UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Grado de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

ESTUDIO DE LAS APLICACIONES CONFORMES EN EL PLANO COMPLEJO

Isabel González Fernández

21 Julio 2014

Dirigido por:
Antonio Morales Campoy

Índice general

Capítulo 1

Objetivos

Este trabajo es una continuación natural de la asignatura Análisis Complejo, la cual forma parte del plan de estudios del grado de Matemáticas de la Universidad de Almería, y constituye una primera aproximación a la teoría de las funciones complejas.

Pretendemos estudiar las funciones complejas desde un punto de vista geométrico. Debido a que el grafo de una función compleja se puede ver como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, no es posible su representación de la misma manera que se hacía con las funciones reales. Sin embargo, estudiando la forma en que una función compleja transforma algunas regiones o curvas del plano (rectas, circunferencias, discos, semiplanos...) en otras también del plano, podemos obtener cierta intuición geométrica sobre el comportamiento de dicha función. Curiosamente, aunque la mayoría de los resultados que vamos a considerar puedan interpretarse geométricamente, las técnicas de demostración que vamos a usar son puramente analíticas.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. En el presente capítulo fijaremos los objetivos que nos proponemos alcanzar. En el segundo presentaremos los resultados y definiciones que vamos a necesitar en el resto del trabajo. La mayoría son previamente conocidos de la asignatura de Análisis Complejo por lo que no hemos incluido sus demostraciones. En el tercer capítulo procederemos al estudio en profundidad de las aplicaciones y transformaciones conformes y de sus propiedades más interesantes.

Comenzaremos considerando aquellas aplicaciones que conservan ángulos entre curvas en el plano complejo. A las funciones que verifican esta propiedad geométrica se les llamará aplicaciones conformes. Se demostrará que bajo ciertas condiciones naturales son holomorfas y con derivada no nula. Por tanto, las funciones holomorfas e inyectivas en abiertos son un primer ejemplo de aplicaciones conformes. En tal caso, la función inversa es también holomorfa en la imagen del abierto. Diremos que dos abiertos del plano complejo son isomorfos si existe una biyección holomorfa entre ellos. Desde el punto de vista que estamos siguiendo, dichos abiertos son indistinguibles. Por eso estamos interesados en estudiar los isomorfismos conformes entre abiertos del plano complejo. La consideración de las funciones meromorfas lleva de forma natural a definir el plano complejo ampliado y a estudiar una clase importante de transformaciones en dicho plano, las transformaciones de Möbius. El estudio de las propiedades de dichas transformaciones motiva a su vez la definición de la razón doble de una terna de números complejos. Este concepto será el ideal para hablar de simetría en el plano ampliado y, posteriormente, para determinar las transformaciones de Möbius que dejan invariante ciertos dominios del plano complejo, como por ejemplo el disco unidad. Con la ayuda del lema de Schwarz también se podrán determinar los isomorfimos conformes que dejan invariantes dichos dominios. Este lema es también clave a la hora de determinar aquellos abiertos del plano complejo que son isomorfos al disco unidad. De ello se ocupará el teorema de Riemann. Su demostración se apoya en varios resultados relacionados con la convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones de funciones holomorfas en un abierto, sobre todo en el teorema de Montel. Este teorema caracteriza los subconjuntos relativamente compactos del espacio de funciones holomorfas en un abierto dotado de conveniente topología. El tercer capítulo finaliza con la demostración de una de las consecuencias del teorema de Riemann, la caracterización de los dominios simplemente conexos.

Finalmente en el capítulo cuarto destacamos los resultados y conceptos más interesantes considerados a lo largo del trabajo.

Capítulo 2

Antecedentes bibliográficos

La asignatura Análisis Complejo comienza con el estudio de las propiedades algebraicas y topológicas de los números complejos y de las funciones complejas (límite y continuidad), para más tarde introducir los conceptos de holomorfía y analiticidad.

Gracias al uso de la integral de Riemann para funciones complejas de variable real, se obtienen algunos de los resultados más interesantes de la teoría de Cauchy elemental. Uno de ellos es la fórmula de Cauchy para circunferencias, que permite representar los valores que una función holomorfa toma en un disco conociendo los valores que toma en la circunferencia asociada. De dicha fórmula se deduce uno de los resultados más importantes de la teoría de funciones holomorfas, el teorema de Taylor, que afirma que toda función holomorfa es analítica.

A continuación se pone de manifiesto que en algunos aspectos las funciones holomorfas se comportan localmente de forma similar a las funciones polinómicas. Ello se debe a que las funciones holomorfas son analíticas y, por tanto, localmente, son límites uniformes de sucesiones de funciones polinómicas. Como consecuencia, los ceros de las funciones holomorfas comparten algunas propiedades con los de las funciones polinómicas.

El estudio de algunas funciones reales de variable compleja asociadas a cada función holomorfa lleva de forma natural a introducir las funciones subarmónicas y armónicas. La asignatura finaliza con la generalización de algunos resultados de la teoría de Cauchy elemental. Como consecuencia, se obtiene el teorema de los residuos, el cual tiene muchas y sorprendentes aplicaciones.

A continuación destacamos aquellos resultados previos que serán de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo.

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Se dice que f es **derivable** en z_0 cuando existe:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

El valor de dicho límite se llama **derivada** de f en z_0 y se nota $f'(z_0)$. Se dice que una función es **derivable** en Ω si lo es en cada uno de sus puntos.

El siguiente resultado pone de manifiesto el carácter restrictivo de la derivabilidad compleja frente a la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.1.1 *(Cauchy-Riemann) Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Definimos:*

$$u(x, y) = Ref(x + iy),\ v(x, y) = Imf(x + iy)$$

para todo $x + iy \in \Omega$. Son equivalentes:
a) f es derivable en z_0
b) u, v son diferenciables en z_0 y además se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

En el resto de este trabajo expresaremos, como en el anterior teorema, los elementos de $\mathbb{C}$ como números complejos o como vectores de $\mathbb{R}^2$ según convenga.

En variable compleja las funciones derivables en un abierto del plano complejo se suelen llamar **holomorfas**. Introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{H}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}$$

Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman funciones **enteras**.

El que muchos resultados sobre funciones holomorfas sean ciertos para abiertos que son conexos nos lleva a considerar la siguiente definición. Llamaremos **dominios** a los abiertos conexos de $\mathbb{C}$.

Presentamos a continuación una propiedad de las funciones holomorfas usada en la demostración del lema de Schwarz.

Teorema 2.1.2 *(Principio del módulo máximo) Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un máximo relativo es constante.*

El siguiente teorema también es consecuencia del principio del módulo máximo.

Teorema 2.1.3 *(aplicación abierta) Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.*

Presentamos ahora un resultado sobre el comportamiento local de las funciones holomorfas cuyo corolario será de gran utlidad a lo largo del trabajo.

Teorema 2.1.4 *Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Sea m el orden del cero que tiene en a la función $z \mapsto f(z) - f(a)$. Entonces existen $\delta, \varepsilon > 0$ tales que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y para todo $w \in D(f(a), \varepsilon) \setminus \{f(a)\}$ se verifica que hay exactamente m puntos $z_k \in D(a, \delta)$, $1 \leq k \leq m$, tales que $f(z_k) = w$.*

Corolario 2.1.5 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva. Entonces $f'(a) \neq 0$ para cada $a \in \Omega$.*

En el estudio de las funciones holomorfas, tiene interés el caso de las funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto. Para ello introducimos la noción de singularidad aislada. Sean Ω un abierto, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Si no es posible definir f en a de manera que sea derivable en a, se dice que f presenta una **singularidad aislada** en a. Diremos que f tiene un **polo** en a si $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, y que f tiene una **singularidad esencial** si no existe $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

Diremos que una función f es **meromorfa** en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ si existe un conjunto $P \subset \Omega$ de puntos aislados en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$ y f tiene un polo en cada punto de P. Claramente, toda función holomorfa es también una función meromorfa.

Presentamos la descomposición canónica de una función en una singularidad aislada que se usará en la descripción de las transformaciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$.

Proposición 2.1.6 *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$*,* $a \in \Omega$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$*. Entonces existen funciones* g, h *únicas tales que:*
a) $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* h *es una función entera que se anula en cero*
b) para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$ *se verifica que* $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z-a})$

Mediante el artificio de invertir la variable, podemos estudiar el comportamiento en ∞ de una función holomorfa f sin más que estudiar el comportamiento en 0 de la función $z \to f(1/z)$. Esto nos permite hablar de singularidades en el ∞.

Proposición 2.1.7 *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$*,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $R > 0$*. Son equivalentes:*
a) f *tiene una singularidad en* ∞
b) para todo $\rho \geq R$ *el conjunto* $\{f(z) : |z| > \rho\}$ *es denso en* $\mathbb{C}$

Proposición 2.1.8 *Una función entera es una función polinómica no constante si, y sólo si, tiene un polo en* ∞*.*

Como consecuencia de estas proposiciones obtenemos el siguiente resultado, el cual a su vez nos permitirá más adelante determinar los automorfismos conformes de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.9 *Las funciones enteras e inyectivas son las funciones polinómicas de grado uno.*

Demostración Sea f una función entera e inyectiva. Si f tuviera una singularidad esencial en ∞, sabemos, por la proposición 2.1.7, que el conjunto $\{f(z) : |z| > 1\}$ sería denso en $\mathbb{C}$. Y como, en virtud del teorema de la aplicación abierta, el conjunto $\{f(z) : |z| < 1\}$ es abierto, se tendría que:

$$\{f(z) : |z| > 1\} \cap \{f(z) : |z| < 1\} \neq \emptyset$$

lo cual contradice que f es inyectiva. La proposición 2.1.8 nos dice ahora que f es una función polinómica. Pero como f es inyectiva debe ser necesariamente una función polinómica de grado 1. ∎

Capítulo 3

Resultados y discusión

3.1. Aplicaciones conformes

Una aplicación conforme es aquella que preserva ángulos en cada punto de un dominio. En la presente sección se caracterizarán dichas aplicaciones y se estudiarán las funciones meromorfas e inyectivas de $\mathbb{C}$ que servirán para introducir las transformaciones de Möbius, una vez extendidas al plano complejo ampliado.

