{d}{dx} \int_{[0, 1]} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{[0, x]} T \mathbf{1}_{[0, t]}(s) d\lambda(s) \right) \mathbf{1}_{[0, y]}(t) d\lambda(t) \\
&= \frac{d}{dx} \int_{[0, y]} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{[0, x]} T \mathbf{1}_{[0, t]}(s) d\lambda(s) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{d}{dx} \int_{[0, x]} T \mathbf{1}_{[0, y]}(s) d\lambda(s) = T \mathbf{1}_{[0, y]}(x),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\phi \circ \varphi(T)$ coincide con T en el conjunto de funciones que son combinación lineal de funciones características de intervalos $(y_1, y_2] \subset [0, 1]$. Este conjunto es denso en L^1 y como $\phi \circ \varphi(T)$ y T son operadores de Markov (y en consecuencia acotados) en L^1 , han de coincidir forzosamente en todo L^1 . Como $L^p \subset L^1$ para $p \in (1, \infty]$, se obtiene el resultado.

■

3.3. El espacio métrico (\mathcal{C}, D_1)

En esta sección se incluyen resultados contenidos en [25] y se comenzará demostrando que el operador de Markov T_A definido en (3.6) es una versión de la esperanza condicional de $f \circ Y$ dada X , siendo X, Y variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad y f una función medible.

Lema 3.3 *Sea $A \in \mathcal{C}$ y sea $T_A = \phi(A)$ el operador de Markov definido en (3.6). Sean también K_A una distribución condicional regular de A y X, Y variables aleatorias con función de distribución μ_A .*

Entonces, para toda $f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ la función $T_A f$ es una versión de la esperanza condicional de $f \circ Y$ dada X , i.e. se verifica la siguiente igualdad:

$$(T_A f)(x) = \mathbb{E}(f \circ Y | X = x) = \int_{[0,1]} f(y) K_A(x, dy) d\lambda(x), \quad \text{c.t.p.}[\lambda] \quad (3.12)$$

Demostración Comenzaremos probando que el resultado es cierto para una función $f := \mathbf{1}_E$, con $E \in \mathcal{B}([0, 1])$ y luego lo haremos para el caso general. Como paso inicial, se considera $B = [\underline{b}, \bar{b}] \subseteq \mathcal{B}([0, 1])$. Se define la función g como en (3.7), es decir,

$$g_f(x) := \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) f(t) d\lambda(t).$$

Como se vio en (3.8) g es lipschitziana (y por tanto absolutamente continua) y es monótona. Entonces

$$\begin{aligned} L(B) &:= \int_B (T_A f)(x) d\lambda(x) = \int_B \frac{d}{dx} \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &\stackrel{\text{def. } g}{=} \int_B \frac{\partial}{\partial x} g(x) d\lambda(x) = g(\bar{b}) - g(\underline{b}) \\ &= \int_{[0,1]} A_{,2}(\bar{b}, t) \mathbf{1}_E(\bar{b}) d\lambda(\bar{b}) - \int_{[0,1]} A_{,2}(\underline{b}, t) \mathbf{1}_E(\underline{b}) d\lambda(\underline{b}) \\ &= \int_E \frac{d}{dt} A(\bar{b}, t) d\lambda(t) - \int_E \frac{d}{dt} A(\underline{b}, t) d\lambda(t) \\ &= \int_E \frac{d}{dt} (A(\bar{b}, t) - A(\underline{b}, t)) d\lambda(t) = \mu_A((\underline{b}, \bar{b}] \times E) \\ &= \mu_A([\underline{b}, \bar{b}] \times E) = \mathcal{P}[X \in [\underline{b}, \bar{b}], Y \in E], \end{aligned}$$

y como

$$\mathcal{P}[X \in [\underline{b}, \bar{b}], Y \in E] = \int_{X^{-1}(B)} f \circ Y d\mathcal{P} =: R(B),$$

se tiene que $L(B) = R(B)$.

Es inmediato que L y R son medidas finitas (y positivas) en $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$. Por otro lado, $\mathcal{B}([0, 1]) = \sigma([a, b])$, es decir, $\mathcal{B}([0, 1])$ está generada por la clase de los intervalos $[a, b]$ (ver [15]) y que L y R coinciden en $\mathcal{B}([0, 1])$. Además, esta clase es cerrada respecto a la intersección (ver [15]). Esto tiene como consecuencia que $T_A f$ sea una versión de la distribución condicional de $f \circ Y$ dada X , para el caso particular $f = \mathbf{1}_E$.

Para el caso general, como L y R son lineales y positivas en f se tiene de forma inmediata (3.12) para funciones simples no negativas. Ahora bien, para cada función no negativa $f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ podemos encontrar una sucesión de funciones simples no negativas que converge a f , obteniéndose así el resultado para funciones no negativas sin más que utilizar las propiedades de la integral de Lebesgue y la continuidad de T_A .

Por último, por la positividad del operador de Markov y la linealidad y positividad de la esperanza condicionada, se puede extender el resultado a cualquier función en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

La segunda parte de la demostración se obtiene como consecuencia de aplicar el teorema de descomposición ('disintegration theorem') recogido en [14].

■

El siguiente paso es expresar la convergencia en el espacio topológico de los operadores de Markov en términos de distribuciones condicionales regulares, ver [25]. Para ello, recordamos (ver [9]) que una sucesión de operadores $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ converge a un operador T en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ en la topología fuerte de operadores si

$$\|T_n f - T f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda).$$

Lema 3.4 Sean $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ cópulas, $T_A, T_{A_1}, T_{A_2}, \dots$ los operadores de Markov asociados definidos vía (3.6) y que denotaremos directamente por T, T_1, T_2, \dots , y $K_A, K_{A_1}, K_{A_2}, \dots$ las distribuciones condicionales regulares correspondientes, que también denotaremos directamente por K, K_1, K_2, \dots . Entonces se verifica:

a) La sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a T en la topología fuerte de operadores

en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n(\cdot, B) - K(\cdot, B)\|_1 = 0, \quad \text{para cada } B \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

b) Sea $\Gamma \subset [0, 1]$ numerable y denso. Entonces la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a T en la topología fuerte de operadores en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n(\cdot, B) - K(\cdot, B)\|_1 = 0, \quad \text{para cada } B = [0, \gamma], \quad \gamma \in \Gamma.$$

Demostración

a) Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ en la topología fuerte de operadores en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ y sea $B \in \mathcal{B}([0, 1])$ cualquiera pero fijo. Entonces, considerando $f = \mathbf{1}_B$ por el lema 3.3 se tiene

$$\begin{aligned} \|K_n(\cdot, B) - K(\cdot, B)\|_1 &= \int_{[0,1]} |K_n(\cdot, B) - K(\cdot, B)| d\lambda(x) \\ &= \|T_n f(x) - T f(x)\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra la implicación directa tanto en a) como en b). Para demostrar la implicación inversa, será suficiente con demostrar la implicación inversa del apartado b).

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n f - T f\|_1 = 0$ para toda función $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ con $a, b \in \Gamma$ entonces $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a T con respecto en la topología fuerte de operadores en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, pues el espacio lineal que genera f es denso en $\mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Sea entonces $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, con $a, b \in \Gamma$. Entonces

$$K_n(\cdot, [a, b]) = K_n(\cdot, [0, b]) - K_n(\cdot, [0, a]) + K_n(\cdot, \{a\}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y análogamente

$$K(\cdot, [a, b]) = K(\cdot, [0, b]) - K(\cdot, [0, a]) + K(\cdot, \{a\}).$$

Para el último término se tiene

$$\int_{[0,1]} K_n(x, \{a\}) d\lambda(x) \stackrel{3.5}{=} \lambda(\{a\}) = \int_{[0,1]} K(x, \{a\}) d\lambda(x) = 0,$$

luego $K_n(x, \{a\}) = K(x, \{a\}) = 0$ c.s. $[\lambda]$. Ahora, usando la desigualdad triangular, se obtiene

$$\begin{aligned} \|T_n f - T f\|_1 &= \int_{[0,1]} |K_n(\cdot, [a, b]) - K(\cdot, [a, b])| d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} |K_n(\cdot, [0, b]) - K_n(\cdot, [0, a]) - K(\cdot, [0, b]) + K(\cdot, [0, a])| d\lambda(t) \\ &\leq \int_{[0,1]} |K_n(\cdot, [0, b]) - K(\cdot, [0, b])| d\lambda(t) \\ &\quad + \int_{[0,1]} |K_n(\cdot, [0, a]) - K(\cdot, [0, a])| d\lambda(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

con lo que se obtiene el resultado.

■

Motivados por los lemas 3.3 y 3.4 parece natural considerar las siguientes métricas en \mathcal{C} :

$$D_\infty(A, B) := \sup_{y \in [0,1]} \int_{[0,1]} |K_A(x, [0, y]) - K_B(x, [0, y])| d\lambda(x), \quad (3.13)$$

$$D_1(A, B) := \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} |K_A(x, [0, y]) - K_B(x, [0, y])| d\lambda(x) d\lambda(y), \quad (3.14)$$

y se define la versión en L^2 , de esta última:

$$D_2^2(A, B) := \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (K_A(x, [0, y]) - K_B(x, [0, y]))^2 d\lambda(x) d\lambda(y) \quad (3.15)$$

Para simplificar la notación escribiremos

$$\phi_{A,B}(y) := \int_{[0,1]} |K_A(x, [0, y]) - K_B(x, [0, y])| d\lambda(x), \quad \forall A, B \in \mathcal{C}. \quad (3.16)$$

Lema 3.5 D_∞ , D_1 y D_2 definidas en (3.13), (3.14) y (3.15) son efectivamente métricas en \mathcal{C} , ver [25].

Demostración En primer lugar, hay que demostrar que el integrando que aparece en (3.14) es medible. Para ello, se define H en $[0, 1]^2$ por

$H(x, y) := K_A(x, [0, y])$. Entonces se tiene que H es medible en x y no decreciente y continua por la derecha en y .

Fijamos $z \in [0, 1]$. Para cada $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, se define

$$A_q := \{x \in [0, 1] : H(x, q) < z\} \subset \mathcal{B}([0, 1]),$$

y se toma

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} A_q \times [0, q] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Como H es continua por la derecha en y , se tiene que $A = H^{-1}([0, z])$, de donde se deduce la medibilidad de H .

Además, si $D_1(A, B) = 0$, existe un conjunto $\Lambda \subseteq [0, 1]^2$ con $\lambda^2(\Lambda) = 1$ y tal que $\forall (x, y) \in \Lambda$,

$$K_A(x, [0, y]) = K_B(x, [0, y]).$$

Entonces $\lambda(\Lambda_x) = 1$ para casi todo $x \in [0, 1]$. Para tales x , los núcleos coinciden en un conjunto denso, de modo que tienen que ser idénticos. Utilizando de nuevo el teorema de descomposición ('disintegration theorem', ver [14]), se tiene que $A = B$. El resto de propiedades de métrica son inmediatas.

Utilizando un razonamiento análogo puede demostrarse que que D_∞ y D_2 también son métricas.

