TRABAJO FIN DE GRADO

El Teorema de Hille-Yosida y sus aplicaciones en el estudio de problemas de evolución

AUTOR: Salvador López Martínez

TITULACIÓN: Grado en Matemáticas

CONVOCATORIA: Septiembre 2014

DIRECTOR: José Carmona Tapia

Índice general

Introducción

El comportamiento de gran cantidad de fenómenos en la naturaleza y en la sociedad está regido por leyes que se pueden explicar usando modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales. Sobre todo, la base matemática de la física está plagada de este tipo de ecuaciones. Sin ir más lejos podemos citar la *Segunda Ley de Newton* de la dinámica, las *Ecuaciones de Maxwell* en electromagnetismo, las *Ecuaciones del Campo de Einstein* en relatividad general o la *Ecuación de Schrödinger* en mecánica cuántica como famosos ejemplos.

Un proceso físico sobre el que la búsqueda de un modelo explicativo apropiado ha sido de especial interés a lo largo de la historia es la distribución espacial de un cuerpo vibrante a lo largo del tiempo, o como se ha venido llamando clásicamente, el *problema de la cuerda vibrante*, debido a su origen unidimensional, aunque el problema puede generalizarse al caso de una membrana bidimensional o de un objeto con volumen. En 1746 el matemático francés *Jean le Rond D'Alembert* (1717-1783) encontró la ecuación en derivadas parciales cuyas soluciones representan el desplazamiento vertical de cada punto de una cuerda, fija en sus extremos, sometida a vibraciones en función del tiempo y de la coordenada horizontal de dicho punto. Este fue el origen de la llamada *ecuación de ondas*. El propio D'Alembert propuso una solución sencilla de la ecuación, y más tarde científicos de la talla de Euler o Daniel Bernoulli aportaron nuevas soluciones más generales y con mayor significado físico. El trabajo posterior de Fourier y Dirichlet proporcionó las bases analíticas que demuestran la existencia de soluciones expresadas como desarrollos en serie de funciones trigonométricas.

A propósito de *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768-1830), este matemático y físico francés fue el pionero en el estudio de otro importante fenómeno como es la transmisión del calor en sólidos, y fue quien dedujo la denominada *ecuación del calor*. Esta se trata de una ecuación en derivadas parciales cuyas soluciones son funciones que, para cada instante de tiempo y cada punto en el espacio, toman el valor de la temperatura de un cuerpo en dicho instante y en dicho punto. Además de encontrar el modelo en el que se basa la conducción del calor, otra aportación relevante de Fourier fue el desarrollo del método de separación de variables para resolver la ecuación y encontrar soluciones mediante la aplicación de series trigonométricas, similares a las citadas anteriormente para la ecuación de ondas.

Las ecuaciones del calor y de ondas son las principales y más clásicas representantes de las ecuaciones *parabólicas* e *hiperbólicas*, respectivamente. Ambos tipos de ecuaciones, junto con las *elípticas*, conforman los tres grandes grupos en los que se clasifican generalmente las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.[1]

[1] Los siguientes cuatro párrafos han sido extraídos de [11].

El modelo elíptico por excelencia involucra el *operador laplaciano*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

que se aplica a funciones del tipo $u(x)$ que dependen de la variable espacial $x \in \mathbb{R}^N$. La variable tiempo está ausente en este modelo. Es por ello que sólo permite describir estados estacionarios o de equilibrio.

Por contra, las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas son los modelos más representativos en el contexto de los *problemas de evolución*, es decir, modelos que explican procesos que varían en función del tiempo. Esta dependencia temporal se ve reflejada en las propias definiciones del *operador del calor*,

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta,$$

y del *operador de ondas*,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

que actúan sobre funciones del tipo $u(x,t)$ que dependen de la variable espacio-temporal $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$.

A pesar de la dimensión temporal en común, las características matemáticas de ambos operadores son bien distintas. Mientras que la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en el tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita, la ecuación de ondas es el prototipo de modelo de propagación a velocidad finita y completamente reversible en el tiempo. Así pues, es lógico que los operadores se distingan por sus ámbitos de aplicación, cuyas fronteras se han ampliado con el paso del tiempo más allá del fenómeno de la cuerda vibrante o de la distribución del calor en un sólido. Por ejemplo, el operador del calor es habitual en la dinámica de fluidos (a través de una versión más sofisticada, el operador de Stokes) o en fenómenos de difusión (del calor, de contaminantes,...). Por su parte, el operador de ondas y sus variantes intervienen de forma sistemática en elasticidad (frecuentemente a través de sistemas más sofisticados, como el de Lamé, por ejemplo) o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell).

Frecuentemente los modelos más realistas son más sofisticados que una "simple" ecuación aislada. Se trata a menudo de sistemas acoplados de EDP en los que es habitual encontrar tanto componentes parabólicas como hiperbólicas. En estos casos, si bien un buen conocimiento de los aspectos más relevantes de las ecuaciones del calor y de ondas aisladamente puede no ser suficiente a causa de las interacciones de los diferentes componentes, sí que resulta indispensable para entender el comportamiento global del sistema. Por todo ello es fundamental entender los aspectos matemáticos de estas dos piezas clave: la ecuación del calor y la de ondas.

Los métodos matemáticos clásicos que se han venido desarrollando para el estudio de las EDP de segundo orden proporcionan existencia de soluciones parcialmente derivables hasta orden dos respecto de las variables espaciales, y al menos una vez parcialmente derivable respecto de la variable tiempo en el caso de la ecuación del calor, dos veces si consideramos la ecuación de ondas, un hecho que a priori es totalmente lógico. Sin embargo, existen situaciones en las que funciones incluso discontinuas cumplen las características idóneas para describir cierto proceso modelado por una EDP, a pesar de que por su propia naturaleza no puede ser solución de dicha ecuación. Por tanto sería deseable disponer de algún concepto que nos permita asegurar la existencia tales funciones como "soluciones" del modelo planteado, aunque dichas soluciones no se entiendan en sentido estricto.

