

# POLINOMIOS DE ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR



Juan Francisco Mañas Mañas

Departamento de Matemáticas

Universidad de Almería

Director:

*Dr. Juan José Moreno Balcázar*

Septiembre 2013

---

## Resumen

En este trabajo se presentará el estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar tipo Sobolev, que es un caso particular de ortogonalidad no estándar. Además, se incluye nuevos resultados que se han obtenido en el caso de que la medida involucrada corresponda al peso Laguerre.



## Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia y a amigos la ayuda y el apoyo recibido durante el desarrollo de este trabajo fin de Máster de Matemáticas. Por supuesto destacar la gran ayuda y labor recibida por parte de mi director de trabajo Juan José Moreno Balcázar, sin su ayuda, sin sus comentarios y sin su paciencia la realización de este trabajo hubiera sido imposible. También agradecer al tribunal la lectura y revisión de este trabajo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teoría básica de polinomios ortogonales</b>	<b>5</b>
2.1. Ortogonalidad . . . . .	5
2.2. Funcionales lineales . . . . .	6
2.3. Relación de recurrencia a 3 términos . . . . .	9
2.4. Propiedades generales de los ceros . . . . .	13
2.5. Series de Fourier de polinomios ortogonales . . . . .	17
<b>3. Polinomios ortogonales clásicos en la recta real</b>	<b>19</b>
3.1. Ecuación diferencial hipergeométrica y fórmula de Rodrigues .	19
3.2. Polinomios ortogonales clásicos y teoremas de caracterización .	23
3.3. Los polinomios de Jacobi . . . . .	31
3.3.1. Asintótica . . . . .	34
3.4. Los polinomios de Laguerre . . . . .	36
3.4.1. Asintótica . . . . .	37
3.5. Los polinomios de Hermite . . . . .	38
<b>4. Polinomios de ortogonalidad no estándar: Polinomios ortogonales de Sobolev</b>	<b>41</b>
4.1. Polinomios ortogonales de Sobolev . . . . .	42
4.1.1. Caso Continuo . . . . .	44
4.1.2. Caso Discreto . . . . .	47
<b>5. Polinomios ortogonales tipo Laguerre-Sobolev</b>	<b>51</b>
5.1. Antecedentes . . . . .	52
5.2. El caso variante . . . . .	53
5.3. Asintótica local . . . . .	62

5.4. Estudio de los ceros . . . . .	71
5.5. Experimentación numérica . . . . .	77



# Índice de figuras

4.1. Polinomio $x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3}$ . . . . .	45
5.1. Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$ . . . . .	78
5.2. Caso $\beta < 2j + \alpha + 1$ . . . . .	78
5.3. Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$ . . . . .	79
5.4. Caso $\beta > 2j + \alpha + 1$ . . . . .	79
5.5. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$ . . . . .	81
5.6. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 6$ . . . . .	81
5.7. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$ . . . . .	82
5.8. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$ . . . . .	82
5.9. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$ . . . . .	83
5.10. Caso $\beta = 2j + \alpha + 1$ y $M = 5$ . . . . .	83



# Índice de cuadros

4.1. Ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (4.6) . . .	46
5.1. Tabla 1 . . . . .	77
5.2. Tabla 2 . . . . .	80
5.3. Tabla 3 . . . . .	80
5.4. Tabla 4 . . . . .	84
5.5. Tabla 5 . . . . .	84



# 1

## Introducción

Este trabajo fin de Máster (TFM) nace con el objetivo de probar una conjetura establecida en [9] sobre la asintótica de una familia de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar no estándar.

Concretamente, se considera el producto escalar no estándar tipo Sobolev

$$(f, g)_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (1.1)$$

donde  $(M_n)_n$  es una sucesión de números positivos verificando ciertas propiedades. Para los polinomios ortogonales con respecto al producto escalar anterior se conoce la denominada asintótica tipo Mehler-Heine en los casos  $j = 0$  y  $j = 1$ . En [9] los autores conjeturan sobre este tipo de asintótica para un  $j$  arbitrario y el objetivo de este TFM es probar dicha conjetura. En el capítulo 5 se establece este resultado que ha sido publicado en [20].

Para llegar a ese objetivo es necesario conocer, al menos, una teoría básica de polinomios ortogonales estándar, así como de polinomios ortogonales de Sobolev. Básicamente un producto escalar tipo Sobolev es un producto escalar que involucra a las derivadas de los polinomios. Esta memoria se divide en capítulos de la siguiente forma.

En el **capítulo 2** se explica una teoría general y básica de los polinomios ortogonales estándar. Se comienza el capítulo recordando que es un producto escalar y algunas propiedades básicas de sucesiones de polinomios ortogonales (SPO). A continuación se obtienen algunas fórmulas importantes que satisfacen los polinomios ortogonales tales como la relación de recurrencia a

tres términos, la fórmula de Christoffel-Darboux o la propiedad reproductora de los polinomios núcleo. Se verá también que los polinomios núcleo son solución de un determinado problema extremal.

La sección 2.4 de este capítulo está dedicada a los ceros polinomios ortogonales. Se estudian sus propiedades básicas y su relación con la integración numérica a través de las fórmulas de cuadratura gaussianas. Por último, incluiremos una sección sobre series de Fourier de polinomios ortogonales.

El **capítulo 3** está dedicado a una clase de polinomios ortogonales estándar que satisfacen ciertas propiedades especiales. Son los denominados polinomios ortogonales clásicos. En la recta real las familias clásicas de polinomios ortogonales corresponden a los siguientes pesos:

- Jacobi:  $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ,  $\alpha, \beta > -1$ ,  $x \in [-1, 1]$ .
- Laguerre:  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ ,  $\alpha > -1$ ,  $x \in [0, \infty)$ .
- Hermite:  $\rho(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

El enfoque de este capítulo se hace a partir de la ecuación diferencial hipergeométrica que van a cumplir las familias clásicas. Se establecerá la fórmula de Rodrigues, se deducirán las 3 familias clásicas en el eje real y se probarán diferentes resultados que caracterizan a estas familias clásicas.

Finalmente para cada familia, se dan algunas de sus propiedades básicas tales como: representación hipergeométrica, ecuación diferencial hipergeométrica, relación de recurrencia a 3 términos, fórmula de Rodrigues, etc. Algunos resultados asintóticos, en especial, fórmulas de Mehler-Heine también serán incluidos pues son necesarios en el capítulo 5. Las demostraciones del capítulo 2 y 3 se presentan de forma detallada.

El **capítulo 4** es una breve introducción a polinomios ortogonales de Sobolev. Los productos ortogonales tipo Sobolev son productos no estándar pues **no** se verifica que  $(xf, g) = (f, xg)$ . En nuestro caso, esto ocurre al aparecer derivadas en el producto escalar. A grandes rasgos, hay dos tipos de productos escalares de Sobolev, el continuo y el discreto.

Presentamos algunos resultados básicos de esta teoría y otros como motivación del capítulo 5.

En el **capítulo 5** es donde se recogen las aportaciones originales de este TFM y que han sido publicadas en [20]. Como se ha dicho al principio, se considera el producto escalar (1.1) y el objetivo fundamental es establecer la asintótica tipo Mehler-Heine de los polinomios ortogonales con respecto a

(1.1) que fue conjeturada en [9]. Dicho resultado es establecido en el Teorema 5.1. Como una consecuencia de este teorema se obtiene la asintótica de los ceros, estableciendo relaciones límite entre los ceros de estos polinomios y los ceros de combinaciones de funciones de Bessel de primera especie. El papel que juega la sucesión  $(M_n)_n$  en esta asintótica también queda establecido.

Finalmente, los resultados del capítulo son ilustrados numéricamente.





## 2

# Teoría básica de polinomios ortogonales

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades básicas y comunes a todas las familias de polinomios ortogonales estándar. Este material nos será muy útil a lo largo de este trabajo. El enfoque de este capítulo puede hacerse de diversas formas. La elegida para el desarrollo de este capítulo es la construcción de sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal. Existe mucha literatura sobre polinomios ortogonales y algunas referencias son [4], [10], [13], [14], [30], [31], [35], [36], etc.

## 2.1. Ortogonalidad

Sea  $\mu$  una función no decreciente en  $(a, b)$ , no constante en  $(a, b)$  y tal que si el intervalo  $(a, b)$  es no acotado, o sea, si  $a = -\infty$ , entonces el  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) > -\infty$  y si  $b = \infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) < \infty$ . Diremos que una función  $f$  pertenece al espacio  $L_\mu^p[a, b]$  si

$$\int_a^b |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

Cuando  $p = 1$  escribiremos simplemente  $f \in L_\mu[a, b]$ .

**Definición 2.1** *Se define el producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  pertenecientes a  $L_\mu^2[a, b]$  como la integral de Stieltjes-Lebesgue*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x). \quad (2.1)$$

**Definición 2.2** Sea  $\mu$  una medida, diremos que dos funciones  $f$  y  $g$  son ortogonales respecto a la distribución  $d\mu$  si

$$(f, g) = 0. \quad (2.2)$$

Si  $\mu$  es absolutamente continua en el intervalo  $(a, b)$ , es decir,  $d\mu(x) = \rho(x)dx$ , el producto escalar (2.1) se puede reescribir como la integral de Stieltjes-Lebesgue

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad (2.3)$$

donde  $\rho$  es una función medible no negativa y donde  $0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty$ . A la función  $\rho$  la llamaremos función peso.

Para finalizar la sección, si consideramos el espacio vectorial  $L_\mu^2(a, b)$ , y el producto escalar definido en (2.1) entonces diremos que la norma de un vector viene dada por la expresión  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Si  $\|f\| = 0$  diremos que  $f$  es el vector nulo y si  $\|f\| = 1$  diremos que  $f$  es un vector ortonormal.

## 2.2. Funcionales lineales

En esta sección estudiaremos propiedades generales de funcionales lineales asociados a una medida.

**Definición 2.3** Un funcional lineal asociado a una medida  $\mu$  viene determinado por una aplicación

$$\mathcal{L} : L_\mu[a, b] \mapsto \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)d\mu(x),$$

satisfaciendo que

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g],$$

para cualesquiera constantes  $a, b \in \mathbb{C}$  y las funciones  $f$  y  $g \in L_\mu[a, b]$ .

La propiedad de ortogonalidad (2.2) se puede reescribir en estos terminos como  $\mathcal{L}[f \cdot g] = 0$  con  $f$  y  $g$  dos funciones pertenecientes a  $L_\mu[a, b]$ .

Se denota por  $\mathbb{P}$  al espacio vectorial de los polinomios y por  $\mathbb{P}_n$  al espacio de los polinomios de grado menor o igual que  $n$ .

A continuación daremos la definición de sucesión de polinomios ortogonales.

**Definición 2.4** Dada una sucesión de polinomios  $(P_n)_n$ , diremos que es una sucesión de polinomios ortogonales (**SPO**) con respecto a  $\mathcal{L}$  si se cumple que:

1.  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$ ,
2.  $\mathcal{L}[P_n P_m] = 0$ ,  $m \neq n$ , para  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,
3.  $\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0$ , para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

Destacar que en el caso  $d\mu(x) = \rho(x)dx$ , siendo  $\rho$  una función peso en  $(a, b)$ , la tercera condición es inmediata. Además se cumple que  $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$ . Por otra parte, si  $\mathcal{L}[P_n^2] = 1$  se dice que la sucesión es ortonormal.

**Teorema 2.1** Sea  $\mathcal{L}$  un funcional lineal y  $(P_n)_n$  una sucesión de polinomios tal que  $gr(P_n) = n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $(P_n)_n$  es una SPO respecto a  $\mathcal{L}$ .
- 2)  $\mathcal{L}[qP_n] = 0$ , para todo polinomio  $q$  de grado  $m < n$ ,  
 $\mathcal{L}[qP_n] \neq 0$  si  $q$  es un polinomio de grado  $n$ .
- 3)  $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{n,m}$ , donde  $K_n \neq 0$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$  y  $\delta_{n,m}$  es la función delta de Kronecker.

**Demostración:** 1)  $\Rightarrow$  2). Como  $P_n$  es un polinomio de grado exactamente  $n$ , el conjunto de polinomios  $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$  es una base del espacio  $\mathbb{P}_m$  de los polinomios de grado a lo sumo  $m$ . Por lo tanto existen  $c_0, c_1, \dots, c_m$  con  $c_m \neq 0$ , tales que

$$q(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x).$$

Por la linealidad de  $\mathcal{L}$  y por la Definición 2.4 se tiene que  $\mathcal{L}[qP_n] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[P_k P_n] = \sum_{k=0}^m c_k \delta_{k,n} = 0$ , para todo  $m < n$ . Y para  $m = n$ ,  $\mathcal{L}[qP_n] = c_n \mathcal{L}[P_n^2] \neq 0$ .

2)  $\Rightarrow$  3) Es suficiente considerar  $q(x) = x^m$  en 2).

3)  $\Rightarrow$  1) Para probar esto es suficiente con tener en cuenta que  $P_m$  es un polinomio de grado exactamente  $m$  y se puede escribir en la base canónica de  $\mathbb{P}_m$  como  $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$  con  $c_m \neq 0$ . Vamos a analizar  $\mathcal{L}[P_m P_n]$  con  $m \neq n$ . Entonces  $m < n$  ó  $n < m$ . Por comodidad, tomamos  $m < n$ , el otro

caso se probaría de forma análoga. Ahora utilizando la linealidad de  $\mathcal{L}$  y 3) se tiene

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^m c_k x^k P_n \right] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[x^k P_n] = \sum_{k=0}^m c_k K_n \delta_{k,n} = 0, \quad m < n.$$

Para  $m = n$ ,

$$\mathcal{L}[P_n^2] = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n c_k x^k P_n \right] = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[x^k P_n] = c_n \mathcal{L}[x^n P_n] = c_n K_n \neq 0.$$

□

**Teorema 2.2** *Sea  $(P_n)_n$  una SPO respecto a  $\mathcal{L}$ . Entonces, para cualquier polinomio  $q$  de grado  $n$  se tiene que*

$$q(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{donde} \quad c_k = \frac{\mathcal{L}[q P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}.$$

A los coeficientes  $c_k$  de este desarrollo se le denominan **coeficientes de Fourier** de  $q$  en la base  $\{P_0, \dots, P_n\}$  de  $\mathbb{P}_n$ . Por otra parte, cada polinomio  $P_n$  de la SPO está determinado de manera única, salvo un factor multiplicativo.

**Demostración:** Veamos que  $\{P_0, \dots, P_n\}$  son una base de  $\mathbb{P}_n$ . Para ello será suficiente ver que son linealmente independientes.

Sea  $\alpha_0 P_0(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) = 0$ , multiplicamos por el polinomio  $P_k(x)$  con  $k$  fijo y  $k \in \{0, \dots, n\}$ , entonces

$$\alpha_0 P_0(x) P_k(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) P_k(x) = 0.$$

Aplicando el funcional lineal  $\mathcal{L}$  a la expresión anterior

$$\begin{aligned} \alpha_0 \mathcal{L}[P_0(x) P_k(x)] + \dots + \alpha_n \mathcal{L}[P_n(x) P_k(x)] &= \mathcal{L}[0] \\ \Rightarrow \alpha_k &= 0, \quad \text{con} \quad k \in \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\{P_0, \dots, P_n\}$  son base de  $\mathbb{P}_n$  y cualquier polinomio  $q$  con  $gr(q) = n$  se puede escribir como

$$q(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x).$$

Si multiplicamos por  $P_j$  con  $j \in \{0, \dots, n\}$  y aplicamos el funcional lineal nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[qP_j] &= \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n c_k P_k P_j \right] \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[P_k P_j] \\ &= c_j \mathcal{L}[P_j^2] \Rightarrow c_j = \frac{\mathcal{L}[qP_j]}{\mathcal{L}[P_j^2]}, \quad \text{con } j = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Demostremos ahora la unicidad, salvo factor multiplicativo, de los polinomios  $P_n$ . Supongamos que existe otro polinomio  $Q_n$ , de grado exactamente  $n$ , ortogonal a los polinomios  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ . Entonces,  $\mathcal{L}[P_k Q_n] = 0$  para todo  $k < n$ , y por tanto, todos los coeficientes de Fourier de  $Q_n$  son iguales a cero excepto el coeficiente  $c_n$ , luego  $Q_n = c_n P_n(x)$ .  $\square$

## 2.3. Relación de recurrencia a 3 términos

**Teorema 2.3** *Sea  $(P_n)_n$  una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal  $\mathcal{L}$ . Entonces la SPO  $(P_n)_n$  satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \quad (2.4)$$

*Generalmente se suele imponer que  $P_{-1}(x) = 0$  y  $P_0(x) = 1$ , con lo que una SPO queda determinada de forma única conocidas las sucesiones  $(\alpha_n)_n$ ,  $(\beta_n)_n$  y  $(\gamma_n)_n$ .*

**Demostración:** Por el Teorema 2.2 el polinomio  $xP_n(x)$  es de grado  $n+1$  y se puede desarrollar como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x), \quad c_k = \frac{\mathcal{L}[xP_n P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}.$$

Puesto que  $(P_n)_n$  es una SPO, se tiene  $c_k = 0$  cuando  $0 \leq k < n - 2$ . Por tanto, se concluye que la SPO satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x),$$

donde los coeficientes  $\alpha_n, \beta_n$  y  $\gamma_n$  se expresan mediante las fórmulas

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n P_{n+1}]}{\mathcal{L}[P_{n+1}^2]}, \quad \beta_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}, \quad \gamma_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n P_{n-1}]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}. \quad (2.5)$$

□

**Teorema 2.4 (Fórmula de Christoffel-Darboux)** *Si  $(P_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales que satisface la relación de recurrencia a tres términos. Entonces se cumple que*

$$K_n(x, y) := \sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{d_n^2(x - y)}, \quad n \geq 1,$$

donde  $d_n^2 = \mathcal{L}[P_n^2]$  es el cuadrado de la norma del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal  $P_n$  respecto  $\mathcal{L}$ .

**Demostración:** Escribimos la relación de recurrencia a tres términos de  $(P_n)_n$  en las variables  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned} xP_m(x) &= \alpha_m P_{m+1}(x) + \beta_m P_m(x) + \gamma_m P_{m-1}(x), \\ yP_m(y) &= \alpha_m P_{m+1}(y) + \beta_m P_m(y) + \gamma_m P_{m-1}(y), \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $\alpha_n, \beta_n$  y  $\gamma_n$  vienen determinados por (2.5). Multiplicando la primera ecuación por  $P_m(y)$ , y la segunda por  $P_m(x)$  y restando se tiene que

$$\begin{aligned} (x - y)P_m(x)P_m(y) &= \alpha_m P_{m+1}(x)P_m(y) + \beta_m P_m(x)P_m(y) + \gamma_m P_{m-1}(x)P_m(y) \\ &\quad - \alpha_m P_{m+1}(y)P_m(x) - \beta_m P_m(y)P_m(x) - \gamma_m P_{m-1}(y)P_m(x) \\ &= \alpha_m (P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)) \\ &\quad + \gamma_m (P_{m-1}(x)P_m(y) - P_{m-1}(y)P_m(x)). \end{aligned}$$

Dividiendo por  $d_m^2$  se tiene que

$$(x - y) \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2} = A_m - A_{m-1},$$

con

$$A_m = \frac{\alpha_m}{d_m^2} (P_{m+1}(x)P_m(y) - P_{m+1}(y)P_m(x)).$$

Y para terminar solo hay que realizar  $\sum_{m=0}^n (A_m - A_{m-1})$  y tener en cuenta que nos encontramos ante una suma telescópica, luego se anulan todos los términos menos el término  $A_n$ . Y con esto obtenemos el resultado buscado, donde hemos asumido que  $P_{-1}(x) = 0$  en el término  $A_{-1}$ .  $\square$

Una vez vista la fórmula de Christoffel-Darboux vamos a pasar a ver un par de consecuencias directas del uso de esta fórmula.