Sea $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva. Diremos que γ tiene **tangente** en un punto $z = \gamma(t)$ cuando es derivable en t y $\gamma'(t) \neq 0$. El vector $\gamma'(t)$ se llama **vector tangente** a γ en $z = \gamma(t)$.

Dadas dos curvas $\gamma, \sigma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ que se cortan en un punto $z = \gamma(t) = \sigma(s)$ y que tienen tangente en dicho punto, se define el **ángulo** de la curva γ con la curva σ en el punto z por:

$$\widehat{\gamma,\sigma}(z) = Arg\frac{\gamma'(t)}{\sigma'(s)}$$

donde como es usual $Arg(z)$ denota el conjunto de todos los argumentos de cualquier complejo no nulo z. Observa que $\widehat{\gamma,\sigma}(z) \neq \widehat{\sigma,\gamma}(z)$.

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua en Ω. Se dice que f es **conforme** en un punto z de Ω si f transforma curvas con tangente en z en curvas con tangente en $w = f(z)$ y conserva ángulos entre curvas que se cortan en z, es decir, si $\gamma, \sigma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ son curvas en Ω que se cortan en

z y que tienen tangente en z, entonces $f \circ \gamma$ y $f \circ \sigma$ tienen tangente en w y:

$$\widehat{\gamma, \sigma}(z) = \widehat{f \circ \gamma, f \circ \sigma}(w)$$

Se dice que f es **conforme** en Ω si es conforme en todos sus puntos.

Proposición 3.1.1 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $z_0 \in \Omega$. Supongamos que f es derivable en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces f es conforme en z_0.*

Demostración Sean $\gamma, \sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$ curvas en Ω que se cortan en el punto $\gamma(t_0) = z_0 = \sigma(s_0)$ y que tienen tangente en dicho punto. Entonces, γ es derivable en t_0 y $\gamma'(t_0) \neq 0$ y σ es derivable en s_0 con $\sigma'(s_0) \neq 0$. Para demostrar que f es conforme, probamos que $f \circ \gamma$ y $f \circ \sigma$ tienen tangente en $f(z_0)$ y que $\widehat{\gamma, \sigma}(z_0) = \widehat{f \circ \gamma, f \circ \sigma}(f(z_0))$.

Pongamos $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma$. Observa que $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{\sigma}(s_0) = f(z_0)$. Por la regla de la cadena tenemos:

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

$$\tilde{\sigma}'(s_0) = f'(\sigma(s_0)) \cdot \sigma'(s_0) = f'(z_0) \cdot \sigma'(s_0)$$

Deducimos que las curvas $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\sigma}$ tienen tangente en $f(z_0)$ y:

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t_0)}{\tilde{\sigma}'(s_0)} = \frac{f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)}{f'(z_0) \cdot \sigma'(s_0)} = \frac{\gamma'(t_0)}{\sigma'(s_0)}$$

lo que implica que $\widehat{\gamma, \sigma}(z_0) = \widehat{\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}}(f(z_0))$, es decir, que f es conforme en z_0. ■

Proposición 3.1.2 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua en Ω y $z_0 \in \Omega$. Pongamos $u(x, y) = Ref(x + iy)$, $v(x, y) = Imf(x + iy)$ para todo $x + iy \in \Omega$. Supongamos que f es conforme en z_0 y que u y v son diferenciables en z_0. Entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.*

Demostración Sea $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ una curva en Ω con tangente en $z_0 = \gamma(t_0)$. La curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ es, en virtud de la regla de la cadena, derivable en t_0 y su derivada viene dada por:

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = Df(z_0)\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

En lo que sigue notaremos:

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0),\ b = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0),\ c = \frac{\partial v}{\partial x}(z_0),\ d = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Para probar que f es derivable en z_0, veremos que f verifica las condiciones de Cauchy-Riemann ($a = d$ y $b = -c$). Tenemos que:

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = Df(z_0)\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} = a\gamma_1'(t_0)+b\gamma_2'(t_0)+i(c\gamma_1'(t_0)+d\gamma_2'(t_0)) =$$

$$= (a+ic)\gamma_1'(t_0) + (b+id)\gamma_2'(t_0) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+ic-i(b+id))(\gamma_1'(t_0)+i\gamma_2'(t_0)) + \frac{1}{2}(a+ic+i(b+id))(\gamma_1'(t_0)-i\gamma_2'(t_0)) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+ic-i(b+id))\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(a+ic+i(b+id))\overline{\gamma'(t_0)}$$

Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ otra curva en Ω que pasa por el punto $z_0 = \sigma(s_0)$ y que tiene tangente en dicho punto. Pongamos $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma$. De lo anterior se sigue que:

$$\frac{\tilde{\gamma}'(t_0)}{\tilde{\sigma}'(s_0)} = \frac{(a+ic-i(b+id))\gamma'(t_0) + (a+ic+i(b+id))\overline{\gamma'(t_0)}}{(a+ic-i(b+id))\sigma'(s_0) + (a+ic+i(b+id))\overline{\sigma'(s_0)}} \tag{3.1}$$

Dado un vector $w \in \mathbb{R}^2$ con $\|w\| = 1$, la curva dada por $\lambda(t) = z_0 + tw$, donde $t \in [-r, r]$, está en Ω sin más que tomar r suficientemente pequeño. Puesto que $\lambda'(t) = w$ y, por hipótesis, f es conforme en z_0, debe verificarse que $Df(z_0)(w) \neq 0$. Deducimos que el determinante jacobiano de f en z_0, $ad - bc \neq 0$. Además la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

debe conservar ángulos. Deducimos que los vectores $T(1,0) = (a,c)$ y $T(0,1) = (b,d)$ han de ser ortogonales. También han de ser ortogonales los vectores $T(1,1) = (a+b, c+d)$ y $T(1,-1) = (a-b, c-d)$. Resulta así que:

$$(a,c) \cdot (b,d) = ab + cd = 0,$$

$$(a+b, c+d) \cdot (a-b, c-d) = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = d^2 - c^2$$

y deducimos que $(a+ib)^2 = (d-ic)^2$, lo que implica que $a+ib = \pm(d-ic)$.

La igualdad $a+ib = -(d-ic)$ implica que $a = -d$ y $b = c$ y, por tanto, $a+ic-i(b+id) = a+d+i(c-b) = 0$. Además, debe ser $a+ic+i(b+id) = 2(a+ic) \neq 0$. Deducimos por (3.1) que:

$$\mathrm{Arg}\frac{\tilde{\gamma}'(t_0)}{\tilde{\sigma}'(s_0)} = \mathrm{Arg}\frac{\overline{\gamma'(t_0)}}{\overline{\sigma'(s_0)}} = -\mathrm{Arg}\frac{\gamma'(t_0)}{\sigma'(s_0)}$$

lo que contradice la hipótesis de que f es conforme en z_0.

Deducimos por tanto que debe verificarse que $a+ib = d-ic$ igualdad que equivale a las condiciones de Cauchy-Riemann para f en el punto z_0. Lo que implica que f es derivable en z_0 y $f'(z_0) = a+ic \neq 0$. ■

Como consecuencia de las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 enunciamos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.3 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Pongamos:*

$$u(x,y) = Ref(x+iy), \quad v(x,y) = Imf(x+iy)$$

para todo $x+iy \in \Omega$. Equivalen las afirmaciones:
a) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$
b) f es conforme en Ω y las funciones u y v son diferenciables en Ω

Sean Ω_1 y Ω_2 dominios de $\mathbb{C}$. Se dice que $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ es un **isomorfismo conforme** de Ω_1 sobre Ω_2 si f es holomorfa y biyectiva. Se dice que dos dominios Ω_1 y Ω_2 son **isomorfos** o **conformemente equivalentes** si existe un isomorfismo conforme entre ellos. Un isomorfismo conforme de un dominio Ω sobre sí mismo se llama un **automorfismo conforme** de Ω. Claramente, dos abiertos isomorfos son, en particular, homeomorfos.

El problema general de la representación conforme consiste en decidir si dos abiertos del plano complejo son isomorfos, y en caso de que lo sean, tratar de determinar todos los isomorfismos conformes de uno a otro.

Un ejemplo de aplicación conforme es la función exponencial. La derivada de la función exponencial no se anula nunca, luego la transformación $z \to e^z$ es conforme e inyectiva sobre cualquier abierto Ω de $\mathbb{C}$ con la propiedad de no contener parejas de puntos z_1, z_2 verificando $z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. La función exponencial establece isomorfismos conformes entre las siguientes parejas de abiertos Ω_1, Ω_2 (donde $t - s < 2\pi$):

$\Omega_1 \overset{exp}{\to} \Omega_2$	
$\{x + iy : s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : r > 0, s < \theta < t\}$
$\{x + iy : x < 0, s < y < t\}$	$\{re^{i\theta} : 0 < r < 1, s < \theta < t\}$

En particular, cuando $t-s = \pi$, se obtiene un isomorfismo conforme entre una banda y un semiplano y entre una semibanda y un semidisco. Análogamente, con $t - s = \pi/2$ se consigue un isomorfismo conforme de una banda sobre un cuadrante y de una semibanda sobre un cuadrante de un disco.