■

Lema 3.6 *Para cada par $A, B \in \mathcal{C}$, la función $\phi_{A,B}$, definida en (3.16) es lipschitziana con constante de Lipschitz 2 y verifica*

$$\phi_{A,B}(y) \leq \min \{2y, 2(1 - y)\}, \quad \forall y \in [0, 1].$$

Además, existen cópulas $A, B \in \mathcal{C}$ para las que se da la igualdad $\forall y \in [0, 1]$.

Demostración Sea $E \in \mathcal{B}([0, 1])$. Por el teorema de Scheffé, ver [23], se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |K_A(x, E) - K_B(x, E)| d\lambda(x) &= 2 \int_G K_A(x, E) - K_B(x, E) d\lambda(x) \\ &\leq 2 \int_{[0,1]} K_A(x, E) d\lambda(x) \stackrel{3.5}{=} 2\lambda(E), \end{aligned}$$

donde $G = \{x \in [0, 1] : K_A(x, E) > K_B(x, E)\}$.

Como $K_A(\cdot, E^c) = 1 - K_A(\cdot, E)$, si se toma $E = [0, y]$, se obtiene la desigualdad deseada.

Para obtener la igualdad, basta con considerar las cópulas M y W :

$$\phi_{M,W}(y) = \min\{2y, 2(1-y)\}, \quad \forall y \in [0, 1].$$

Finalmente, para probar la lipschitzianidad, se consideran $s, t \in [0, 1]$ tales que $s > t$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\phi_{A,B}(s) - \phi_{A,B}(t)| &= \int_{[0,1]} |K_A(x, [0, s]) - K_B(x, [0, s])| d\lambda(t) \\ &\quad - \int_{[0,1]} |K_A(x, [0, t]) - K_B(x, [0, t])| d\lambda(t) \\ &\leq \int_{[0,1]} |K_A(x, (t, s]) - K_B(x, (t, s])| d\lambda(x) \\ &= 2\lambda((t, s]) = 2(s - t), \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado.

■

A continuación veremos unos resultados de convergencia que serán muy útiles más adelante.

Lema 3.7 Sean $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ cópulas y sean T, T_1, T_2, \dots sus operadores de Markov correspondientes. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(A_n, A) = 0$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_\infty(A_n, A) = 0$,
- c) $\lim_{b \rightarrow \infty} \|T_n f - T f\|_1 = 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$,
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_2(A_n, A) = 0$.

Demostración Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ y &\longmapsto f_n(y) := \phi_{A_n, A}(y) \end{aligned}$$

Entonces por el lema 3.6, todas las f_n son lipschitzianas con constante de Lipschitz 2.

a) \Leftrightarrow b) Se considera la norma

$$\|f_n\|_{C_\infty} := \text{máx} \{f_n(y) : y \in [0, 1]\},$$

y sea $y_0 \in [0, 1]$ tal que $f_n(y_0) = \|f_n\|_{C_\infty}$. Entonces, el área entre el grafo de f_n y el eje x tiene que contener o bien al triángulo Δ_L cuyos vértices son $\{(y_0 - f_n(y_0)/2, 0), (y_0, 0), (y_0, f_n(y_0))\}$ o bien al triángulo Δ_R de vértices $\{(y_0, 0), (y_0 + f_n(y_0)/2, 0), (y_0, f_n(y_0))\}$. Como consecuencia, se tiene que

$$\|f_n\|_{C_\infty} \geq \int_{[0,1]} f_n(y) d\lambda(y) \geq \frac{\|f_n\|^2}{4},$$

lo que demuestra que a) y b) son equivalentes.

b) \Rightarrow c) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(A_n, A) = 0$ implica que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 y por el lema 3.4 se tiene c).

c) \Rightarrow a) Es consecuencia directa del lema 3.4 y el teorema de convergencia dominada.

a) \Leftrightarrow d) Es inmediato pues, $D_2^2(A, B) \leq D_1(A, B) \leq D_2(A, B)$, $\forall A, B \in \mathcal{C}$.

■

Se dice que una sucesión de distribuciones condicionales regulares $K_n(x, \cdot)$ converge débilmente a $K(x, \cdot)$ si, para toda función f continua y acotada en $[0, 1]$,

$$\int_{[0,1]} f(y) K_n(x, dy) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f(y) K(x, dy), \quad \text{c.t.p.}$$

Lema 3.8 Sean $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ cópulas y sean K, K_1, K_2, \dots sus correspondientes distribuciones condicionales regulares. Si $K_n(x, \cdot)$ converge débilmente a $K(x, \cdot)$ c.t.p. $[\lambda]$, entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(A_n, A) = 0.$$

Demostración Sea $\Lambda \subseteq [0, 1]$ el conjunto dado por

$$\Lambda = \{x \in [0, 1] : K_n(x, \cdot) \text{ converge débilmente a } K(x, \cdot)\},$$

y supongamos que $\lambda(\Lambda) = 1$. Tomamos f una función continua en $[0, 1]$. Entonces, por hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f(y) K_n(x, dy) = \int_{[0,1]} f(y) K(x, dy), \quad \forall x \in \Lambda,$$

y por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{A_n} f - T_A f\|_1 = 0.$$

Como el espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$, $C_\infty([0, 1])$, es denso en $L^1([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(A_n, A) = 0.$$

■

El teorema de Riesz-Fischer [22], garantiza la completitud del espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$, con $0 \leq p \leq \infty$ y $\forall \mu$ una medida positiva. En la demostración de este conocido teorema, viene implícito este interesante resultado que servirá de ayuda en la próxima demostración.

Resultado auxiliar 1 Sean $1 \leq p \leq \infty$, y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p(\mu)$ que converge a f . Entonces, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en casi todo punto a $f(x)$.

Resultado auxiliar 2 (Teorema de Birkhoff) El conjunto \mathcal{M}_d de todas las matrices de orden $d \times d$ doblemente estocásticas es la envolvente convexa de las matrices de permutación de orden $d \times d$, y cada matriz de permutación es un vértice de \mathcal{M}_d .

A continuación, el resultado principal de este capítulo, [25]:

Teorema 3.1 El espacio métrico (\mathcal{C}, D_1) es completo y separable.

Demostración Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (\mathcal{C}, D_1) . Para cada $n \in \mathbb{N}$, se denota por $K_n(\cdot, \cdot)$ a la distribución condicional regular de A_n y se define en $[0, 1]^2$ la función H_n dada por $H_n(x, y) := K_n(x, [0, y])$. Como

$$\begin{aligned} D_1(A_n, A_m) &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} |K_{A_n}(x, [0, y]) - K_{A_m}(x, [0, y])| d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} |H_n(x, y) - H_m(x, y)| d\lambda(x) d\lambda(y) \\ &= \|H_n - H_m\|_{L^1([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), \lambda^2)} \end{aligned}$$

se tiene que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1([0, 1]^2, \mathcal{B}([0, 1]^2), \lambda^2)$. Entonces existe un elemento $H \in L^1([0, 1]^2, \mathcal{B}([0, 1]^2), \lambda^2)$ tal que la sucesión $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (L^1) a H .

Por el resultado auxiliar 1, existen una subsucesión $(H_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y un conjunto de Borel $\Delta \subseteq [0, 1]^2$ con $\lambda^2(\Delta) = 1$ tales que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_{n_j}(x, y) = H(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Delta.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $H(x, 1) = 1, \forall x \in [0, 1]$. Veamos que existe una función $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que

- i) $G = H$ c. s. $[\lambda]$,
- ii) $K(x, [0, y]) := G(x, y)$ es una distribución condicional regular de una cópula $A \in \mathcal{C}$.

Por el teorema de Fubini [22] se tiene que

$$\lambda(\Delta_y) = \lambda(\{x \in [0, 1] : (x, y) \in \Delta\}) = \lambda^2(\Delta) = 1, \quad \text{c.t.p.}[\lambda], \quad y \in [0, 1].$$

de modo que existen un conjunto numerable $Q = \{y_1, y_2, \dots\} \subseteq [0, 1]$ tal que $1 \in Q$ y un conjunto $\Lambda_0 \subseteq [0, 1]$ con $\lambda(\Lambda_0) = 1$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} H_{n_j}(x, y_i) = H(x, y_i), \forall y_i \in Q, \forall x \in \Lambda_0$. Usando Fubini de nuevo, se tiene que existe un subconjunto $\Lambda \subseteq \Lambda_0$ tal que

$$\lambda(\Delta_x) = \lambda\{y \in [0, 1] : (x, y) \in \Delta\} = 1, \quad \text{para cada } x \in \Lambda.$$

Definimos la función $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ como sigue:

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 1, \\ \inf_{y_i \in Q, y_i > y} H(x, y_i) 1_{\Lambda}(x) + 1_{[0, 1]}(y) 1_{\Lambda^c}(x), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notar que si se fija y , $G(\cdot, y)$ es medible, y si se fija x , $G(x, \cdot)$ es una función de distribución en $[0, 1]$. En particular, G es medible e induce un núcleo de Markov $K(\cdot, \cdot)$ tomando

$$K(x, [0, y]) := G(x, y)$$

y para todo x , extendiendo de forma estándar³ la medida $K(x, \cdot)$ de la clase de todos los intervalos $[0, y]$ a $\mathcal{B}([0, 1])$ (ver [14]).

Para cada $x \in \Lambda$, se definen las funciones:

$$\begin{array}{ll} g_x : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] & \& h_x : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ y \longmapsto g_x(y) := G(x, y) & & y \longmapsto h_x(y) := H(x, y) \end{array}$$

³La extensión de medidas en la forma estándar garantiza la unicidad

y el conjunto $\Pi_x := \{y \in [0, 1] : g_x(y) \neq h_x(y)\}$. Notar que g_x y h_x son medibles y que $\Pi_x \subseteq \Delta_x^c \cup \mathcal{DC}(g_x)$, donde $\mathcal{DC}(g_x)$ denota el conjunto numerable (a lo sumo) de discontinuidades de g_x . En consecuencia, llamando $\Pi := \{(x, y) \in [0, 1]^2 : G(x, y) \neq H(x, y)\}$ y usando de nuevo Fubini, se tiene que

$$\lambda^2(\Pi) = \int_{[0,1]} \lambda(\Pi_x) d\lambda(x) \int_{\Lambda} \lambda(\Pi_x) d\lambda(x) = 0,$$

lo que implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_n - G\|_{L^1([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), \lambda^2)} = 0$.

Falta demostrar que $K(x, [0, y])$ es una distribución condicional de una cópula $A \in \mathcal{C}$. Se fija $y \in [0, 1]$, entonces, existe una sucesión monótona decreciente $(z_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset Q$ que converge a y . Por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} K(x, [0, y]) d\lambda(x) &= \int_{[0,1]} G(x, y) d\lambda(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} H(x, z_i) d\lambda(x) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} H_{n_j}(x, z_i) d\lambda(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = y \end{aligned}$$

Así, existe una cópula $A \in \mathcal{C}$ tal que $K(\cdot, \cdot) = K_A(\cdot, \cdot)$.