**Corolario 2.1 (Fórmula confluyente de Christoffel-Darboux)**

$$K_n(x, x) = \sum_{m=0}^n \frac{P_m^2(x)}{d_m^2} = \frac{\alpha_n}{d_n^2} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x)), \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

**Demostación:** Para demostrar el resultado solo hay que sumar y restar  $P_{n+1}(x)P_n(x)$  y recordar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \quad (2.7)$$

Vamos a calcular el siguiente límite,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} K_n(x, y) &= \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{\alpha_n}{d_n^2} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y} \right) \\ &= \frac{\alpha_n}{d_n^2} \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(x)P_n(x)}{x - y} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_n}{d_n^2} \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{P_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y} \right) \\ &= -\frac{\alpha_n}{d_n^2} P_{n+1}(x) \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_n}{d_n^2} P_n(x) \lim_{y \rightarrow x} \left( \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)}{x - y} \right) \\ &= \frac{\alpha_n}{d_n^2} (-P_{n+1}(x)P'_n(x) + P_n(x)P'_{n+1}(x)). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 2.1 (Propiedad reproductora de los núcleos)** *Los polinomios núcleos satisfacen la siguiente propiedad*

$$\mathcal{L}[p(x)K_n(x, y)] = p(y), \quad \forall p(x) \in \mathbb{P}_n.$$

**Demostración:** Por el Teorema 2.2 podemos escribir  $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$ . Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n c_k P_k(x) \sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{d_m^2} \right] &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \frac{c_k P_m(y)}{d_m^2} \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] \\ &= \sum_{k=0}^n c_k P_k(y) = p(y). \quad \square \end{aligned}$$

**Definición 2.5** *Sea  $(a, b)$  un intervalo. Diremos que un funcional es definido positivo en  $(a, b)$  si  $\mathcal{L}[p] > 0$  para cualquier polinomio  $p$  no negativo y no idénticamente nulo en  $(a, b)$ . Al mayor conjunto  $(a, b)$  tal que  $\mathcal{L}$  sea definido positivo en él se le denomina soporte de  $\mathcal{L}$ .*

Para finalizar esta sección veremos que los polinomios núcleos son solución de un problema extremal.

**Teorema 2.5** *Sea  $\mathcal{L}$  un funcional definido positivo con soporte  $(a, b)$ . Sea  $\Pi_n = \{p \in \mathbb{P}_n / p(x_0) = 1, x_0 \in (a, b)\}$ . Entonces,*

$$\min_{p \in \Pi_n} \mathcal{L}[p^2] = \frac{1}{K_n(x_0, x_0)},$$

*y se alcanza para  $p_{\min}(x) = K_n(x, x_0)/K_n(x_0, x_0)$ .*

**Demostración:** Usando el Teorema 2.2 tenemos que  $p(x)$  se puede escribir como  $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)/d_k$ . Además es claro que  $\mathcal{L}[p^2] = \sum_{k=0}^n c_k^2$  ya que  $d_k^2 = \mathcal{L}[P_k^2]$ . Usando que  $p(x_0) = 1$ , tenemos que

$$1 = p(x_0) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x_0)/d_k. \quad (2.8)$$



Si ahora elevamos al cuadrado la expresión (2.8) y usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$1 \leq \left( \sum_{k=0}^n c_k^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x_0)^2}{d_k^2} \right) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \geq \left( \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x_0)^2}{d_k^2} \right)^{-1} = (K_n(x_0, x_0))^{-1}.$$

Claramente se tiene la igualdad si

$$c_k = \frac{P_k(x_0)}{d_k} \frac{1}{K_n(x_0, x_0)} \Rightarrow$$

$$c_k^2 = \frac{P_k^2(x_0)}{d_k^2} \frac{1}{K_n^2(x_0, x_0)} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 = \frac{1}{K_n^2(x_0, x_0)} \sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x_0)}{d_k^2} = \frac{K_n(x_0, x_0)}{K_n^2(x_0, x_0)} = \frac{1}{K_n(x_0, x_0)},$$

donde hemos usado la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux dada en el Corolario 2.1. Entonces,

$$\min_{p \in \Pi_n} \mathcal{L}[p^2] = \min_{p \in \Pi_n} \sum_{k=0}^n c_k^2 = (K_n(x_0, x_0))^{-1},$$

y el

$$p_{\min}(x) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{P_k(x)}{d_k} = \frac{1}{K_n(x_0, x_0)} \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x_0)}{d_k^2} P_k(x) = \frac{K_n(x, x_0)}{K_n(x_0, x_0)}. \quad \square$$

## 2.4. Propiedades generales de los ceros

En esta parte del capítulo vamos a hablar sobre algunos resultados generales relativos a ceros de polinomios ortogonales.

**Teorema 2.6** *Sea  $(a, b)$  el soporte de  $\mathcal{L}$  definido positivo y  $(P_n)_n$  una SPO respecto a  $\mathcal{L}$ . Entonces:*

1. *Todos los ceros de  $P_n$  son reales, simples y se encuentran en  $(a, b)$ .*

2.  $P_n$  y  $P_{n+1}$  no tienen ningún cero en común.
3. Denotemos por  $x_{n,j}$  a los ceros del polinomio  $P_n$  en orden creciente,  $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ . Entonces  $x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1}$ , con  $j = 1, \dots, n$ , es decir, los ceros de  $P_n$  y  $P_{n+1}$  están entrelazados.

**Demostración:** Vamos a demostrar cada apartado.

1. Para  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{L}[P_n \cdot 1] = 0$ , ello indica que  $P_n$  cambia de signo en  $(a, b)$ . Denotemos por  $x_1, x_2, \dots, x_k$  los ceros de  $P_n$  de multiplicidad impar que están en el interior de  $(a, b)$  y sea  $p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k)$ . Es evidente que  $p(x)P_n(x) > 0$ , en  $(a, b)$ . Luego  $\mathcal{L}[pP_n] > 0$ , y por tanto  $gr(p) = k \geq n$ . Pero  $k$  es el número de ceros de  $P_n$  por lo que  $k \leq n$ . Con ello se concluye que  $k = n$  y por tanto los ceros de  $P_n$  son simples, reales y están en  $(a, b)$ .
2. Por reducción al absurdo, supongamos que  $x_0$  es un cero de  $P_n$  y  $P_{n+1}$ . Entonces evaluando en la relación de recurrencia a tres términos (2.4) también sería una raíz de  $P_{n-1}$ . Si continuamos este proceso llegaríamos a decir que la raíz  $x_0$  es una raíz de  $P_0(x) = 1$  y esto obviamente no es posible.
3. Evaluando  $x_{n+1,j}$  en (2.6) se obtiene que  $P'_{n+1}(x_{n+1,j})P_n(x_{n+1,j}) > 0$  ó  $P'_{n+1}(x_{n+1,j})P_n(x_{n+1,j}) < 0$  en función del signo de  $\alpha_n$ . Vamos a considerar que  $P'_{n+1}(x_{n+1,j})P_n(x_{n+1,j}) > 0$  por comodidad, ya que se razonaría de forma análoga en el otro caso. Al ser  $x_{n+1,j}$  y  $x_{n+1,j+1}$  dos ceros consecutivos del polinomio  $P_{n+1}$ , por el teorema de Rolle  $P'_{n+1}$  se anula al menos una vez en el interior del intervalo formado por  $x_{n+1,j}$  y  $x_{n+1,j+1}$ . Ahora bien, al ser los ceros de  $P_{n+1}$  simples, los signos de  $P'_{n+1}(x_{n+1,j})$  y  $P'_{n+1}(x_{n+1,j+1})$  son no nulos y distintos por lo que de la desigualdad obtenida se deduce que los signos de  $P_n(x_{n+1,j})$  y  $P_n(x_{n+1,j+1})$  también son no nulos y distintos entre sí. Luego, por el teorema de Bolzano nos asegura que  $P_n$  se anula al menos una vez en dicho intervalo. Pero hay precisamente  $n$  intervalos, por lo tanto hay un único cero entre dos ceros consecutivos de  $P_{n+1}$ .  $\square$

Los ceros de los polinomios ortogonales juegan un papel importante en las fórmulas de integración numérica conocidas como fórmulas de cuadratura

gaussianas. El objetivo de una cuadratura gaussiana es calcular numéricamente una integral de la forma  $\int_a^b f(x)d\mu(x)$ , con  $f \in L_\mu(a, b)$ . Se puede aproximar de la forma:

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) \simeq \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}f(x_k), \quad (2.9)$$

buscando que esta sea exacta cuando  $f(x)$  sea un polinomio de grado a lo sumo  $2n - 1$ , con  $n \geq 1$ . El tipo de fórmulas (2.9) determinan las cuadraturas gaussianas.

Para probar que existe una fórmula del tipo anterior vamos a definir un polinomio  $Q_m(x) = x^j P_n(x)$ , con  $j < n$  y  $P_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ , con  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ . Así  $Q_m \in \mathbb{P}_{2n-1}$ . Sustituyendo  $Q_m$  en (2.9) obtenemos que

$$\int_a^b Q_m(x)d\mu(x) = \int_a^b x^j P_n(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} x_k^j P(x_k) = 0, \quad j < n. \quad (2.10)$$

Esto implica que los polinomios  $P_n$  son ortogonales respecto a la medida  $\mu$  siendo  $x_k$  con  $k = 1, 2, \dots, n$ , sus ceros.

Por tanto, hemos obtenido el siguiente resultado

**Teorema 2.7** *Dada una medida  $\mu$  en  $(a, b)$ , existen ciertos números  $(\lambda_{nk})_{k=1}^n$ , tales que la fórmula de cuadratura*

$$\int_a^b q(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}q(x_k), \quad n \geq 1, \quad (2.11)$$

*es exacta para cualquier polinomio  $q \in \mathbb{P}_{2n-1}$  de grado a lo sumo  $2n - 1$ , siendo los  $x_k, k = 1, 2, \dots, n$  los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $d\mu$ .*

Ya solo falta dar una expresión de los  $(\lambda_{nk})_{k=1}^n$ , y para ello sustituimos el polinomio  $q(x) = P_n(x)P_{n-1}(x)/(x - x_k)$  en (2.11) para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Con esta expresión de  $q(x)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_k} q(x) &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{P_n(x)P_{n-1}(x)}{x - x_k} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{P_n(x)P_{n-1}(x) - P_n(x_k)P_{n-1}(x) + P_n(x_k)P_{n-1}(x)}{x - x_k} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{P_n(x)P_{n-1}(x) - P_n(x_k)P_{n-1}(x) + 0}{x - x_k} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{P_n(x) - P_n(x_k)}{x - x_k} P_{n-1}(x) \\
&= P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Además también se tiene que si  $P_n(x) = a_n x^n + \dots$ , entonces  $\frac{P_n(x)}{x - x_k} = a_n/a_{n-1}P_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)$ , donde  $\text{gr}(q_{n-2}) \leq n - 2$ .

En primer lugar vamos a calcular la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_k} P_{n-1}(x) d\mu(x) &= \int_a^b \left( \frac{a_n}{a_{n-1}} P_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) \right) P_{n-1}(x) d\mu(x) \\
&= \int_a^b \frac{a_n}{a_{n-1}} P_{n-1}^2(x) d\mu(x) + \int_a^b P_{n-1}(x) q_{n-2}(x) d\mu(x) \\
&= (\alpha_{n-1})^{-1} d_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

donde hemos usado las fórmulas ([4, f. (2.8)]) donde nos dicen que  $\alpha_n = a_n/a_{n+1}$ , la ortogonalidad de  $P_{n-1}$  y la definición de  $d_n$ .

Entonces, aplicando (2.11) al polinomio  $q(x)$  se obtiene usando (2.12)

$$\begin{aligned}
\int_a^b q(x) d\mu(x) &= \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_k} P_{n-1}(x) d\mu = \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} q(x_j) \\
&= \lambda_{nk} q(x_k) = \lambda_{nk} P'_n(x_k) P_{n-1}(x_k).
\end{aligned}$$

Despejando  $\lambda_{nk}$  tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{nk} &= \frac{1}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_k} P_{n-1}(x) d\mu(x) \\
&= \frac{\alpha_{n-1}^{-1} d_{n-1}^2}{P'_n(x_k)P_{n-1}(x_k)} = \frac{1}{K_{n-1}(x_k, x_k)}.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos utilizado el valor de la integral anterior y en la última igualdad la fórmula confluyente de Christoffel-Darboux.

Los números  $\lambda_{nk}$  son conocidas como constantes de Christoffel. Para más información sobre fórmulas de cuadratura gaussianas se puede consultar [13] y también [25].

## 2.5. Series de Fourier de polinomios ortogonales

Las series de Fourier son muy importantes en diversas aplicaciones. Por ello en este apartado vamos a considerar brevemente las series de Fourier de polinomios ortogonales en el espacio  $L^2_\mu[a, b]$ , es decir, trabajaremos en el espacio de las funciones  $f$  tales que

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty.$$

Consideraremos el desarrollo de cualquier función  $f \in L^2_\mu[a, b]$  en la correspondiente serie de Fourier de polinomios ortonormales, es decir, el desarrollo de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x), \quad a_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_n(x) d\mu(x), \quad \|p_n\| = 1.$$

Los coeficientes  $a_n$  del desarrollo anterior se denominan coeficientes de Fourier de la función  $f$ . Se denotará por  $s_n(x)$  a la suma parcial de la serie anterior,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x).$$

**Teorema 2.8** *Sea  $\mathbb{P}_n$  el espacio de los polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Entonces el  $\min_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2$  y se alcanza cuando  $q(x) = s_n(x)$ .*

**Demostración:** Sea  $q \in \mathbb{P}_n$ . Entonces por el Teorema 2.2 tenemos que  $q(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x)$  y por tanto,

$$(q, q) = \left( \sum_{k=0}^n c_k p_k(x), \sum_{m=0}^n c_m p_m(x) \right) = \sum_{k=0}^n c_k^2,$$

$$(f, q) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x), \sum_{m=0}^n c_m p_m(x) \right) = \sum_{k=0}^n a_k c_k.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f - q\|^2 &= \|f\|^2 - 2\langle f, q \rangle + \|q\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=0}^n c_k^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\|f - q\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2$ . Luego el mínimo de la norma  $\|f - q\|^2$  sobre el espacio de los polinomios  $\mathbb{P}_n$  es  $\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2$  que corresponde al caso cuando  $c_k = a_k$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ , es decir cuando  $q(x) = s_n(x)$ , tal y como se quería demostrar.  $\square$

Este teorema se puede reformular como:

**Teorema 2.9** *Dada una función de  $L^2_\mu[a, b]$ , la mejor aproximación de  $f$  mediante una serie de polinomios es aquella correspondiente a los polinomios ortogonales respecto a  $d\mu$ .*

Una consecuencia del teorema anterior es la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=0}^n a_k^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \leq \|f\|^2,$$

de donde se deduce también que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

# 3

## Polinomios ortogonales clásicos en la recta real

Una vez visto una introducción a la teoría general de polinomios ortogonales vamos a centrarnos en estudiar propiedades que satisfacen los denominados polinomios ortogonales clásicos. Las familias clásicas como veremos son las familias de Jacobi, Laguerre y Hermite. Se prestará especial atención a las propiedades de los polinomios de Laguerre ya que nuestro objetivo es estudiar en el último capítulo de esta memoria un caso particular de polinomios tipo Laguerre, ortogonales con respecto a un producto escalar tipo Sobolev. En general, en este capítulo seguiremos las referencias [4] y [35].

### 3.1. Ecuación diferencial hipergeométrica y fórmula de Rodrigues

En esta sección vamos a comenzar estudiando la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios ortogonales clásicos. Estos verifican que

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda_n y = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma$  y  $\tau$  son polinomios de grados a lo sumo 2 y 1, respectivamente, y  $\lambda_n \neq 0$  no depende de  $x$ . Esta ecuación usualmente se denomina *ecuación diferencial hipergeométrica*, pues esta ecuación tiene la propiedad de la hipergeometricidad, que consiste en que si  $y$  es solución de (3.1) entonces su  $m$ -ésimas derivadas, que denotaremos por  $y^{(m)} \equiv y_m$ , satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$\sigma(x)y_m'' + \tau_m(x)y_m' + \mu_m y_m = 0, \quad (3.2)$$

con

$$\begin{aligned} \tau_m(x) &= \tau(x) + m\sigma'(x), \\ \mu_m(\lambda_n) &= \lambda_n + \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i'(x) = \lambda_n + m\tau'(x) + m(m-1)\frac{\sigma''(x)}{2}. \end{aligned}$$

Este resultado se puede probar usando inducción (ver [4]).

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) pueden escribirse en forma *simétrica* o *autoadjunta*:

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0, \quad [\sigma(x)\rho_m(x)y_m']' + \mu_m\rho_m(x)y_m = 0, \quad (3.3)$$

donde  $\rho$  y  $\rho_m$  son funciones de simetrización que satisfacen las ecuaciones diferenciales de Pearson:

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad [\sigma(x)\rho_m(x)]' = \tau_m(x)\rho_m(x). \quad (3.4)$$

Entonces de (3.4) tenemos, por una parte que

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)}, \quad (3.5)$$

y por otra

$$\begin{aligned} (\sigma(x)\rho_m(x))' &= (\tau(x) + m\sigma'(x))\rho_m(x) \Rightarrow \\ \frac{\rho_m'(x)}{\rho_m(x)} &= \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)} + \frac{m\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} + m\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado (3.5).

Integrando obtenemos  $\rho_m(x) = C\sigma^m(x)\rho(x)$ , y normalizando con  $C = 1$  se tiene que

$$\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x). \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.3) junto con (3.6) nos van a ayudar a establecer el siguiente resultado.



**Teorema 3.1 (Fórmula de Rodrigues)** *Las soluciones polinómicas de (3.2) se expresan mediante la fórmula*

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{A_{nm}B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (\rho_n(x)). \quad (3.7)$$

donde  $B_n = P_n^{(n)}/A_{nn}$ , y

$$A_{nm} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} [\tau'(x) + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''(x)].$$

Además, el autovalor  $\mu_m$  de (3.2) es

$$\mu_m := \mu_m(\lambda_n) = -(n-m)[\tau'(x) + \frac{1}{2}(n+m-1)\sigma''(x)].$$

**Demostración:** Para demostrar el teorema vamos a escribir la ecuación autoadjunta (3.4) para las derivadas como

$$\rho_m(x)y_m = -\frac{1}{\mu_m}(\sigma(x)\rho_m(x)y_m') = -\frac{1}{\mu_m}[\rho_{m+1}(x)y_{m+1}]',$$

donde hemos usado (3.6).

Por tanto,

$$\begin{aligned} \rho_m(x)y_m &= \frac{-1}{\mu_m}(\rho_{m+1}(x)y_{m+1})' = \frac{-1}{\mu_m} \frac{-1}{\mu_{m+1}}(\rho_{m+2}(x)y_{m+2})'' \\ &= \frac{-1}{\mu_m} \frac{-1}{\mu_{m+1}} \dots \frac{-1}{\mu_{n-1}}(\rho_n(x)y_n)^{(n-m)}. \end{aligned}$$

Notando

$$\begin{aligned} A_{nj} &= (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} \mu_k(\lambda_n), \quad j \geq 1, \\ A_{n0} &= 1, \end{aligned}$$

la anterior expresión se reescribe como

$$\rho_m(x)y_m = \frac{A_{nm}}{A_{nn}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (\rho_n(x)y_n). \quad (3.8)$$

Como buscamos soluciones polinomicas,  $y \equiv P_n$ , tenemos que  $P_n^{(n)}$  es una constante, y (3.8) se convierte en

$$\begin{aligned}\rho_m(x)P_n^{(m)}(x) &= \frac{A_{nm}}{A_{nn}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(\rho_n P_n^{(n)}(x)) \\ \Rightarrow P_n^{(m)}(x) &= \frac{A_{nm}}{A_{nn}\rho_m(x)} P_n^{(n)}(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(\rho_n(x)).\end{aligned}$$

Usando de nuevo que  $P_n^{(n)}(x)$  es una constante, entonces de la ecuación diferencial que satisface se deduce que  $\mu_{nn} = \mu_n(\lambda_n) = 0$ . Esto implica que

$$\begin{aligned}\lambda_n + n\tau'(x) + n(n-1)\frac{\sigma''(x)}{2} &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_n &= -n\tau'(x) - n(n-1)\frac{\sigma''(x)}{2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Así,

$$\begin{aligned}\mu_k(\lambda_n) &= -n\tau'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x) + k\tau'(x) + \frac{k(k-1)}{2}\sigma''(x) \\ &= -(n-k)(\tau'(x) + \frac{n+k-1}{2}\sigma''(x)).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de  $A_{nj}$  para  $j \geq 1$  se tiene que

$$\begin{aligned}A_{nj} &= (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} \mu_{nk} = (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} \mu_k(\lambda_n) \\ &= (-1)^j (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} (n-k) \left( \tau'(x) + \frac{n+k-1}{2}\sigma''(x) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-j)!} \prod_{k=0}^{j-1} \left( \tau'(x) + \frac{n+k-1}{2}\sigma''(x) \right).\end{aligned}$$

Por tanto, notando  $B_n = \frac{P_n^{(n)}(x)}{A_{nn}}$ , obviamente independiente de la variable  $x$ , se tiene

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{A_{nm}B_n}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(\rho_n(x)).$$

como queríamos demostrar.  $\square$

**Nota:** En la demostración hemos usado que  $\mu_j(\lambda_n) \neq 0$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . De las expresiones (3.9) y (3.10) se deduce que esto equivale a suponer que  $\lambda_n \neq 0$  para  $n = 0, 1, \dots$

La fórmula de Rodrigues es muy importante y tiene muchas consecuencias en la estructura de los polinomios ortogonales. Por ejemplo, una consecuencia directa de la fórmula de Rodrigues es que  $\tau(x)$  debe de ser un polinomio de grado 1 exactamente. Si calculamos el polinomio de grado 1 y utilizamos la fórmula de Rodrigues obtenemos que

$$P_1(x) = \frac{A_{10}B_1}{\rho_0(x)}(\rho_1(x))' = \frac{B_1}{\rho(x)}(\sigma(x)\rho(x))' = \frac{B_1}{\rho(x)}\tau(x)\rho(x) = B_1\tau(x),$$

y por tanto se cumple lo dicho anteriormente.