Recordemos que la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula nunca (corolario 2.1.5). En consecuencia, si f es una función holomorfa e inyectiva en un dominio Ω, entonces f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $f(\Omega)$.

Existe una relación muy importante entre abiertos isomorfos. Si Ω_1 y Ω_2 son dos dominios isomorfos y f un isomorfismo conforme entre ellos, queda definida una aplicación $g \mapsto g \circ f$ de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre $\mathcal{H}(\Omega_1)$ que es inyectiva, sobreyectiva y conserva las sumas y los productos, esto es, se trata de un isomorfismo algebraico de anillos de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre $\mathcal{H}(\Omega_1)$. Así, problemas sobre $\mathcal{H}(\Omega_2)$ pueden ser convertidos en problemas sobre $\mathcal{H}(\Omega_1)$, y las soluciones pueden ser transportadas de nuevo a $\mathcal{H}(\Omega_2)$. Se deduce por tanto, que es posible trasladar con frecuencia la solución de un problema en un dominio a otro isomorfo a él. Por eso es interesante conocer por ejemplo los dominios isomorfos al plano complejo $\mathbb{C}$ ó al disco unidad abierto $D(0,1)$.

En particular, si $\Omega = \mathbb{C}$ tenemos, como consecuencia del teorema 2.1.9, que los automorfismos conformes de $\mathbb{C}$ son las funciones polinómicas de grado uno.

Pasamos ahora a estudiar las funciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$, con el objetivo de obtener más adelante un tipo de transformaciones elementales, las transformaciones de Möbius. Para ello necesitamos el siguiente resultado sobre el comportamiento local de una función meromorfa.

Proposición 3.1.4 *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ que* *tiene un polo de orden m en a. Entonces existen números $R, \delta > 0$ tales que para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$ se verifica que hay m puntos distintos $z_j \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$ tales que $f(z_j) = w$.*

Demostración Como se trata de un resultado local no es restrictivo suponer que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por $g(z) = 1/f(z)$ y $g(a) = 0$, para todo $z \in \Omega$. La función g es holomorfa en Ω y por una caracterización de los polos, se deduce que g tiene un cero de orden m en a. El teorema 2.1.4 nos dice que hay números $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para $0 < |w| < \varepsilon$ la ecuación $g(z) = w$ tiene m soluciones distintas en $D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Equivalentemente, poniendo $R = 1/\varepsilon$ para $|w| > R$, la ecuación $1/f(z) = 1/w$ tiene m soluciones distintas en $D(a, \delta) \setminus \{a\}$. ■

Teorema 3.1.5 *Las funciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$ son las funciones de la forma:*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \textit{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \textit{y} \quad ad - bc \neq 0 \tag{3.2}$$

Demostración Sea φ una función meromorfa e inyectiva en $\mathbb{C}$. En el caso de que dicha función sea holomorfa en $\mathbb{C}$, sabemos que debe ser una función polinómica de grado uno (teorema 2.1.9). Estas funciones son las que se obtienen en (3.2) para $c = 0$. Descartado este caso, la función φ debe tener algún polo en $\mathbb{C}$. Pero como φ es inyectiva, por la proposición anterior, se deduce que solamente puede tener un único polo simple.

Sea z_0 dicho polo y sea $\alpha = \operatorname{Res}(\varphi(z), z_0)$. En virtud de la proposicion 2.1.6, sabemos que hay una función entera, g, tal que:

$$\varphi(z) - \frac{\alpha}{z - z_0} = g(z) \quad \text{para todo} \quad z \neq z_0 \tag{3.3}$$

Razonando como se hizo en el teorema 2.1.9, se deduce, por ser φ inyectiva, que dicha función no puede tener una singularidad esencial en ∞, lo que, teniendo en cuenta la igualdad (3.3), implica que g tampoco puede tener una singularidad esencial en ∞. Y, por ser g una función entera, deducimos que g es una función polinómica. Pero en tal caso, como:

$$\varphi(z) = \frac{\alpha + (z - z_0)g(z)}{z - z_0}$$

y la función φ no puede tener más de un cero, se sigue que g debe ser constante. Hemos probado así que φ es de la forma:

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Finalmente, como:

$$\varphi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

se sigue que $ad-bc \neq 0$. ■

3.2. Plano complejo ampliado. Transformaciones de Möbius

La consideración de las funciones meromorfas lleva de forma natural a ampliar el plano complejo añadiéndole un nuevo elemento llamado **punto del infinito**, denotado ∞. El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama **plano complejo ampliado**. En $\mathbb{C}_\infty$ se introduce una topología natural especificando una base de entornos de cada punto, que hará que las funciones meromorfas sean continuas cuando se les asigna el valor ∞ en cada polo. Para ello definimos en $\mathbb{C}_\infty$ el disco abierto de centro $a \in \mathbb{C}_\infty$ y radio $r > 0$ de la siguiente forma: Si $a \neq \infty$:

$$D(a,r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z-a| < r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

Si $a = \infty$:

$$D(\infty,r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| > 1/r\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\} \cup \{\infty\}$$

Desde un punto de vista geométrico a veces es conveniente considerar un modelo en el cual cada punto del plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$ se represente mediante un punto concreto. Esto se consigue considerando el espacio métrico compacto (S,d) donde:

$$S := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

es la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ y d la distancia euclídea de $\mathbb{R}^3$ (y su restricción a S). Al espacio compacto (S,d) se le llama **esfera de Riemann** y proporciona un modelo geométrico útil para la compactificación por un punto del plano complejo.

El plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$ se identifica con la esfera de Riemann mediante la **proyección estereográfica** $\pi\colon \mathbb{C}_\infty \to S$ dada por:

$$\pi(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{i(\bar{z}-z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) \qquad \pi(\infty) = (0,0,1)$$

donde $\bar{z}$ denota el conjugado de z.

Esta aplicación es una biyección. Es evidente que la restricción de π a $\mathbb{C}$ es continua y también es continua en ∞, pues $\lim\limits_{z\to\infty} \pi(z) = (0,0,1)$. Se puede comprobar que la aplicación inversa también es continua, es decir, la proyección estereográfica es un homeomorfismo entre los espacios topológicos $\mathbb{C}_\infty$ y S.

Podemos trasladar por π la distancia euclídea de la esfera al plano ampliado definiendo una distancia en $\mathbb{C}_\infty$ llamada **distancia cordal** que viene dada por:

$$\mathcal{X}(z,w) = d(\pi(z), \pi(w))$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}_\infty$. Un cálculo explícito proporciona:

$$\mathcal{X}(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \quad \mathcal{X}(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

para $z, w \in \mathbb{C}$.

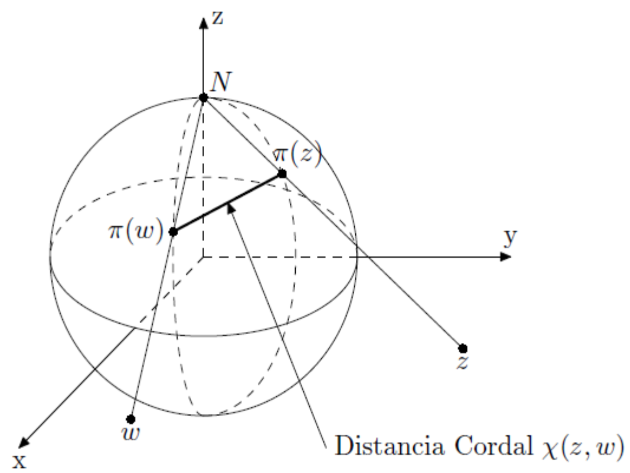

Figura 3.1: Esfera de Riemann

Como π es una isometría del espacio métrico $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{X})$ en (S, d), $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{X})$ es un espacio métrico completo. Además, como π también era un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty$ y S, se deduce que la topología definida en $\mathbb{C}_\infty$ por la distancia cordal coincide con la topología antes definida en $\mathbb{C}_\infty$.

Si f es una función meromorfa en una abierto Ω de $\mathbb{C}$, podemos considerar f como una función de Ω en $\mathbb{C}_\infty$ definiendo el valor de f en cada polo de Ω igual a ∞. La función así obtenida es continua.

Observación 3.2.1 *Se puede extender la noción de derivada al caso de transformaciones del plano complejo ampliado. Esto nos permite dar en este contexto más general las nociones de transformación e isomorfismo conformes y estudiar cuándo dos abiertos del plano ampliado son isomorfos.*

En el teorema 3.1.5 hemos descrito las transformaciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$. Es natural extender tales aplicaciones al plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$. En lo que sigue llamaremos también dominios a los abiertos conexos de $\mathbb{C}_\infty$.

Las **transformaciones de Möbius** son las transformaciones $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, definidas mediante funciones racionales de la forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{donde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

donde se utilizan los convenios habituales:

- $T(\infty) = \infty$, si $c = 0$
- $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, si $c \neq 0$

Notaremos por $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius.

A continuación damos un listado de las propiedades de las transformaciones de Möbius que nos van a ser útiles más adelante.

1. Son biyecciones de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$. De hecho, para cada $w \in \mathbb{C}_\infty$, la ecuación $T(z) = w$ tiene una única solución:

   $$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

   luego T^{-1} sigue siendo una transformación de Möbius.

2. Son homeomorfismos de $\mathbb{C}_\infty$.

3. Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{M}$ es holomorfa en Ω, entonces la aplicación $T_{|\Omega}$ es un isomorfismo conforme de Ω sobre $T(\Omega)$.