A continuación demostraremos la separabilidad de (\mathcal{C}, D_1) . Sea \mathcal{S}_n , para cada $n \geq 2$, la clase de todas las cópulas $B \in \mathcal{C}$ cuya masa μ_B está uniformemente distribuida en cada rectángulo $R_{ij} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$. Denotamos por \mathcal{SQ}_n el subconjunto formado por todas las cópulas $B \in \mathcal{S}_n$ que además cumplen

$$\mu_B(R_{ij}) \in \mathbb{Q}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Como \mathcal{SQ}_n es infinito numerable entonces

$$\mathcal{SQ} := \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{SQ}_n \subseteq \mathcal{C}$$

es también infinito numerable. \mathcal{S}_n es denso en \mathcal{C} con respecto a la topología fuerte de operadores, de modo que por el teorema 3.7 se tiene que \mathcal{S}_n es denso en el espacio métrico (\mathcal{C}, D_1) .

Sea ahora $B \in \mathcal{S}_n$ cualquiera pero fijo, y sea $\epsilon > 0$. Notar que la familia \mathcal{S}_n es isomorfa a la clase Ω_n de las matrices doblemente estocásticas. Por el teorema de Birkhoff sobre matrices estocásticas, todo elemento $M \in \Omega_n$ es combinación convexa de m ($\leq n^2 + 1$) matrices de permutación $(P_i)_{i=1}^m$, i.e. $M = \sum_{i=1}^m \alpha_i P_i$, con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Como \mathbb{Q} es denso en $[0, 1]$, podemos definir un vector $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que

$$\max_{i=1, \dots, m} |\alpha_i - \beta_i| < \frac{\epsilon}{n^2 + 1} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \beta_i = 1.$$

En términos de la cópula B , existe un elemento $\widehat{B} \in \mathcal{SQ}_n$ tal que

$$\max_{j=1, \dots, m} |\mu_B(R_{ij}) - \mu_{\widehat{B}}(R_{ij})| < \frac{\epsilon}{n^2 + 1},$$

de donde se deduce de forma inmediata que \mathcal{SQ}_n es denso en \mathcal{S}_n , quedando así demostrada la separabilidad de (\mathcal{C}, D_1) . ■

Capítulo 4

Cóputas con soporte fractal

Terminaremos este trabajo con el capítulo que da nombre al mismo: cóputas con soporte fractal. Nos centraremos en su construcción y como resultado principal se verá que para cada $s \in (1, 2)$, existen cóputas cuyo soporte tiene dimensión de Hausdorff [8] s ver [11]. A partir de esas cóputas especiales, se construyen también funciones de distribución bidimensionales con la misma propiedad. Por último, se introducen unas de las clases de cóputas más interesantes y que hoy en día son un importante objeto de estudio: las cóputas idempotentes [26].

4.1. Matrices de transformación y cóputas

Comenzamos con la definición de matriz de transformación y algunos de los resultados recogidos en [11].

Definición 4.1 *Una matriz de transformación es una matriz T con al menos dos filas o dos columnas cuyos elementos son todos no negativos, la suma de todos ellos es 1 y ninguna fila ni columna tiene todos sus elementos iguales a 0.*

La notación utilizada para las matrices de transformación será la habitual para las matrices, donde el doble subíndice de los elementos hace referencia a la fila y a la columna correspondientes comenzando siempre de arriba a abajo y de izquierda a derecha:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Toda matriz de transformación T determina una subdivisión de I^2 en sub-rectángulos como sigue: sea a_j la suma de los elementos en las primeras

j columnas de T y sea b_i la suma de los elementos de las i primeras filas de T , y sean $a = (a_j)_{j=1}^m$ y $b = (b_i)_{i=1}^n$ los vectores con la información de las particiones de \mathbb{I} que forman a_j y b_i . Es decir,

$$a_j = \sum_{j_0 < j} \sum_{i=1}^n t_{ij_0}, \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

$$b_i = \sum_{i_0 < i} \sum_{j=1}^m t_{i_0 j}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Por convenio añadiremos $a_0 = b_0 = 0$.

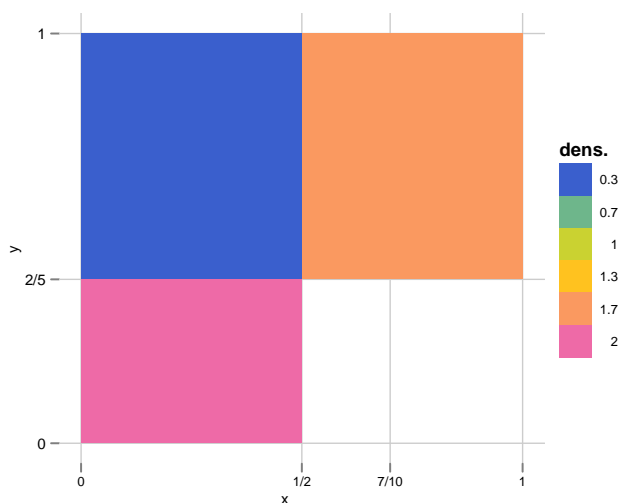
Es obvio que si consideramos la partición $\{a_j\}_{j=1}^m$ sobre el eje horizontal y la partición $\{b_i\}_{i=1}^n$ sobre el eje vertical se obtiene una partición de \mathbb{I}^2 en subrectángulos. Usaremos la siguiente notación para los subrectángulos:

$$R_{ji} = [a_{j-1}, a_j] \times [b_{i-1}, b_i]$$

Por ejemplo, la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

es una matriz de transformación y determina las particiones $p = \{0, 0.5, 0.7, 1\}$ y $q = \{0, 0.4, 1\}$ y en consecuencia la siguiente subdivisión de \mathbb{I}^2 :



donde los rectángulos R_{ji} están coloreados siempre que $t_{ij} > 0$, y su color viene determinado en función de la densidad correspondiente en R_{ji} .

Para T una matriz de transformación se tiene que

$$a_{j-1} < a_j \quad \text{y} \quad b_{i-1} < b_i, \quad j = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n,$$

es decir, las componentes de los vectores a y b son estrictamente crecientes, y en consecuencia los rectángulos $R_{ji} := [a_{j-1}, a_j] \times [b_{i-1}, b_i]$ son rectángulos compactos no vacíos para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Se considera el SIFP

$$\left\{ [0, 1]^2, \{\omega_{ji}\}_{j=1, \dots, m; i=1, \dots, n}, (t_{ij})_{j=1, \dots, m; i=1, \dots, n} \right\},$$

donde las contracciones $\omega_{ji} : [0, 1]^2 \rightarrow R_{ji}$ vienen dadas por

$$\omega_{ji}(x, y) = (a_{j-1} + x(a_j - a_{j-1}), b_{i-1} + y(b_i - b_{i-1})), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

El operador inducido del SIFP, \mathcal{V} , está definido en $\mathcal{P}([0, 1]^2)$ por

$$\mathcal{V}(\mu) := \sum_{i,j} t_{ij} \mu^{\omega_{ji}} = \sum_{i,j} t_{ij} \mu \circ \omega_{ji}^{-1}. \quad (4.1)$$

Definición 4.2 Dadas una matriz de transformación $T = (t_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ y una cópula C , la se define cópula¹ $T(C)$ en R_{ij} por

$$T(C)(u, v) = \sum_{i' < i, j' < j} t_{i'j'} + \frac{u - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} \sum_{i' < i} t_{i'j} + \frac{v - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \sum_{j' < j} t_{ij'} + t_{ij} C\left(\frac{u - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}}, \frac{v - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}}\right),$$

donde los sumatorios son directamente cero en caso de estar vacíos.

Notar que la cópula $T(C)$ de la definición 4.2 es en realidad la expresión analítica de la forma en la que actúa $\mathcal{V}C$ sobre los puntos de \mathbb{I}^2 . Para no crear confusión utilizaremos la siguiente notación: \mathcal{V}_T será el operador inducido del SIFP asociado a la matriz de transformación T , la cópula $T(C)$ es $\mathcal{V}_T C$.

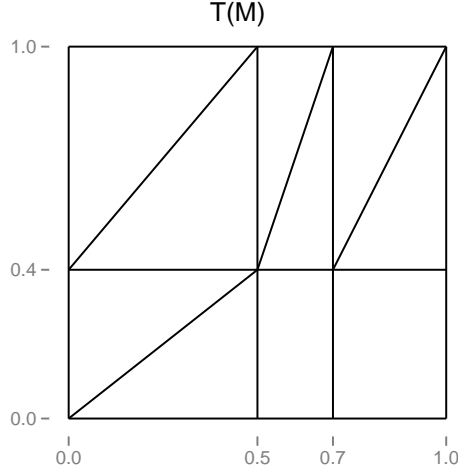
Notar que el soporte de $\mathcal{V}_T \Pi$ es la unión de todos los rectángulos R_{ji} para los que $t_{ij} > 0$, y que el soporte de $\mathcal{V}_T C$ está contenido en el soporte de $\mathcal{V}_T \Pi$, para cualquier cópula C .

En el caso de la matriz de transformación

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

y $M(u, v) = \min\{u, v\}$, $\mathcal{V}_{T_0} M$ es la cópula que, para cada (i, j) extiende la masa $t_{i,j}$ uniformemente sobre la diagonal de cada R_{ji} , tal y como muestra la siguiente figura

¹es efectivamente una cópula, ver [11].



Notar además que si $C \in \mathcal{C}$ es una cópula, n un entero positivo y T es la matriz de orden $n \times n$ cuyos coeficientes vienen dados por

$$t_{ij} = C\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - C\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - C\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + C\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

entonces C es una matriz de transformación y $\mathcal{V}_T \mu_\Pi$ es una aproximación de la cópula ‘checkerboard’ C , ver [5].

Proposición 4.1 *Sea T una matriz de transformación y sean $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ cópulas. Entonces:*

- a) Si $C_1 \leq C_2$ entonces $\mathcal{V}_T C_1 \leq \mathcal{V}_T C_2$, entendiéndose $C_1 \leq C_2$ como $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$, $\forall (u, v)$.
- b) $d_\infty(\mathcal{V}C_1, \mathcal{V}C_2) = \max_{i,j} t_{ij} d_\infty(C_1, C_2)$.

Demostración

- a) Inmediato, por cómo está definido \mathcal{V}_T .
- b) Notar que para todo $(u, v) \in R_{ji}$, sin más que hacer unos sencillos cálculos a partir de la expresión explícita de la definición 4.2 se tiene que:

$$|\mathcal{V}_T C_1(u, v) - \mathcal{V}_T C_2(u, v)| = t_{ij} \left| C_1\left(\frac{u-p_{i-1}}{p_i-p_{i-1}}, \frac{v-q_{j-1}}{q_j-q_{j-1}}\right) - C_2\left(\frac{u-p_{i-1}}{p_i-p_{i-1}}, \frac{v-q_{j-1}}{q_j-q_{j-1}}\right) \right|$$

Así,

$$\sup_{(u,v) \in R_{ji}} |\mathcal{V}_T C_1(u, v) - \mathcal{V}_T C_2(u, v)| = t_{ij} d(C_1, C_2),$$

de donde se deduce el resultado.