Por otra parte, si en el anterior resultado tomamos  $m = 0$  se obtiene

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\sigma^n(x)\rho(x)),$$

conocida como la fórmula de Rodrigues para los polinomios ortogonales.

## 3.2. Polinomios ortogonales clásicos y teoremas de caracterización

Veamos ciertos teoremas y definiciones que caracterizan a las familias de polinomios ortogonales clásicos. A partir de estas caracterizaciones deduciremos cada una de las familias clásicas y para cada una de estas familias veremos algunas de sus propiedades fundamentales.

**Definición 3.1** *Sea una sucesión de polinomios ortogonales  $(P_n)_n$ . Se dice que  $(P_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales clásica si la sucesión de sus derivadas  $(P'_n)_n$  es ortogonal.*

Otra definición, que veremos es equivalente, es

**Definición 3.2** *Sea  $\sigma$  y  $\tau$  dos polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, con ceros reales y distintos y sea  $\rho$  una función tal que*

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x), \quad \left| \int_a^b x^k \rho(x) dx \right| < +\infty,$$

donde  $(a, b)$  es cierto intervalo de la recta real tal que  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in (a, b)$ . Diremos que una familia de polinomios ortogonales  $(P_n)_n$  es clásica si es ortogonal respecto a la función  $\rho$  solución de la ecuación anterior.

Teniendo en cuenta que hemos probado que  $\tau(x)$  es un polinomio de grado exactamente 1, es decir,  $\tau(x) = Ax + B$ , entonces tenemos tres posibilidades, salvo factores multiplicativos, según los tres grados que puede tomar el polinomio  $\sigma(x)$ :

1. **Grado 2:**  $\Rightarrow \sigma(x) = (x - a)(b - x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Haciendo el cambio  $x = (b - a)/2t + (a + b)/2$  obtenemos:

$$\sigma(t) = \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 (1 - t^2), \quad t \in [-1, 1].$$

Sin factor multiplicativo, podemos tomar  $\sigma(t) = 1 - t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

2. **Grado 1:**  $\sigma(x) = x - a$ ,  $x \in [a, \infty)$ . Con el cambio lineal  $x = a - tA$  y sin factores multiplicativos tenemos  $\sigma(t) = t$ ,  $t \in [0, +\infty)$ .
3. **Grado 0:**  $\sigma(x) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

CASO 1: Después de los cambios de variable y salvo factores multiplicativos tenemos que  $\tau(x) = Ax + B$  y  $\sigma(x) = 1 - x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Si partimos de la ecuación diferencial de Pearson (3.4), tenemos que despejar  $\rho$  para conocer respecto que medida.

$$\begin{aligned} (\sigma(x)\rho(x))' &= \tau(x)\rho(x) \\ \sigma'(x)\rho(x) + \sigma(x)\rho'(x) &= \tau(x)\rho(x) \\ \sigma(x)\rho'(x) &= (\tau(x) - \sigma'(x))\rho(x) \\ \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} &= \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)} \\ \log(\rho(x)) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx - \log(\sigma(x)) \\ \log(\sigma(x)\rho(x)) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por tanto será integrable cuando  $\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx$  lo sea, y para este primer caso tenemos que

$$\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx = \int \frac{Ax + B}{(1-x)(1+x)} dx = -\frac{A+B}{2} \log(1-x) - \frac{A-B}{2} \log(1+x) + C$$

y despejando  $\rho(x)$

$$\rho(x) = C_1(1-x)^{-(A+B)/2-1}(1+x)^{-(A-B)/2-1}, \quad C_1 > 0,$$

y si definimos  $\alpha = -(A+B)/2 - 1$  y  $\beta = -(A-B)/2 - 1$  tenemos que, sin considerar factores multiplicativos en el peso, la familia esta generada por

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 - x^2, \\ \tau(x) &= -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha, \\ \rho(x) &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \text{con } \alpha, \beta > -1, \end{aligned}$$

para que el peso sea integrable.

Estas funciones darán lugar a los polinomios clásicos de **JACOBI**.

CASO 2: Después de los cambios de variables realizados anteriormente, y procediendo como en el caso 1 desde la ecuación de Pearson, obtenemos (3.11) y ahora

$$\begin{aligned} \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx &= \int \frac{-x + C}{x} dx = -x + C \log(x) + D \Rightarrow \\ \Rightarrow x\rho(x) &= D_1 e^{-x} x^C \Rightarrow \rho(x) = D_1 e^{-x} x^{C-1}. \end{aligned}$$

Y realizando el cambio  $\alpha = C - 1$  y sin considerar factores multiplicativos en el peso, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \\ \tau(x) &= -x + \alpha + 1, \\ \rho(x) &= x^\alpha e^{-x}, \quad \text{con } \alpha > -1, \end{aligned}$$

para que el peso sea integrable. Estas funciones son las que nos dan la familia clásica de **LAGUERRE**.

CASO 3: Razonamos como en los casos anteriores:

$$\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx = \int -2x dx = -x^2 + E \Rightarrow \rho(x) = E_1 e^{-x^2}, \quad E_1 > 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1, \\ \tau(x) &= -2x, \\ \rho(x) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Estas funciones son las que nos dan la familia clásica de **HERMITE**.

Es importante observar que las tres familias clásicas anteriores verifican:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^k \sigma(x) \rho(x) = \lim_{x \rightarrow b} x^k \sigma(x) \rho(x) = 0, \quad (3.12)$$

donde  $(a, b)$  es el soporte de  $\rho(x)$ .

**Proposición 3.1** *Si  $(P_n)_n$  es una familia clásica de polinomios ortogonales según la Definición 3.2, entonces la sucesión  $(P'_n)_n$  es una familia de polinomios ortogonales respecto al peso  $\sigma(x)\rho(x)$ .*

**Demostración:** Como la familia  $(P_n)_n$  es ortogonal tenemos para todo  $k < n$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b P_n(x) x^{k-1} \tau(x) \rho(x) dx = \int_a^b P_n(x) x^{k-1} (\sigma(x) \rho(x))' dx \\ &= P_n(x) x^{k-1} \rho(x) \sigma(x) \Big|_a^b - \int_a^b (P_n(x) x^{k-1})' \sigma(x) \rho(x) dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación de Pearson dada en (3.4), que el grado de  $\tau$  es 1 e integración por partes. Si ahora usamos la condición (3.12) tenemos que

$$0 = \int_a^b P'_n(x) x^{k-1} (\sigma(x) \rho(x)) dx + (k-1) \int_a^b P_n(x) x^{k-2} \sigma(x) \rho(x) dx, \quad k < n.$$

Usando la ortogonalidad de  $(P_n)_n$  tenemos que la última integral se anula y por tanto,

$$\int_a^b P'_n(x) x^{k-1} (\sigma(x) \rho(x)) dx = 0, \quad k < n.$$

Así  $(P'_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales respecto a  $\sigma(x)\rho(x)$ .  $\square$

**Corolario 3.1** Si  $(P_n)_n$  es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) clásica entonces  $(P'_n)_n$  también es una SPO clásica.

**Demostración:** Por la Proposición 3.1  $(P'_n)_n$  es ortogonal respecto a  $\rho_1 = \sigma(x)\rho(x)$ . Además,

$$\begin{aligned} (\sigma(x)\rho_1(x))' &= \sigma'(x)\rho_1(x) + \sigma(x)(\sigma(x)\rho(x))' \\ &= \sigma'(x)\sigma(x)\rho(x) + \sigma(x)\tau(x)\rho(x) \\ &= (\sigma'(x) + \tau(x))\sigma(x)\rho(x) \\ &= \tau_1(x)\rho_1(x), \end{aligned}$$

con  $gr(\tau_1) = 1$ .  $\square$

Este corolario se puede generalizar de la siguiente forma

**Corolario 3.2** Si  $(P_n)_n$  es una SPO clásica entonces  $(P_n^{(k)})_n$  también es una SPO clásica con respecto a la función peso  $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$  que es solución de la ecuación de Pearson

$$(\sigma(x)\rho_k(x))' = \tau_k(x)\rho_k(x), \quad \tau_k(x) = \tau(x) + k\sigma'(x).$$

**Demostración:** La demostración de este resultado la vamos a realizar por inducción sobre  $k$ . Por el Corolario 3.1 es cierto para  $k = 1$ . Supongamos cierto para  $k - 1$  y veámoslo para  $k$ .

$P_n^{(k)}(x) = (P_n^{(k-1)})'$  luego aplicando el Corolario 3.1 se tiene que  $P_n^{(k)}$  es ortogonal con respecto a

$$\sigma(x)\rho_{k-1}(x) = \sigma(x)\sigma^{k-1}(x)\rho(x) = \sigma^k(x)\rho(x) = \rho_k(x).$$

Además, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\rho_{k-1}(x) = \sigma^{k-1}(x)\rho(x) \quad (\sigma(x)\rho_{k-1}(x))' = \tau_{k-1}(x)\rho_{k-1}(x),$$

con  $\tau_{k-1}(x) = \tau(x) + (k-1)\sigma'(x)$ .

Entonces (Nota: para simplificar las expresiones vamos a eliminar la dependencia de la variable  $x$ ):

$$\begin{aligned}
(\sigma\rho_k)' &= \sigma'\rho_k + \sigma\rho_k' = \sigma'\sigma^k\rho + \sigma(\sigma^k\rho)' \\
&= \sigma'\sigma^k\rho + \sigma(\sigma\rho_{k-1})' \\
&= \sigma'\sigma^k\rho + \sigma\tau_{k-1}\rho_{k-1} \\
&= \sigma'\sigma^k\rho + \sigma(\tau + (k-1)\sigma')\sigma^{k-1}\rho \\
&= \sigma'\sigma^k\rho + \tau\sigma^k\rho + (k-1)\sigma'\sigma^k\rho \\
&= \rho\sigma^k(\sigma' + \tau + (k-1)\sigma') \\
&= \rho_k(\tau + k\sigma') \\
&= \rho_k\tau_k.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 3.2** Si  $(P_n)_n$  es una SPO clásica entonces  $(P_n)_n$  es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \quad \lambda_n = -n(\tau'(x) + (n-1)\sigma''(x)/2). \quad (3.13)$$

**Demostración:** Como  $(P_n)_n$  es una SPO clásica entonces por el Colorario 3.1 sus derivadas son también clásicas y además para  $k < n$  intengrando por partes y haciendo uso de la condición (3.12)

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b P_n'(x)(x^k)'(\sigma(x)\rho(x))dx = - \int_a^b x^k(P_n'(x)\sigma(x)\rho(x))'dx \\
&= \int_a^b x^k(\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x))\rho(x)dx.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2 sabemos que el polinomio  $P_n$  es único salvo constante multiplicativa, entonces  $\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) = -\lambda_n P_n$ . Queda determinar  $-\lambda_n$ . Si  $P_n(x) = a_n x^n + \dots$ , y recordando que  $\sigma(x)$  y  $\tau(x)$  son polinomios de grado 2 y 1 respectivamente tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= ax^2 + bx + c \Rightarrow \sigma''(x) = 2a \Rightarrow \frac{\sigma''(x)}{2} = a, \\
\tau(x) &= dx + f \Rightarrow \tau'(x) = d, \\
P_n''(x) &= a_n n(n-1)x^{n-2} + \dots
\end{aligned}$$



Identificando coeficientes líderes en  $\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) = -\lambda_n P_n$  se tiene que  $aa_n n(n-1) + dna_n = -\lambda_n a_n$ . Simplificando  $a_n$  y realizando los cambios oportunos tenemos que  $\frac{\sigma''(x)}{2}n(n-1) + \tau'(x)n = -\lambda_n$ , de donde se obtiene el valor de  $\lambda_n$ .  $\square$

**Corolario 3.3** *Si  $(P_n)_n$  es una SPO clásica entonces  $(P_n^{(k)})_n$  es solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$\sigma(x)(P_n^{(k)}(x))'' + \tau_k(x)(P_n^{(k)}(x))' + \mu_{nk}P_n^{(k)}(x) = 0, \quad (3.14)$$

donde  $\mu_{nk} = \lambda_n + k\tau'(x) + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma''(x)$ ,  $\tau_k(x) = \tau(x) + k\sigma'(x)$ .

**Demostración:** Vamos a demostrar el resultado por inducción. Para  $k = 0$  claramente el resultado es cierto por la Proposición 3.2.

Para  $k = 1$ , por el Corolario 3.1 la sucesión  $(P_n')_n$  es clásica respecto al peso  $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$  y verificando la ecuación diferencial de Pearson  $(\sigma(x)\rho_1(x))' = \tau_1(x)\rho_1(x)$  con  $\tau_1(x) = \sigma(x) + \tau(x)$ . Entonces aplicando la Proposición 3.2 tenemos que el resultado es cierto para  $k = 1$ .

Supongamos cierto para  $k$  y veamos que pasa para  $k + 1$ . (Nota: para simplificar la notación voy a eliminar la dependencia de la variable  $x$ .)

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\sigma(P_n^{(k)})'' + \tau_k(P_n^{(k)})' + \mu_{nk}P_n^{(k)} = 0. \quad (3.15)$$

Ahora teniendo en cuenta que

$$\mu_{n,k+1} = \lambda_n + (k+1)\tau' + \frac{1}{2}k(k+1)\sigma'', \quad (3.16)$$

$$\tau_{k+1} = \tau + (k+1)\sigma', \quad (3.17)$$

$$\mu'_{nk} = 0 \quad (\sigma \text{ y } \tau \text{ son polinomios de grado 2 y 1, resp.}), \quad (3.18)$$

$$\tau'_k = \tau' + k\sigma''. \quad (3.19)$$

Derivando en (3.15) se tiene

$$\sigma'(P_n^{(k)})'' + \sigma(P_n^{(k)})''' + \tau'_k(P_n^{(k)})' + \tau_k(P_n^{(k)})'' + \mu'_{nk}P_n^{(k)} + \mu_{nk}(P_n^{(k)})' = 0.$$

Simplificando nos queda

$$\sigma(P_n^{(k+1)})'' + (\sigma' + \tau_k)(P_n^{(k+1)})' + (\tau_k' + \mu_{nk})P_n^{(k+1)} = 0.$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.16) - (3.19)

$$\begin{aligned} \sigma' + \tau_k &= \sigma + \tau + k\sigma' = \tau + (k+1)\sigma' = \tau_{k+1}, \\ \tau_k' + \mu_{nk} &= \tau' + k\sigma'' + \lambda_n + k\tau' + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'' \\ &= \lambda_n + (k+1)\tau' + \sigma''\frac{1}{2}k(k+1) = \mu_{n,k+1}, \end{aligned}$$

lo cual prueba (3.14).  $\square$

Como hemos visto al principio del capítulo, de la ecuación (3.14) se deduce la fórmula de Rodrigues (3.7)

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\sigma^n(x)\rho(x)), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.20)$$

donde  $\rho(x)$  es la solución de la correspondiente ecuación de Pearson.

De (3.20), como ya vimos al principio del capítulo, se deduce la ecuación de Pearson, basta tomar  $n = 1$ ,

$$P_1(x) = \frac{B_1}{\rho(x)} (\sigma(x)\rho(x))' \Rightarrow (\sigma(x)\rho(x))' = \rho(x)B_1^{-1}P_1(x) := \tau(x)\rho(x),$$

con  $gr(\tau(x)) = 1$ . Por tanto se tiene de forma inmediata el siguiente resultado.

**Proposición 3.3** *Si una SPO  $(P_n)_n$  se expresa mediante la fórmula de Rodrigues (3.20), entonces  $(P_n)_n$  es una SPO clásica.*

En conclusión, tenemos el siguiente teorema de caracterización.

**Teorema 3.2** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $(P_n)_n$  es una SPO clásica según la Definición 3.2.
2.  $(P_n)_n$  es una SPO y la sucesión de sus derivadas  $(P_n)'_n$  también es una SPO.

3.  $(P_n)_n$  es una SPO y la sucesión de sus  $k$ -ésimas derivadas  $(P_n)_n^{(k)}$  también es una SPO.

4.  $(P_n)_n$  es solución de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0.$$

5.  $(P_n)_n$  se expresa mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\sigma^n(x)\rho(x)).$$

Una vez caracterizadas las SPO clásicas y establecidas las tres posibilidades sobre el eje real:

- SPO de Jacobi en  $[-1, 1]$
- SPO de Laguerre en  $[0, \infty)$
- SPO de Hermite en  $\mathbb{R}$ ,

vamos a pasar a mostrar algunas de sus propiedades básicas para cada una de estas tres familias.

### 3.3. Los polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi vienen dados por el primer caso de los considerados anteriormente. Este caso se da cuando en la ecuación diferencial que satisfacen el polinomio  $\sigma(x)$  es de grado 2. En este caso, como se vio en la sección anterior, la función peso que se obtiene es  $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  con  $\alpha > -1, \beta > -1$ .

Denotaremos a los polinomios ortogonales de Jacobi por  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , con la estandarización dada en [35, f. (4.21.6)], es decir,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} x^n + \dots$$

#### Ortogonalidad

Los polinomios de Jacobi son ortogonales con respecto al producto escalar en  $[-1, 1]$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1.$$

### Representación hipergeométrica

Una función hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q$  se define como

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q | x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!},$$

donde  $(a)_k$  representa el simbolo de *Pochhammer* definido por

$$(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1).$$

De esta forma, los polinomios de Jacobi se expresan como ([35, (f. 4.21.2)])

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)} {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1 \mid \frac{1-x}{2}\right).$$

### Ecuación diferencial hipergeométrica

Con  $\sigma(x) = 1-x^2$ ,  $\tau(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$  y  $\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$ , ([35, f. (4.2.1)])

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

### Derivada

Ver ([35, f. (4.21.7)]),

$$(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))' = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

### Fórmula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues de los polinomios de Jacobi es ([35, f. (4.3.1)]):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n})$$

**Relación de recurrencia a tres términos**

Como ya sabemos por el capítulo 2, una SPO satisface la relación de recurrencia (2.4). Para los polinomios de Jacobi tenemos ([35, f. (4.5.1)])

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ \beta_n &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}, \\ \gamma_n &= \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

Por tanto, la relación de recurrencia queda

$$\begin{aligned}xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 2.\end{aligned}$$

Con  $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$  y  $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ .

**Valores en los extremos**

Por [35, f. (4.1.1)]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}.$$

Teniendo en cuenta la identidad [35, f. (4.1.3)]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x),$$

entonces,

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}.$$

**Cuadrado de la norma**

Ver ([35, f. (4.3.3)]),

$$\begin{aligned} \|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\|^2 &= \int_{-1}^1 (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

### Casos particulares

Destacar varios casos importantes como son los polinomios de Legendre, Chebyshev y Gegenbauer.

1. Polinomios de Legendre ([35, p. 60])  $L_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$ .
2. Polinomios de Chebyshev de primera especie, denotados por  $T_n(x)$  ([35, f. (4.1.7)])

$$T_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x),$$

donde  $a!!$  denota el doble factorial definido como

$$a!! = \begin{cases} a \cdot (a-2) \cdot \dots \cdot 1, & \text{a impar;} \\ a \cdot (a-2) \cdot \dots \cdot 2, & \text{a par.} \end{cases}$$

3. Polinomios de Chebyshev de segunda especie, denotados por  $U_n(x)$  ([35, f. (4.1.7)])

$$U_n(x) = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} P_n^{(1/2,1/2)}(x).$$

4. Los polinomios de Gegenbauer, denotados por  $G_n^\lambda(x)$  con  $\lambda > -1/2$  ([35, f. (4.7.1)])

$$G_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x).$$

#### 3.3.1. Asintótica

Puesto que el objetivo de este TFM es estudiar en el capítulo 5 una asintótica determinada para una familia de polinomios ortogonales no estándar, introducimos aquí el resultado correspondiente para polinomios de Jacobi.

El resultado es conocido como fórmula de Mehler-Heine para los polinomios de Jacobi y determina una asintótica local, que en el caso Jacobi es alrededor del punto  $x = 1$ .

**Teorema 3.3** ([35, Th. 8.1.1]) Sean  $\alpha, \beta > -1$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \cos \left( \frac{x}{n} \right) \right) = (x/2)^{-\alpha} J_\alpha(x),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ , donde  $J_\alpha(x)$  denota la función de Bessel de primera especie, es decir,

$$J_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i + \alpha + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2i + \alpha}. \quad (3.21)$$

Las funciones de Bessel verifican una gran variedad de propiedades. Para nuestros propósitos nos será especialmente útil la siguiente:

$$\boxed{J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{\alpha + 1}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) = -J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}).} \quad (3.22)$$

La asintótica local dada en el Teorema 3.3 nos permite establecer relaciones límite entre los ceros de los polinomios de Jacobi y los ceros de la función de Bessel  $J_\alpha$ . Para poder establecer estas relaciones es necesario utilizar un conocido teorema de Análisis Complejo, llamado Teorema de Hurwitz ([35, Th. 1.91.3])

**Teorema 3.4 (Teorema de Hurwitz)** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un subconjunto, y supongamos que existe una sucesión de funciones holomorfas  $f_n$  que convergen uniformemente en subconjuntos compactos de  $G$  a una función holomorfa  $f$ . Si  $f$  no es idénticamente cero, entonces si  $x = a$  es un cero de  $f(x)$  de orden  $k$ , existe un entorno de  $a$  ( $D(a, r) \subset G$ ) y un natural  $n_0$  de manera que para cada  $n > n_0$ ,  $f_n$  tiene exactamente  $k$  ceros en el disco  $D(a, r)$ .

Usando los teoremas 3.3 y 3.4 se deduce el siguiente resultado ([35, Th. 8.1.2])

**Corolario 3.4** Sean  $x_{n,1} > x_{n,2} > \dots > x_{n,n}$  los ceros de  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  en orden decreciente en el intervalo  $[-1, 1]$  con  $\alpha, \beta > -1$ . Si escribimos  $x_{n,r} = \cos(\theta_{n,r})$ ,  $0 < \theta_{n,r} < \pi$  entonces para cada  $r$  fijo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_{n,r} = j_{\alpha,r};$$

donde  $j_{\alpha,r}$  es el  $r$ -ésimo cero positivo de  $J_\alpha$ .

### 3.4. Los polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre vienen dados por el segundo caso de los considerados anteriormente. Este caso se da cuando en la ecuación diferencial que satisfacen el polinomio  $\sigma(x)$  es de grado 1. En este caso, como se vio anteriormente, la función peso que se obtiene es  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$  con  $\alpha > -1$ .

Denotaremos a los polinomios ortogonales de Laguerre por  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , con la estandarización dada en [35, p. 101], es decir,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \dots \quad (3.23)$$

#### Ortogonalidad

Los polinomios de Laguerre son ortogonales con respecto al producto escalar en  $[0, \infty)$

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha > -1.$$

#### Representación hipergeométrica

Ver ([35, f. (5.3.3)]).

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)} {}_1F_1(-n; \alpha + 1|x).$$

#### Ecuación diferencial hipergeométrica

Con  $\sigma(x) = x$ ,  $\tau(x) = \alpha + 1 - x$  y  $\lambda_n = n$ , ([35, f. (5.1.2)])

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

#### Derivada

Para los polinomios de Laguerre se tiene, ([35, f. (5.1.14)]):

$$(L_n^{(\alpha)}(x))' = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \quad (3.24)$$

#### Fórmula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues de los polinomios de Laguerre es ([35, f. (5.1.5)]):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

#### Relación de recurrencia a tres términos



Para los polinomios de Laguerre tenemos ([35, f. (5.1.10)])

$$\begin{aligned}\alpha_n &= -(n+1), \\ \beta_n &= 2n + \alpha + 1, \\ \gamma_n &= -(n + \alpha).\end{aligned}$$

Por tanto, la relación de recurrencia queda

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2,$$

$$\text{con } L_0^{(\alpha)}(x) = 1 \text{ y } L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1.$$

#### Valores en los extremos

Ver [35, f. (5.1.7)]

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + 1)}.$$

#### Cuadrado de la norma

Ver [35, f. (5.1.1)]

$$\|L_n^{(\alpha)}(x)\|^2 = \int_0^\infty (L_n^{(\alpha)}(x))^2 x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)}.$$

### 3.4.1. Asintótica

Para el desarrollo del capítulo 5 necesitaremos diferentes tipos de asintótica de los polinomios ortogonales de Laguerre. A continuación, recopilamos dichos resultados.

En primer lugar la asintótica fuerte exterior obtenida por Perron ([35, Th. 8.22.3])

**Teorema 3.5** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  se tiene que*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} e^{x/2} (-x)^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2(-nx)^{1/2}} \left[ \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-p/2}) \right],$$

donde  $C_j(x)$  es independiente de  $n$ .

Del teorema anterior se puede deducir la asintótica del cociente de diferentes familias de polinomios ortogonales de Laguerre.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\ell-j)/2} \frac{L_{n+k}^{(\alpha+j)}(x)}{L_{n+h}^{(\alpha+\ell)}(x)} = (-x)^{(\ell-j)/2}, \quad j, \ell \in \mathbb{R}, \quad h, k \in \mathbb{Z},} \quad (3.25)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

En el capítulo 5 usaremos especialmente la asintótica Mehler-Heine de estos polinomios.

**Teorema 3.6** *Sea  $\alpha > -1$ , entonces*

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} L_n^{(\alpha)}(x/n) = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x})} \quad (3.26)$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ , donde  $J_\alpha$  denota la función de Bessel definida en (3.21).*

### 3.5. Los polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son el último caso de los vistos anteriormente, cuando el grado de  $\sigma(x)$  es 1. Para estos polinomios tenemos que son ortogonales respecto la función peso  $\rho(x) = e^{-x^2}$ , con el intervalo de ortogonalidad en todo  $\mathbb{R}$ .

Estos polinomios de Hermite los denotaremos por  $H_n(x)$  y están definidos como ([35, f. (5.5.4)])

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

#### Ortogonalidad

Los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto al producto escalar en  $\mathbb{R}$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

#### Representación hipergeométrica

La representación hipergeométrica de los polinomios de Hermite es ([16, f. (18.5.13)]):

$$H_n(x) = (2x)^n {}_2F_0\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; -\middle|\frac{-1}{x^2}\right),$$

### Ecuación diferencial hipergeométrica

Para los polinomios de Hermite tenemos que ([35, f. (5.5.2)])  $\sigma(x) = 1$ ,  $\tau(x) = -2x$  y  $\lambda_n = 2n$ ,

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

### Derivada

Para los polinomios de Hermite tenemos que ([35, f. (5.5.10)]):

$$(H_n(x))' = 2nH_{n-1}(x).$$

### Fórmula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite es ([35, f. (5.5.3)]):

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

### Relación de Recurrencia a tres términos

Para los polinomios de Hermite tenemos ([35, f. (5.5.8)])

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1/2, \\ \beta_n &= 0, \\ \gamma_n &= n.\end{aligned}$$

Por tanto, la relación de recurrencia queda

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con  $H_0(x) = 1$  y  $H_1(x) = 2x$ .

### Valor en el 0

Ver [35, f. (5.5.5)]:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

**Cuadrado de la norma**

Ver [35, f. (5.5.1)]

$$\|H_n(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

**Relación con los polinomios de Laguerre**

Se tiene ([35, f. 5.6.1]):

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(\frac{-1}{2})}(x^2),$$
$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2).$$

## 4

# Polinomios de ortogonalidad no estándar: Polinomios ortogonales de Sobolev

En los capítulos anteriores se ha tratado sobre las propiedades y las características de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar estándar, es decir, un producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  donde

$$(xf, g) = (f, xg),$$

siendo  $f, g$  son funciones que pertenecen al espacio prehilbertiano donde está definido el producto escalar.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el objetivo de esta memoria es estudiar ciertas propiedades de la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un producto Laguerre-Sobolev, el cuál no va a ser un producto estándar, es decir,

$$(xf, g) \neq (f, xg).$$

En este capítulo se va a hacer una muy breve introducción a los polinomios ortogonales de Sobolev para establecer un marco de referencia para el capítulo 5.

El tema es tratado con bastante mayor profundidad en los *surveys* [21], [22], [24] y [27].

## 4.1. Polinomios ortogonales de Sobolev

Un producto escalar de Sobolev sobre el espacio de polinomios,  $\mathbb{P}_n$  es, esencialmente, un producto escalar que involucra a las derivadas de los polinomios hasta un cierto orden. En las últimas décadas ha cobrado especial importancia el producto escalar determinado por

$$(f, g)_S = \sum_{k=0}^j \int_a^b f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)d\mu_k, \quad (4.1)$$

donde  $\mu_k$   $k = 0, \dots, j$  son medidas de Borel en el intervalo  $(a, b)$ .

Como es usual la norma de una función queda definida como:

$$\|f\|_S = \sqrt{(f, f)_S} = \left( \sum_{k=0}^j \int_a^b (f^{(k)}(x))^2 d\mu_k \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Claramente si  $j \geq 1$  el producto escalar (4.1) **no** satisface la propiedad  $(xf, g) = (f, xg)$  y por tanto, es un producto escalar no estándar.

Este tipo de productos escalares fue introducido por D.C. Lewis en [17] buscando la mejor aproximación simultánea a una función y a sus derivadas hasta un orden determinado. Concretamente:

$$\min_{Q \in \mathbb{P}_n} \|f - Q\|_S = \min \sum_{k=0}^j \int_a^b [f^{(k)}(x) - Q^{(k)}(x)]^2 d\mu_k.$$

En [13] podemos encontrar algunos resultados básicos sobre polinomios ortogonales de Sobolev.

**Teorema 4.1** *Si el producto interior (4.1) es definido positivo en  $\mathbb{P}_n$ , entonces existe una única sucesión, que denotaremos por  $(S_n)_n$ , de polinomios ortogonales mónicos de Sobolev.*

**Definición 4.1** *El producto escalar de Sobolev (4.1) es simétrico si cada medida  $d\mu_k$  es simétrica.*

**Teorema 4.2** *Si el producto interior (4.1) es simétrico, entonces*

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x).$$

La teoría de polinomios ortogonales de Sobolev es una teoría joven y aún no existen enfoques tan generales como los existentes para los polinomios ortogonales estándar, si bien en los últimos años han ido apareciendo resultados cada vez más generales que involucran a medidas más generales (ver los *surveys* [22] y [24]).

Durante el desarrollo de este capítulo daremos una serie de resultados sin demostración, ya que la demostración de algunos de esos resultados son muy extensas y se escapa de nuestro objetivo, que es meramente introductorio.

Como ya se ha dicho anteriormente un producto escalar de Sobolev es un producto escalar no estándar y por tanto, los polinomios ortogonales respecto a este producto no satisfacen una relación de recurrencia a tres términos. Sin embargo, estos polinomios ortogonales mónicos si satisfacen una relación de recurrencia de la forma (ver [13]):

$$S_{n+1}(x) = xS_n(x) + \sum_{k=0}^n \beta_{n,k} S_{n-k}(x), \quad (4.2)$$

donde

$$\beta_{n,k} = \frac{(xS_n, S_{n-k})_S}{(S_{n-k}, S_{n-k})_S}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si (4.1) es un producto escalar simétrico entonces  $\beta_{n,2k} = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ .

Si consideramos la matriz de Hessenberg de orden  $n$  (ver [13, Th. 1.7.7])

$$H_n = \begin{pmatrix} \beta_{0,0} & \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{n-2,n-2} & \beta_{n-1,n-1} \\ 1 & \beta_{1,0} & \beta_{2,1} & \dots & \beta_{n-2,n-3} & \beta_{n-1,n-2} \\ 0 & 1 & \beta_{2,0} & \dots & \beta_{n-2,n-4} & \beta_{n-1,n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{0,n-2} & \beta_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_{n-1,0} \end{pmatrix}$$

y  $S(x) = [S_0(x), \dots, S_{n-1}(x)]$ , entonces se puede probar (ver, [13, Th. 1.65])

**Teorema 4.3** *Los ceros de  $S_n$  son los valores propios de  $H_n$  y  $S(x_i)$  es el vector propio a la izquierda asociado al valor propio  $x_i$ .*

Es importante observar que los valores propios de  $H_n$  pueden ser complejos y de aquí los ceros de  $S_n$ . En [13] se pueden encontrar diversos algoritmos para calcular los valores propios de esta matriz de Hessenberg.

Con respecto a los ceros de los polinomios  $S_n(x)$  ortogonales con respecto (4.1) puede ocurrir que existan ceros fuera de  $\bigcup_{k=0}^j \text{sop}(\mu_k)$ . Esta situación se ilustrará en este capítulo y en el capítulo 5.

Gran parte de la literatura sobre polinomios de Sobolev se ha centrado en dos casos: el caso continuo y el caso discreto.

En el caso continuo el producto escalar es de la forma:

$$(f, g)_S = \int_a^b f(x)g(x)d\mu_0 + \sum_{k=1}^j M_k \int_a^b f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)d\mu_k, \quad M_k \geq 0, \quad \forall k. \quad (4.3)$$

donde las medidas  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, j$ , tienen parte absolutamente continua no nula.

En el caso discreto, también conocido como tipo Sobolev, el producto escalar es de la forma:

$$(f, g)_S = \int_a^b f(x)g(x)d\mu + \sum_{k=0}^j M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c), \quad M_k \geq 0, \quad \forall k. \quad (4.4)$$

con  $c \in \mathbb{R}$  y la medida  $\mu$  tiene parte absolutamente continua no nula.

#### 4.1.1. Caso Continuo

En 1962, Althammer introduce un producto escalar donde el correspondiente polinomio ortogonal de grado 2 tiene un cero fuera de  $\bigcup_{k=0}^j \text{sop}(\mu_k)$ . Concretamente, introduce el producto

$$(p, q)_A = \int_{-1}^1 p(x)q(x)d\mu_0(x) + \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)d\mu_1(x). \quad (4.5)$$

donde las medidas vienen dadas por:

$$d\mu_0(x) = dx, \quad d\mu_1(x) = \begin{cases} 10dx, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ dx, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

El autor prueba que el polinomio ortogonal de segundo grado con respecto a (4.5), que puede ser calculado usando el algoritmo de Gram-Schmidt,



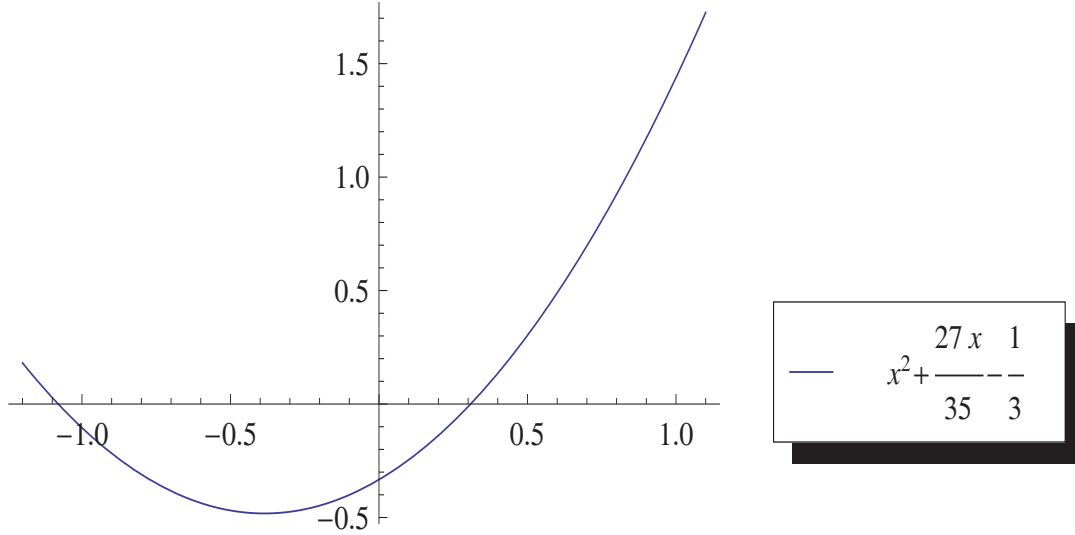


Figura 4.1: Polinomio  $x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3}$

$S_2(x) = x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3}$ , tiene una raíz en  $x = -1,08 \notin [-1, 1]$  como se puede ver en la figura 4.1.

Este fue un resultado muy novedoso, al plantear de forma sencilla una característica de los polinomios ortogonales de Sobolev que no ocurre en la teoría de polinomios ortogonales estándar

Althammer también consideró el producto escalar continuo de Sobolev

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 p'(x)g'(x)dx,$$

con  $\lambda \geq 0$ . Este producto recibe el nombre de producto escalar de Legendre-Sobolev y sus polinomios ortogonales asociados pueden verse como generalizaciones de los polinomios clásicos de Legendre.

Merece la pena destacar como las constantes multiplicativas pueden hacer que los ceros de los polinomios ortogonales caigan dentro o fuera de  $\bigcup_{k=0}^j \text{sop}(\mu_k)$ . Más aún, puede hacer que aumente o disminuya el número de ceros reales. Por ejemplo, veamos el siguiente producto que consideró Meijer en [28] y que Gautschi en [13] ilustró numericamente. Sea

$$(f, g) = \int_{-1}^3 f(x)g(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)dx + \int_1^3 f'(x)g'(x)dx, \quad (4.6)$$

con  $\lambda > 0$ .

Meijer probó que para  $n \geq 2$  y par y  $\lambda$  suficientemente grande, los polinomios de Sobolev ortogonales con respecto a (4.6) tienen exactamente dos ceros reales, uno en el intervalo  $[-3, -1]$  y otro en  $[1, 3]$ . Igualmente, si  $n$  es impar con  $n \geq 3$  y  $\lambda$  suficientemente grande solamente hay un cero real y está localizado en  $[1, 3]$ .

Estos resultados fueron ilustrados numericamente en [13, tabla 2.30], y se muestra perfectamente como el valor de la constante  $\lambda$  afecta al número de ceros reales. Incluimos aquí dicha tabla por completitud.