A lo que nos referimos en el párrafo anterior es a la *formulación débil* de las EDP, que consiste básicamente en ampliar el abanico de posibles soluciones partiendo de la base de generalizar el concepto de derivabilidad. Esta será la llamada *derivabilidad débil*. Hablaremos de estas nociones con más detalle en el Capítulo 2.

Pues bien, una potente herramienta que nos permite resolver las ecuaciones del calor y de ondas desde este nuevo punto de vista la encontramos en el *Teorema de Hille-Yosida*. En sí mismo, el teorema puede considerarse una generalización de los resultados clásicos de existencia y unicidad de solución de problemas iniciales cuando, en lugar de en un espacio de dimensión finita, se plantean en un marco funcional abstracto. En realidad dicho resultado resulta ser consecuencia de la teoría sobre semigrupos (que trataremos brevemente más tarde) que desarrollaron por separado el norteamericano *Einar Hille* (28 de junio de 1894 - 12 de febrero de 1980) y el japonés *Kôsaku Yosida* (7 de febrero de 1909 - 20 de junio de 1990).

La gran utilidad del teorema reside en el hecho de que reduce el estudio de un problema de evolución al de una ecuación estacionaria más sencilla donde se elimina la dependencia temporal. De esta manera, es posible aplicarlo a la ecuación de ondas y la del calor sin más que restringiendo el estudio del problema hiperbólico o parabólico al de uno elíptico, para el cual mencionaremos métodos de resolución conocidos, de forma que nos asegura existencia y unicidad de solución en situaciones más generales que las planteadas por los métodos clásicos.

En definitiva, el Teorema de Hille-Yosida encierra las caracterśticas idóneas para ampliar los conocimientos de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como para aprender nuevos métodos de resolución de ciertos problemas fundamentales del campo de las ecuaciones en derivadas parciales, y en particular de diversos problemas de la física. Es por todo ello que realizar un estudio detallado de la demostración del Teorema de Hille-Yosida y de sus aplicaciones me pareció una idea más que interesante como para que me decantara por llevar mi trabajo fin de grado por esa línea.

En el resto de esta introducción hablaremos en tono no demasiado riguroso sobre la importancia matemática del Teorema de Hille-Yosida, justificando su gran utilidad y poniendo de manifiesto su carácter general relacionándolo con otros resultados clásicos. El primer capítulo de esta memoria está reservado para los objetivos del trabajo. Los tres siguientes conforman el núcleo de esta memoria, donde se presentan los resultados principales, siempre pretendiendo dar un enfoque de rigurosidad matemática, aunque complementado con aplicaciones prácticas; se darán aquí las demostraciones de los resultados de mayor relevancia. Para acabar dedicaremos un último capítulo a las conclusiones obtenidas.

Deseo una lectura enriquecedora y lo más amena posible a quien haya tenido el valor de ponerse delante del papel. Una sincera bienvenida a mi trabajo fin de grado.

Antecedentes

Sea[2] $N \in \mathbb{N}$ y sea $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, donde $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ denota el conjunto de las matrices cuadradas de orden N con coeficientes complejos. Dicha matriz representa a un operador lineal $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Los operadores lineales cuyo dominio es un espacio de Banach de dimensión finita son continuos, como se puede comprobar en [9]. Por tanto, se tiene

$$\|Au - Av\| = \|A(u - v)\| \leq \|A\|\|u - v\| \tag{1}$$

para cada $u, v \in \mathbb{C}^N$. En particular, A es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz $\|A\|$.

Un problema clásico de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión finita consiste en, dado un *dato inicial* $u_0 \in \mathbb{C}^N$, encontrar una función $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}^N$ que satisfaga

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2}$$

El siguiente resultado, que es un clásico en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, nos permite conocer la existencia, la unicidad y la regularidad de la solución del problema (2).

Teorema 1. *Sea $F : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ una función de Lipschitz. Entonces, dado $u_0 \in \mathbb{C}^N$ existe una única solución $u \in C^1([0, +\infty); \mathbb{C}^N)$ del problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Fu(t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \qquad \square$$

En definitiva, sabemos que existe una única solución $u \in C^1([0, +\infty); \mathbb{C}^N)$ de (2). De hecho, para este tipo tan particular de operadores podemos obtener dicha solución de forma explícita a partir de la exponencial matricial. A continuación justificaremos brevemente la existencia de dicha solución y mostraremos algunas propiedades relevantes de la misma.

La serie $\sum_n \frac{M^n}{n!}$ es absolutamente convergente para cualquier $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, luego podemos definir la exponencial de la matriz M como

$$e^M := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

Es sencillo comprobar que la función $v : [0, \infty) \to \mathbb{C}^N$ dada por

$$v(t) = e^{-At}u_0 \quad \forall t \geq 0 \tag{3}$$

es solución de (2). Dado que la solución es única, necesariamente $u = v$.

Además la familia de operadores lineales continuos $\left\{e^{-At}\right\}_{t \geq 0}$ satisface

- $e^{-A(t_1+t_2)} = e^{-At_1} \cdot e^{-At_2} \quad \forall t_1, t_2 \geq 0,$

[2] En este trabajo el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ será considerado como el conjunto de los enteros positivos, es decir, $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1\}$.

- $e^{-A\cdot 0} = I$,
- $\lim_{t\to 0^+} \|e^{-At}u_0 - u_0\| = 0 \quad \forall u_0 \in \mathbb{C}^N$.

Más aún, si A es semidefinida positiva, entonces para cada $t \geq 0$ se tiene que $\|e^{-At}\| \leq 1$ y

$$e^{-At} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n}A\right)^{-1}\right]^n.$$

Se puede encontrar información más completa y detallada sobre la exponencial matricial y sus propiedades en [3], [6] y [7].