■

Dadas una matriz de transformación T y una cópula C , consideraremos ahora sucesivas iteraciones de T . Se define

$$\mathcal{V}_T^2 C = \mathcal{V}_T(\mathcal{V}_T C), \quad \mathcal{V}_T^3 C = \mathcal{V}_T(\mathcal{V}_T^2 C), \dots$$

Notar que cada $\mathcal{V}_T^m C$ es una cópula y que

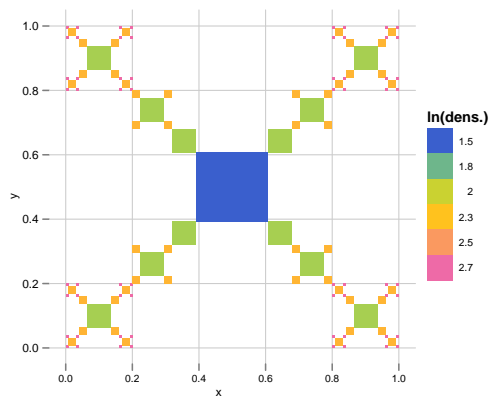
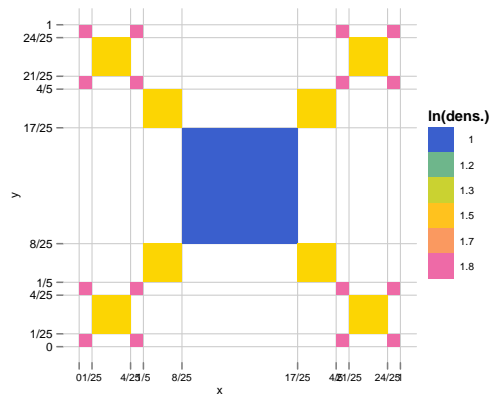
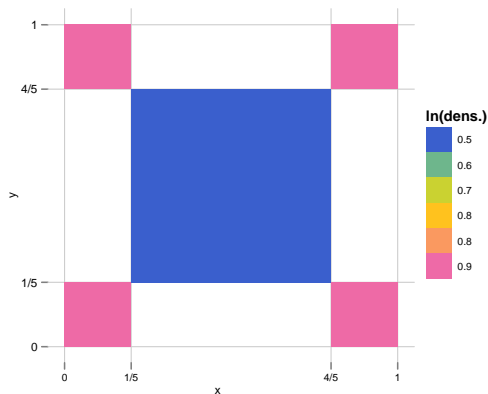
$$\mathcal{V}_T^m C = (\otimes^m \mathcal{V}_T) C,$$

donde $\otimes^m \mathcal{V}_T$ es el producto tensorial de \mathcal{V}_T consigo mismo m veces.

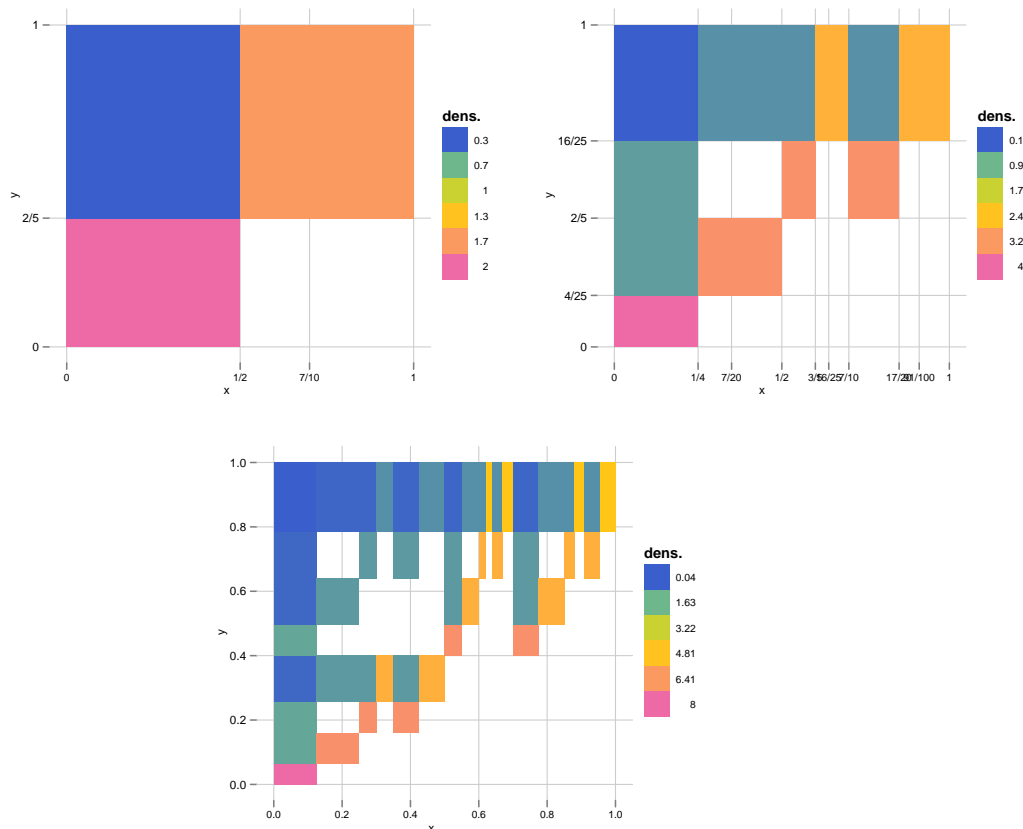
Por ejemplo, para la matriz de transformación

$$T = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

donde $a = b = (0, 0.2, 0.8, 1)$. Los soportes de $\mathcal{V}_T \Pi$, $\mathcal{V}_T^2 \Pi$ y $\mathcal{V}_T^3 \Pi$ son las regiones coloreadas la siguiente figura:



En el ejemplo de la matriz T_0 dado en (4.2), se tiene para las 3 primeras iteradas de $\mathcal{V}_{T_0}\Pi$:



Otra forma de enunciar el corolario 2.2 en términos de cópulas es:

Teorema 4.1 *Para toda matriz de transformación $T \neq (1)$, existe una única cópula C_T^* tal que*

$$\mathcal{V}_T C_T^* = C_T^*.$$

Además, C_T^ es el límite de la sucesión $\{C, \mathcal{V}_T C, \mathcal{V}_T^2 C, \dots, \mathcal{V}_T^m C, \dots\}$, para cualquier cópula C .*

4.2. Cópulas invariantes

Definición 4.3 *Una cópula C es invariante si $C = C_T^*$, para alguna matriz de transformación T .*

Las cópulas M, W y Π son invariantes. Sean

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{T_1}^* = \Pi$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{T_2}^* = M$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{T_1}^* = W.$$

De forma más general, $C_T^* = \Pi$ si T es una matriz fila o columna o si todos los elementos de T son iguales; $C_T^* = M$ si T es una matriz cuadrada y todos los elementos distintos de cero están en la diagonal principal; y $C_T^* = W$ si T es cuadrada y todos los elementos no nulos están en la diagonal secundaria. Además, notar que si $p = \{p_i\}$ y $q = \{q_j\}$ son dos particiones cualesquiera de \mathbb{I} , entonces la matriz $T = (t_{ij})$ con $t_{ij} = (p_i - p_{i-1})(q_j - q_{j-1})$ es una matriz de transformación que induce las particiones p y q y cumple $C_T^* = \Pi$.

4.3. Cópulas autosemejantes

Se ha visto que la cópula límite C_T^* es independiente de la cópula ‘semil-la’ utilizada para generar la sucesión iterativa, de modo que se puede estudiar C_T^* como el límite de la sucesión $(\mathcal{V}_T^m \Pi)_{m \in \mathbb{N}}$. En lo que sigue se utilizará la siguiente notación: $\tilde{I} := \{(i, j) : t_{ij} > 0\}$ y se considerará el SIFP $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{ji}\}_{(i,j) \in \tilde{I}}, (t_{ij})_{(i,j) \in \tilde{I}}\}$.

Teorema 4.2 *Si T es una matriz de transformación que no sea ni una matriz fila ni una matriz columna, i.e., $T = (t_{ij})_{i,j}$ con $i, j \geq 2$, entonces el soporte σ de C_T^* cumple:*

- a) σ es el conjunto invariante del SIF $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{ji}\}_{(i,j) \in \tilde{I}}\}$,
- b) $\sigma = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma_m$, donde σ_m es el soporte de $\mathcal{V}_T^m \Pi$.

Demostración

- a) Denotaremos por R_{ji} a los rectángulos que forman la partición de \mathbb{I}^2 inducida por T . Sea r la mayor de las longitudes de lado de los rectángulos R_{ji} , $\forall i, j$. Es evidente que $r < 1$ y que

$$|\omega_{ji}(u) - \omega_{ji}(v)| \leq r|u - v|, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{I}^3,$$

$\forall (u, v) \in \mathbb{I}^2$ y para todos los (i, j) . De este modo, $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{ji}\}_{(i,j) \in \tilde{I}}, (t_{ij})_{(i,j) \in \tilde{I}}\}$ es un SIF con probabilidades.

Para cualquier cópula C y $\forall R \subseteq R_{ji}$, se tiene que

$$V_{\mathcal{V}_T C}(R) = t_{ij} V_C(\omega_{ji}^{-1}(R)),$$

de modo que

$$V_{\mathcal{V}_T C}(R) = \sum_{(i,j) \in \tilde{I}} t_{ij} V_C(\omega_{ji}^{-1}(R)),$$

para todo rectángulo $R \subseteq \mathbb{I}^2$. Entonces,

$$\mu_{\mathcal{V}_T C} = \sum_{(i,j) \in \tilde{I}} t_{ij} (\mu_C \circ \omega_{ji}^{-1}) = \mathcal{V}_T C(\mu_C).$$

Ahora bien, $\mathcal{V}_T C_T^*(\mu_{C_T^*}) = \mu_{\mathcal{V}_T C_T^*} = \mu_{C_T^*}$, por lo que $\mu_{C_T^*}$ es la medida invariante de $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{(i,j) \in \tilde{I}}\}, (t_{(i,j) \in \tilde{I}})\}$, y por el teorema 2.4 se tiene que σ es el conjunto invariante del SIF.

b) Consideramos ahora la función

$$F(K) = \bigcup_{(i,j) \in \tilde{I}} \omega_{ji}(K),$$

definida sobre el espacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de \mathbb{I}^2 , que por el teorema 2.1 es un espacio métrico completo. Como F es una contracción, por el teorema del punto fijo de Banach se tiene que σ es el único punto fijo atractor global de F y que es además el límite de la sucesión $(F^m(\mathbb{I}^2))_{m \in \mathbb{N}} = (\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$, de donde se deduce el resultado.