Cuadro 4.1: Ceros de los polinomios ortogonales con respecto a (4.6)

Grado del polinomio	$\lambda$	Número de ceros reales
2	$0 \leq \lambda \leq 10,333$	2
	$10,334 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
4	$0 \leq \lambda \leq 7,4773$	4
	$7,4774 \leq \lambda \leq 61,754$	2
	$61,746 \leq \lambda \leq 153,23$	4
	$153,24 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
6	$0 \leq \lambda \leq 45,011$	6
	$45,012 \leq \lambda \leq 50,226$	4
	$50,227 \leq \lambda \leq 41868,5$	2
	$41868,6 \leq \lambda \leq 42155,5$	4
	$42155,6 \leq \lambda \leq 43512,6$	6
	$43512,7 \leq \lambda \leq 43646,1$	4
	$43646,2 \leq \lambda < \infty$	2 en $[-3, -1] \cup [1, 3]$
3	$0 \leq \lambda \leq 21,461$	3
	$21,462 \leq \lambda < \infty$	1 en $[1, 3]$
5	$0 \leq \lambda \leq 10,193$	5
	$10,194 \leq \lambda \leq 1811,7$	3
	$1811,8 \leq \lambda \leq 2153,6$	5
	$2153,7 \leq \lambda \leq 2183,4$	3
	$2183,5 \leq \lambda < \infty$	1 en $[1, 3]$

A partir de entonces, los productos escalares de Sobolev continuos más estudiados han sido del tipo

$$(f, g) = \int fg d\mu_0 + \int f'g' d\mu_1, \quad \lambda \geq 0,$$

donde  $\mu_i$ ,  $i = 0, 1$ , son medidas con soporte en  $\mathbb{R}$ .

Para los correspondientes polinomios ortogonales se han estudiado propiedades algebraicas, relaciones con los polinomios ortogonales respecto a las medidas  $\mu_0$  y  $\mu_1$ , fórmulas tipo Christoffel-Darboux, ecuaciones diferenciales que satisfacen, propiedades de los ceros, comportamiento asintótico en diferentes regiones del plano complejo, etc. Algunos de los resultados obtenidos pueden encontrarse en los *surveys* [22] y [24] y las referencias incluidas en ellos, aunque posteriormente a ellos se han seguido obteniendo nuevos resultados.

#### 4.1.2. Caso Discreto

Un tipo de producto escalar de Sobolev discreto o tipo Sobolev que aparece usualmente en la literatura, y que es de gran interés para el capítulo 5, es

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + \sum_{k=0}^j M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c), \quad (4.7)$$

donde  $\mu$  es una medida con soporte en el eje real,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $M_k \geq 0$ , con  $k = 0, 1, \dots, j-1$  y  $M_j > 0$ .

Bajo diferentes suposiciones sobre la medida  $\mu$ , los polinomios ortogonales con respecto a (4.7) han sido ampliamente estudiados. De nuevo, citamos los *surveys* [21], [22] y [24] y las referencias allí incluidas como trabajos donde profundizar en este tema. También, se incluye un buen número de referencias en [26].

Los productos escalares del tipo (4.7) han sido generalizados en diferentes sentidos y se han estudiado las propiedades de los polinomios ortogonales con respecto a estos nuevos productos escalares. Algunos trabajos relevantes en este sentido han sido [12], [18], [33] y [34].

Vamos a considerar algunos casos particulares que nos servirán de motivación para el capítulo siguiente.

En [1], se introduce el producto

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x)d\mu + M_0 f(c)g(c) + M_1 f'(c)g'(c),$$

donde  $M_i \geq 0$ ,  $I$  es un intervalo acotado y  $c \in \mathbb{R}$ . Es de interés el estudio de los ceros de los polinomios ortogonales con respecto a este producto y la relación con la ubicación de  $c$ .

**Proposición 4.1** *Si  $M_1 > 0$  y  $n \geq 3$ ,  $S_n$  tiene al menos  $n-2$  ceros diferentes con multiplicidad impar en el interior de  $I$ . Además, si  $c = \sup I$  ó  $c = \inf I$  entonces los de  $S_n$  son reales y simples y al menos  $n-1$  están en el interior de  $I$ .*

En [29], Meijer introduce el producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)d\mu(x) + Mf^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad M \geq 0, \quad j \geq 1, \quad (4.8)$$

donde  $\mu$  es una medida con soporte en el semieje real positivo. Denotando por  $S_n$  los polinomios ortogonales con respecto a (4.8), el autor prueba

**Teorema 4.4** *Los polinomios  $S_n$  tienen  $n$  ceros reales y simples y a lo más uno fuera de  $(0, \infty)$ . En caso de tener uno fuera de dicho intervalo ese cero se encuentra en  $(-\infty, 0]$ , y para  $n \geq j+1$ .*

Meijer también encuentra condiciones para ver cuando los polinomios ortogonales respecto el producto (4.8) tienen un cero real negativo.

**Teorema 4.5** *Se puede definir una sucesión  $(\alpha_n)_n$ ,  $n \geq j+1$ , creciente tal que*

- a) *Si  $0 \leq \alpha_n M < 1$  entonces todos los ceros de  $S_n$  son positivos.*
- b) *Si  $\alpha_n M \geq 1$  entonces hay un cero en  $[0, \infty)$ .*
- c) *Si  $S_n$  tiene un cero negativo para  $n = n_0$ , entonces  $S_n$  tiene un cero negativo para cada  $n > n_0$ .*

Otro ejemplo de producto escalar es el introducido por Koekoek en [15]:

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} dx + \sum_{i=0}^j M_i f^{(i)}(0)g^{(i)}(0), \quad \alpha > -1, \quad (4.9)$$

con  $M_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, j-1$ , y  $M_j > 0$ .

Desde el punto vista asintótico, en [2] se obtuvo la asintótica tipo Mehler-Heine que fue conjeturada en [5]. Concretamente,

**Teorema 4.6** *Sea  $(S_n)_n$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar (4.9) con  $M_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, j$ . Entonces,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!n^\alpha} S_n(x/n) = (-1)^{j+1} x^{\frac{-\alpha}{2}} J_{\alpha+2j+2}(2\sqrt{x})$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .*

En este artículo también se obtiene este tipo de asintótica cuando hay *gaps*, es decir, cuando  $M_i$  puede ser cero para  $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ . En esta situación el resultado es más complicado (ver [2, Th. 3]). Además, los autores extienden el resultado para los polinomios generalizados tipo Hermite-Sobolev.



## 5

# Polinomios ortogonales tipo Laguerre-Sobolev

En el capítulo anterior se introdujo la ortogonalidad no estándar conocida como tipo Sobolev. En este sentido se consideró el producto escalar

$$(f, g) = \int f(x)g(x)\rho(x)dx + \sum_{k=0}^j M_k f^{(k)}(c)g^{(k)}(c).$$

Nosotros vamos a considerar el caso correspondiente al peso Laguerre  $\rho(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha + 1)}$  en el semieje real positivo  $[0, \infty)$  y  $c = 0$ , pero se va a introducir una sucesión de masas variantes.

Más concretamente, consideramos el producto escalar no estándar

$$(f, g)_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad \alpha > -1, \quad j \geq 0,$$

donde  $(M_n)_n$  es una sucesión de masas con ciertas propiedades que diremos más adelante en este capítulo.

Nuestra intención es obtener propiedades asintóticas de los polinomios ortogonales con respecto al anterior producto escalar. De hecho, obtendremos la asintótica fuerte exterior en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Sin embargo, el objetivo fundamental será obtener la asintótica local tipo Mehler-Heine que nos describirá con detalle el comportamiento de estos polinomios ortogonales alrededor del origen y la influencia que la sucesión de masas  $(M_n)_n$

tiene en este comportamiento. Como consecuencia de estos resultados, se podrá describir el comportamiento asintótico de los ceros de estos polinomios en términos de los ceros de determinadas funciones especiales que involucran a funciones de Bessel de primera especie. Estos resultados se ilustrarán numéricamente. Los resultados de este capítulo fueron presentados en [19] y publicados en [20].

## 5.1. Antecedentes

En [15] Koekoek introdujo el siguiente producto tipo Sobolev asociado al peso Laguerre  $\rho(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha + 1)}$ ,

$$(f, g) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + \sum_{i=0}^j M_i f^{(i)}(0)g^{(i)}(0), \quad \alpha > -1,$$

con  $M_i \geq 0$ , para  $i = 0, \dots, j - 1$  y  $M_j > 0$ .

En ese artículo Koekoek dio una expresión para los polinomios ortogonales  $L_n^{(\alpha, M_0, M_1, \dots, M_j)}$  con respecto al producto anterior en términos de los polinomios ortogonales clásicos de Laguerre. Dicha expresión es (ver [15]):

$$L_n^{(\alpha, M_0, M_1, \dots, M_j)}(x) = \sum_{k=0}^{j+1} A_k (L_n^{(\alpha)})^{(k)}(x).$$

Para estos nuevos polinomios, Koekoek consigue dar una expresión de los coeficientes  $A_k$ . También encuentra la ecuación diferencial de segundo orden que satisfacen dichos polinomios, cuyos coeficientes son polinomios de grado  $j + 2$ ,  $j + 2$  y  $j + 1$ . Además, obtiene una relación de recurrencia de  $(2j + 3)$ -términos y a partir de ahí una fórmula tipo Christoffel-Darboux.

Desde el punto de vista asintótico, los resultados más completos son los obtenidos en [2] donde se resuelve y generaliza una conjetura sobre la asintótica de estos polinomios ortogonales planteada en [5], siendo este último trabajo el primero en estudiar propiedades asintóticas de estos polinomios pero para los casos  $j = 0$  y  $j = 1$ . Estos resultados son reenumerados en el *survey* [22] pero usando una estandarización más adecuada.

Casos particulares, pero convenientes para ubicar nuestro problema, son considerados en [11] y en [23]. En estos trabajos, los autores consideran el



producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + N f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (5.1)$$

con  $j \geq 0$  y  $N > 0$ , y estudian ciertas propiedades de los correspondientes polinomios ortogonales. En lo que respecta a propiedades asintóticas los resultados obtenidos quedan incluidos dentro de los obtenidos en [2] en un ámbito más general.

En la tesis doctoral de Castaño-García, [7], se planteó considerar el caso que las masas fueran variantes, esto es, dado el producto escalar variante

$$(f, g)_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad (5.2)$$

estudiar como afecta el tamaño de la sucesión de masas  $(M_n)_n$  en el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales con respecto a (5.2). Se obtuvieron resultados para  $j = 0$  (ver [8]) y  $j = 1$  (ver [9]). En [9] se conjeturó sobre el comportamiento asintótico en el caso de  $j$  arbitrario.

Por tanto, el objetivo de este capítulo y de este TFM es probar dicha conjetura.

## 5.2. El caso variante

Tal y como hemos comentado en la sección anterior, se considera el producto escalar variante y no estándar,

$$\boxed{(f, g)_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx + M_n f^{(j)}(0)g^{(j)}(0), \quad j \geq 0,} \quad (5.3)$$

con  $\alpha > -1$  y donde  $(M_n)_n$  es una sucesión de números no negativos verificando

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} M_n n^\beta = M > 0, \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}.} \quad (5.4)$$

Antes de continuar con el desarrollo del capítulo es importante realizar ciertas observaciones sobre el producto escalar (5.3).

La primera de ellas es mencionar que la introducción de la constante  $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$  en la función peso,  $\rho(x)$ , hace que se obtenga una medida de probabilidad, es decir,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} dx = 1.$$

Por otra parte, consideramos los polinomios ortogonales de Laguerre respecto a la función peso  $\rho(x) = \frac{x^{\alpha} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$  con coeficiente líder  $\frac{(-1)^n}{n!}$ , i. e.,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Reseñar que si la sucesión  $(M_n)_n$  en (5.3) fuera constante, esto es,  $M_n = M$ ,  $\forall n$ , entonces  $\Gamma(\alpha+1)(f, g)_n = (f, g)$  donde el último producto escalar es el producto definido en (5.1) con  $N = \Gamma(\alpha+1)M$ . Esta observación tiene importancia a la hora de verificar que los resultados que se obtengan en este capítulo generalizan a los correspondientes resultados obtenidos en [11] y en [23].

También destacar que, como ya se dijo en el capítulo anterior, estos productos tipo Sobolev no son productos escalares estándar, por lo tanto,  $(xf, g)_n \neq (f, xg)_n$ , y esto hace que se pierdan propiedades tan importantes como la relación de recurrencia a tres términos, la fórmula de Christoffel–Darboux o la propiedad de ubicación de los ceros en el soporte de la medida.

Por último mencionar que si la sucesión de números  $(M_n)_n$  es la sucesión constante cero, es decir,  $M_n = 0$  para todo  $n$ , obtenemos los polinomios  $L_n^{(\alpha,0)}$  que se convierten en los polinomios clásicos de Laguerre denotados por  $L_n^{(\alpha)}(x)$  con coeficiente líder  $(-1)^n/n!$ .

A continuación vamos a establecer una relación entre los polinomios de Laguerre clásicos,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , y los polinomios ortogonales con respecto a (5.3),  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ . Para ello nos basamos en las ideas desarrolladas en [23], adaptándolas a nuestra situación.

**Proposición 5.1** Sea  $L_{-1}^{(\alpha)}(x) \equiv 0$ , y  $\alpha > -1$ . Entonces, para cada  $n \geq j$ ,

$$L_n^{(\alpha, M_n)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x), \quad (5.5)$$

donde  $B_{n,k}^{[j]} = \frac{A_{n,k}^{[j]}}{A_{n,0}^{[j]}}$ , con

$$A_{n,k}^{[j]} = \frac{(-1)^k j! \Gamma(\alpha + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \binom{n + \alpha}{n - j} \binom{n - k}{j + 1 - k} \quad k = 1, \dots, j + 1, \quad (5.6)$$

$$A_{n,0}^{[j]} = 1 + \frac{j! \Gamma(\alpha + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \sum_{k=1}^{\min\{n-j, j+1\}} (-1)^{k+1} \binom{n + \alpha}{n - j - k} \binom{n - k}{j + 1 - k}. \quad (5.7)$$

**Demostración:** Sea  $Q_n(x) := L_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)$  los polinomios de grado  $n$  con coeficiente líder  $\frac{(-1)^n}{n!}$ , y los coeficientes definidos como en (5.6)-(5.7). Vamos a demostrar que estos polinomios son ortogonales con respecto al producto definido en (5.3). Vamos a denotar por  $\mathbb{P}_n$  al conjunto de polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Sea  $p_{l+j+1} = x^{j+1} q_l(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots, n - (j + 2)$ , donde  $q_l(x)$  es un polinomio de grado exactamente  $l$ . Con esto es fácil ver que los polinomios  $1, x, x^2, \dots, x^j$  y  $p_{l+j+1}(x)$ ,  $l = 0, 1, \dots, n - (j + 2)$  constituyen una base de  $\mathbb{P}_{n-1}$ . Entonces claramente para  $n \geq j + 2$ ,

$$\begin{aligned} (p_{l+j+1}, Q_n(x))_n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x^{j+1} q_l(x) Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \int_0^\infty x^{j+1-k} q_l(x) L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

asumiendo  $B_{n,0}^{[j]} := 1$ . La última igualdad ocurre por la ortogonalidad de los polinomios clásicos de Laguerre.

Ahora definimos las cantidades  $I_{k,i}$  de la siguiente forma

$$I_{k,i} := \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx$$

Considerando la expresión (3.23) se tiene

$$L_{n-i}^{\alpha+i}(x) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i+\alpha+i}{n-i-j} \frac{(-x)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+\alpha}{n-i-j} \frac{(-x)^j}{j!}.$$

Entonces las cantidades  $I_{k,i}$  quedarían como:

$$\begin{aligned}
I_{k,i} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+\alpha}{n-i-j} \frac{(-x)^j}{j!} x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n+\alpha}{n-i-j} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^\infty x^j x^{\alpha+k} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-i-j+1)\Gamma(\alpha+i+j+1)} \frac{(-1)^j}{j!} \Gamma(j+k+\alpha+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-k)\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(i-k)\Gamma(n+1-i)} = \binom{n-k-1}{n-i} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Ahora veamos que nuestros polinomios  $Q_n(x)$  son ortogonales respecto la base canónica de  $\mathbb{P}_j$ . Para ello usaremos la ortogonalidad de los polinomios clásicos de Laguerre.

$$\begin{aligned}
(1, Q_n(x))_n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \int_0^\infty L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot I_{0,1} + B_{n,2}^{[j]} \cdot I_{0,2} + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{0,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{0,j+1}, \\
(x, Q_n(x))_n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,2}^{[j]} \cdot I_{1,2} + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{1,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{1,j+1}, \\
&\vdots \\
(x^{j-1}, Q_n(x))_n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty x^{j-1} Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot 0 + \cdots + B_{n,j-1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,j}^{[j]} \cdot I_{j-1,j} + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{j-1,j+1},
\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}
(x^j, Q_n(x))_n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x^j Q_n(x) x^\alpha e^{-x} dx + M_n j! (Q_n(x))_{x=0}^{(j)} \\
&= B_{n,0}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,1}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,2}^{[j]} \cdot 0 + \cdots + B_{n,j}^{[j]} \cdot 0 + B_{n,j+1}^{[j]} \cdot I_{j,j+1}, \\
&\quad + M_n \Gamma(j + 1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la fórmula (3.24).

Para terminar, usando las expresiones (5.6) y (5.7), la obtenida para  $I_{k,i}$  (5.9), el valor de los polinomios de Laguerre en el origen,  $L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$ , y la expresión de  $B_{n,k}^{[j]}$  se tiene que  $(x^m, Q_n(x))_n = 0 \quad m = 0, \dots, j$ . Veámoslo para el caso  $m = j$ , los demás casos se demuestran de forma análoga.

En esta situación se tiene,

$$\begin{aligned}
(x^j, Q_n(x))_n &= B_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j + 1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \\
&= \frac{1}{A_{n,0}^{[j]}} \left( A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j + 1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \right).
\end{aligned}$$

Bastará con probar que el paréntesis de la anterior expresión es 0.

$$\begin{aligned}
& A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=0}^{j+1} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \\
&= A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&+ M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} (-1)^{k+1} \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&+ M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} A_{n,k}^{[j]} L_{n-k-j}^{(\alpha+k+j)}(0) \\
&= A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&+ M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} (-1)^{k+1} \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&+ M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \sum_{k=1}^{\min\{n-j,j+1\}} (-1)^k \frac{j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n-k}{j+1-k} \binom{n+\alpha}{n-k-j}.
\end{aligned}$$

ahora si miramos los coeficientes que hay en color rojo tenemos que son exactamente iguales pero de signo contrario, por lo tanto los podemos eliminar, y usando (5.9), tenemos que el paréntesis anterior queda como

$$\begin{aligned}
& A_{n,j+1}^{[j]} I_{j,j+1} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= \frac{(-1)^{j+1} j! M_n \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n-j-1}{j+1-j-1} \\
&\times \binom{n-j-1}{n-j-1} \frac{\Gamma(\alpha+j+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + M_n \Gamma(j+1) (-1)^j \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= (-1)^{j+1} M_n j! \binom{n+\alpha}{n-j} + (-1)^j M_n \Gamma(j+1) \binom{n+\alpha}{n-j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2 una sucesión de polinomios ortogonales es única salvo una constante multiplicativa, y como hemos visto que los polinomios  $Q_n(x)$  y los  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$  tienen el mismo coeficiente líder.  $\square$

**Nota:** El resultado obtenido en [23] para el caso no variante utiliza estandarizaciones diferentes para las familias de polinomios  $(L_n^{(\alpha)})_n$  y  $(L_n^{(\alpha, M_n)})_n$ , lo que complica las expresiones de los resultados que se puedan obtener a partir de él.

**Nota:** Los coeficientes de este resultado se han expresado de manera que puedan ser calculados e introducidos directamente en un ordenador.

La Proposición 5.1 nos da una expresión de  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ , como una combinación lineal de polinomios de Laguerre de distinto parámetro. El siguiente paso, con el objetivo de calcular la asintótica tipo Mehler-Heine, va a ser calcular el límite de los coeficientes  $B_{n,k}^{[j]}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para ello formulamos la siguiente proposición:

**Proposición 5.2** *Tenemos que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]} = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{C_{\alpha, j, M} \Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

con  $C_{\alpha, j, M} = (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1) + M \Gamma(\alpha + 1)$ .

**Demostración:** Para demostrar el resultado vamos a usar (5.4), el hecho que  $\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$  y la fórmula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{b-a} \Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = 1, \quad (5.11)$$

que puede ser deducida de la bien conocida fórmula de Stirling (ver por ejemplo [6, f.(5.11.13)]).