4. La composición de dos transformaciones de Möbius sigue siendo otra transformación de Möbius. Dadas:

$$T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad \text{con} \quad a_i d_i - b_i c_i \neq 0, \quad (i = 1, 2)$$

es fácil comprobar que $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde sus coeficientes a, b, c, d son los elementos de la matriz producto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

5. Con la operación de composición, $\mathcal{M}$ es un grupo de transformaciones de $\mathbb{C}_\infty$ generado por las transformaciones elementales de los siguientes tipos:

   - **giros** $T(z) = e^{i\alpha} z$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
   - **homotecias** $T(z) = \rho z$ $(\rho > 0)$
   - **traslaciones** $T(z) = z + b$ $(b \in \mathbb{C})$
   - **inversión** $T(z) = 1/z$

   Toda transformación de Möbius puede expresarse como composición de las transformaciones elementales anteriores. En efecto, sea $T \in \mathcal{M}$ de parámetros a, b, c, d.

   - Si $c = 0$, entonces la igualdad:

     $$T(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = \rho e^{i\theta} z + \beta$$

     donde $\rho = |a/d|$, θ es un argumento de a/d, y $\beta = b/d$, expresa T como composición de un giro, una homotecia y una traslación.

- Si $c \neq 0$, entonces la igualdad:

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c}$$

expresa T como composición de giros, homotecias, traslaciones y de la inversión.

6. La única transformación de Möbius que deja fijos $0, 1, \infty$ es la identidad. Pues si $T \in \mathcal{M}$ de parámetros a, b, c, d, la condición $T(\infty) = \infty$, implica que $c = 0$. Luego:

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

La condición $T(0) = 0$, implica que $b = 0$. Luego:

$$T(z) = \frac{a}{d}z$$

Finalmente, la condición $T(1) = 1$ implica que $a/d = 1$. Luego $T(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$.

3.3. Razón doble y simetría

Las transformaciones de Möbius verifican la siguiente propiedad: dados tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, existe una única transformación de Möbius R, que verifica:

$$R(z_1) = 0, \quad R(z_2) = 1, \quad R(z_3) = \infty$$

En efecto, para cada $z \in \mathbb{C}_\infty$, dicha transformación viene dada por:

$$R(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad \text{si } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$R(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \quad \text{si } z_1 = \infty$$

$$R(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{si } z_2 = \infty$$

$$R(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{si } z_3 = \infty$$

La unicidad de R es inmediata pues si S es otra transformación de Möbius cumpliendo también $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$ y $S(z_3) = \infty$, entonces $R \circ S^{-1}$ dejaría fijos los tres puntos $0, 1, \infty$ y por la propiedad 6 de las transformaciones de Möbius, sería la identidad, es decir, $S = R$.

Notaremos por (z, z_1, z_2, z_3) a esta aplicación y la llamaremos **razón doble** de z, z_1, z_2, z_3. Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

En otro caso:

$$(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}; \quad (z, z_1, \infty, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}; \quad (z, z_1, z_2, \infty) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Esta definición nos permitirá obtener más propiedades de las transformaciones de Möbius.

Proposición 3.3.1 *La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius.*

Demostración Si dado $T \in \mathcal{M}$ y $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ (donde z_1, z_2, z_3 se suponen distintos), demostraremos que $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$. Sea pues $R(z) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$ la razón doble de z_0, z_1, z_2, z_3 (es decir, $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 1$, $R(z_3) = \infty$). Definimos $\mathcal{Z} = R \circ T^{-1}$. Obsérvese que $\mathcal{Z}(T(z)) = R(z)$ para $z \in \mathbb{C}_\infty$, luego sólo queda probar que $\mathcal{Z}(T(z))$ es la razón doble de $T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)$. En efecto:

$$\mathcal{Z}(T(z_1)) = R(z_1) = 0$$

$$\mathcal{Z}(T(z_2)) = R(z_2) = 1$$

$$\mathcal{Z}(T(z_3)) = R(z_3) = \infty$$

Entonces, $R(z) = \mathcal{Z}(T(z)) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$. Sustituyendo $z = z_0$ se obtiene el resultado. ∎

Proposición 3.3.2 *Dadas dos ternas de puntos distintos en* $\mathbb{C}_\infty$ z_1, z_2, z_3 *y* w_1, w_2, w_3 *existe una única transformación de Möbius,* T*, que transforma la primera terna en la segunda, es decir,* $T(z_j) = w_j$ *para* $j = 1, 2, 3$. *Además dicha transformación queda definida implícitamente por la igualdad:*

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (T(z), w_1, w_2, w_3)$$

Demostración Sean $M(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ y $N(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$ para $z \in \mathbb{C}_\infty$. La transformación $T = N^{-1} \circ M$ verifica que $T(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$. Dicha transformación es única como consecuencia de la propiedad 6 de las transformaciones de Möbius. Finalmente se observa que la igualdad $N(T(z)) = M(z)$ es precisamente la igualdad del enunciado. ∎

La siguiente proposición nos permite expresar las rectas y las circunferencias del plano complejo mediante las mismas ecuaciones.

Proposición 3.3.3 *La forma general de la ecuación de una recta o circunferencia en el plano complejo es* $A\bar{z}z + Bz + C\bar{z} + D = 0$ *donde* A *y* D *son reales,* B *y* C *son complejos conjugados y* $AD - BC < 0$ *(si* $A = 0$ *se obtiene una recta, y si* $A \neq 0$ *resulta una circunferencia de centro* $-C/A$ *y radio* $\sqrt{BC - AD}/|A|$*).*

Demostración Véase [1, Ejercicio 2.5]

Una notable propiedad de la proyección estereográfica es que con ella las rectas y circunferencias del plano complejo se corresponden con las circunferencias de la esfera de Riemann. Vemos así que en el plano complejo ampliado $\mathbb{C}_\infty$ es natural considerar a las rectas como un caso particular de circunferencias (las que pasan por ∞). Desde este punto de vista, la proposición 3.3.3 proporciona la forma general de la ecuación de una circunferencia en el plano complejo ampliado. En lo que sigue las circunferencias en el plano complejo ampliado se consideran siempre en sentido amplio, es decir, se considera a las rectas como un caso particular de circunferencias (las que pasan por ∞). Denotaremos por $\mathbb{R}_\infty$ la circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ que corresponde al eje real, es decir, $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Proposición 3.3.4 *Sea* C *la circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$*. Entonces:*

$$z \in C \Leftrightarrow (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_\infty$$

Demostración Sea $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ definida por $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$. La condición $T(z) \in \mathbb{R}$ significa que $z \neq z_3$ y $\overline{T(z)} = T(z)$, es decir:

$$z \neq -d/c \quad \text{y} \quad \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}$$

Se obtiene que $T(z) \in \mathbb{R}_\infty$ si, y sólo si, $(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) = (cz+d)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b})$, lo que equivale a:

$$i(a\bar{c}-c\bar{a})z\bar{z} + i(a\bar{d}-c\bar{b})z + i(b\bar{c}-d\bar{a})\bar{z} + i(b\bar{d}-d\bar{b}) = 0$$

que es una ecuación de la forma $Az\bar{z}+Bz+C\bar{z}+D=0$ con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD-BC = -|ad-bc|^2 < 0$, es decir, es la ecuación de una circunferencia (en sentido amplio) que, evidentemente pasa por z_1, z_2 y z_3. ■

Proposición 3.3.5 *Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).*

Demostración Sean $T \in \mathcal{M}$ y C la circunferencia (en sentido amplio) determinada por los tres puntos z_1, z_2, z_3. Si C^* es la circunferencia determinada por sus imágenes $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, en virtud de las proposiciones 3.3.4 y 3.3.1 se cumple:

$$z \in C \Leftrightarrow (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_\infty \Leftrightarrow (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \in \mathbb{R}_\infty$$

Por tanto, $T(z) \in C^*$. También se puede dar otra demostración de esta proposición utilizando la descomposición de T en transformaciones elementales. Como el resultado es evidente cuando T es una traslación, un giro o una homotecia, basta hacer la demostración para $T(z) = 1/z$. En este caso, dada una circunferencia de ecuación $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$, con $A, D \in \mathbb{R}$, $B = \overline{C}$ y $AD - BC < 0$, haciendo la sustitución $w = 1/z$, resulta $Dw\bar{w} + Cw + B\bar{w} + A = 0$, que es la ecuación de una circunferencia en el plano w. ■

Además, se puede demostrar que las transformaciones de Möbius transforman circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales. A continuación se exponen algunos resultados sobre la conservación de la simetría en las transformaciones de Möbius, utilizando para ello el concepto de razón doble. La razón doble permite escribir de manera muy simple las ecuaciones de simetrías respecto a circunferencias (en sentido amplio).

Definimos el concepto de punto simétrico respecto de una circunferencia. Dada la circunferencia $S = \{z : |z-a| = R\}$, el **simétrico** de $b \in$

$\mathbb{C}$, $b \neq a$, respecto a S es el único punto b^* de la semirrecta $L(a,b) = \{a + t(b-a) : t \geq 0\}$ que cumple $|b-a|\,|b^*-a| = R^2$. Viene dado por:

$$b^* = a + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{a}} = a + \frac{R^2}{|b-a|^2}(b-a)$$

Dada la circunferencia $S = \{z : |z-a| = R\}$, vamos a realizar la construcción geométrica del simétrico de un punto respecto de una circunferencia.

I. Cuando $b \in S$ se cumple que:

$$\frac{R^2}{\bar{b} - \bar{a}} = b - a$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la simetría:

$$b^* = a + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{a}},$$

se obtiene que $b^* = b$.