■

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 4.1 *Si T es una matriz de transformación cuyos elementos son todos distintos de cero, entonces el soporte de C_T^* es \mathbb{I}^2 .*

Los resultados que se presentarán a continuación para el cálculo de la dimensión de Hausdorff, ver [8], de los soportes de los SIFs requieren que éstos sean semejantes. Para que un SIF sea semejante es necesario que la una matriz de transformación T satisfaga la siguiente propiedad:

las sumas de la fila y columna correspondientes a cada elemento no nulo de T , son iguales.

Esta condición implica que cada R_{ji} es un cuadrado $\forall t_{ij} > 0$, y que T es una matriz cuadrada.

Definición 4.4 Una cópula invariante C_T^* es autosemejante si la matriz de transformación T satisface la condición de semejanza: si $t_{ij} > 0$, entonces la suma de la fila i -ésima es igual a la suma de la columna j -ésima.

Las medidas de Borel asociadas a las cópulas autosemejantes son casos especiales de medidas autosemejantes. Notar que Π , M y W son cópulas autosemejantes.

Sea T una matriz de transformación que satisface la condición semejanza y sea r_{ij} la longitud del lado de R_{ji} para cada $t_{ij} > 0$. Notar que el SIF $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{ji}\}_{(i,j) \in \tilde{I}}\}$ es un sistema de semejanzas de radios $(r_{ji})_{(i,j) \in \tilde{I}}$. Notar también que el SIF satisface la condición de conjunto abierto con conjunto abierto $U = (0, 1)^2$.

A continuación, se presentan algunos de los resultados contenidos en [11] y para lo que cuya demostración se precisa de algún resultado de apoyo, también contenido en [11].

Resultado auxiliar 3 Sea $\{X, \{\omega_{ji}\}_{i,j}\}$ un SIF. Entonces existe un único subconjunto de X no vacío, K , tal que

$$K = \bigcup_{i,j} \omega_{ji}(K).$$

Además, si cada ω_n es una semejanza y se satisface la condición de conjunto abierto, la dimensión de Hausdorff s de K viene dada implícitamente por la ecuación

$$\sum_n c_n^s = 1,$$

donde c_n es el radio de semejanza de ω_n .

Como consecuencia directa del resultado auxiliar, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.3 El soporte de una cópula autosemejante C_T tiene dimensión de Hausdorff s dada por

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{I}} r_{ji}^s = 1.$$

Demostración Por el teorema 4.2 sabemos que el soporte σ de C_T^* es el conjunto invariante del SIF $\{\mathbb{I}^2, \{\omega_{ji}\}_{(i,j) \in \tilde{I}}\}$. Estamos en las condiciones del enunciado del resultado auxiliar 3, de donde se deduce directamente el resultado.

■

En el siguiente teorema se determinan las condiciones suficientes para que el soporte de una cópula autosemejante sea un fractal, [11].

Teorema 4.4 *Sea C_T^* una cópula autosemejante tal que:*

- i) al menos uno de los elementos de T es igual a cero,*
- ii) existe al menos una fila o columna de T con dos entradas no nulas.*

Entonces el soporte σ de C_T^ es un fractal cuya dimensión de Hausdorff es $s \in (1, 2)$.*

Demostración Consideramos la función $f(s) = \sum_{(i,j) \in \bar{I}} r_{ji}^s$ definida en $[0, \infty)$, donde $(r_{ji})_{i,j}$ es la longitud de lado de los rectángulos $(R_{ji})_{i,j}$ asociados a T . Es evidente que f es continua y estrictamente decreciente.

Notar que $f(2) = \sum_{(i,j) \in \bar{I}} r_{ji}^2$ es la suma de las áreas de los cuadrados del soporte σ_1 de $\mathcal{V}_T\Pi$ y que $f(1) = \sum_{(i,j) \in \bar{I}} r_{ji}$ es la suma de las longitudes del lado de los cuadrados en σ_1 . Entonces, $f(2) < 1$ y $f(1) > 1$, por i) e ii) respectivamente.

Por el teorema 4.3 y el por el teorema del valor medio, se deduce que la dimensión de Hausdorff de σ está en el intervalo $(1, 2)$. Como la dimensión topológica es un entero menor o igual que la dimensión de Hausdorff, se tiene que la dimensión topológica de σ es menor o igual que 1, luego el soporte de σ es un fractal. ■

Otro resultado más contenido en [11].

Proposición 4.2 *La función $s(r)$ definida implícitamente por la ecuación*

$$4r^s + (1 - 2r)^s = 1 \quad (4.2)$$

es una aplicación biyectiva de $(0, 1/2)$ en $(1, 2)$, estrictamente creciente y de clase C^∞ .

Demostración Se toma un $s \in (1, 2)$ cualquiera pero fijo, y se define g_s en $(0, 1/2)$ como sigue:

$$g_s(r) = 4r^s + (1 - 2r)^s.$$

Para demostrar que s es una biyección de $(0, 1/2)$ en $(1, 2)$, bastará con ver que la ecuación $g_s(r) = 1$ tiene una única solución en $(0, 1/2)$. Entonces,

$$g'_s(r) = 4sr^{s-1} - 2s(1 - 2r)^{s-1} = 2s(2r^{s-1} - (1 - 2r)^{s-1}),$$

luego

$$\begin{aligned} g'_s(r) < 0 &\Leftrightarrow 2r^{s-1} < (1-2r)^{s-1} \Leftrightarrow \log 2 + (s-1)\log r < (s-1)\log(1-2r) \\ &\Leftrightarrow \log \frac{r}{1-2r} < \log 2^{-\frac{1}{s-1}} \Leftrightarrow r < 2^{\frac{-1}{s-1}} - 2^{\frac{s-2}{s-1}}r \\ &\Leftrightarrow r < \frac{2^{\frac{-1}{s-1}}}{1 + 2^{\frac{s-2}{s-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-s}} + 2} =: r_s, \end{aligned}$$

de modo que $g'_s < 0 \forall r \in (0, r_s)$ y $g'_s > 0$ en $(r_s, 1/2)$.

Como $g_s(0^+) = 1$ y $g_s(1/2^-) = 4/2^s > 1$, existe un único $r \in (0, 1/2)$ que es solución de la ecuación $g_s(r) = 1$, i.e., de la ecuación $4r^s + (1-2r)^s$. Entonces, $s(r)$ es una biyección de $(0, 1/2)$ a $(1, 2)$.

Veamos ahora que s que es estrictamente creciente y de clase \mathcal{C}^∞ en $(0, 1/2)$. Para ello, consideraremos la función $F(r, s) = 4r^s + (1-2r)^s$, que es de clase \mathcal{C}^∞ en $(0, 1/2) \times (1, 2)$. Para cada $(r, s) \in (0, 1/2) \times (1, 2)$ se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial s}(r, s) = 4r^s \log r + (1-2r)^s \log(1-2r) < 0,$$

luego $s(r)$ es de clase \mathcal{C}^∞ en $(0, 1/2)$, por el teorema de la función implícita (ver [12]). Diferenciando en (4.2) se tiene

$$s'(r) = \frac{-g_s(r)}{\frac{\partial F}{\partial s}(r, s)},$$

que es positivo $\forall (r, s) \in (0, 1/2) \times (1, 2)$ y en consecuencia s es una función creciente. ■

Como consecuencia inmediata de los teoremas 4.3, 4.4 y de la proposición 4.2, se obtiene el siguiente teorema, [11].

Teorema 4.5 *Para cada $s \in (1, 2)$, existe una cópula cuyo soporte es un fractal con dimensión de Hausdorff s .*

4.4. Cópulas inducidas por SIF especiales

En esta sección se obtendrá, a partir de los resultados de convergencia anteriores, otro nuevo involucrando a la métrica D_1 .

Sea $A \in \mathcal{C}$ una cópula cualquiera pero fija, y sea K_A su distribución condicional regular. Entonces $K_{\mathcal{V}_A}(\cdot, \cdot)$ viene dada por

$$K_{\mathcal{V}_A}(x, [0, y]) := \frac{\sum_{i_0 < i} t_{i_0 j}}{\sum_{i_0=1}^n t_{i_0 j}} + \frac{t_{ij}}{\sum_{i_0=1}^n t_{i_0 j}} K_A \left(\frac{x - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}}, \left[0, \frac{y - b_{i-1}}{b_i - b_{i-1}} \right] \right),$$

$\forall x, y \in R_{ji} = [a_{j-1}, a_j] \times [b_{i-1}, b_i]$. Usaremos el menor j y el mayor i tales que $(x, y) \in R_{ji}$ para asegurar que $K_{\mathcal{V}A}$ está bien definida en las intersecciones de los rectángulos y para garantizar que la función $y \mapsto K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y])$ sea una función de distribución, para cualquier $x \in [0, 1]$. Notar que en la definición de $K_{\mathcal{V}A}$ los sumatorios en los que no haya ningún elemento son cero por definición.

Sean ahora $A, B \in \mathcal{C}$ e $y \in (b_{i-1}, b_i)$. Entonces, se tiene la siguiente relación entre $\phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y)$ y $\phi_{A, B}$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y) &:= \int_{[0,1]} |K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y]) - K_{\mathcal{V}B}(x, [0, y])| d\lambda(x) \\
&= \int_{[0,1]} \frac{t_{ij}}{\sum_{i_0=1}^n t_{i_0j}} \left| K_A \left(\frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) - K_B \left(\frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) \right| d\lambda(x) \\
&= \sum_{j=1}^m \int_{[a_{j-1}, a_j]} \frac{t_{ij}}{a_j-a_{j-1}} \left| K_A \left(\frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) - K_B \left(\frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) \right| d\lambda(x) \\
&= \sum_{j=1}^m t_{ij} \int_{[0,1]} \left| K_A \left(0, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) - K_B \left(0, \left[0, \frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}}\right] \right) \right| d\lambda(x) \\
&= \sum_{j=1}^m t_{ij} \phi_{A, B} \left(\frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}} \right) = (b_i - b_{i-1}) \phi_{A, B} \left(\frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}} \right)
\end{aligned}$$

Tal y como se vio en el lema 3.6, $\phi_{A, B}$ es lipschitziana en el intervalo $[0, 1]$ y además $\phi_{A, B}(0) = \phi_{A, B}(1) = 0$, de modo que $\forall y \in [0, 1]$

$$\phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y) = \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) \phi_{A, B} \left(\frac{y-b_{i-1}}{b_i-b_{i-1}} \right) \mathbf{1}_{(b_{i-1}, b_i]}(y)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
D_1(\mathcal{V}A, \mathcal{V}B) &= \int_{[0,1]} \phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y) d\lambda(y) \\
&= \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) \phi_{A,B} \left(\frac{y-b_i}{b_i-b_{i-1}} \right) \mathbf{1}_{(b_{i-1}, b_i)}(y) d\lambda(y) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{(b_{i-1}, b_i]} (b_i - b_{i-1}) \phi_{A,B} \left(\frac{y-b_i}{b_i-b_{i-1}} \right) d\lambda(y) \\
&= \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1})^2 \int_{(0,1]} \phi_{A,B}(y) d\lambda(y) \\
&= \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1})^2 D_1(A, B)
\end{aligned}$$

lo que demuestra que \mathcal{V} es una contracción en (\mathcal{C}, D_1) , pues

$$\sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1})^2 < \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) = 1.$$

Como la matriz de transformación era arbitraria (se ha utilizado la notación \mathcal{V} en vez de \mathcal{V}_T para hacer énfasis precisamente en eso) y ya se había probado en 3.1 que el espacio (\mathcal{C}, D_1) es completo y separable, acabamos de demostrar el siguiente resultado, [25]:

Teorema 4.6 Sean T una matriz de transformación y \mathcal{V}_T el operador inducido definido por 4.1. Entonces \mathcal{V}_T es una contracción en el espacio métrico (\mathcal{C}, D_1) y existe una única cópula C_T^* tal que $\mathcal{V}_T C_T^* = C_T^*$ y $\forall B \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(\mathcal{V}_T^n B, C_T^*) = 0.$$

Como la convergencia con respecto a la métrica D_1 implica la convergencia en la métrica d_∞ , también existe un único punto fijo global atractor con respecto a la métrica d_∞ y que además coincidirá con la cópula C_T^* .