Analizamos en primer lugar los coeficientes  $A_{n,k}^{[j]}$  para  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
A_{n,k}^{[j]} &= \frac{(-1)^k j! \Gamma(\alpha + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \binom{n + \alpha}{n - j} \binom{n - k}{j + 1 - k} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - j + 1) \Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(n - j)} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) n^\beta M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1) n^\beta} \frac{n^{-j-\alpha}}{n^{-j-\alpha}} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - j + 1) \Gamma(\alpha + j + 1)} \\
&\times \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(n - j)} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha + 1) n^\beta M_n}{\Gamma(\alpha + j + 1) n^\beta} \frac{n^{-j-\alpha}}{n^{-j-\alpha}} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - j + 1) \Gamma(\alpha + j + 1)} \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \\
&\times \frac{\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(n - j)}.
\end{aligned}$$

Aplicando (5.11) podemos decir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta - 2j - \alpha - 1 + k} A_{n,k}^{[j]} = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(j + 1) M}{\Gamma^2(\alpha + j + 1) \Gamma(j - k + 2)}. \quad (5.12)$$

Ahora analicemos el comportamiento asintótico de  $A_{n,0}^{[j]}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Cuando  $n$  es suficientemente grande se tiene que  $\min\{n - j, j + 1\} = j + 1$ .



Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
A_{n,0}^{[j]} &= 1 + \frac{j!\Gamma(\alpha+1)M_n}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \binom{n+\alpha}{n-j-k} \binom{n-k}{j+1-k} \\
&= 1 + \frac{M_n\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j-k+1)\Gamma(\alpha+j+k+1)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(j-k+2)\Gamma(n-j)} \\
&= 1 + \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)n^\beta M_n}{n^\beta\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \frac{n^{-j-k-\alpha}}{n^{-j-k-\alpha}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j-k+1)\Gamma(\alpha+j+k+1)} \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(j-k+2)\Gamma(n-j)} \\
&= 1 + \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)n^\beta M_n}{n^\beta\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \frac{n^{-j-k-\alpha}}{n^{-j-k-\alpha}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-j-k+1)\Gamma(\alpha+j+k+1)} \frac{n^{-j+k-1}}{n^{-j+k-1}} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(j-k+2)\Gamma(n-j)}.
\end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir  $A_{n,0}^{[j]} = 1 + D_n$ , donde

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2j-\alpha-1} D_n &= \frac{M\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(\alpha+j+k+1)\Gamma(j-k+2)} \\
&= \frac{M\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)} \frac{(\alpha+j+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+j+2)} \\
&= \frac{(\alpha+j+1)M\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+2j+1)(\alpha+j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)} \\
&= \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+2j+1)\Gamma^2(\alpha+j+1)}.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\beta-2j-\alpha-1} A_{n,0}^{[j]} = \begin{cases} \infty, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ 1 + \frac{M\Gamma(\alpha + 1)}{(\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{M\Gamma(\alpha + 1)}{(\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

Usando (5.12) y (5.13) tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\beta-2j-\alpha-1+k} A_{n,k}^{[j]}}{n^{\beta-2j-\alpha-1} A_{n,0}^{[j]}} = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M\Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)}, & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

con  $C_{\alpha,j,M} = (\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1) + M\Gamma(\alpha + 1)$ .  $\square$

### 5.3. Asintótica local: Fórmulas tipo Mehler-Heine

Como decíamos en la introducción del capítulo, el objetivo principal de este capítulo es encontrar las fórmulas asintóticas tipo Mehler-Heine para los polinomios ortogonales  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$  con respecto al producto (5.3). El interés de este tipo de asintótica local viene motivado por el hecho de que permite describir de forma detallada las diferencias entre los polinomios tipo Laguerre-Sobolev y los polinomios clásicos de Laguerre. Sin embargo, disponemos de las técnicas para probar otras asintóticas, por ejemplo, se puede obtener la asintótica relativa entre las sucesiones de polinomios  $(L_n^{(\alpha, M_n)}(x))_n$  y  $(L_n^{(\alpha)}(x))_n$ , y de aquí, usando el Teorema de Perron, ver (3.25), la asintótica fuerte exterior de los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ .

El siguiente resultado nos da la asintótica de la sucesión  $\left(\frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)}\right)_n$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

**Proposición 5.3** *Tenemos que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1,$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .*

**Demostración:** Del Teorema de Perron (Teorema 3.5) sobre la asintótica fuerte de los polinomios clásicos de Laguerre,  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , podemos deducir la siguiente relación, (ver 3.25):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\ell-j)/2} \frac{L_{n+k}^{(\alpha+j)}(x)}{L_{n+h}^{(\alpha+\ell)}(x)} = (-x)^{(\ell-j)/2}, \quad j, \ell \in \mathbb{R}, \quad h, k \in \mathbb{Z}, \quad (5.15)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Entonces usando la Proposición 5.1 podemos escribir para  $n$  suficientemente grande,

$$\frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}}.$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{j+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)}{n^{k/2} L_n^{(\alpha)}(x)} \frac{1}{n^{k/2}} \right). \end{aligned}$$

Y ahora usando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k B_{n,k}^{[j]}$  es acotado para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ , usando que, por (5.15),  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\ell-j)/2} \frac{L_{n+k}^{(\alpha+j)}(x)}{L_{n+h}^{(\alpha+\ell)}(x)}$  es también acotado para cada  $x$  en compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k/2}} = 0$  se obtiene el resultado buscado.  $\square$

De este resultado se deduce directamente la asintótica fuerte exterior de los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ , que por la Proposición 5.3 es la misma que la de los polinomios de clásicos de Laguerre.

**Corolario 5.1** *Se tiene que*

$$L_n^{(\alpha, M_n)}(x) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} e^{x/2} (-x)^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2(-nx)^{1/2}} \left[ \sum_{k=0}^{p-1} C_k(x) n^{-k/2} + O(n^{-p/2}) \right],$$

en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , donde  $C_j(x)$  es independiente de  $n$ .

Acabamos de ver que la parte discreta del producto (5.3) no influye en la asintótica fuerte exterior de la sucesión de polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ . Entonces, ¿cómo influye esta parte discreta? La perturbación que se ha introducido al producto escalar estándar ha sido en el origen. Así, que intuitivamente parece razonable que esa perturbación afecte asintóticamente a los polinomios alrededor del origen. Además, nos surge la cuestión sobre si el tamaño de la sucesión  $(M_n)_n$  influirá en dicha asintótica y si lo hace, cómo será esta influencia.

Todo esto queda resuelto obteniendo la asintótica local alrededor del origen conocida como fórmulas tipo Mehler-Heine.

**Teorema 5.1** *Sean  $\alpha > -1$  y  $(M_n)_n$  una sucesión de números no negativos satisfaciendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n n^\beta = M > 0$ , para  $\beta \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} d_\alpha(x), & \text{si } \beta < 2j + \alpha + 1, \\ \lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda) c_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta = 2j + \alpha + 1, \\ c_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta > 2j + \alpha + 1, \end{cases}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ , con

$$\lambda = \frac{M\Gamma(\alpha + 1)}{(\alpha + 2j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1) + M\Gamma(\alpha + 1)},$$

donde  $J_\alpha$  es la función de Bessel de primera especie, y donde denotamos

$$c_{\alpha,k}(x) = x^{-\frac{\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}),$$

$$d_\alpha(x) = c_{\alpha,0}(x) + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} c_{\alpha,k}(x).$$

**Demostración:** Para demostrar este resultado debemos de comenzar reescalando la variable  $x \mapsto x/n$  de la fórmula de conexión entre las familias de polinomios ortogonales  $L_n^{(\alpha, M_n)}$  y  $L_n^{(\alpha)}$  dadas en (5.5), y tenemos que para  $n \geq j$ ,

$$\begin{aligned} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{n^\alpha} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\alpha+k} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Una vez que tenemos esta expresión, la demostración del resultado es sencilla, solo hay que:

1. Utilizar la Proposición 5.2.
2. Tener en cuenta que de la fórmula de Melher-Heine dada en (3.26) para los polinomios de Laguerre clásicos se obtiene para  $k$  fijo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} = x^{\frac{-\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}).$$

Usando todo esto en cada sumando de la expresión (5.16) se tiene el resultado buscado. Veámoslo por ejemplo para el caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$ . El resto de los casos se demuestra igual.

Partimos de la expresión de los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}$  con la variable reescalada, es decir, de (5.16).

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\alpha+k}.$$

Entonces aplicando límites se tiene que

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{j+1} n^k B_{n,k}^{[j]} \frac{L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x/n)}{(n-k)^{\alpha+k}} \left( \frac{n-k}{n} \right)^{\alpha+k} \right) \\
&= x^{\frac{-\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j+1) \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j-k+2)} x^{\frac{-\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}) \\
&= c_{\alpha,0}(x) + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j+1) \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M} \Gamma(j-k+2)} c_{\alpha,k}(x) \\
&= c_{\alpha,0}(x) + \frac{(\alpha + 2j + 1) M \Gamma(j+1) \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M}} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j-k+2)} c_{\alpha,k}(x) \\
&= c_{\alpha,0}(x) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma(j+1) \lambda \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j-k+2)} c_{\alpha,k}(x),
\end{aligned}$$

donde  $\lambda = \frac{M \Gamma(\alpha+1)}{C_{\alpha,j,M}}$ .

Sumando y restando  $\lambda c_{\alpha,0}(x)$  a la expresión anterior obtenemos  $\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$  como queríamos probar.  $\square$

**Nota:** Es importante aclarar la interpretación de este resultado. Por (5.4) se tiene que asintóticamente la sucesión  $(M_n)_n$  se comporta como  $M_n \sim \frac{M}{n^\beta}$ . El Teorema 5.1 establece que existe una cantidad,  $2j + \alpha + 1$ , que depende del orden de la derivada y del parámetro  $\alpha$ , tal que si el tamaño de la sucesión  $(M_n)_n$  es suficientemente pequeño, esto es,  $\beta > 2j + \alpha + 1$ , entonces la parte discreta del producto escalar (5.3) no ejerce ninguna influencia en el comportamiento asintótico local alrededor del origen. Sin embargo, si es suficientemente grande ( $\beta < 2j + \alpha + 1$ ) entonces sí influye en la asintótica local, esto es, la fórmula tipo Melher-Heine varía significativamente y la función límite es ahora una combinación lineal de  $j + 2$  funciones de la forma  $x^{\frac{-\alpha-k}{2}} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x})$ .

La situación de transición se da cuando  $\beta = 2j + \alpha + 1$ . Entonces, la función límite es una combinación convexa de las dos funciones límites de los casos  $\beta < 2j + \alpha + 1$  y  $\beta > 2j + \alpha + 1$ . Este es el único caso en donde la constante  $M$  determinada por (5.4) tiene influencia en el comportamiento asintótico.

Para ejemplificar estos comentarios, supongamos  $j = 3$  y  $\alpha = 2$ . En este caso, nuestro valor crítico es  $2j + \alpha + 1 = 9$ . Entonces, las fórmulas tipo

Mehler-Heine dadas en el Teorema 5.1 serán iguales para las sucesiones con término general

$$M_n = \frac{5}{n^7}, \quad M_n = \frac{4}{n^2}, \quad M_n = 8 \quad \text{ó} \quad M_n = n^{1000}$$

Por otra parte, las sucesiones con término general

$$M_n = \frac{3}{n^{10}}, \quad M_n = \frac{5}{n^{100} + 3} \quad \text{ó} \quad M_n = \frac{6}{n^{1000} + 1}$$

tienen la misma fórmula Melher-Heine que la que se satisface para los polinomios clásicos de Laguerre.

Una vez visto la interpretación, también es importante mencionar que este teorema obviamente generaliza los resultados obtenidos en [8] y en [9] para los casos  $j = 0$  y  $j = 1$ , respectivamente. Veámoslo.

Para su verificación usaremos la misma notación que usan los autores en [8] y en [9]. Sean:

$$\begin{aligned} g_{\alpha,i}(x) &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2i}(2\sqrt{x}), \\ h_{\alpha}(x) &= \frac{1}{\alpha+2} (g_{\alpha,2}(x) - (\alpha+2)g_{\alpha,1}(x) - g_{\alpha,0}(x)), \\ k_{\alpha}(x) &= \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+4)g_{\alpha,0}(x) + M(\alpha+2)h_{\alpha}(x)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+4) + M(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

En la siguiente proposición resumimos las fórmulas para los casos  $j = 0$  y  $j = 1$ , (ver [8] y [9]).

**Proposición 5.4** *Sea  $\alpha > -1$ .*

▪ **Caso  $j = 0$ .**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^{\alpha}} = \begin{cases} -g_{\alpha,1}(x), & \text{si } \beta < \alpha + 1, \\ \frac{\Gamma(\alpha+2)g_{\alpha,0}(x) - M g_{\alpha,1}(x)}{\Gamma(\alpha+2) + M}, & \text{si } \beta = \alpha + 1, \\ g_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta > \alpha + 1. \end{cases}$$

- **Caso**  $j = 1$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha, M_n)}(x/n)}{n^\alpha} = \begin{cases} h_\alpha(x), & \text{si } \beta < \alpha + 3, \\ k_\alpha(x) & \text{si } \beta = \alpha + 3, \\ g_{\alpha,0}(x), & \text{si } \beta > \alpha + 3. \end{cases}$$

*Ambos límites en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .*

**Demostración:** La demostración se hará por separado en cada uno de los tres casos. Para mostrar el resultado sólo es necesario recordar la propiedad de las funciones de Bessel, (3.22).

**Caso  $j=0$ :**

- Si  $\beta > \alpha + 1$  entonces  $g_{\alpha,0}(x) = x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) = c_{\alpha,0}(x)$ .
- Si  $\beta < \alpha + 1$ , entonces del Teorema 5.1 y usando (3.22) tenemos que

$$\begin{aligned} d_\alpha(x) &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right) \\ &= -x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = -g_{\alpha,1}(x). \end{aligned}$$

- Si  $\beta = \alpha + 1$ , Para demostrar este caso escribimos como quedaría la fórmula del Teorema 5.1 y luego desarrollamos la expresión que dan los autores en [8], y veremos que ambas coinciden.

Por el Teorema 5.1, al ser  $j = 0$  se tiene que  $\lambda = \frac{M}{\Gamma(\alpha+2)+M}$ ,

$$\begin{aligned} \lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) &= \lambda(c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)c_{\alpha,1}(x)) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\ &= c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)\lambda c_{\alpha,1}(x) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{M(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2) + M} x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Y ahora desarrollando la expresión dada en [8].

$$\frac{\Gamma(\alpha + 2)x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - Mx^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x})}{\Gamma(\alpha + 2) + M}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha + 2)x^{\frac{-\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) + Mx^{\frac{-\alpha}{2}} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{\frac{-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right)}{\Gamma(\alpha + 2) + M} \\
&= x^{\frac{-\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{M(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2) + M} x^{\frac{-\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Y con esto acaba de demostración de este caso.

### Caso $j=1$ :

- Si  $\beta > \alpha + 3$  entonces  $g_{\alpha,0}(x) = x^{\frac{-\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) = c_{\alpha,0}(x)$ .
- Si  $\beta < \alpha + 3$ . En primer lugar, observemos que aplicando varias veces (3.22) se obtiene:

$$J_{\alpha+4}(2\sqrt{x}) = (\alpha+3)(\alpha+2)x^{\frac{-2}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) - (\alpha+3)x^{\frac{-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) - J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}). \quad (5.17)$$

Vamos a comenzar con la expresión obtenida en [9] y veamos que podemos recuperar la obtenida en el Teorema 5.1. Para simplificar la notación, vamos a denotar

$$J_{\alpha+k} := J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}).$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
h_\alpha(x) &= -\frac{x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha + (\alpha + 2)x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2} - x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+4}}{(\alpha + 2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{J_\alpha + (\alpha + 2)J_{\alpha+2} - (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)} \\
&\quad - x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{(\alpha + 3)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1} + J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{J_\alpha + (\alpha + 3)J_{\alpha+2} + (\alpha + 3)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1} - (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{J_\alpha + (\alpha + 3)(\alpha + 1)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1} - (\alpha + 3)J_\alpha}{(\alpha + 2)} \\
&\quad - x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{(\alpha + 3)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1} - (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)} \\
&= -x^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{-(\alpha + 2)J_\alpha + (\alpha + 2)(\alpha + 3)x^{-\frac{1}{2}} J_{\alpha+1} - (\alpha + 2)(\alpha + 3)x^{-1}J_{\alpha+2}}{(\alpha + 2)} \\
&= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha - (\alpha + 3)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1} + (\alpha + 3)x^{-\frac{\alpha-2}{2}} J_{\alpha+2} \\
&= d_\alpha(x).
\end{aligned}$$

- Si  $\beta = \alpha + 3$ . Para demostrar este caso escribimos como quedaría la expresión dada en el Teorema 5.1 y luego comenzamos con la expresión que dan los autores en [9], y veremos que ambas coinciden. Usaremos la notación anterior donde  $J_{\alpha+k} = J_{\alpha+k}(2\sqrt{x})$  para de nuevo simplificar la notación.

$$\begin{aligned}
&\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\
&= \lambda c_{\alpha,0}(x) + \lambda(\alpha + 3)(-c_{\alpha,1}(x) + c_{\alpha,2}(x)) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) \\
&= c_{\alpha,0}(x) - \frac{M(\alpha + 3)c_{\alpha,1}(x)}{(\alpha + 3)(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 1) + M} + \frac{M(\alpha + 3)c_{\alpha,2}(x)}{(\alpha + 3)(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 1) + M} \\
&= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha - \frac{M(\alpha + 3)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M} + \frac{M(\alpha + 3)x^{-\frac{\alpha-2}{2}} J_{\alpha+2}}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1) + M}.
\end{aligned}$$

Ahora partimos de la expresión que dan los autores en [9] y veamos que recuperamos esta última expresión. Al igual que el caso anterior vamos a usar las expresiones (3.22) y (5.17).

$$\begin{aligned}
k_\alpha(x) &= \frac{((\alpha+1)\Gamma(\alpha+4) - M)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha - M(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+2} + Mx^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+4}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+4) + M(\alpha+2)} \\
&= \frac{((\alpha+1)\Gamma(\alpha+4) - M)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha - M(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+2} + Mx^{-\frac{\alpha}{2}}J_{\alpha+4}}{(\alpha+2)((\alpha+3)(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+1) + M)} \\
&= \frac{((\alpha+1)^2(\alpha+2)(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1) + M(\alpha+2))x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha}{(\alpha+2)((\alpha+1)^2(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1) + M)} \\
&+ \frac{-M(\alpha+3)(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha+1} + M(\alpha+3)(\alpha+2)x^{-\frac{\alpha-2}{2}}J_{\alpha+2}}{(\alpha+2)((\alpha+1)^2(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1) + M)}.
\end{aligned}$$

Simplificando de forma directa esta expresión recuperamos la misma que hemos obtenido anteriormente. Así queda probado este caso.

□

**Nota:** El Teorema 5.1 prueba la conjetura hecha en [9] sobre el comportamiento asintótico tipo Mehler-Heine de la sucesión de polinomios ortogonales  $(L_n^{(\alpha, M_n)})_n$  en el caso general.

## 5.4. Estudio de los ceros

En esta sección vamos a ver que los ceros de los polinomios Laguerre-Sobolev,  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ , son reales, simples y a lo más uno cae fuera del intervalo  $(0, \infty)$ . Posteriormente veremos que ocurre con los ceros de las funciones límite estudiadas en el Teorema 5.1 con el objeto de estudiar el comportamiento asintótico de los ceros de  $L_n^{(\alpha, M_n)}$ .

Para el siguiente resultado nos basaremos en las ideas de [29].

**Proposición 5.5** *Los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$  tienen  $n$  ceros reales y simples y a lo más uno se encuentra en el intervalo  $(-\infty, 0]$ .*

**Demostración:** Sean  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$  los ceros positivos y de orden impar de  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ . Entonces definimos  $\varphi(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_k)$ .