II. Si $b \notin S$, se pueden dar dos casos. Supongamos que b queda dentro de la circunferencia. Su simétrico b^* es exterior a la misma y se puede obtener con la siguiente construcción. Se traza la recta que pasa por b y es perpendicular a la semirrecta $L(a,b)$. Si c es uno de los dos puntos donde esta perpendicular corta a S, entonces b^* queda determinado como el punto en que la tangente a S en c corta a $L(a,b)$.

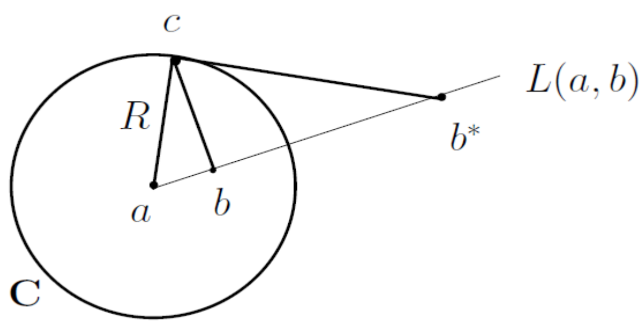

Figura 3.2: b es interior a S

Por otro lado, si b es exterior a la cincunferencia, su simétrico b^* se obtiene realizando la construcción en sentido inverso.

Proposición 3.3.6 *Sea C una circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos de la misma $z_1, z_2, z_3 \in C$. Entonces z^* es el simétrico de z respecto a C si, y sólo si,*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

Demostración Supongamos que C es una recta y sean z, z^* puntos simétricos respecto a esta recta. Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de C, la transformación $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ convierte C en $\mathbb{R}_\infty$. Toda circunferencia Γ que pase por z y z^* es ortogonal a la recta C luego $T(\Gamma)$ es una circunferencia que corta de modo ortogonal a la recta real. Como todas las circunferencias que pasan por $T(z)$ y $T(z^*)$ son ortogonales a la recta real se sigue que $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto a esta recta, es decir, $T(z^*) = \overline{T(z)}$.

Supongamos ahora que $C = \{z : |z - a| = R\}$ es una verdadera circunferencia de centro a y radio R y que $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$. Utilizando la invarianza de la razón doble frente a las transformaciones de Möbius (proposición 3.3.1) resulta:

$$\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} = (\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a})$$

$$= (\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a) = (\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3) = (z^*, z_1, z_2, z_3)$$

donde:

$$z^* = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

Por definición se tiene que z^* es el simétrico de z respecto a C. ■

Proposición 3.3.7 *(Principio de simetría) Las transformaciones de Möbius conservan la simetría.*

Demostración Sean $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ puntos simétricos respecto a una circunferencia C (en sentido amplio) y $T \in \mathcal{M}$. Demostraremos que $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen $T(C)$. Supongamos que C está determinada por tres puntos distintos z_1, z_2, z_3. La circunferencia $T(C)$ está determinada por las imágenes $w_j = T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. Según las proposiciones 3.3.1 y 3.3.6 se cumple:

$$(T(z^*), w_1, w_2, w_3) = (z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(T(z), w_1, w_2, w_3)}$$

lo que, según la proposición 3.3.6, significa que $T(z^*)$ es el simétrico de $T(z)$ respecto a la circunferencia $T(C)$. ■

Conviene observar que z y z^* son simétricos respecto a una circunferencia C (en sentido amplio) si, y sólo si, $\overline{T(z)} = T(z^*)$ para cada $T \in \mathcal{M}$ que cumpla $T(C) = \mathbb{R}_\infty$.

El principio de simetría resulta bastante útil en las aplicaciones a la hora de obtener transformaciones de Möbius con determinadas propiedades, como ocurre en las proposiciones siguientes.

Proposición 3.3.8 *Las transformaciones de Möbius T que dejan invariante al disco $D(0,1)$ son de la forma:*

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \textit{con} \quad |\mu| = 1 \quad \textit{y} \quad |a| < 1$$

para todo $z \in D(0,1)$.

Demostración Si $T \in \mathcal{M}$ es de la forma indicada en el enunciado y $|z| = 1$ se cumple:

$$|T(z)| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}z - \bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z} - \bar{a}|} = 1,$$

luego T transforma la circunferencia $|z| = 1$ en sí misma. Por razones de conexión, $T(D(0,1))$ es una de las dos regiones $\{z : |z| < 1\}$, $\{z : |z| > 1\}$ y, puesto que $|a| < 1$ y $T(a) = 0$, se concluye que $T(D(0,1)) = D(0,1)$.

Recíprocamente, supongamos que $T \in \mathcal{M}$ deja invariante el disco $D(0,1)$. Como $T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ es un homeomorfismo debe cumplir que $T(\partial D(0,1)) = \partial T(D(0,1))$, es decir, $|z| = 1$ si, y sólo si, $|T(z)| = 1$.

Si $a = T^{-1}(0)$ debe ser $|a| < 1$ y según el principio de simetría, el simétrico de a respecto a la circunferencia $|z| = 1$ debe ser $b = T^{-1}(\infty)$, luego $b = 1/\bar{a}$. Se sigue de esto que T es de la forma:

$$T(z) = \mu \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \text{con} \quad |a| < 1$$

Cuando $|z| = 1$, al sustituir $1 = z\bar{z}$ en la fórmula anterior se obtiene:

$$|T(z)| = |\mu| \frac{|z-a|}{|z(\bar{z} - \bar{a})|} = \frac{|\mu|}{|z|} = |\mu|$$

y la condición $|\mu| = 1$ viene garantizada porque $|T(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Por lo tanto las transformaciones de Möbius que dejan invariante el disco $D(0,1)$ son las de la forma indicada en el enunciado. ∎

Proposición 3.3.9 *Las transformaciones de Möbius T que dejan invariante el semiplano $P = \{z : Imz > 0\}$ son de la forma:*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{donde} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \textit{y} \quad ad - bc > 0$$

para todo $z \in P$.

Demostración Toda transformación de Möbius T que verifique $T(P) = P$ debe cumplir $T(\partial P) = \partial P$, es decir, T debe transformar la recta real en sí misma. Como los tres puntos $z_1 = T^{-1}(0)$, $z_2 = T^{-1}(1)$, $z_3 = T^{-1}(\infty)$, están en la recta real, usando la fórmula para la razón doble $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ se obtiene una expresión:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

en la que todos los coeficientes a, b, c, d son reales y cumplen la condición $ad - bc = (c^2 + d^2)\mathrm{Im}T(i) > 0$.

Recíprocamente, si T es de esta forma deja invariante la recta real $\mathbb{R}_\infty$ y, por razones de conexión, $T(P)$ debe ser uno de los dos semiplanos $P = \{z : \mathrm{Im}z > 0\}$, $-P = \{z : \mathrm{Im}z < 0\}$. Ahora bien, con la condición:

$$\mathrm{Im}T(i) = \frac{ad - bc}{d^2 + c^2} > 0$$

se concluye que $T(P) = P$. ∎

3.4. Lema de Schwarz. Isomorfismos conformes del disco unidad

En esta sección empezamos a preparar el camino para demostrar el teorema de Riemann. Además, se logrará, usando transformaciones de Möbius, una descripción explícita del grupo de automorfismos conformes del disco unidad y del semiplano superior, a partir de la siguiente consecuencia notable del principio del módulo máximo.

Lema 3.4.1 *(Schwarz) Sea* $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ *verificando que* $f(0) = 0$ *y* $|f(z)| \leq 1$ *para todo* $z \in D(0,1)$*. Entonces:*
a) $|f(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in D(0,1)$
b) $|f'(0)| \leq 1$
Además, si existe $a \in D(0,1)$ *con* $a \neq 0$ *para el cual se da la igualdad en a) o bien si* $|f'(0)| = 1$*, entonces* f *es un giro de* $D(0,1)$*.*

Demostración Definimos $g : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ como:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in D(0,1) \setminus \{0\} \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

Puesto que:

$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} f'(z) = f'(0) = g(0)$$

tenemos que g es continua en 0. Como consecuencia del teorema de extensión de Riemann, g es holomorfa en el disco unidad.

Sea $z \in D(0,1)$ un punto cualquiera fijo. Tomemos $r > 0$ de forma que $|z| < r < 1$. Tenemos por el principio del módulo máximo:

$$|g(z)| \leq \max\{|g(w)| : |w| \leq r\} =$$
$$\max\left\{\frac{|f(w)|}{|w|} : |w| = r\right\} = \left\{\frac{|f(w)|}{r} : |w| = r\right\} \leq \frac{1}{r}$$

Haciendo $r \to 1$, obtenemos $|g(z)| \leq 1$ y esta desigualdad es válida para todo $z \in D(0,1)$. Entonces:

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$$

si $z \neq 0$, y por el contrario $|g(z)| = |f'(0)| \leq 1$. Hemos probado así las condiciones a) y b) del enunciado.
Si se da la igualdad en a) para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$, es decir, $|g(z_0)| = 1$ y $|g|$ alcanza el máximo en un punto interior. Por el principio del módulo máximo, g es constante en $D(0,1)$ y deberá ser $g(z) = \lambda$ con $|\lambda| = 1$ y, por tanto, $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$ y f es un giro.
En el caso de que $|f'(0)| = 1$, razonando igual que antes volvemos a obtener que f es un giro. ∎

A continuación determinamos los automorfismos del disco unidad.

Proposición 3.4.2 *Si $f\colon D(0,1) \to D(0,1)$ es una aplicación, entonces f es un isomorfismo conforme si, y sólo si, existen $a \in D(0,1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

para todo $z \in D(0,1)$.