A continuación veremos un ejemplo para ilustrar algunos de los resultados obtenidos hasta ahora.

Se considera la matriz $T = (t_{ij})_{i,j=1}^3$ dada por

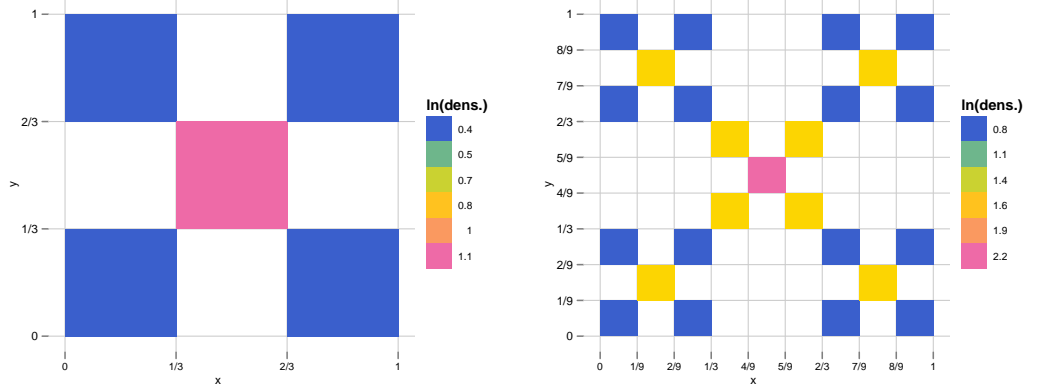
$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Siguiendo con la notación utilizada hasta ahora, llamamos a , b a los vectores con las sumas acumuladas de las filas y las columnas. En este caso son iguales

$$a = b = (0, 1/3, 2/3, 1)$$

Sean $R_{ji} := [a_{j-1}, a_j] \times [b_{i-1}, b_i]$, $1 \leq i, j \leq 3$ los rectángulos resultantes de la partición de \mathbb{I}^2 provocada por T .

Sea \mathcal{V} el operador asociado al SIFP. Los soportes de $\mathcal{V}\Pi$ y $\mathcal{V}^2\Pi$ vienen dados por:



Sea $A \in \mathcal{C}$ una cópula, $\mu_A \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ su medida doblemente estocástica correspondiente y $K_A(\cdot, \cdot)$ su distribución condicional regular.

Salta a la vista (ver figura anterior) que el núcleo de Markov dado por

- Si $y \in [0, 1/3]$

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y]) &= \frac{1}{2}K_A(3x, [0, 3y])1_{[0, 1/3]}(x) \\ &+ \frac{1}{2}K_A(3x - 2, [0, 3y])1_{[2/3, 1]}(x) \end{aligned}$$

- Si $y \in (1/3, 2/3]$

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y]) &= \frac{1}{2}1_{[0, 1/3] \cup (2/3, 1]}(x) \\ &+ K_A(3x - 1, [0, 3y - 1])1_{(1/3, 2/3]}(x) \end{aligned}$$

- Si $y \in (2/3, 1]$

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y]) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}K_A(3x, [0, 3y - 2]) \right) 1_{[0, 1/3]}(x) + 1_{(1/3, 2/3]}(x) \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}K_A(3x - 2, [0, 3y - 2]) \right) 1_{(2/3, 1]}(x) \end{aligned}$$

es una distribución condicional regular de VA .
Además, $\forall A, B \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y) &:= \int_{[0,1]} |K_{\mathcal{V}A}(x, [0, y]) - K_{\mathcal{V}B}(x, [0, y])| d\lambda(x) \\
&= \int_{[0, 1/3]}^1 |K_A(3x, [0, 3y]) - K_B(3x, [0, 3y])| 1_{[0, 1/3]}(y) d\lambda(x) \\
&+ \int_{[0, 1/3]}^1 |K_A(3x, [0, 3y - 2]) - K_B(3x, [0, 3y - 2])| 1_{(2/3, 1]}(y) d\lambda(x) \\
&+ \int_{[1/3, 2/3]} |K_A(3x - 1, [0, 3y - 1]) - K_B(3x - 1, [0, 3y - 1])| 1_{(1/3, 2/3]}(y) d\lambda(x) \\
&+ \int_{[2/3, 1]}^1 |K_A(3x - 2, [0, 3y]) - K_B(3x - 2, [0, 3y])| 1_{[0, 1/3]}(y) d\lambda(x) \\
&+ \int_{[2/3, 1]}^1 |K_A(3x - 2, [0, 3y - 2]) - K_B(3x - 2, [0, 3y - 2])| 1_{(2/3, 1]}(y) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{6} \phi_{A,B}(3y) 1_{[0, 1/3]}(y) + \frac{1}{6} \phi_{A,B}(3y - 2) 1_{(2/3, 1]}(y) + \frac{1}{3} \phi_{A,B}(3y - 1) 1_{(1/3, 2/3]}(y) \\
&+ \frac{1}{6} \phi_{A,B}(3y) 1_{[0, 1/3]}(y) + \frac{1}{6} \phi_{A,B}(3y - 2) 1_{(2/3, 1]}(y) \\
&= \frac{1}{3} \phi_{A,B}(3y) 1_{[0, 1/3]}(y) + \frac{1}{3} \phi_{A,B}(3y - 1) 1_{(1/3, 2/3]}(y) + \frac{1}{3} \phi_{A,B}(3y - 2) 1_{(2/3, 1]}(y)
\end{aligned}$$

de modo que se tiene que

$$\begin{aligned}
D_1(\mathcal{V}A, \mathcal{V}B) &= \int_{[0,1]} \phi_{\mathcal{V}A, \mathcal{V}B}(y) dy \\
&= 3 \frac{1}{3} \frac{1}{3} \int_{[0,1]} \phi_{A,B}(y) dy = \frac{1}{3} D_1(A, B)
\end{aligned}$$

lo que implica que V es un contracción en (\mathcal{C}, D_1) .

Por el teorema del punto fijo de Banach y el teorema 3.1 se tiene que existe un único punto fijo $A^* \in \mathcal{C}$ de \mathcal{V} , es decir, $\forall B \in \mathcal{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(\mathcal{V}^n B, A^*) = 0$$

4.5. Cópulas con soporte fractal: resultados en términos de funciones de distribución

Definición 4.5 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^k$. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ es bilipschitziana en D si existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $\forall x, y \in D$,

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|.$$

Algunas de las propiedades que poseen las funciones bilipschitzianas son la continuidad y la inyectividad. Además, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y existen $c_1, c_2 > 0$, tales que $0 < c_1 \leq |f'| \leq c_2$ en D , entonces f es bilipschitziana en D como consecuencia del Teorema del Valor Medio.

También es cierto que si f es bilipschitziana en D , entonces la inversa de f es bilipschitziana en $f(D)$.

Los resultados que se presentan en esta sección serán siempre para funciones de distribución en las siguientes condiciones: dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $F, G : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{I}$ son funciones de distribución que verifican:

$$\begin{cases} F(a) = 0, F(b) = 1 \text{ y } F \text{ es bilipschitziana en } [a, b], \\ G(c) = 0, G(d) = 1 \text{ y } G \text{ es bilipschitziana en } [c, d]. \end{cases}$$

Lema 4.1 *Si F y G funciones de distribución definidas en las condiciones arriba mencionadas, entonces la función*

$$\begin{aligned} F \times G : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I} \\ (x, y) &\longmapsto F \times G(x, y) = (F(x), G(y)) \end{aligned}$$

es bilipschitziana en $[a, b] \times [c, d]$.

Demostración Este resultado se obtiene como consecuencia inmediata de la equivalencia entre las distancias euclídea y d_1 , dada por

$$d_1((x_1, y_1) - (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Así,

$$\begin{aligned} d_1((F \times G)(x_1, y_1), (F \times G)(x_2, y_2)) &= d_1((F(x_1), G(y_1)), (F(x_2), G(y_2))) \\ &= |F(x_1) - F(x_2)| + |G(y_1) - G(y_2)| \\ &\leq c_1|x_1 - x_2| + c_2|y_1 - y_2| \\ &\leq c(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ &= cd_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)), \end{aligned}$$

sin más que tomar $c = \max(c_1, c_2)$. Se puede demostrar con un razonamiento similar que existe otra constante positiva b tal que

$$bd_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq d_1((F(x_1), F(x_2)), (G(y_1), G(y_2))).$$

■

Recordamos del teorema de Sklar que si H es una función de distribución bivariada con marginales continuas F y G , entonces existe una única cópula

C tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y)) \forall x, y \in \mathbb{R}$, es decir, $H(x, y) = (C \circ (F \times G))(x, y)$. Así, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{I}$ tales que $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,

$$V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) = V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]).$$

Lema 4.2 *Sea H una función de distribución bivariada con marginales F y G en las condiciones del lema anterior. Sea $\text{sop}(H)$ el soporte de H y $\text{sop}(C)$ el de la cópula C asociada a H . Entonces $(F \times G)(\text{sop}(H)) = \text{sop}(C)$.*

Demostración

Notar que $\text{sop}(H) \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Sean

$$\text{sop}(H)^c = ([a, b] \times [c, d]) \setminus \text{sop}(H) \quad \text{y} \quad \text{sop}(C)^c = \mathbb{I}^2 \setminus \text{sop}(C)$$

y se considera, para esta demostración, $F \times G|_{[a, b] \times [c, d]}$. Notar que F y G son continuas y estrictamente crecientes en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente.

Sea $(x, y) \in \overset{\circ}{Q}$, donde Q es un rectángulo cerrado contenido en $[a, b] \times [c, d]$ tal que $V_H(Q) = 0$. Entonces, $(F \times G)(x, y)$ está en el interior del rectángulo cerrado $(F \times G)(Q)$ y $V_C((F \times G)(Q)) = 0$.