Esto hace que  $\varphi(x)L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$  no cambie de signo en el intervalo  $(0, \infty)$ . Queremos ver que el grado de  $\varphi(x)$  es  $n$  o  $n - 1$ . Lo vamos a probar por reducción al absurdo. Supongamos que grado de  $\varphi(x) \leq n - 2$ , entonces usando el hecho de que  $(x\varphi(x))^{(j)}(0) = j\varphi^{(j-1)}(0)$  y haciendo uso de la ortogonalidad de  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ .

$$0 = (\varphi(x), L_n^{(\alpha, M_n)}(x))_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty \varphi(x) L_n^{(\alpha, M_n)}(x) x^\alpha e^{-x} dx + \\ + M_n \varphi^{(j)}(0) (L_n^{(\alpha, M_n)}(x))^{(j)}(0),$$

$$0 = (x\varphi(x), L_n^{(\alpha, M_n)}(x))_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty x\varphi(x) L_n^{(\alpha, M_n)}(x) x^\alpha e^{-x} dx + \\ + j M_n \varphi^{(j-1)}(0) (L_n^{(\alpha, M_n)}(x))^{(j)}(0).$$

Puesto que  $\varphi(x) L_n^{(\alpha, M_n)}$  es positivo en el intervalo  $(0, \infty)$ , las integrales son positivas en ese intervalo, entonces se tiene que  $\varphi^{(j)}(0) (L_n^{(\alpha, M_n)}(x))^{(j)}(0) < 0$  y que  $\varphi^{(j-1)}(0) (L_n^{(\alpha, M_n)}(x))^{(j)}(0) < 0$ , esto a su vez implica que  $\varphi^{(j)}(0)$  y que  $\varphi^{(j-1)}(0)$  son del mismo signo. Pero esto es una contradicción con el hecho de que si  $p(x)$  es un polinomio con ceros reales y simples en  $(0, \infty)$  entonces  $\text{sgn}(p^{(j)}(0)) = (-1)^j \text{sgn}(p(0))$ . Por tanto,  $\varphi^{(j)}(0)$  y  $\varphi^{(j-1)}(0)$  han de tener signo distinto. Hemos llegado a una contradicción y por tanto el grado de  $\varphi$  es  $n$  o  $n - 1$ .  $\square$

Ahora vamos a pasar a buscar ceros negativos de las funciones límite  $c_{\alpha,0}$ ,  $d_\alpha$  y  $\lambda d_\alpha + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$  definidas en el Teorema 5.1. Recordamos que la función de Bessel de primera especie y de orden  $\alpha$  está definidas por (ver (3.21)):

$$J_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(i + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i + \alpha}$$

Por tanto,

$$c_{\alpha,k}(x) = x^{-(\alpha+k)/2} J_{\alpha+k}(2\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i! \Gamma(i + \alpha + k + 1)}.$$

A continuación probamos el siguiente resultado sobre ceros de las funciones límite en el Teorema 5.1.

**Proposición 5.6** Sean,

(a) Las funciones  $c_{\alpha,k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , no tienen ningún cero en  $(-\infty, 0]$ .

(b) Para  $j \geq 1$ , la función  $d_\alpha$  tiene exactamente un cero negativo. En el caso  $j = 0$ ,  $d_\alpha$  tiene un cero en el origen.

(c) Para  $j \geq 1$ , la función  $\lambda d_\alpha + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$  tiene un cero en  $(-\infty, 0]$  si y sólo si

$$M \geq \frac{(1 + \alpha + 2j)(1 + \alpha + j)\Gamma^2(1 + \alpha + j)}{j\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Para  $j = 0$ ,  $\lambda d_\alpha + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$  tiene solamente ceros positivos.

**Demostración:**

(a) Puesto que  $c_{\alpha,k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i+\alpha+k+1)}$ , claramente para todo  $x \in (-\infty, 0]$ ,  $c_{\alpha,k}(x) > 0$ , y por tanto no hay ceros en  $(-\infty, 0]$ .

(b) En el caso  $j = 0$ , aplicando (3.22) se tiene que

$$\begin{aligned} d_\alpha(x) &= c_{\alpha,0}(x) - (\alpha + 1)c_{\alpha,1}(x) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha + 1)x^{-\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} \left( J_\alpha(2\sqrt{x}) - \frac{(\alpha + 1)}{\sqrt{x}} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}) \right) \\ &= x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}) = -x c_{\alpha,2}(x). \end{aligned}$$

y con ello claramente  $x = 0$  es un cero de  $d_\alpha(x)$  y se tiene el resultado.

Para demostrar el resto de este caso se sigue el siguiente esquema:

1. Probar que  $d_\alpha(0) < 0$ .
2. Probar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} d_\alpha(x) = +\infty$ .
3. Probar que solamente puede haber un cero negativo.

Pasamos a ver el valor de  $d_\alpha(0)$ .

$$\begin{aligned}
d_\alpha(0) &= c_{\alpha,0}(0) + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} c_{\alpha,k}(0) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)\Gamma(\alpha + k + 1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - k + 2)\Gamma(\alpha + k + 1)} \\
&= -\frac{j}{(\alpha + j + 1)\Gamma(\alpha + 2)} < 0.
\end{aligned}$$

Ahora en el segundo paso vamos a realizar algunos cálculos:

$$\begin{aligned}
d_\alpha(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \\
&+ (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + k + 1)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left( 1 + \right. \\
&\quad \left. (\alpha + 2j + 1)\Gamma(j + 1) \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k}{\Gamma(j - k + 2) \prod_{c=1}^k (i + \alpha + c)} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left( 1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{j+1} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left( 1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right) \\
&+ \sum_{i=j+2}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i + \alpha + 1)} \left( 1 - \frac{\alpha + 2j + 1}{i + \alpha + j + 1} \right).
\end{aligned}$$

Tomando  $x < 0$ , podemos observar que el primer término en la última igualdad es un polinomio en  $(-x)$  de grado  $j+1$  con coeficiente líder positivo,

y el segundo término es una serie donde todos los términos son positivos cuando  $x \in (-\infty, 0)$ . Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} d_\alpha(x) = +\infty$ .

Ya que  $d_\alpha(x)$  es una función continua podemos decir que al menos hay un cero en  $(-\infty, 0)$ . Para ver que solamente hay uno basta con recordar que los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}$  tienen a lo más 1 cero negativo, de acuerdo con la Proposición 5.4, entonces aplicando el teorema de Hurwitz se tiene que a lo más solo puede haber uno.

(c) Para demostrar este caso se va seguir el siguiente esquema, muy similar al caso (b):

1. Probar que  $\lambda d_\alpha + (1 - \lambda)c_{\alpha,0} < 0$  si

$$M > \frac{(1 + \alpha + 2j)(1 + \alpha + j)\Gamma^2(1 + \alpha + j)}{j\Gamma(\alpha + 1)}, \quad j \geq 1.$$

2. Probar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) = +\infty$ .

3. Probar que solamente puede haber un cero negativo.

Igual que en el caso anterior el caso  $j = 0$  se demuestra por separado. En este caso, sabemos que los ceros de los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}$  son reales, simples, y positivos. Usando esto junto con el hecho de que  $\lambda d_\alpha(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(0) = \left(1 - \frac{M}{M + \Gamma(\alpha + 2)}\right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} > 0$ , es suficiente aplicar el teorema de Hurwitz para obtener el resultado de que para este caso  $\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x)$  no tiene ceros negativos.

Para  $j = 1$  veamos qué valor tiene  $\lambda d_\alpha(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(0)$ ;

$$\begin{aligned} \lambda d_\alpha(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{(-1)^k \Gamma(j + 1) M (\alpha + 2j + 1) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j - k + 2) \Gamma(\alpha + k + 1) (\Gamma^2(\alpha + j + 1) (\alpha + 2j + 1) + M \Gamma(\alpha + 1))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(\alpha + 2j + 1) M}{(\alpha + j + 1) (M \Gamma(\alpha + 1) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1))}. \end{aligned}$$

Entonces,  $\lambda d_\alpha(0) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x) < 0$  si y sólo si

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(\alpha + 2j + 1) M}{(\alpha + j + 1) (M \Gamma(\alpha + 1) + (\alpha + 2j + 1) \Gamma^2(\alpha + j + 1))} < 0 \Leftrightarrow$$

$$M > \frac{(\alpha + 2j + 1)(\alpha + j + 1)\Gamma^2(\alpha + j + 1)}{j\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Usando lo probado en los casos (a) y (b) y que  $\lambda \in (0, 1)$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x)) = +\infty.$$

Finalmente realizando un razonamiento similar al del caso (b), obtenemos

- Si  $M > \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j}$  podría haber 1, 3, 5, ... ceros, pero aplicando el teorema de Hurwitz a lo más hay uno, por lo tanto deducimos que en este caso hay un solo cero negativo.
- Si  $M < \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j}$  podría haber 0, 2, 4, ... ceros negativos. Pero como sabemos que los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}$  tienen a lo más 1 cero negativo, y utilizando el teorema de Hurwitz concluimos que para este valor de  $M$  no hay ceros negativos.
- Si  $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{j\Gamma(\alpha+1)}$  la función límite  $\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}(x)$  tiene un cero en  $x = 0$ .  $\square$

En estos momentos ya estamos en condiciones de establecer el comportamiento asintótico de los ceros de  $L_n^{(\alpha, M_n)}$ . En concreto, damos la asintótica de los ceros reescalados.

**Proposición 5.7** Sean  $s_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,n}$  los ceros de  $L_n^{(\alpha, M_n)}$ . Entonces,

(a) Si  $\beta < 2j + \alpha + 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = d_{\alpha,i}$$

donde  $d_{\alpha,i}$  denota el  $i$ -ésimo cero real de la función  $d_\alpha$ .

(b) Si  $\beta = 2j + \alpha + 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = t_{\alpha,i}$$

donde  $t_{\alpha,i}$  denota el  $i$ -ésimo cero real de la función  $\lambda d_\alpha + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$ .

(c) Si  $\beta > 2j + \alpha + 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ns_{n,i} = \frac{j_{\alpha,i}^2}{4}$$

donde  $j_{\alpha,i}$  son los ceros positivos de la función  $J_\alpha$ .



**Demostración:** La demostración de este resultado se obtiene de aplicar el teorema de Hurwitz, el Teorema 5.1 y la Proposición 5.6.  $\square$

## 5.5. Experimentación numérica

Las fórmulas tipo Mehler-Heine dadas en el Teorema 5.1 son especialmente adecuadas para describir el cero más pequeño de los polinomios  $L_n^{(\alpha, M_n)}(x)$ . Usando el software *Mathematica* vamos a calcular los cuatro primeros ceros reescalados de dichos polinomios hasta el grado 600. En las siguientes tablas y figuras mostraremos ciertas experimentaciones numéricas, prestando especial atención a los diferentes casos vistos en la Proposiciones 5.6 y 5.7. También es importante aclarar que en todos los casos se han tomado la sucesiones de término general  $M_n = \frac{M}{n^\beta}$ , por comodidad.

Cuadro 5.1: Caso  $\beta < 2j + \alpha + 1$

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	-16,499895	5,649929	17,916242	35,758173
$n = 150$	-15,941311	5,787543	18,270102	36,342549
$n = 300$	-15,808299	5,823032	18,362221	36,498456
$n = 600$	-15,742730	5,840946	18,408856	36,578796
<b>Limit</b>	$\mathbf{d}_{1,1} = -15,677791$	$\mathbf{d}_{1,2} = 5,858974$	$\mathbf{d}_{1,3} = 18,455882$	$\mathbf{d}_{1,4} = 36,658511$

Los valores utilizados son  $\beta = 2/3$ ,  $j = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $M = 10$ .

En esta primera tabla se observa, de acuerdo con la Proposición 5.6, que  $d_\alpha(x)$  tiene un cero negativo. Además en las figuras 5.1 y 5.2 podemos ver estos polinomios y la función límite representados. Hay que decir que en la figura 5.2 se ha realizado un “zoom” para mostrar con más claridad el primer cero.

Veamos el caso  $\beta > 2j + \alpha + 1$ . De acuerdo con la Proposición 5.6, para este caso no hay ceros negativos como se puede ver en la tabla 5.2. Las figuras 5.3 y 5.4 muestran los resultados de esta tabla.

Por último vamos a ilustrar el caso (c) de la Proposición 5.6. En esa Proposición se probó que la función  $\lambda d_\alpha(x) + (1 - \lambda)c_{\alpha,0}$  tiene un cero negativo si  $M > \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)j}$ . Si  $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)j}$  la función límite tiene un cero en  $x = 0$ . Para ello tomaremos los valores  $j = 2$ ,  $\alpha = -0,5$  y  $\beta = 2j + \alpha + 1 = 4,5$ ; para estos valores se realizará una experimentación con

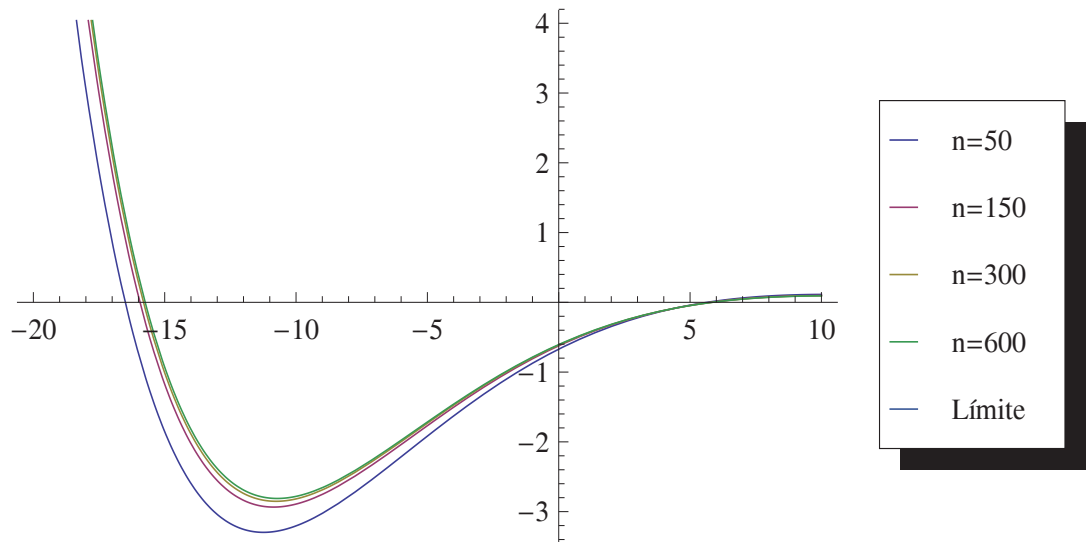


Figura 5.1: Caso  $\beta < 2j + \alpha + 1$

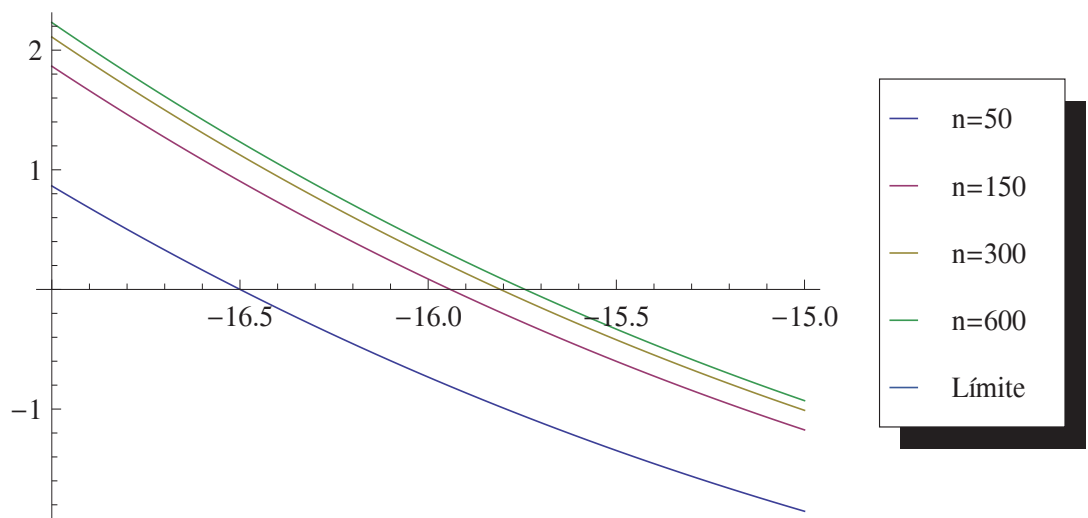


Figura 5.2: Caso  $\beta < 2j + \alpha + 1$

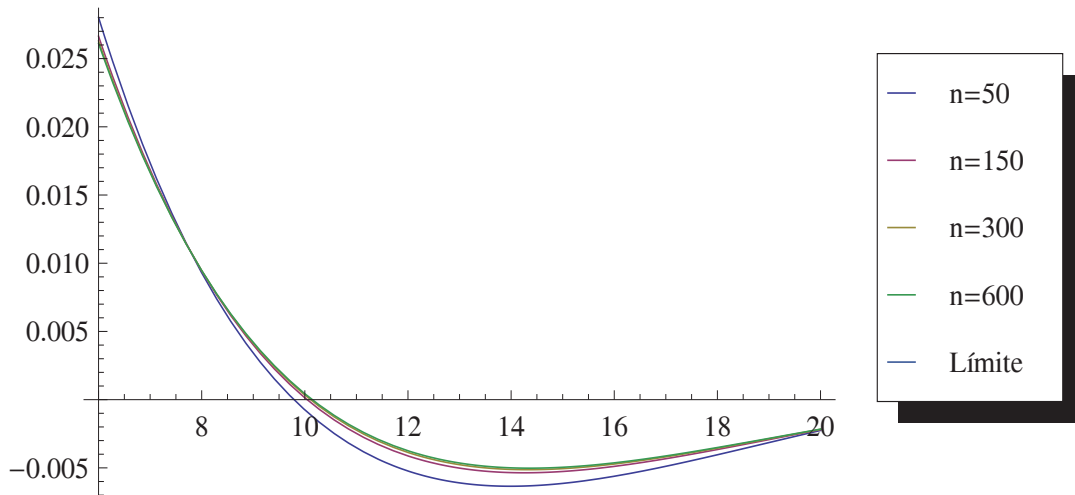


Figura 5.3: Caso  $\beta > 2j + \alpha + 1$

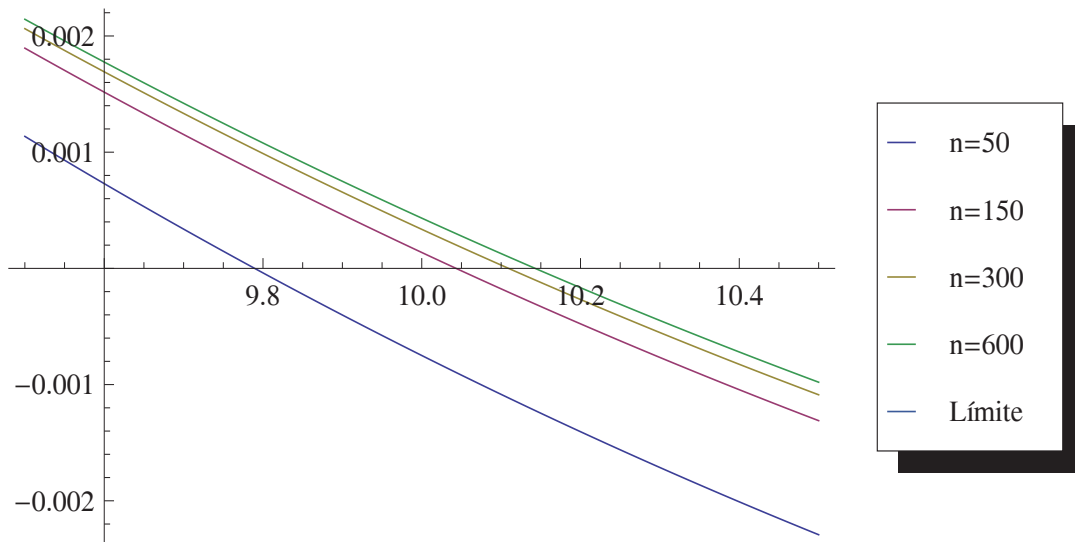


Figura 5.4: Caso  $\beta > 2j + \alpha + 1$

Cuadro 5.2: Caso  $\beta > 2j + \alpha + 1$ 

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	9,789487	22,922933	40,778399	63,406163
$n = 150$	10,043227	23,508339	41,798630	64,950778
$n = 300$	10,109353	23,662250	42,070188	65,368620
$n = 600$	10,142840	23,740411	42,208618	65,582661
<b>Limit</b>	$\frac{j_{3,1}^2}{4} = 10,176616$	$\frac{j_{3,2}^2}{4} = 23,819393$	$\frac{j_{3,3}^2}{4} = 42,348862$	$\frac{j_{3,4}^2}{4} = 65,800214$

Los valores utilizados son  $\beta = 20$ ,  $j = 5$ ,  $\alpha = 3$ ,  $M = 32$ .