Marco abstracto

El Teorema 1 también es cierto para espacios de Banach de dimensión no necesariamente finita. Es decir, existe la siguiente versión del teorema, cuya demostración se puede consultar en [2].

Teorema 2. *(Cauchy, Lipschitz, Picard) Sea E un espacio de Banach y sea $F : E \to E$ una función de Lipschitz. Entonces, dado $u_0 \in E$ existe una única solución $u \in C^1([0,+\infty); E)$ del problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Fu(t) = 0 \quad \forall t \in [0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

□

Sin embargo, en general es de poca utilidad para el estudio de los problemas clásicos de evolución. Para poner de manifiesto las limitaciones del Teorema 2, podemos fijarnos en una ecuación fundamental de la física matemática como es la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t) - \Delta u(t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \tag{4}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota al operador *laplaciano*, y $u(t) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ pertenece a algún espacio de funciones al menos dos veces derivables respecto de cada una de sus variables para cada $t \geq 0$ y para cierto abierto Ω. Con objeto de estudiar la existencia y la unicidad de solución de (4) con dato inicial $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ en dicho espacio de funciones, podemos ver (4) como un caso particular del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \in [0,+\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{5}$$

donde $A = -\Delta$.

En esta situación, el problema es el marco funcional donde A esté bien definida para aplicar el Teorema 2. Por ejemplo, si trabajamos con derivadas clásicas deberíamos imponer que Ω fuera acotado para asegurar que el espacio de funciones dos veces derivables que toman el valor cero en el borde, $C_0^2(\overline{\Omega})$, sea un espacio de Banach. Sin embargo no podemos tomar $E = C_0^2(\overline{\Omega})$ ya que $A(E) \not\subset E$, lo que incumple una de las hipótesis del teorema.

Un marco funcional más adecuado para el estudio de este tipo de problemas lo proporcionan los espacios de Sobolev de funciones débilmente derivables, aunque a la hora de aplicar el Teorema 2 sigue habiendo el mismo problema[3].

Las deficiencias del Teorema 2 las solventa en gran medida el *Teorema de Hille-Yosida*. Nos valdremos de él para analizar problemas del tipo (5) cuando el operador A está definido en *espacios de Hilbert*, aunque en realidad tiene sentido plantear el mismo problema en espacios de Banach, y enunciaremos una versión más general del Teorema de Hille-Yosida que lo resuelve bajo ciertas hipótesis.

Concretamente, sea H un espacio de Hilbert, donde notaremos la norma de un elemento $u \in H$ por $|u|$ y el producto escalar de $u, v \in H$ por (u, v). Sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal, donde $D(A)$ denota el dominio de A. Dado $u_0 \in D(A)$, el problema que queremos solucionar con el Teorema de Hille-Yosida consiste en encontrar una función $u : [0, +\infty) \to D(A)$ que satisfaga (5) (obsérvese que tomando $D(A) = H = \mathbb{C}^N$ podemos ver el problema (2) como un caso particular de (5)).

La versión del teorema que estudiaremos nos proporciona existencia y unicidad de solución de (5) siempre que impongamos ciertas hipótesis adicionales sobre el operador A. Un operador de tales características generaliza en cierto modo a las matrices semidefinidas positivas. A dichos operadores los denominaremos *maximales monótonos*, y su definición es como sigue.

Definición 3. *Un operador lineal, no necesariamente acotado, $A : D(A) \subset H \to H$ se dice* monótono *si satisface*

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A).$$

Se dice maximal monotóno *si, además, $R(I + A) = H$, es decir,*

$$\forall f \in H \ \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

En esta definición se encuentra implícita la idea de la que hablábamos al comienzo de este capítulo sobre reducir el estudio de un problema de evolución al de uno estacionario más sencillo. Es decir, a la hora de aplicar el Teorema de Hille-Yosida estudiaremos la existencia de solución de la ecuación estacionaria $u + Au = f$ para cada $f \in H$ usando métodos conocidos, y si conseguimos asegurar que existe solución, y además el operador A es monótono, podremos afirmar que el problema de evolución (5) tiene también solución y es única.

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de los operadores maximales monótonos. Para la prueba ver [2].

Proposición 4. *Sea A un operador maximal monótono. Entonces*

1. *$D(A)$ es denso en H,*
2. *A es un operador cerrado, y*
3. *para todo $\lambda > 0$, el operador $(I + \lambda A)$ de $D(A)$ a H es biyectivo, $(I + \lambda A)^{-1}$ es un operador acotado, con*[4] *$\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.* □

[3]Se puede encontrar más información sobre espacios de funciones tales como $C_0^2(\overline{\Omega})$ o los espacios de Sobolev, entre otros, en el Capítulo 2.

[4]El símbolo $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)}$ denota la norma canónica de operadores lineales acotados. Se puede consultar la definición formal en el Capítulo 2.

El enunciado del teorema, que se demostrará en el Capítulo 3, y que proporciona existencia y unicidad de solución para el problema (5) en el caso de operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert, es el siguiente.

Teorema 5. *(Hille-Yosida) Sea A un operador maximal monótono. Dado $u_0 \in D(A)$ existe una única función*

$$u \in C^1([0,+\infty);H) \cap C([0,+\infty);D(A))$$

que satisface (5)*. Además,*

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad y \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$$

para todo $t \geq 0$. □

Generalizaciones y resultados relacionados

Como ya hemos indicado anteriormente el grueso de este trabajo se desarrollará fundamentalmente en el ambiente que se ha presentado hasta ahora, es decir, el operador lineal A estará definido en un subespacio de un espacio de Hilbert H. Sin embargo algunos resultados se pueden extender al caso de un espacio de Banach $(E, ||\cdot||)$, de manera que se tendría el operador lineal $A : D(A) \subset E \to E$, para estudiar el problema de existencia y unicidad de solución de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t \in [0,+\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{6}$$

para cada $u_0 \in D(A)$.