Demostración Por la proposición 3.3.8, basta demostrar que todo isomorfismo conforme $f : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ es de la forma indicada en el enunciado.

Si $f(0) = 0$, aplicando el lema de Schwarz a f y f^{-1} se obtiene que $|f(z)| \leq |z|$ y $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ para todo $z, w \in D(0,1)$.
Si en la segunda desigualdad sustituimos $w = f(z)$ resulta $|f(z)| \geq |z|$, luego $|f(z)| = |z|$ para todo $z \in D(0,1)$, y con la segunda parte del lema de Schwarz se concluye que f es de la forma $f(z) = e^{i\alpha}z$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto termina la prueba en el caso $a = f^{-1}(0) = 0$.

Cuando $a = f^{-1}(0) \neq 0$ podemos considerar el isomorfismo conforme $T : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ definido por:

$$T(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

para todo $z \in D(0,1)$. Como $f \circ T^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ es un isomorfismo conforme que cumple $(f \circ T^{-1})(0) = 0$. Por lo demostrado en el caso previo $(f \circ T^{-1})(w) = e^{i\alpha}w$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $w = T(z)$ con $z \in D(0,1)$ se obtiene $(f \circ T^{-1})(T(z)) = e^{i\alpha}T(z)$, luego $f(z) = e^{i\alpha}T(z)$.

■

Como consecuencia de este resultado también determinamos los automorfismos del semiplano superior $P = \{z : Imz > 0\}$.

Proposición 3.4.3 *Si $f\colon P \to P$ es una aplicación, entonces f es un isomorfismo conforme si, y sólo si, es de la forma:*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc > 0$$

para todo $z \in P$.

Demostración Por la proposición 3.3.9, basta demostrar que todo isomorfismo conforme $f : P \longrightarrow P$ viene dado por una transformación de Möbius.

Mediante una transformación de Möbius S podemos conseguir un isomorfismo conforme del semiplano P en el disco $D(0,1)$. Entonces $S \circ f \circ S^{-1}$ es un automorfismo conforme del disco $D(0,1)$ y según la proposición 3.4.2 existe una transformación de Möbius T tal que:

$$(S \circ f \circ S^{-1})(w) = T(w)$$

para todo $w \in D(0,1)$. Para cada $z \in P$ es $w = S(z) \in D(0,1)$, y sustituyendo arriba se obtiene:

$$(S \circ f \circ S^{-1})(S(z)) = T(S(z)) \Leftrightarrow S(f(z)) = T(S(z))$$

luego $f(z) = (S^{-1} \circ T \circ S)(z)$ puede expresarse mediante una transformación de Möbius. ■

El siguiente resultado, que se utilizará en la demostración del teorema de Riemann, también es una consecuencia sencilla del lema de Schwarz.

Lema 3.4.4 *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset D(0,1)$ y sea $a \in \Omega$. La condición:*

$$0 < |f'(a)| = \text{máx}\,\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

implica que $f(a) = 0$.

Demostración Sea:

$$T(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$$

para todo $z \in \Omega$, donde $b = f(a) \in D(0,1)$. Se cumple $T(D(0,1)) \subset D(0,1)$, luego $g = T \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subset D(0,1)$. Según la hipótesis:

$$|f'(a)| \geq |g'(a)| = |T'(f(a))f'(a)| = |T'(b)f'(a)| = \frac{|f'(a)|}{1-|b|^2}$$

Puesto que $0 < |f'(a)|$, se cumple que $1 - |b|^2 \geq 1$. Luego $f(a) = b = 0$. ■

Como aplicación del lema de Schwarz enunciamos la siguiente proposición, que muestra la idea esencial para la prueba del teorema de Riemann que se estudia en la sección 3.6.

Proposición 3.4.5 *Si* $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ *es un isomorfismo conforme y* $a = f^{-1}(0)$ *se verifica:*

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g(a) = 0\}$$

$$= \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

$$= \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \textit{ inyectiva}\}$$

Demostración Véase [1, Ejercicio 9.23]

El teorema de Riemann afirma que si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, entonces existe un isomorfismo conforme $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$. La idea de su demostración está basada en la proposición anterior. Primero se establece la existencia de una función inyectiva $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que:

$$|f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathcal{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \text{ inyectiva}\}$$

y luego se demuestra que $f(\Omega) = D(0,1)$.

3.5. El espacio de las funciones holomorfas

Para la demostración del teorema de Riemann se tendrán en cuenta varios resultados relacionados con la convergencia uniforme sobre compactos de sucesiones de funciones holomorfas que se estudiarán en esta sección. Los conceptos y resultados que vamos a necesitar pueden ser consultados en [2, Chapter VII].

Dado un abierto Ω de $\mathbb{C}$ y (E,d) un espacio métrico, denotamos por $C(\Omega, E)$ el conjunto formado por todas las funciones continuas de Ω a E. A continuación se define en $C(\Omega, E)$ una topología τ_K de manera que sus sucesiones convergentes sean las mismas que convergen uniformemente sobre cada compacto de Ω. En efecto, dados $f \in C(\Omega, E)$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto compacto K de Ω, definimos el conjunto:

$$U(f, K, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{C}(\Omega, E) : d_K(f, g) < \varepsilon\}$$

donde $d_K(f,g) := \sup\{d(f(z),g(z)) : z \in K\}$. Existe una única topología τ_K en $C(\Omega, E)$ tal que la familia de conjuntos:

$$\{U(f,K,\varepsilon) : K \subset \Omega \text{ compacto}, \varepsilon > 0\}$$

es una base de entornos abiertos de f. La topología τ_K se llamará **topología de la convergencia uniforme sobre compactos** en $C(\Omega, E)$.

Se demuestra que τ_K es metrizable, lo que permitirá caracterizar la compacidad en dicha topología por sucesiones. Además, si E es compacto, $C(\Omega, E)$ es un espacio métrico completo. En dicha caracterización interviene la noción de familia equicontinua que se define a continuación. Una familia $\mathcal{F}$ de $C(\Omega, E)$ se dice que es **equicontinua** en un punto $z_0 \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $|z - z_0| < \delta$ y $z \in \Omega$:

$$d(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

para cada $f \in \mathcal{F}$. Se dice que $\mathcal{F}$ es **equicontinua** en Ω cuando es equicontinua en cada punto de Ω. Por otro lado, recordemos que un subconjunto A del espacio métrico (E, d) se dice que es **relativamente compacto** cuando su clausura $\overline{A}$ es compacta. Esto es equivalente a que toda sucesión contenida en A posea alguna subsucesión convergente en E.

Teorema 3.5.1 *(Ascoli-Arzelá) Una familia $\mathcal{F}$ de $C(\Omega, E)$ es relativamente compacta para la topología τ_K si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*
a) para cada $z \in \Omega$, $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto en E
b) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua

En el caso particular de $E = \mathbb{C}$ con la distancia asociada al módulo, expresaremos $(C(\Omega, \mathbb{C}), \tau_K)$ simplemente por $C(\Omega)$. Consideraremos siempre $\mathcal{H}(\Omega)$ como un subespacio de $C(\Omega)$ con la topología inducida por τ_K. Recordamos que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $C(\Omega)$ y, por tanto, al ser $C(\Omega)$ completo, $\mathcal{H}(\Omega)$ también lo es. Además, la aplicación $f \to f'$ definida en $\mathcal{H}(\Omega)$ es continua. Veremos que para funciones holomorfas los compactos de $\mathcal{H}(\Omega)$ tienen una caracterización más sencilla que la que proporciona el teorema de Ascoli-Arzelá. Previamente, introducimos la noción de familia normal y acotada.

Una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es **normal** cuando de cada sucesión $\{f_n\}$ de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos o, equivalentemente, si $\mathcal{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Con el fin de caracterizar las familias normales, para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto, se introduce la notación:

$$\|f\|_K = \text{máx}\,\{|f(z)| : z \in K\}$$

Una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ se dice que es **acotada** cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ el conjunto $\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado, es decir, cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ y cada $z \in K$ se cumple $|f(z)| \leq C_K$.

Demostraremos a continuación el teorema de Montel, que usaremos en la demostración del teorema de Riemann.

Teorema 3.5.2 *(Montel) Una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ es normal si, y sólo si, está acotada.*

Demostración Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal, pero no acotada. Entonces existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que:

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = +\infty,$$

es decir, existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Como $\mathcal{F}$ es normal, se tiene una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y una subsucesion $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}\} \to f$. Pero esto implica que $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Si $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in K$,

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M$$

luego el lado derecho converge a M, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}$ está acotada. Usaremos el teorema de Ascoli-Arzelá para demostrar que $\mathcal{F}$ es normal. La condición a) del teorema de Ascoli-Arzelá se satisface claramente pues basta aplicar la condición de que $\mathcal{F}$ es acotado usando el compacto $K = \{z\}$. Debemos mostrar pues que $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de Ω. Dado $a \in \Omega$, elegimos $r > 0$ de modo que $K = \overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Como $\mathcal{F}$ se supone acotada,

$\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} = M < +\infty$. Si $|z-a| < r/2$, usando la fórmula integral de Cauchy, con la circunferencia $C(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ se obtiene:

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-a}\right) dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)(z-a)}{(w-z)(w-a)}dw$$

Si $w \in \mathrm{Im}(C)$ y $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $|w-z| \geq r/2$ y $|f(w)| \leq M$ luego:

$$\left|\frac{f(w)(z-a)}{(w-z)(w-a)}\right| \leq \frac{M|z-a|}{(r/2)r} = \frac{2M}{r^2}|z-a|$$

Se obtiene así la desigualdad:

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{2M}{r^2}|z-a|dw = \frac{2M}{2\pi r^2}|z-a|2\pi r = \frac{2M}{r}|z-a|$$

Esta desigualdad es válida para cada $z \in D(a, r/2)$ y cada $f \in \mathcal{F}$ y esto implica que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en a. ■

Como consecuencia, si $\mathcal{F}$ es una familia de $\mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\mathcal{F}$ es compacta si, y sólo si, es cerrada y acotada.