$M = 6$  (figuras 5.5 y 5.6), otra con  $M = \frac{(1+\alpha+2j)(1+\alpha+j)\Gamma^2(1+\alpha+j)}{\Gamma(\alpha+1)^j} = \frac{405\sqrt{\pi}}{128} \approx 5,60$  (figuras 5.7 y 5.8) y finalmente  $M = 5$  (figuras 5.9 y 5.10).

Cuadro 5.3: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$ ,

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 5$	0,361472	4,013769	13,273140	29,911532
$n = 25$	0,045234	3,322179	12,692342	27,484004
$n = 50$	-0,004229	3,265756	12,708104	27,510178
$n = 150$	-0,037898	3,232452	12,729267	27,562443
$n = 300$	-0,046386	3,224667	12,735899	27,579910
$n = 600$	-0,050639	3,220855	12,739418	27,589310
<b>Limit</b>	$t_{-0,5,1} = -0,054898$	$t_{-0,5,2} = 3,217098$	$t_{-0,5,3} = 12,743072$	$t_{-0,5,4} = 27,599156$

Los valores utilizados son  $\beta = 4,5$ ,  $j = 2$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $M = 6$ .

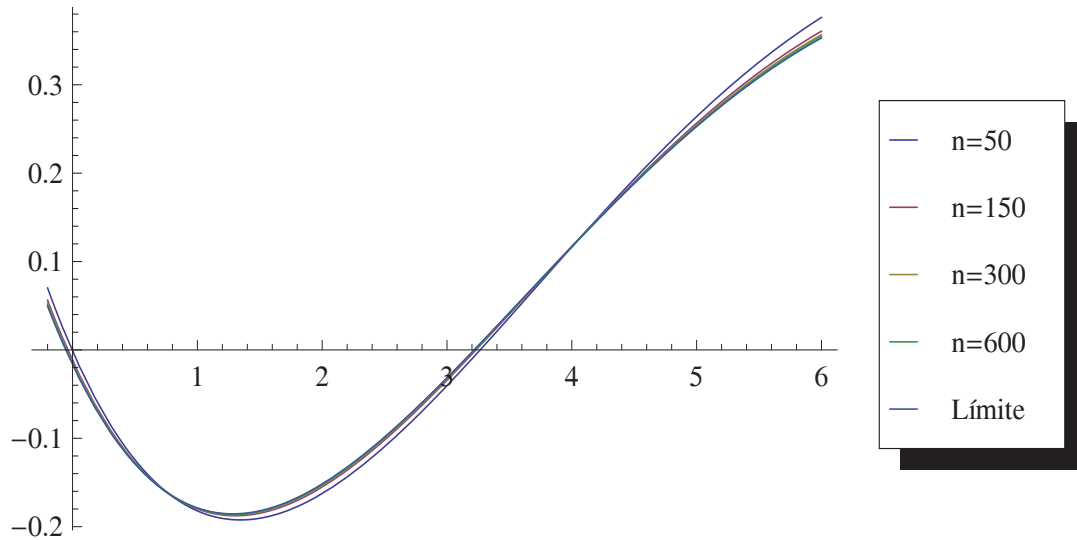


Figura 5.5: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = 6$

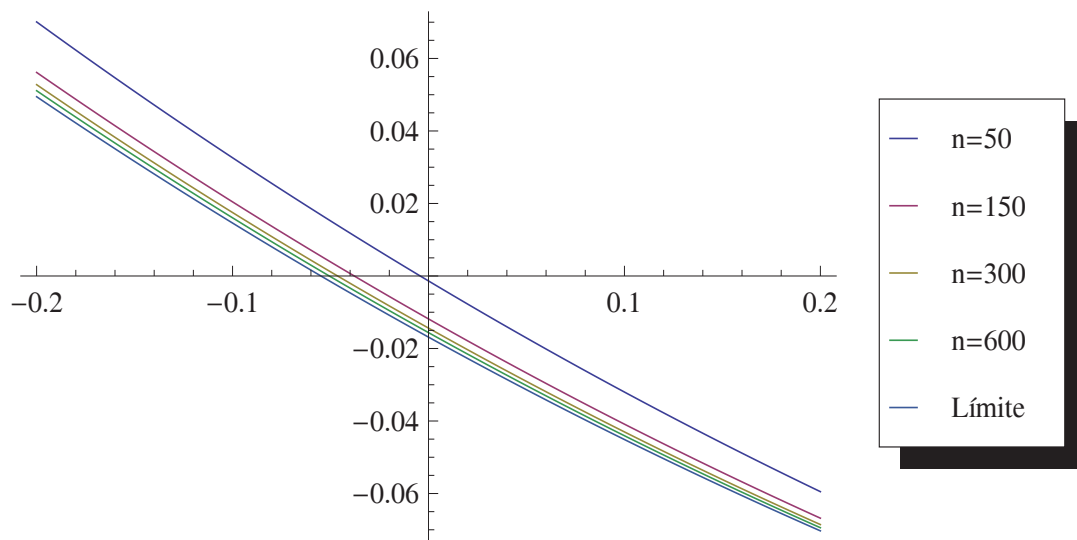


Figura 5.6: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = 6$

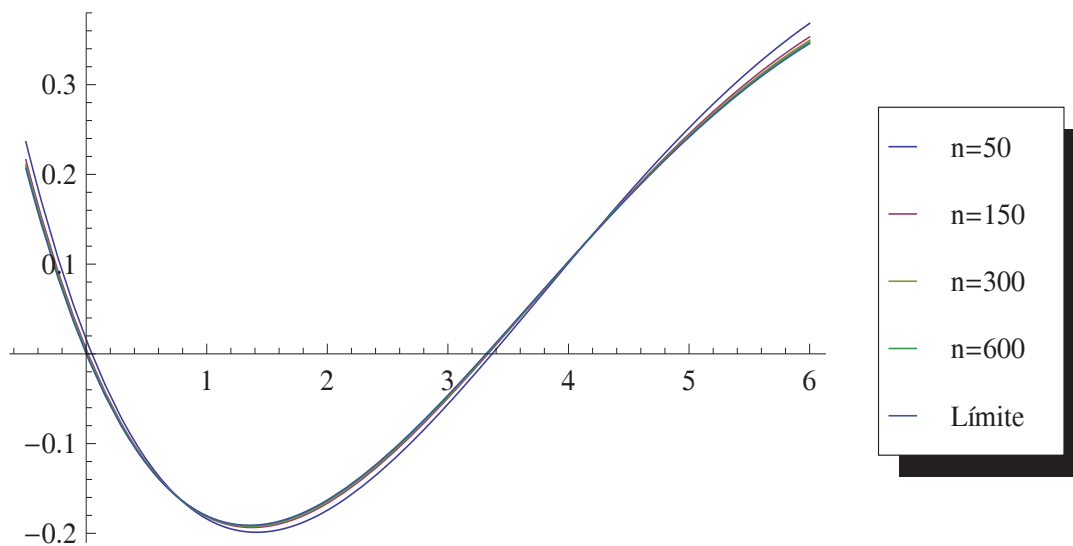


Figura 5.7: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$

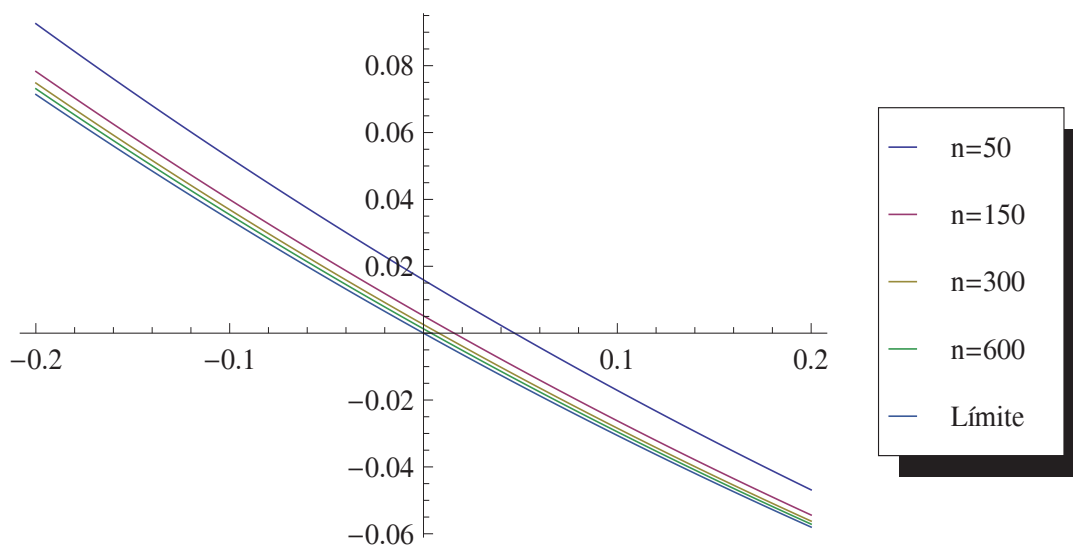


Figura 5.8: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$

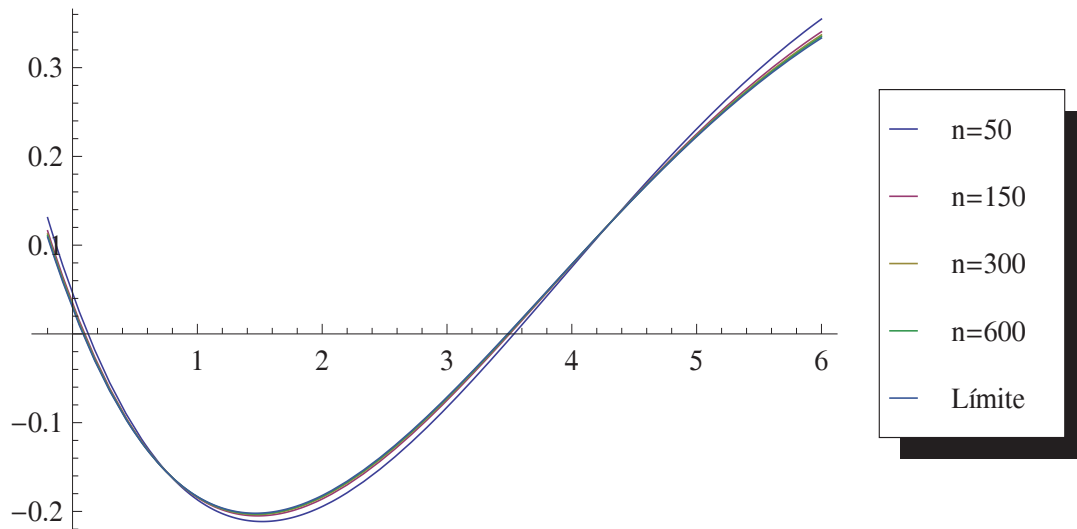


Figura 5.9: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = 5$

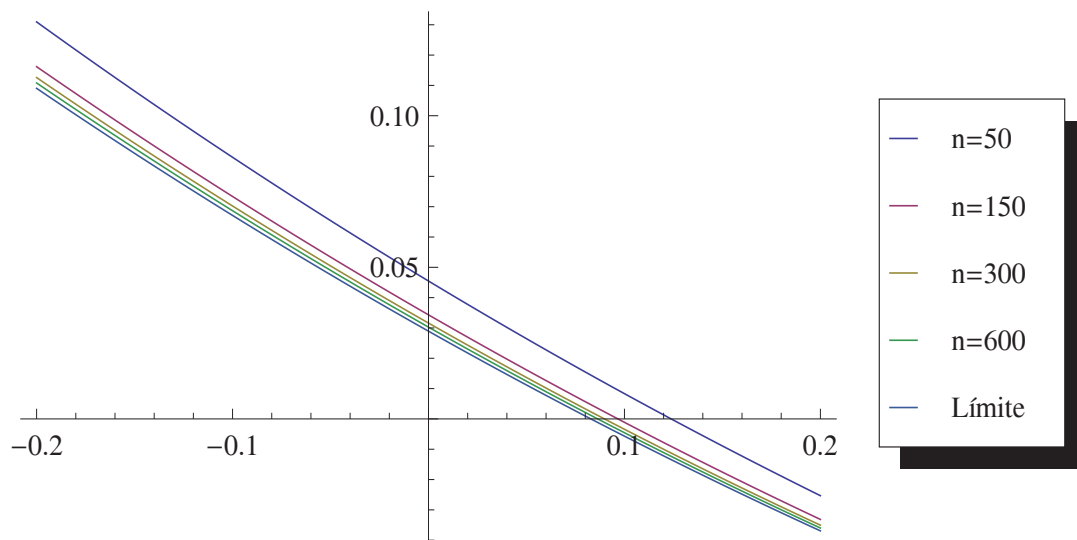


Figura 5.10: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$  y  $M = 5$

Cuadro 5.4: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$ ,

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	0,046939	3,366935	12,798708	27,592451
$n = 150$	0,015775	3,332807	12,818347	27,643538
$n = 300$	0,007902	3,324785	12,824596	27,660707
$n = 600$	0,004400	3,320850	12,827923	27,669958
<b>Limit</b>	$t_{-0,5,1} = 0$	$t_{-0,5,2} = 3,316967$	$t_{-0,5,3} = 12,831384$	$t_{-0,5,4} = 27,679654$

Los valores utilizados han sido  $\beta = 4,5$ ,  $j = 2$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $M = \frac{405\sqrt{\pi}}{128}$ .

Cuadro 5.5: Caso  $\beta = 2j + \alpha + 1$ ,

	$ns_{n,1}$	$ns_{n,2}$	$ns_{n,3}$	$ns_{n,4}$
$n = 50$	0,123833	3,536847	12,953595	27,733338
$n = 150$	0,096668	3,502138	12,971011	27,782683
$n = 300$	0,089784	3,493918	12,976693	27,799408
$n = 600$	0,086323	3,489870	12,979735	27,808435
<b>Limit</b>	$t_{-0,5,1} = 0,082864$	$t_{-0,5,2} = 3,485872$	$t_{-0,5,3} = 12,982911$	$t_{-0,5,4} = 27,817907$

Los valores utilizados han sido  $\beta = 4,5$ ,  $j = 2$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $M = 5$ .



# Bibliografía

- [1] M. ALFARO, F. MARCELLÁN, A. RONVEAUX, M.-L REZOLA, *On orthogonal polynomials of Sobolev Type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal, **23** (3), 1992, 737–757.
- [2] M. ALFARO, J. J. MORENO–BALCÁZAR, A. PEÑA, M.-L REZOLA, *A new approach to the asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **163**, 2011, 460–480.
- [3] P. ALTHAMMER, *Eine Erweiterung des Orthogonalitätsbegriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation*, J. Reine Angew. Math., **211**, 1962, 192–204.
- [4] R. ÁLVAREZ-NODARSE, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003.
- [5] R. ÁLVAREZ-NODARSE, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials*, Indag.Math., **15**(2), 2004, 151–165.
- [6] R.A. ASKEY, R. ROY, *Gamma function*, en NIST handbook of mathematical functions U.S. Dept. Commerce Washington, DC, 2010, 135–147.
- [7] L. CASTAÑO–GARCÍA, *Aportaciones a la teoría asintótica de polinomios ortogonales de Sobolev*, Tesis Doctoral, Universidad de Almería, 2010.
- [8] L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Zeros of varying Laguerre-Krall orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., **141**(6), 2013, 2051–2060.

- [9] L. CASTAÑO–GARCÍA, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Varying Sobolev type orthogonal polynomials: the Laguerre case*, Jaen J. Approx, **4**(2), 2012, 85–99.
- [10] T. S. CHIHARA, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.
- [11] H. DUEÑAS, F. MARCELLÁN, *The Laguerre–Sobolev–Type Orthogonal Polynomials*, J. Approx. Theory, **162**, 2010, 421–440.
- [12] W. D. EVANS, L.L. LITTLEJOHN, F. MARCELLÁN, C. MARKET, A. RONVEAUX, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **26**(2), 1995, 446–467.
- [13] W. GAUTSCHI, *Orthogonal Polynomials. Computation and Approximation*, Oxford University Press, New York, 2004.
- [14] M. E. H. ISMAIL, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [15] R. KOEKOEK, *Generalizations of Laguerre polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **153**, 1990, 576–590.
- [16] R. KOEKOEK, T. H. KOORNWINDER, R. F. SWARTTOUW, R. WONG, *Orthogonal Polynomials*, en NIST handbook of mathematical functions U.S. Dept. Commerce Washington, DC, 2010.
- [17] D. C. LEWIS, *Polynomial Least Square Approximations.*, Amer. J. Math., **6**, 1947, 273–278.
- [18] G. LÓPEZ, F. MARCELLÁN, W. VAN ASSCHE, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx., **11**(1), 1995, 107–137.
- [19] J. F. MAÑAS MAÑAS, F. MARCELLÁN J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Local asymptotics for a family of Sobolev type orthogonal polynomials*, Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012, 785–791. ISBN:978-84-615-5392-1.

- [20] J. F. MAÑAS MAÑAS, F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Varying discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials: asymptotic behavior and zeros*, Appl. Math. Comput., **222**, 2013, 612–618.
- [21] F. MARCELLÁN, M. ALFARO, M. L. REZOLA, *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions*, J. Comput. Appl. Math., **48**, 1993, 113–131.
- [22] F. MARCELLÁN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Asymptotics and zeros of Sobolev orthogonal polynomials on unbounded supports*, Acta Appl. Math. **94**(2), 2006, 163–192.
- [23] F. MARCELLÁN, F. R. RAFAELI, *Monotonicity and asymptotics of zeros of Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials of higher order derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc., **139**, 2011, 3929–3936.
- [24] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, J. Comput. Appl. Math. **127**, 2001, 255–266.
- [25] A. MARTÍNEZ–FINKELSHTEIN, J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Métodos Numéricos: Aproximación en  $\mathbb{R}$* , Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería, Almería, 1999.
- [26] J. J. MORENO–BALCÁZAR, *Contributions to the theory of Sobolev orthogonal polynomials*, Book “Select works of Francisco J. Marcellán Español” Universidad Carlos III de Madrid, 2012, 55–70.
- [27] H. G. MEIJER, *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space. I. The non-discrete case*, 31st Dutch Mathematical Conference (Groningen, 1995), **14**(4), 1996, 93–112.
- [28] H. G. MEIJER, *Sobolev orthogonal polynomials with a small number of real zeros*, J. Approx. Theory, **77**(3), 1994, 305–313.
- [29] H. G. MEIJER, *Zero Distribution of Orthogonal Polynomials in a certain discrete Sobolev Space*, J. Math. Anal. Appl., **172**, 1993, 520–532.
- [30] P. NEVAI, *Orthogonal Polynomials*, Men. Amer. Math. Soc., **213**, Providence, RI, 1979.
- [31] A. F. NIKIFOROV, V. B. UVAROV, *Special Functions of Mathematical Physics.*, Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

- [32] F. R. RAFAELI, Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real, Tesis Doctoral. Universidad Estadual de Campinas, 2010.
- [33] I. A. ROCHA, F. MARCELLÁN, L. SALTO, *Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product*, J. Approx. Theory., **121**(2), 2003, 336–356.
- [34] I. A. ROCHA, L. SALTO, *Asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a discrete-complex Sobolev inner product*, J. Comput. Appl., **178**, 2005, 1–19.
- [35] G. SZEGŐ, Orthogonal Polynomials, *Colloq. Publ.* vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [36] N. M. TEMME, Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York, 1996.