Como $\text{sop}(H)$ y $\text{sop}(C)$ son por definición las clausuras de sus intersecciones con los interiores de $[a, b] \times [c, d]$ e \mathbb{I}^2 respectivamente, se tiene que

$$(F \times G)(\text{sop}(H)^c) \subseteq \text{sop}(C)^c.$$

Como las inversas de las restricciones de F y G a los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente son continuas y estrictamente crecientes en \mathbb{I} , un argumento similar demuestra que $(F \times G)^{-1}(\text{sop}(C)^c) \subseteq \text{sop}(H)^c$. El resultado se obtiene del hecho de que $F \times G$ es biyectiva de $[a, b] \times [c, d]$ en \mathbb{I}^2 . ■

Teorema 4.7 *Sean F y G funciones de distribución en las condiciones de los lemas anteriores. Para cada un $s \in (1, 2)$, existe una función de distribución bivariada H con marginales F y G y cuyo soporte es un fractal de dimensión de Hausdorff s .*

Demostración Sea $s \in (1, 2)$ cualquiera pero fijo. Por el teorema 3.6, sabemos que existe una cópula C cuyo soporte es un fractal de dimensión de Hausdorff s . Consideramos $H = C \circ (F \times G)$. Entonces H es una función de distribución bivariada con marginales F y G cuyo soporte es $\text{sop}(H) = (F \times G)^{-1}(\text{sop}(C))$, como se vio en el lema anterior. Como $F \times G$ es bilipschitziana en $[a, b] \times [c, d]$ entonces $(F \times G)^{-1}$ es bilipschitziana en \mathbb{I}^2 . Así, la dimensión de Hausdorff del $\text{sop}(H)$ es s . La dimensión topológica de $\text{sop}(H)$, como es un entero, es claramente menor que la dimensión de Hausdorff de $\text{sop}(H)$, de modo que $\text{sop}(H)$ es un fractal. ■

4.6. Cópulas idempotentes

En esta sección se incluyen resultados recogidos en [26], donde se demuestra que los resultados publicados en [11] también son válidos cuando se trabaja en una clase más pequeña como es la de las cópulas idempotentes.

Definición 4.6 Sean $A, B \in \mathcal{C}$. Se define el producto estrella $A * B \in \mathcal{C}$ como

$$(A * B)(x, y) := \int_{[0,1]} A_{,2}(x, t) B_{,1}(t, y) d\lambda(t),$$

donde $A_{,2}$ denota la derivada parcial de A respecto de la segunda componente y $B_{,1}$ la derivada parcial de B respecto de la primera componente.

El producto estrella verifica: $T_{A*B} = \phi_{A*B} = \phi(A) \circ \phi(B) = T_A \circ T_B$, donde T_{A*B} es el operador de Markov asociado a $A * B$ y $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ la función dada por

$$\phi(C)(f)(x) := (T_C f)(x) := \frac{d}{dx} \int_{[0,1]} C_{,2}(x, t) f(t) d\lambda(t).$$

Notar que ϕ es en realidad un isomorfismo (ver [20]).

Definición 4.7 Una cópula $A \in \mathcal{C}$ es idempotente si $A * A = A$.

\mathcal{C}^{ip} representa a la familia de todas las cópulas idempotentes. A continuación se demostrarán dos resultados muy útiles utilizados para la construcción de una primera cópula idempotente cuyo soporte tiene dimensión de Hausdorff $\log(5)/\log(3)$. Para ello, se utilizará la métrica D_1 definida en 3.14.

Lema 4.3 La familia \mathcal{C}^{ip} de las cópulas idempotentes es cerrada en (\mathcal{C}, D_1) .

Demostración Notar que el producto estrella es continuo con respecto a la métrica D_1 (ver [20]): sean A, A_1, A_2, \dots y B, B_1, B_2, \dots cópulas tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

Entonces, $\forall f \in L^1([0, 1])$, usando la desigualdad triangular y que los operadores de Markov tienen norma 1 se tiene

$$\|(T_{A_n} \circ T_{B_n})f - (T_A \circ T_B)f\|_1 \leq \|T_{B_n}f - T_Bf\|_1 + \|(T_{A_n} \circ T_B)f - (T_A \circ T_B)f\|_1,$$

de modo que $\|T_{A_n} \circ T_{B_n}f - \|T_A \circ T_Bf\|_1 \rightarrow 0$, es decir, $\|T_{A_n * B_n} - T_{A * B}\|_1 \rightarrow 0$ y en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_1(A_n * B_n, A * B) = 0.$$

Entonces, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{ip}$ es una sucesión convergente a A en la métrica D_1 , como $A_n = A_n * A_n$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A y $A * A$, de modo que $A = A * A$ y $A \in \mathcal{C}^{ip}$. ■

El siguiente lema (ver [26]) establece una relación entre núcleos de Markov y el producto estrella de dos cópulas. Implica que el núcleo de Markov de el producto estrella de dos cópulas es la composición de los núcleos de Markov de cada una de ellas.

Lema 4.4 Sean $A, B \in \mathcal{C}$ y sean K_A, K_B sus distribuciones condicionales regulares. Entonces el núcleo de Markov $K_A \circ K_B$ definido por

$$(K_A \circ K_B)(x, F) := \int_{[0,1]} K_B(y, F) K_A(x, dy)$$

es una distribución condicional regular de $A * B$.

Demostración Es conocido que la composición de dos núcleos de Markov es un núcleo de Markov. Para ver que el lado derecho de la igualdad es una distribución condicional regular, se probará que

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} K_B(y, F) K_A(x, dy) d\lambda(x) = \lambda(F), \quad \forall F \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

Para ello, sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ una partición del intervalo $[0, 1]$ y $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{E_i}(x)$ una función simple no negativa. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(y) K_A(x, dy) d\lambda(x) &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{E_i}(y) K_A(x, dy) d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^n \alpha_i K_A(x, E_i) d\lambda(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(E_i) = \int_{[0,1]} f d\lambda. \end{aligned}$$

Como la clase de las funciones simples es densa en $(L^1([0, 1]), \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ se tiene que

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} K_B(y, F) K_A(x, dy) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} K_B(x, F) d\lambda(x) = \lambda(F)$$

lo que demuestra que $K_A \circ K_B$ es una distribución condicional regular. La demostración sigue el método usual de Teoría de la Medida: primero se demuestra para funciones simples y luego para el caso general. Para terminar,

sea $E \in \mathcal{B}([0, 1])$, entonces para casi todo $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} K_{A*B}(x, E) &= T_{A*B}(1_E)(x) = (T_A \circ T_B)(1_E)(x) = T_A(K_B(\cdot, E))(x) \\ &= \int_{[0,1]} K_B(y, E) K_A(x, dy), \end{aligned} \quad (4.4)$$

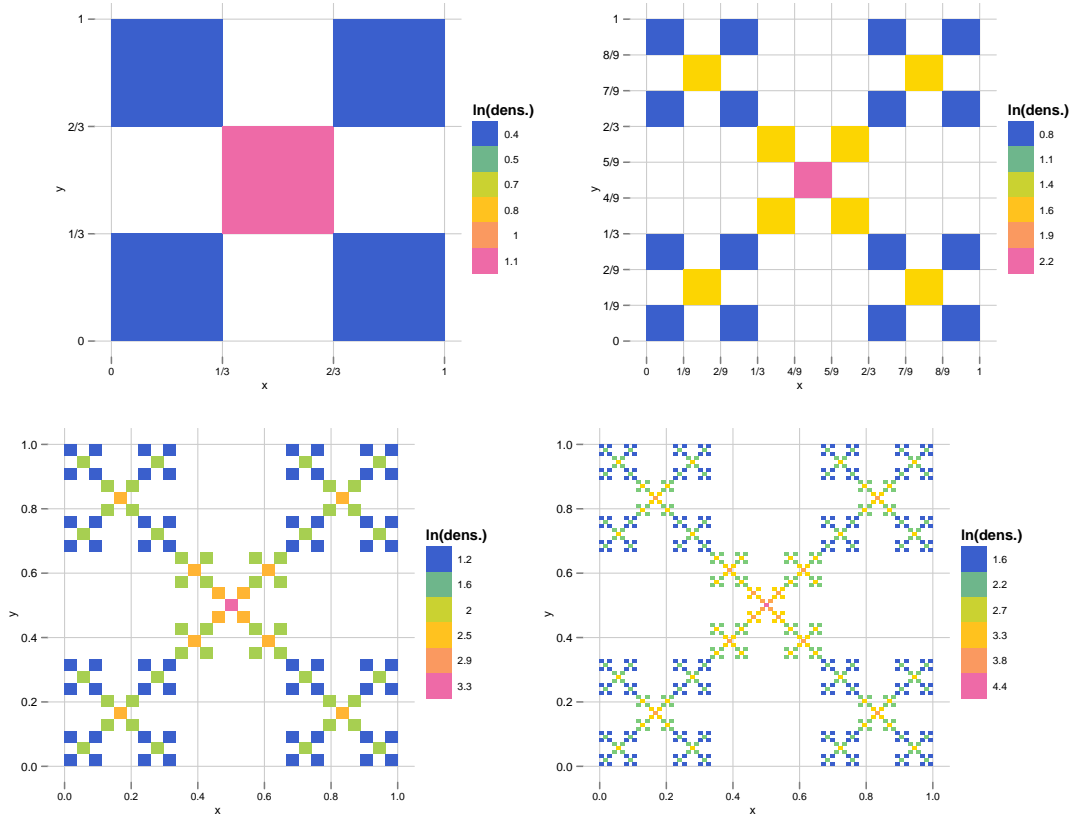
con lo que queda finalizada la demostración. ■

Este resultado muestra que, en términos de distribuciones condicionales, el producto estrella puede verse como una generalización de la multiplicación de matrices estocásticas en el marco de las cadenas discretas de Markov y determina que estudiar el producto estrella significa estudiar la composición de núcleos de Markov $K : [0, 1] \times \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ verificando

$$\int_{[0,1]} K_A(x, F) d\lambda(x) = \lambda(F)$$

y viceversa.

Consideramos el SIF ya estudiado en este trabajo dado por la matriz de transformación en (4.3). Las densidades de las cuatro primeras iteradas del correspondiente operador \mathcal{V}_T actuando sobre la cópula producto Π vienen representadas por:



De acuerdo con el teorema 4.6 [25], existe una única cópula C_T^* tal que para toda cópula inicial $B \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_1(\mathcal{V}_T^m B, C_T^*) = 0,$$

Además, como se vio en este capítulo, el soporte de C_T^* tiene dimensión de Hausdorff $\log 5 / \log 3$, dada por la única solución de la ecuación (4.2) en el intervalo $(1, 2)$.