Completamos el análisis sobre sucesiones convergentes de funciones holomorfas enunciando el teorema de Hurwitz, que aparece como una consecuencia del teorema de Rouché. A partir del teorema de Hurwitz deducimos el corolario 3.5.4, que es una de las claves para demostrar el teorema de Riemann.

Una pregunta natural relacionada con la convergencia uniforme sobre compactos es la siguiente: si $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos en $\mathcal{H}(\Omega)$ hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, ¿qué propiedades de las funciones f_n se transmiten al límite? El teorema de Hurwitz y el corolario 3.5.4 proporcionan respuestas cuando la propiedad considerada en las funciones f_n es la inyectividad o la ausencia de ceros.

Teorema 3.5.3 *(Hurwitz) Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ sin ceros que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no tiene ceros.*

Corolario 3.5.4 *Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{H}(\Omega)$ inyectivas que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es inyectiva, o bien f es constante.*

3.6. El teorema de Riemann

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Riemann (también llamado teorema fundamental de la representación conforme) según el cual todo dominio Ω de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es isomorfo (y, en particular, homeomorfo) al disco $D(0,1)$.

Primero recordaremos el siguiente teorema que permitirá disponer de raíces cuadradas de funciones holomorfas.

Teorema 3.6.1 *Las siguientes propiedades de un dominio Ω de $\mathbb{C}$ son equivalentes:*
a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo
b) cada ciclo regular a trozos en Ω es homólogo a 0 en Ω
c) cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ tiene logaritmo holomorfo

Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y supongamos que cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin \mathcal{H}(\Omega)$ posee un logaritmo holomorfo en Ω, entonces tiene raíz cuadrada. Dichos dominios tienen la siguiente propiedad:
[*RC*]: Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

También necesitaremos algunos lemas para la demostración del teorema de Riemann.

Lema 3.6.2 *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ con la propiedad [RC]. Entonces existe una función inyectiva $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset D(0,1)$.*

Demostración La hipótesis $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ permite elegir un punto $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con el que obtenemos la función holomorfa $z - b$ que no se anula en Ω. Según la propiedad [RC] existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z - b$ para todo $z \in \Omega$. La función φ es inyectiva (porque φ^2 lo es) y, por lo tanto, no es constante. Como Ω es conexo, el teorema de la aplicación abierta permite afirmar que la imagen $\varphi(\Omega)$ es abierta y, por lo tanto, contiene algún disco $D(a,r) \subset \varphi(\Omega)$ para $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$. Obsérvese que la condición $0 \notin \varphi(\Omega)$ implica que $0 < r \leq |a|$.

A continuación verificamos que $D(-a,r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$. Razonamos por reducción al absurdo suponiendo que $\varphi(w) \in D(-a,r)$ para algún $w \in \Omega$. En este caso $-\varphi(w) \in D(a,r) \subset \varphi(\Omega)$ luego existe $w' \in \Omega$ tal que $-\varphi(w) =$

$\varphi(w')$. Elevando al cuadrado se obtiene que $w = w'$, al ser φ^2 inyectiva. Como φ es inyectiva y $w = w'$, entonces $\varphi(w) = \varphi(w')$. Sustituimos y se tiene $\varphi(w) = -\varphi(w)$, es decir, $\varphi(w) = 0$. Por tanto, $\varphi(w) = \varphi(w') = 0$, lo que contradice la condición $0 \notin \varphi(\Omega)$.

La propiedad $D(-a, r) \cap \varphi(\Omega) = \emptyset$ nos asegura que $|a + \varphi(z)| \geq r$ para todo $z \in \Omega$. Entonces con $0 < \rho < r$ podemos definir la función:

$$f(z) = \rho/(a + \varphi(z))$$

para todo $z \in \Omega$. Es claro que la función f es holomorfa e inyectiva en Ω y su imagen $f(\Omega)$ está contenida en el disco unidad. ■

Una vez probado que la familia:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

no es vacía, probaremos que existe una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $|h'(a)| \geq |f'(a)|$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Lema 3.6.3 *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ con la propiedad [RC] y:*

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f \textit{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

Entonces, dado $a \in \Omega$, existe $h \in \mathcal{F}$ que verifica:

$$|h'(a)| = \text{máx}\,\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$$

Demostración La familia $\mathcal{F}$ es no vacía (en virtud del lema 3.6.2) y acotada luego, según el teorema de Montel, es normal. Esto significa que $\overline{\mathcal{F}}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$. La aplicación:

$$\phi_a : \overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \phi_a(f) = |f'(a)|$$

es continua, toma valores reales y está definida en un compacto por lo que tiene que alcanzar un máximo absoluto, es decir, existe $h \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que:

$$\phi_a(h) = |h'(a)| = \text{máx}\left\{|f'(a)| : f \in \overline{\mathcal{F}}\right\}$$

Basta ver que $h \in \mathcal{F}$. Como la topología τ_K es metrizable y $h \in \overline{\mathcal{F}}$, existe una sucesión $\{h_n\}$ de $\mathcal{F}$ que converge uniformemente sobre compactos hacia h.

Cada h_n es inyectiva y según el corolario 3.5.4 podemos afirmar que, o bien h es inyectiva, o bien h es constante. La segunda alternativa no se puede presentar porque en ese caso para todo $f \in \mathcal{F}$ sería $f'(a) = 0$, y esto es imposible porque cada $f \in \mathcal{F}$ es inyectiva (recuérdese el corolario 2.1.5).

Por otra parte, como las funciones h_n toman valores en $D(0,1)$, es decir, $|h_n(z)| < 1$ para cada $z \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $|h(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Como h no es constante (porque es inyectiva) el teorema de la aplicación abierta permite concluir que $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, es decir, $h(z) \in D(0,1)$ para cada $z \in \Omega$, o lo que es lo mismo, $h(\Omega) \subset D(0,1)$.

Hemos demostrado que h debe ser inyectiva y que $h(\Omega) \subset D(0,1)$. Por tanto, $h \in \mathcal{F}$. ■

Lema 3.6.4 *Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Entonces para cada $a \in D(0,1)$ se cumple:*

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0,1)$, se cumple la igualdad entonces f es un automorfismo conforme de $D(0,1)$. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Demostración Consideremos el automorfismo conforme de $D(0,1)$ dado por la transformación de Möbius:

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para todo $z \in D(0,1)$, cuyo inverso es T_{-a}. Si $b = f(a)$, la función:

$$\varphi = T_b \circ f \circ T_{-a} \colon D(0,1) \to D(0,1)$$

cumple $\varphi(0) = 0$ y, aplicando el lema de Schwarz, se obtiene la desigualdad $|\varphi'(0)| \leq 1$ que equivale a:

$$|T_b'(b) f'(a) (T_{-a})'(0)| \leq 1$$

es decir:

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $|\varphi'(0)| = 1$ y esto equivale, en virtud del lema de Schwarz, a que φ sea de la forma $\varphi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$. Luego, en este caso, $f = T_{-b} \circ \varphi \circ T_a$ es un automorfismo conforme de $D(0,1)$.

Con $a = 0$ se obtiene $|f'(0)| \leq 1 - |b|^2 \leq 1$, luego la condición $|f'(0)| = 1$ implica que $f(0) = b = 0$ y esto lleva consigo, según el lema de Schwarz, que f es un giro alrededor de 0. Por lo tanto, si f no es inyectiva debe verificarse $|f'(0)| < 1$. ■

A continuación demostraremos que la aplicación h del lema 3.6.3 es sobreyectiva.

Teorema 3.6.5 *(Versión preliminar del teorema de Riemann) Todo dominio Ω de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ con la propiedad [RC] es isomorfo al disco $D(0,1)$.*

Demostración En virtud de los lemas 3.6.2 y 3.6.3, fijado un punto $a \in \Omega$, la familia:

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

no es vacía y existe $h \in \mathcal{F}$ que cumple $|h'(a)| = \text{máx}\,\{|f'(a)| : f \in \mathcal{F}\}$. Basta demostrar que $h(\Omega) = D(0,1)$. Para ello probaremos que si una función de la familia $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva, entonces existe otra función en $\mathcal{F}$ cuya derivada en a es mayor que la derivada en a de dicha función. Esto lo haremos por reducción al absurdo suponiendo que existe $b \in D(0,1) \setminus h(\Omega)$.
En ese caso podemos considerar el isomorfismo conforme $T_b : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ definido mediante la transformación de Möbius:

$$T_b(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$$

cuya transformación inversa es T_{-b}. La composición $T_b \circ h$ es un elemento de $\mathcal{F}$ que no se anula en Ω, y según la hipótesis [RC] existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = T_b \circ h$. Obsérvese que g es inyectiva (porque g^2 lo es) y, por lo tanto, $g \in \mathcal{F}$.