En este caso, al carecer de producto escalar, el papel de los operadores maximales monótonos del Teorema 5, lo desempeñan los operadores m-acretivos en el sentido de la siguiente definición.

Definición 6. *Un operador lineal, no necesariamente acotado, $A : D(A) \subset E \to E$ es* m-acretivo *si $D(A)$ es denso en E y para cada $\lambda > 0$, el operador $I + \lambda A$ de $D(A)$ a E es biyectivo con $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$.*

Nótese que de la Proposición 4 se sigue que cualquier operador maximal monótono es en particular m-acretivo.

El siguiente resultado extiende el Teorema 5 a operadores m-acretivos. Su enunciado ha sido extraído de [2], y recoge de una manera similar a como se hizo en el caso de espacios de Hilbert los principales resultados que pueden verse ampliamente desarrollados en [8], [9] y [10].

Teorema 7. *Sea A un operador m-acretivo. Dado $u_0 \in D(A)$ existe una única función*

$$u \in C^1([0,+\infty);E) \cap C([0,+\infty);D(A))$$

que satisface (6)*. Además,*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad y \quad \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|$$

para todo $t \geq 0$. □

Para cada $t \geq 0$ consideremos la aplicación lineal $u_0 \in D(A) \mapsto u(t) \in D(A)$, donde $u(t)$ es la solución de (6) dada por el Teorema 7. Como $||u(t)|| \leq ||u_0||$ y $D(A)$ es denso en E, podemos extender esta aplicación por continuidad, de manera que obtenemos un operador de E a E, que denotamos $S_A(t)$. Aunque no sea el objetivo principal del trabajo, es interesente mencionar algunas propiedades de dicha aplicación sencillas de comprobar:

(a) para cada $t \geq 0$, $S_A(t) \in \mathcal{L}(E)$ y $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$,

(b.1) $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$,

(b.2) $S_A(0) = I$,

(c) $\text{lím}_{t \to 0^+} \|S_A(t)u_0 - u_0\| = 0 \quad \forall u_0 \in E$.

Cualquier familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores definidos de E a E que dependen del parámetro $t \geq 0$ y que satisfacen las cuatro propiedades anteriores se denomina *semigrupo continuo de contracciones*.

Un resultado notable que debemos a Hille y Yosida afirma que recíprocamente, dado un semigrupo continuo de contraciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en E, existe un único operador m-acretivo A tal que $S(t) = S_A(t)$, $\forall t \geq 0$. Esto establece una *correspondencia biyectiva entre operadores m-acretivos y semigrupos continuos de contracciones*. Para la prueba de este resultado, junto más información sobre teoría de semigrupos, consultar [8], [9] o [10].

Las propiedades (b.1) y (b.2) son análogas a dos propiedades básicas de la función exponencial. De hecho, se puede comprobar que la familia $\left\{e^{-At}\right\}_{t\geq 0}$, con A una matriz semidefinida positiva, es un semigrupo continuo de contracciones. Esto pone de manifiesto la relación que existe entre las soluciones del problema finitodimensional (2) y las del más general (6). Dicha relación se hace aún más clara gracias al siguiente resultado cuya prueba puede consultarse en [8] y [10].

Teorema 8. *Supongamos que A es m-acretivo. Entonces, para cada $u_0 \in D(A)$ la solución de* (6) *viene dada por la "fórmula exponencial"*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-1} \right]^n u_0$$

para todo $t \in [0, +\infty)$. □

Aunque en esta memoria nos centraremos en el caso lineal, la realidad es altamente no lineal. Existen extensiones del Teorema 7 y del Teorema 8, algunas de las cuales se pueden consultar en [8], que permiten abordar el caso de operadores A no lineales. Incluso se puede abordar el caso multivaluado, véase [4], que proporciona un marco adecuado para el estudio de ciertos problemas con discontinuidades.

Capítulo 1

Objetivos

La elección del tema de mi trabajo fin de grado vino motivada por mi interés hacia las *ecuaciones diferenciales*, que se inició a partir de las asignaturas de *Ecuaciones diferenciales I* y *Ecuaciones diferenciales II* del curso tercero del grado. Su estudio se caracteriza por el rigor de la matemática teórica sin perder de vista las innumerables aplicaciones en gran variedad de campos. En cuanto a su faceta púramente matemática, relaciona materias tales como el *análisis matemático*, la *topología* y el *álgebra lineal*, que son precisamente algunos de los temas que más han atraído mi atención a lo largo de la carrera.

Así pues, la idea general donde situar el punto de partida parecía bastante clara. Sin embargo, llegado el momento de concretar los objetivos específicos de mi trabajo fue imprescindible realizar un importante trabajo de búsqueda bibliográfica centrado en encontrar generalizaciones y resultados relacionados con los estudiados en las asignaturas de ecuaciones diferenciales. Fue así como descubrí el universo de resultados que existen y que para mí eran desconocidos. En particular, el *análisis funcional* ocupaba siempre un papel destacado, en el sentido de que los problemas se presentaban en espacios de Banach o de Hilbert en lugar de en espacios de dimensión finita.

Finalmente me dencanté por el *Teorema de Hille-Yosida* principalmente por dos razones. En primer lugar, porque me pareció una continuación natural de lo estudiado en las asignaturas de tercero del grado sobre ecuaciones diferenciales, ya que al fin y al cabo no deja de ser un medio para resolver problemas de valores iniciales pero planteados en un ambiente funcional más general; si me decanté por su versión en espacios de Hilbert fue porque éstos son los espacios de dimensión infinita con una estructura más rica. Y en segundo lugar, porque proporciona herramientas para resolver de forma relativamente sencilla y directa problemas clásicos muy ligados a la física tan importantes como la *ecuación del calor* o la *ecuación de ondas*, lo que es un interesante complemento al estudio del mencionado teorema.