A continuación, demostraremos que C_T^* es una cópula idempotente [25]. Para ello, procederemos en 3 pasos:

- 1) Para una cópula dada $B \in \mathcal{C}$, veamos cómo se puede calcular el núcleo $K_{\mathcal{V}_T B}$ a partir de K_B . Para todo $i \in \{1, 2, 3\}$, se definen las funciones:

$$\begin{aligned} h_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_i(x) = 3x - (i - 1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

y extendemos es espacio de definición del núcleo K_B a todo $[0, 1] \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Para ello, bastará con tomar $K_B(x, E) = 0$ cuando $E \cap [0, 1] = \emptyset$. Sea

$E \in \mathcal{B}([0, 1])$ cualquier pero fijo. Entonces, se tiene

$$K_{\mathcal{V}_TB}(x, E) = \begin{cases} \frac{1}{2}(K_B(h_1(x), h_1(E)) + K_B(h_1(x), h_3(E))) & \text{si } x \in [0, 1/3], \\ K_B(h_2(x), h_2(E)) & \text{si } x \in (1/3, 2/3), \\ \frac{1}{2}(K_B(h_3(x), h_1(E)) + K_B(h_3(x), h_3(E))) & \text{si } x \in [2/3, 1], \end{cases} \quad (4.6)$$

$\forall x \in [0, 1]$, podemos escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} K_{\mathcal{V}_TB}(h_1^{-1}(x), E) \\ K_{\mathcal{V}_TB}(h_2^{-1}(x), E) \\ K_{\mathcal{V}_TB}(h_3^{-1}(x), E) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{=:N} \begin{pmatrix} K_B(x, h_1(E)) \\ K_B(x, h_2(E)) \\ K_B(x, h_3(E)) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

En consecuencia, como el conjunto de las funciones simples es denso en $\mathcal{L}^1([0, 1])$, se tiene que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\forall f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ y $\forall x \in [0, 1]$

$$\int_{[0,1]} f(z) K_{\mathcal{V}_TB}(h_i^{-1}(x), dz) = \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^3 n_{ij} f(h_j^{-1}(z)) K_B(x, dz) \quad (4.8)$$

Notar que N es idempotente.

- 2) Demostraremos que para toda cópula idempotente $B \in \mathcal{C}^{ip}$, la cópula $\mathcal{V}B$ es también idempotente. Se tiene:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{V}_TB * \mathcal{V}_TB}(h_i^{-1}(x), E) &\stackrel{(4.4)}{=} \int_{[0,1]} K_{\mathcal{V}_TB}(z, E) K_{\mathcal{V}_TB}(h_i^{-1}(x), dz) \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^3 n_{ij} K_{\mathcal{V}_TB}(h_j^{-1}(z), E) K_B(x, dz) \\ &= \int_{[0,1]} (n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}) \begin{pmatrix} K_{\mathcal{V}_TB}(h_1^{-1}(z), E) \\ K_{\mathcal{V}_TB}(h_2^{-1}(z), E) \\ K_{\mathcal{V}_TB}(h_3^{-1}(z), E) \end{pmatrix} K_B(x, dz) \\ &\stackrel{4.7}{=} \int_{[0,1]} (n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}) N \begin{pmatrix} K_B(z, h_1(E)) \\ K_B(z, h_2(E)) \\ K_B(z, h_3(E)) \end{pmatrix} K_B(x, dz) \\ &\stackrel{N \text{ idem.}}{=} \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^3 n_{ij} K_B(z, h_j(E)) K_B(x, dz) \end{aligned}$$

Pero como

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \sum_{j=1}^3 n_{ij} K_B(z, h_j(E)) K_B(x, dz) &\stackrel{(4.4)}{=} \sum_{j=1}^3 K_{B*B}(x, h_j(E)) \\ &\stackrel{B \in \mathcal{C}^{ip}}{=} \sum_{j=1}^3 n_{ij} K_B(x, h_j(E)) \\ &\stackrel{(4.7)}{=} K_{\mathcal{V}_T B}(h_i^{-1}(x), E), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{V}_T B \in \mathcal{C}^{ip}$.

- 3) Como $\lim_{m \rightarrow \infty} D_1(\mathcal{V}_T^m B, C_T^*) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{C}$, podemos tomar $B = \Pi \in \mathcal{C}^{ip}$ para construir una sucesión $(\mathcal{V}_T^m \Pi)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{ip}$ que converge a C_T^* . Como consecuencia del lema 4.3 C_T^* tiene que ser idempotente también.

La clave en la demostración de la idempotencia de la cópula límite C_T^* fue la idempotencia de la matriz N de la expresión (4.7).

Sea $r \in (0, r/2)$ y se considera la matriz de transformación definida por

$$M_r = \begin{pmatrix} r/2 & 0 & r/2 \\ 0 & 1-2r & 0 \\ r/2 & 0 & r/2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Una vez más, de acuerdo con [25] existe una única cópula $C_{M_r}^*$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_1(\mathcal{V}_{M_r}^m B, C_{M_r}^*) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{C},$$

siendo \mathcal{V}_{M_r} el operador inducido por M_r . Además, por el teorema 4.5 ([11]) el soporte de $C_{M_r}^*$ tiene dimensión de Hausdorff s_0 , donde s_0 es la única solución a la ecuación $4r^s + (1-2r)^s = 1$ en el intervalo $(1, 2)$. Definiendo las funciones $h_1, h_2, h_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_1(x) := \frac{x}{r}, \quad h_2(x) := \frac{x-r}{1-2r}, \quad h_3(x) := \frac{x-(1-r)}{r}$$

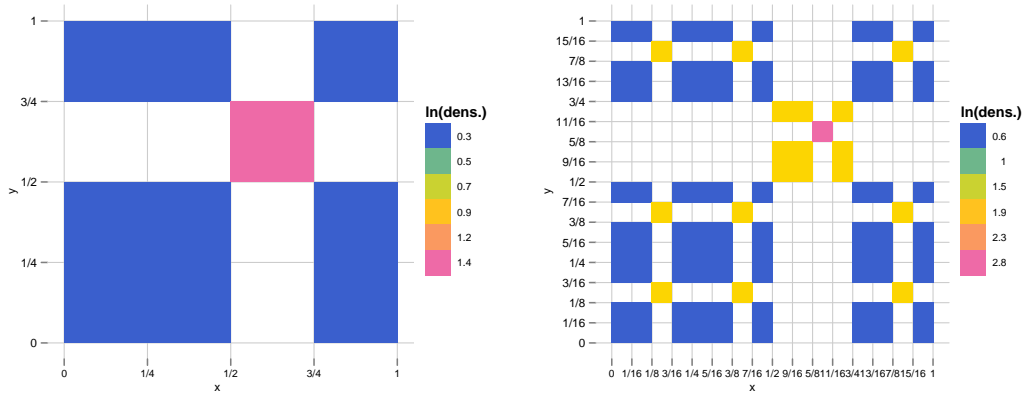
resulta inmediato comprobar que la expresión (4.7) sigue siendo cierta para \mathcal{V}_{M_r} con la misma matriz N , para todo $x \in [0, 1]$ y para toda cópula $B \in \mathcal{C}$. Evidentemente la expresión (4.8) también sigue siendo válida y los pasos 1) y 2) se deducen de la misma manera, de modo que $C_{M_r}^* \in \mathcal{C}^{ip}$ y hemos construido una cópula idempotente con soporte fractal y dimensión de Hausdorff s_0 . Como $r \in (0, 1/2)$ es arbitrario, usando de nuevo el teorema 4.5, hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 4.8 *Para cada $s \in (1, 2)$ existe una cópula idempotente cuyo soporte tiene dimensión de Hausdorff s .*

Este resultado puede generalizarse, ver [26].

Para terminar, añadimos otro ejemplo gráfico interesante, donde se observan las densidades de las 2 primeras iteradas del operador \mathcal{V}_T aplicado a la cópula Π , y donde la matriz T viene dada por:

$$T = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$



Conclusión

El isomorfismo entre el espacio de operadores de Markov y el espacio de cópulas [20] ha posibilitado la aparición de interesantes resultados: se ha introducido la métrica D_1 en el espacio de las cópulas que es en realidad una metrización de la topología fuerte de operadores en el espacio de los operadores de Markov y se ha visto que dicho espacio es completo y separable [25]. Una posible dirección a seguir sería la de encontrar más propiedades de este espacio.

En cuánto a los resultados presentados en [11] acerca de la dimensión de Hausdorff de los soportes fractales de cópulas, sería razonable estudiar si siguen siendo ciertos para clases más pequeñas, tal y como se procedió con las cópulas idempotentes en [26].

Este resultado obtenido para la familia de cópulas idempotentes demuestra que este tipo de cópulas pueden llegar a tener estructuras muy complejas, justo lo contrario que ocurre con las matrices doblemente estocásticas idempotentes.

Bibliografía

- [1] E. de Amo, M. Díaz-Carrillo, J. Fernández-Sánchez, W. Trutschnig, *Some results on homeomorphisms between fractal supports of copulas*, *Nonlinear Anal-Theor.* 85 132-144(2013), 2013.
- [2] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Cambridge, 1993.
- [3] R. Bhattacharya, E. C. Waymire, *A Basic Course in Probability Theory*, Springer, 2000.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [5] C. M. Cuadras, J. Fortiana, J. A. Rodríguez-Lallena, *Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling*, Springer, 2002.
- [6] F. Durante, J. Fernández-Sánchez, C. Sempi, *Sklar's Theorem obtained via regularization techniques*, *Nonlinear Anal-Theor* 75 769-774, 2012.
- [7] F. Durante, J. Fernández-Sánchez, C. Sempi: *A topological proof of Sklar's theorem*, *Applied Mathematics Letters*, 26 945-948, 2013.
- [8] G. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [9] K. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer, 2000.
- [10] M. Fréchet, *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnés*, *Ann. Universidad de Lyon, Science*, 4 13–84, 1951.
- [11] G. A. Fredricks, R. B. Nelsen, J. A. Rodríguez-Lallena, *Copulas with fractal supports*, *Insurance: Mathematics and Economics*, 37 42–48, 2005.
- [12] S.R. Ghorpade, B.V. Limaye, *A Course in Multivariate Calculus and Analysis*, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2000.

-
- [13] J. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*. Indiana University of Mathematics, J., 30:713–747, 1981.
- [14] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [15] A. Klenke, *Probability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [16] T. Kulpa, *On Approximation of Copulas*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 225, 608–623, 1999.
- [17] H. Kunze, D. La Torre, F. Mendivil, E. R. Vrscay, *Fractal Based Methods in Analysis*, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2010.
- [18] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York, 1982.
- [19] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, Nueva York, 2006.
- [20] E.T. Olsen, W.F. Darsow, B. Nguyen, *Copulas and Markov operators*, Proceedings of the Conference on Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., vol. 28, 1996.
- [21] J. J. Quesada-Molina, J. A. Rodríguez-Lallena, M. Úbeda-Flores, *What are copulas?*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, 27, 2003.
- [22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill International Editions, New York, 1987.
- [23] H. Scheffé, *A Useful Convergence Theorem for Probability Distributions*, The Annals of Mathematical Statistics, Volume 18, Number 3 434-438, 1947.
- [24] R.T. Seeley, *Fubini implies Leibniz implies $F_{yx} = F_{xy}$* , The American Mathematical Monthly, 68: 56-57, 1961.
- [25] W. Trutschnig, *On a strong metric on the space of copulas and its induced dependence measure*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 384 690–705, 2011.
- [26] W. Trutschnig, J. Fernández-Sánchez, *Idempotent and multivariate copulas with fractal support*, Journal of Statistical Planning and Inference, 142 3086–3096, 2012.