Con $c = g(a)$ definimos el isomorfismo conforme $T_c : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$:

$$T_c(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$$

cuyo inverso es T_{-c}. Utilizando la función $p(z) = z^2$ para todo $z \in D(0,1)$, podemos descomponer h en la forma:

$$h = (T_{-b} \circ p \circ T_{-c}) \circ (T_c \circ g) = F \circ h_1$$

donde $F = T_{-b} \circ p \circ T_{-c}$ y $h_1 = T_c \circ g$. Como $F : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ no es inyectiva (porque $p(z) = z^2$ no lo es), con el lema 3.6.4 se obtiene que $|F'(0)| < 1$. Entonces, usando la regla de la cadena se tiene que:

$$|h'(a)| = |F'(h_1(a))h_1'(a)| = |F'(0)h_1'(a)| < |h_1'(a)|$$

que entra en contradicción con la propiedad que ha servido para obtener h porque $h_1 \in \mathcal{F}$. Con esta contradicción acaba la demostración. ∎

Teorema 3.6.6 *(Riemann) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $f : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ que cumple $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

Demostración Comenzamos demostrando la existencia. Según el teorema 3.6.1 cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ tiene un logaritmo holomorfo y, por lo tanto, una raíz cuadrada holomorfa, de modo que se cumple la propiedad [RC]. El isomorfismo conforme $h : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ obtenido en la demostración del teorema 3.6.5 cumple:

$$|h'(a)| = \max\{|f'(a)| : f \in \mathcal{H}(\Omega),\ f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

Como consecuencia del lema 3.4.4, $h(a) = 0$. Sea $h'(a) = re^{i\alpha}$ para $r > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Es claro que $f(z) = e^{-i\alpha}h(z)$ cumple los requisitos del enunciado.

Pasamos ahora a demostrar la unicidad. Si $g : \Omega \longrightarrow D(0,1)$ es otro isomorfismo conforme que verifica $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$, podemos considerar el automorfismo conforme $\varphi = f \circ g^{-1} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1)$ que cumple $\varphi(0) = 0$. Según la proposición 3.4.2, φ es de la forma $\varphi(z) = \mu z$ con $|\mu| = 1$, y teniendo en cuenta que:

$$\mu = \varphi'(0) = f'(a)(g^{-1})'(0) = f'(a)/g'(a) > 0$$

se obtiene que $\mu = 1$, y con ello que $f = g$. ∎

3.7. Aplicaciones a la topología del plano

En esta sección caracterizamos los dominios simplemente conexos como consecuencia del teorema de Riemann. Para definir la noción de abierto simplemente conexo necesitamos dar el concepto de homotopía. Se dice que dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ son **homotópicos** si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ que verifica:
a) $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$
b) $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$
Se dice que H es una **homotopía** entre γ_0 y γ_1.

Un abierto Ω de $\mathbb{C}$ se dice que es **simplemente conexo** si es conexo y además cada camino cerrado en Ω es homotópico a un camino constante. Intuitivamente, en un abierto simplemente conexo cualquier curva cerrada no puede rodear puntos que estén fuera del abierto.

Recordemos que una abierto Ω de $\mathbb{C}$ se dice que es **estrellado** respecto al punto $a \in \Omega$ si para cada $z \in \Omega$ el segmento $[a,z] = \{a + t(z-a) : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en Ω. Los abiertos estrellados son dominios simplemente conexos. Por tanto, los discos son dominios simplemente conexos al ser estrellados.

Todo abierto Ω de $\mathbb{C}$ homeomorfo a un dominio simplemente conexo es simplemente conexo. Luego, todo abierto Ω de $\mathbb{C}$ homeomorfo al disco unidad es simplemente conexo. El objetivo es demostrar que el recíproco también es cierto y para ello, además del teorema de Riemann se necesita el siguiente lema.

Lema 3.7.1 *Si dos caminos cerrados $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ son homotópicos en Ω, entonces son homólogos en Ω. Por lo tanto, en un dominio simplemente conexo Ω de $\mathbb{C}$ cualquier camino cerrado es homólogo a 0 en Ω.*

Demostración Véase [1, Ejercicio 7.55]

El teorema de Riemann se puede aplicar para obtener la siguiente caracterización de los dominios simplemente conexos que completa los resultados del teorema 3.6.1.

Teorema 3.7.2 *Las siguientes propiedades de un dominio Ω de $\mathbb{C}$ son equivalentes:*

a) Ω *es homeomorfo al disco unidad*
b) Ω *es simplemente conexo*
c) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo*

Demostración a)$\Rightarrow$ b) Es claro de acuerdo al comentario posterior a la definición de dominio simplemente conexo.
b)$\Rightarrow$ c) Si Ω es simplemente conexo, según el lema 3.7.1, todo camino cerrado en Ω es homólogo a 0 y, por tanto, de acuerdo al teorema 3.6.1, $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
c)$\Rightarrow$ a) Podemos diferenciar dos casos:

- Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, según el teorema de Riemann, Ω es isomorfo al disco $D(0,1)$ y por lo tanto cumple a).

- Si $\Omega = \mathbb{C}$, se puede establecer un homeomorfismo $f : \mathbb{C} \longrightarrow D(0,1)$, definiendo $f(re^{i\theta}) = \varphi(r)e^{i\theta}$, usando un homeomorfismo creciente $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,1)$. ■

El siguiente teorema aporta nuevas caracterizaciones de los dominios simplemente conexos. Algunas de estas caracterizaciones son topológicas mientras que otras son de naturaleza analítica. Todas ellas ponen de manifiesto el lugar destacado que en la teoría de funciones holomorfas desempeña este tipo de dominios.

Teorema 3.7.3 *Sea* Ω *un dominio de* $\mathbb{C}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) $\Omega = \mathbb{C}$ *ó bien* Ω *es isomorfo a* $D(0,1)$
b) Ω *es homeomorfo a* $D(0,1)$
c) Ω *es simplemente conexo*
d) Ω *es homológicamente conexo (si todo ciclo en* Ω *es homólogo a* 0 *respecto de* Ω*)*
e) La integral de toda función holomorfa en Ω *sobre cualquier ciclo en* Ω *es nula*
f) Toda función holomorfa en Ω *tiene primitivas en* Ω
g) Toda función armónica en Ω *es la parte real de una función holomorfa en* Ω

h) Toda función holomorfa que no se anula en Ω *tiene logaritmos holomorfos en* Ω

i) Toda función holomorfa que no se anula en Ω *tiene una raíz cuadrada holomorfa en* Ω

j) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo en* $\mathbb{C}_\infty$

k) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *no tiene componentes conexas acotadas*

Capítulo 4

Conclusiones

Acabamos este trabajo dedicando algo de tiempo a destacar aquellos conceptos y resultados que consideramos más interesantes. Nuestro punto de partida ha sido la búsqueda de alguna herramienta que nos permita visualizar de alguna manera las funciones complejas. Para obtener cierta intuición geométrica sobre el comportamiento de dichas funciones, hemos tratado de estudiar la forma en que las funciones complejas transforman algunas regiones o curvas del plano en otras también del plano. Para tal propósito hemos considerado las aplicaciones conformes, es decir, las aplicaciones continuas que preservan ángulos en cada punto de un dominio. Afortunadamente, el estudio de esta propiedad se simplifica para funciones holomorfas en un abierto. En tal caso basta con que la derivada no se anule en el abierto (por ejemplo, las funciones holomorfas e inyectivas en el abierto). Esto nos ha permitido obtener muchas propiedades interesantes de las aplicaciones conformes, usando única y exclusivamente instrumentos analíticos.

Teniendo en cuenta lo anterior, tiene sentido estudiar cuándo existe entre dos dominios del plano una aplicación biyectiva que sea conforme en ambos sentidos (es decir, cuándo existe un isomorfismo conforme entre ellos). En caso afirmativo, se dice que los dos dominios son isomorfos y que desde el punto de vista geométrico que estamos considerando, son indistinguibles. Una vez comprobado que dos dominios son isomorfos, el siguiente paso sería intentar determinar todos los isomorfismos conformes que existen entre ellos. Las transformaciones de Möbius del plano ampliado y el lema de Schwarz se han mostrado muy útiles a la hora de determinar dichos isomorfismos en algunos casos.

Volviendo al problema de ver cuándo un dominio del plano es isomorfo a otro, tiene particular interés buscar dominios isomorfos que sean más sencillos. Esto permite obtener algunas propiedades del dominio inicial a partir de las propiedades del dominio isomorfo teniendo en cuenta que éste es más sencillo y que entre ambos existe un isomorfismo conforme. En esta línea el teorema de Riemann nos ha permitido determinar aquellos dominios propios del plano complejo que son isomorfos a $D(0,1)$.

La demostración de este teorema ha requerido bastante preparación. Además del lema de Schwarz comentado previamente, se necesita dotar al espacio de las funciones holomorfas definidas en un abierto de una topología, la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, en la que se pueda caracterizar las familias de funciones holomorfas que son relativamente compactas (o las familias normales en la terminología clásica). El teorema de Montel caracteriza dicha propiedad en términos de acotación y permite demostrar que la familia de funciones inyectivas definidas en cierto tipo de dominios y con imagen en el disco unidad es no vacía y relativamente compacta. Este resultado es crucial a la hora de demostrar la existencia de un isomorfismo conforme entre estos dominios y el disco unidad.

Como consecuencia del teorema de Riemann se caracterizan los dominios simplemente conexos. El último resultado de esta memoria pone de manifiesto que los dominios simplemente conexos están relacionados con la mayoría de los conceptos que se estudiaron en la asignatura de Análisis Complejo. De ahí la importancia que tiene esta definición topológica en la teoría de funciones holomorfas.

Bibliografía

[1] Vera, G. *Variable Compleja, problemas y complementos*, Textos universitarios, co-edición con RSME (2013).

[2] Conway, John B. *Functions of one complex variable I*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, (1978)

[3] Rudin, W. *Análisis real y complejo*, versión española de A. Casal Piga, Ed. Alhambra (1979)

[4] Morales, A. *Apuntes de Análisis Complejo*

Índice alfabético