En definitiva, podemos desglosar los objetivos principales de mi trabajo fin de grado en los siguientes puntos.

Objetivo 1: Conocer de manera rigurosa la demostración del Teorema de Hille-Yosida en espacios de Hilbert.

Si algo caracteriza a las matemáticas con respecto a las demás ciencias es que se construyen a partir de demostraciones basadas en el razonamiento lógico. Por lo tanto, el conocer, comprender y realizar demostraciones matemáticas es de fundamental importancia en el terreno de la matemática pura. Ha sido esta filosofía del razonamiento la que a lo largo de mis estudios de matemáticas ha conseguido que mi interés por ellas fuera cada vez mayor. Así, se presentaba irremediable el hecho de incluir al menos una demostración matemática en esta memoria.

La demostración pretende ser lo más completa posible, en el sentido de justificar cada detalle para dejar poco margen a la duda y así hacer que la comprensión sea más sencilla. Evidentemente, también debe contar con el rigor matemático apropiado, es decir, cada afirmación debe estar perfectamente razonada.

Por otro lado, debe ser un medio que sirva para consolidar y aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de los estudios de grado, en especial de ecuaciones diferenciales y análisis funcional. Deberá ponerse de manifiesto la relación con los resultados sobre problemas de valores iniciales estudiados en el grado, además de poner en práctica la teoría de espacios de Hilbert que se haya aprendido.

De hecho, será necesario un estudio adicional de análisis funcional, en particular sobre integración de funciones con valores en espacios de Banach, para una comprensión adecuada de la prueba del teorema. Así, podemos marcar como objetivo adicional, englobado dentro del **Objetivo 1**, el aprendizaje y la aplicación de los fundamentos de integración abstracta en la prueba del Teorema de Hille-Yosida.

Será el Capítulo 3 el que dedicaremos al desarrollo de la parte principal de este primer objetivo, mientras que el objetivo relacionado con la integración de funciones vectoriales se intentará alcanzar en el Capítulo 2.

Objetivo 2: Probar la existencia, unicidad y regularidad de solución débil de la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

Si bien el razonamiento lógico es la base de las matemáticas, la existencia de éstas carecería de sentido más allá de su belleza si no fuera por su indudable utilidad práctica. El lenguaje matemático es el medio en el que se apoyan las ciencias experimentales para dar respuesta a gran cantidad de incógnitas acerca del universo que nos rodea, un hecho que ha dado lugar, entre otras cosas, al importante desarrollo tecnológico que existe en la actualidad. Así, es razonable que un matemático que busque conseguir una formación completa aprenda a aplicar sus conocimientos en otros campos.

Para ser más concretos, en esta memoria nos centraremos en la aplicación del Teorema de Hille-Yosida en el estudio de dos problemas de evolución de esencial importancia para la ciencia, a saber, la *ecuación del calor* y la *ecuación de ondas*. Aunque es claro el carácter práctico de esta parte del trabajo, el enfoque que se le desea dar no deja de ser de rigor matemático, es decir, el objetivo es demostrar dos teoremas (uno para cada problema de evolución) que nos garanticen la existencia y la unicidad de solución de dichas ecuaciones bajo ciertas hipótesis, y que nos proporcionen la regularidad de sendas soluciones. De nuevo, se pretende que el razonamiento sea lo más claro y completo posible.

Se habrá observado que en el título de este segundo objetivo se habla de "solución débil". Como ya se comentó en la Introducción, éste es un tipo de solución más general, sobre la que se imponen menos restricciones con respecto a la solución clásica. Los resultados que se obtienen con este enfoque son, por tanto, menos "ideales" matemáticamente, es decir, se adaptan mejor a la realidad física subyacente al problema.

Para hacer posible una formulación débil de estos problemas de evolución es necesario desarrollar un marco funcional más amplio que el estudiado hasta ahora en el grado. Entre los nuevos conceptos analíticos que necesitamos destaca el de la *derivación débil*, y será imprescindible tener ciertas nociones de los *espacios de Sobolev*. De esta manera, podemos marcar como objetivo complementario el aprendizaje y la aplicación de los resultados de análisis funcional esenciales para la formulación débil de la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

El desarrollo del **Objetivo 2** se realizará principalmente en el Capítulo 4, donde se intentarán materializar los objetivos concretos referentes a la ecuación del calor y a la ecuación de ondas, aunque el material relativo a la formulación débil que se ha comentado lo incluiremos en el Capítulo 2.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo resume la base de análisis funcional necesaria para abordar las demostraciones de los resultados de los dos capítulos posteriores. No incluiremos demostraciones aquí, aunque daremos referencias donde se puedan consultar. La matemática empleada en el Capítulo 3 y en el Capítulo 4 que no se especifique en éste se asumirá que es conocida por el lector, aunque en realidad coincidirá con la teoría estudiada a lo largo del grado.

El capítulo está dividido en cuatro secciones. La primera tiene como objetivo simplemente presentar la notación que se usará para una serie de espacios de funciones a los que se recurrirá a menudo. La siguiente trata sobre la integración de funciones vectoriales, que se usará en el Capítulo 3, si bien sólo esporádicamente, aunque no deja de ser esencial en la demostración del teorema principal del capítulo. Las dos restantes completan la formación necesaria para plantear y demostrar los teoremas del Capítulo 4.

2.1. Espacios de funciones clásicos

Sean X un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^N$, Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, y $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios vectoriales normados. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ para todo $i = 1, ..., N$, escribimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ y

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

siendo $D^{(0,\dots,0)}u = u$ por convenio.

A continuación listamos una serie de espacios de funciones clásicos a fin de unificar la notación del resto del trabajo. Cuando alguno de dichos espacios admita ser equipado con una norma o un producto escalar denotaremos también dicha norma o producto.

- $L^p(X) = \left\{ u : X \to \mathbb{R} | \quad u \text{ es medible y } \int_X |u(x)|^p dx < \infty \right\} / \sim \quad \forall p \in [1, \infty)$[1]
  - Norma: $\quad |u|_{L^p} = \left(\int_X |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \forall u \in L^p(X)$

[1]Si $\mathcal{F}$ es un espacio de funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, entonces $\mathcal{F}/\sim$ denota el espacio cociente de $\mathcal{F}$ vía la relación de equivalencia siguiente: dados $u, v \in \mathcal{F}$, decimos que $u \sim v$ si $u = v$ en casi todo punto.

- Producto escalar para $p = 2$:

$$(u, v)_{L^2} = \left(\int_X u(x)v(x)dx \right)^{1/2} \quad \forall u, v \in L^2(X)$$

- $L^\infty(X) = \left\{ u : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } |u(x)| \leq C \text{ para casi todo } x \in X \end{array} \right\} / \sim$

  - Norma: $|u|_{L^\infty} = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ en casi todo } x \in X\} \quad \forall u \in L^\infty(X)$

- $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$[2] $= \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} u\chi_K \in L^p(\Omega) \text{ para cada conjunto} \\ \text{compacto } K \text{ contenido en } \Omega \end{array} \right\} / \sim$
  $\forall p \in [1, \infty]$, donde χ_K denota la función característica de K.

- $C(X, V) = \{u : X \to V| \quad u \text{ es continua}\}$[3]

- $C_b(X, V) = \{u : X \to V| \quad u \text{ es continua y acotada}\}$

  - Norma: $|u|_\infty = \sup_{x \in X} \|u(x)\|_V \quad \forall u \in C_b(X, V)$.

- $C^1(\Omega, V) = \left\{ u \in C(\Omega, V) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ es derivable parcialmente respecto de } x_i \\ \text{y } \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega, V) \text{ para todo } i = 1, ..., N \end{array} \right\}$[4]

- $C^k(\Omega, V) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega, V) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega, V) \quad \forall i = 1, ..., N \right\}$[5] $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

- $C^\infty(\Omega, V) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega, V)$

- $C^k_b(\Omega, V) = \left\{ u \in C^k(\Omega, V) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{la función } x \mapsto D^\alpha u(x) \text{ es acotada} \\ \text{en } \Omega \text{ para cada } 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$
  $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

  - Norma: $|u|_{C^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_\infty \quad \forall u \in C^k_b(\Omega, V)$

- $C^k(\overline{\Omega}, V) = \left\{ u \in C^k(\Omega, V) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{la función } x \mapsto D^\alpha u(x) \text{ admite una extensión} \\ \text{continua a } \overline{\Omega} \text{ para cada } 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$
  $\forall k \in \mathbb{N}$

- $C^\infty(\overline{\Omega}, V) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega}, V)$.

- $C^k_b(\overline{\Omega}, V) = C^k(\overline{\Omega}, V) \cap C^k_b(\Omega, V) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

---

[2] Obsérvese que el espacio $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se define sobre conjuntos *abiertos*.

[3] Cuando $V = \mathbb{R}^N$ escribimos $C(X)$. Empleamos esta misma notación abreviada en los espacios que siguen.

[4] Para el caso de $N = 1$ podemos sustituir el abierto Ω por un intervalo no necesariamente abierto de $\mathbb{R}$ y la definición de este espacio sigue teniendo sentido. Lo mismo ocurre para cualquiera de los espacios que presentamos aquí que involucre derivabilidad en su definición.

[5] Se escribe $C^0(\Omega, V) = C(\Omega, V)$ por convenio.

- $C_0^k(\Omega, V) = \{u \in C^k(\Omega, V) : u$ tiene soporte compacto$\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde el soporte de u es el complementario del abierto más grande donde u se anula,

- $C_0^\infty(\Omega, V) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(\Omega, V)$,

- $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W | \quad T \text{ es lineal y acotado}\}$[6]

  - Norma: $\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \quad \forall T \in \mathcal{L}(V, W)$.

2.2. Integración de funciones vectoriales

Esta sección la dedicaremos a una introducción de la integración de funciones con valores en espacios de Banach, que llamaremos *integral de Bochner* en honor al matemático que la desarrolló. En primer lugar abordaremos el concepto de función medible para este tipo de funciones, a continuación definiremos la integral de Bochner, y finalmente enunciaremos algunos resultados relacionados con dicha integral. Si se desea consultar un desarrollo más detallado de la integral de Bochner véase [5], donde además se podrán consultar las demostraciones de los resutados que aparezcan en esta sección.

Sean X un conjunto arbitrario, $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de subconjuntos[7] de X, y $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una medida completa y σ-finita. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 9. *Sea $f : X \to E$ una función. Decimos que f es*

- finitovaluada *si existe un número finito de conjuntos medibles mutuamente disjuntos $A_1, ..., A_k$ tales que f es constante en cada A_i y f vale 0 en $X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$.*

- simple *si es finitovaluada y si el conjunto donde $\|f(x)\| > 0$ es de medida finita.*

- σ-finitovaluada *si existe una familia numerable de conjuntos medibles mutuamente disjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que f es constante en cada A_i y f vale 0 en $X \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.*

Definición 10. *Una función $f : X \to E$ se dice* medible *si existe una sucesión de funciones σ-finitovaluadas de X a E que converge a f en casi todo punto.*

Es fácil ver que si $\mu(X) < +\infty$ entonces podemos reemplazar "σ-finitovaluada" en la anterior defnición por "simple".

Una vez definido el concepto de función medible podemos enunciar algunas propiedades de este tipo de funciones. Las recogemos en el siguiente teorema.

Teorema 11. *1. Si $f : X \to E$ y $g : X \to E$ son funciones medibles y a, b son constantes, entonces $af + bg$ es una función medible.*

2. Si $f : X \to E$ y $\lambda : X \to \mathbb{R}$ son funciones medibles, entonces λf es una función medible.

3. Si $f : X \to E$ es una función medible, entonces $\|f(\cdot)\| : X \to [0, +\infty)$ es una función medible.

[6] Cuando $V = W$ usamos la notación abreviada $\mathcal{L}(V)$.

[7] Como es usual, a los elementos de $\mathcal{A}$ los llamaremos *conjuntos medibles*.

4. *Si E es un álgebra de Banach y $f : X \to E$ y $g : X \to E$ son funciones medibles, entonces fg es una función medible.*

5. *Si $f : X \to E$ es el límite en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles, entonces f es medible.*

6. *Si X es un espacio topológico separable y $f : X \to E$ es continua, entonces f es medible.* $\square$

Estamos ya en condiciones de introducir la integral de Bochner. El primer paso es definirla para funciones σ-finitovaluadas. Más tarde extenderemos el concepto a cualquier función medible.

Definición 12. *Una función σ-finitovaluada $f : X \to E$ es* integrable *sobre el conjunto $A \in \mathcal{A}$ en el sentido de Bochner si la función $\|f(\cdot)\| : X \to [0, +\infty)$ es integrable sobre A en el sentido de Lebesgue. La* integral de Bochner*, o simplemente* integral*, de f sobre A se define como*

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A_k \cap A),$$

donde $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos medibles mutuamente disjuntos, y $f(x) = f_k \in E$ para cada $x \in A_k$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Es sencillo comprobar que la integral de Bochner está bien definida para funciones σ-finitovaluadas. Para ello, supongamos que $\|f(\cdot)\|$ es integrable (Lebesgue). Entonces, por la definición de la integral de Lebesgue,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \mu(A_k \cap A) = \int_A \|f(x)\| d\mu < +\infty.$$

Por tanto,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A_k \cap A) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \mu(A_k \cap A) < +\infty.$$

Esto es, la serie que aparece en la Definición 12 es convergente, luego tiene sentido definir la integral como la suma de la serie.

La siguiente proposición se deduce directamente de la Definición 12.

Proposición 13. *Sean $f, g : X \to E$ funciones σ-finitovaluadas integrables, y sea $A \in \mathcal{A}$. Se tiene que*

1. $\int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu = \int_A (f(x) + g(x))d\mu$,

2. $\left\| \int_A f(x)d\mu \right\| \leq \int_A \|f(x)\| d\mu$. $\square$

Finalmente definimos la integral de Bochner para funciones medibles.

Definición 14. *Una función $f : X \to E$ se dice* integrable *sobre el conjunto $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si existen funciones σ-finitovaluadas $f_n : X \to E$ para cada $n \in \mathbb{N}$, integrables en A, tales que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en casi todo punto y tales que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \|f_n(x) - f(x)\| d\mu = 0. \tag{2.1}$$

La integral de Bochner, o integral, de f sobre el conjunto $A \in \mathcal{A}$ *se define como*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)d\mu. \tag{2.2}$$

Podremos denotar la integral de Bochner alternativamente por

$$\int_A f(x)dx \quad \text{o simplemente} \quad \int_A f.$$

Tenemos que comprobar que tiene sentido la expresión (2.1) y que el límite en (2.2) existe y es único. En primer lugar, gracias al Teorema 11, tenemos que la función $\|f_n(\cdot)-f(\cdot)\|$ es medible, y por tanto tiene sentido escribir (2.1). La existencia del límite en (2.2) se sigue del hecho de que las integrales en el miembro derecho forman una sucesión de Cauchy en E, como se muestra en la siguiente expresión.

$$\begin{aligned}\left\|\int_A f_n - \int_A f_m\right\| &= \left\|\int_A (f_n - f_m)\right\| \\ &\le \int_A \|f_n(x) - f_m(x)\| d\mu \\ &\le \int_A \|f_n(x) - f(x)\| d\mu + \int_A \|f(x) - f_m(x)\| d\mu.\end{aligned}$$

Por último, para probar la unicidad del límite en (2.2), sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ dos sucesiones distintas de funciones σ-finitovaluadas integrables definidas de X a E, tales que ambas convergen a f en casi todo punto. Definimos la sucesión $\{h_n\}$ de la siguiente manera:

$$h_{2n} = f_n, \quad h_{2n-1} = g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que h_n es σ-finitovaluada para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $\{h_n\}$ converge a f en casi todo punto. Por tanto, como acabamos de comprobar, existe $L \in E$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A h_n = L.$$

Dado que $\{\int_A h_n\}$ es una sucesión convergente, toda parcial suya también lo es, y su límite coincide con el de $\{\int_A h_n\}$. Es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_A h_{2n} = L = \lim_{n\to+\infty} \int_A h_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \int_A g_n.$$

Así, el límite en (2.2) no depende de la elección de la sucesión.

La gran ventaja de la integral de Bochner es que el conjunto de las funciones integrables se caracteriza de forma sencilla. Esto es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 15. *Una condición necesaria y suficiente para que una función $f : X \to E$ sea integrable es que f sea medible y que $\int_X \|f(x)\| d\mu < +\infty$.* □

Es inmediato probar el siguiente corolario usando el Teorema 11 y el Teorema 15.

Corolario 16. *Sea $[a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y sea $f : [a, b] \to E$ una función continua. Entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Denotamos el conjunto de las clases de funciones integrables de X a E que difieren a lo sumo en un conjunto de medida nula por $L^1(X, E)$, donde se entiende que la integral es relativa a la medida μ. Se sigue directamente de la Definición 12 y la Definición 14 que las integrales de dos funciones iguales en casi todo punto coinciden. Por tanto, cuando tomemos una clase $f \in L^1(X, E)$, es consistente definir la integral de f sobre el conjunto $A \in \mathcal{A}$, con la notación

$$\int_A f(x)d\mu, \quad \int_A f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_A f,$$

como la integral sobre el conjunto $A \in \mathcal{A}$ de cualquier representante de la clase f, ya que el resultado será el mismo independientemente del representante escogido.

Se puede probar que para $E = \mathbb{R}$ las integrales de Bochner y de Lebesgue son equivalentes. Así, está justificado usar la misma notación para ambas. Se demuestra además que ambos tipos de integrales comparten muchas propiedades, como la linealidad, la σ-aditividad respecto del dominio de integración, la desigualdad triangular o la continuidad del operador integral.

Algunos resultados clásicos de la integral de Lebesgue también tienen su versión para la integral de Bochner. Por ejemplo, al igual que en caso unidimensional, $L^1(X, E)$ es un espacio de Banach si definimos la norma de $f \in L^1(X, E)$ por

$$|f|_{L^1} = \int_X \|f(x)\| d\mu.$$

Lo que haremos a continuación será enunciar algunos teoremas de integración clásicos adaptados a la integral de Bochner.

Empezamos por el *Teorema de la convergencia dominada*, cuyo enunciado es el que sigue.

Teorema 17. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^1(X, E)$ que converge a la función $f : X \to E$ en casi todo punto, y supongamos que existe $g \in L^1(X)$ tal que $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1(X, E)$ y*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu$$

para cada $A \in \mathcal{A}$. □

Sean Y un conjunto arbitrario, $\mathcal{B}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Y, y $\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ una medida σ-finita. Escribimos $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ para denotar el σ-álgebra generado por todos los conjuntos de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Enunciamos a continuación la versión del *Teorema de Fubini* para la integral de Bochner.

Teorema 18. *Sea $f : X \times Y \to E$ una función integrable. Entonces las funciones $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu$ y $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu$ están definidas en casi todo $x \in X$ y en casi todo $y \in Y$ respectivamente, y*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X g(x) d\mu = \int_Y h(y) d\nu. \qquad \square$$

Los últimos resultados que incluiremos en esta sección se corresponden con las versiones del *Teorema Fundamental del Cálculo* y de la *Regla de Barrow*, respectivamente.

Teorema 19. *Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y sea $f \in L^1([a,b],E)$. Definimos la función $g:[a,b] \to E$ por*

$$g(t) = \int_a^t f(s)ds$$

para cada $t \in [a,b]$. Entonces g es derivable en casi todo punto, y además se tiene que

$$\frac{dg}{dt}(t) = f(t)$$

para casi todo $t \in [a,b]$. □

Teorema 20. *Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y sea $f \in C^1([a,b],E)$. Entonces*

$$f(t) = \int_a^t \frac{df}{dt}(s)ds + f(a)$$

para todo $t \in [a,b]$. □

Igual que en el caso escalar, se pueden definir los espacios

$$L^p(X,E) = \left\{ f : X \to E| \quad f \text{ es medible y} \int_X \|f(x)\|^p < +\infty \right\},$$

equipados con la norma

$$|f|_{L^p} = \left[\int_X f^p \right]^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$ y para todo $f \in L^p(X,E)$, así como el espacio

$$L^\infty(X,E) = \left\{ f : X \to E \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } \|f(x)\| \leq C \text{ para casi todo } x \in X. \end{array} \right\},$$

al que asignamos la norma

$$|f|_{L^\infty} = \text{ínf}\{C : \|f(x)\| \leq C \text{ para casi todo } x \in X\}$$

para cada $f \in L^\infty(X)$. Se prueba que $L^p(X,E)$ definido de esta manera es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. En particular, para $p = 2$, si además E es un álgebra de Banach conmutativa, se puede definir el producto escalar

$$(f,g)_{L^2} = \int_X fg$$

para cada $f, g \in L^2(X,E)$. Este producto induce la norma en $L^2(X,E)$ que acabamos de definir. Por tanto, con este producto escalar $L^2(X,E)$ es un espacio de Hilbert.

2.3. Derivabilidad débil. Espacios de Sobolev

En esta sección introduciremos la noción de *derivada débil* y sus principales propiedades, para posteriormente definir una serie de espacios de funciones débilmente derivables, que llamaremos *espacios de Sobolev*. Mencionaremos también algunos resultados que involucran a dichos espacios. Para más información, y en particular para consultar las demostraciones de los resultados que presentamos, ver [1] o [2].

Antes de continuar indicamos que a lo largo de esta memoria Ω siempre va a denotar un abierto de $\mathbb{R}^N$, y que escribiremos Γ para referirnos a su frontera.

Definición 21. *Si* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *y* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *con* $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *para cada* $i = 1, 2, ..., N$*, decimos que* u *es* débilmente α-derivable *si existe una función* $v_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \varphi(x) v_\alpha(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces se dice que la función v_α *es la* α-derivada débil *de* u*, y la denotamos por* $v_\alpha = D^\alpha u$*.*

Se demuestra que, si existe, la α-derivada débil de una función es única. O mejor dicho, si una función admite dos α-derivadas, entonces ambas coinciden salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente espacio.

$$W^k(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \left| \begin{array}{l} u \text{ es } \alpha\text{-derivable para cada} \\ \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N \text{ con } 0 \leq |\alpha| \leq k \end{array} \right. \right\}.$$

Se puede probar que $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$ y que si una función admite derivadas parciales clásicas, entonces dichas derivadas son también derivadas débiles. Así, es lógico denotar la derivada clásica y la derivada débil de la misma manera. Sin embargo, cuando sea necesario se especificará el tipo de derivada que se esté considerando.

Se deduce fácilmente de la definición que la derivada débil es lineal, es decir,

$$D^\alpha(u + v) = D^\alpha u + D^\alpha v, \quad D^\alpha(\lambda u) = \lambda D^\alpha u$$

para u, v funciones α-derivables, y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, $W^k(\Omega)$ es un subespacio lineal de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, nótese que si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es una función débilmente β-derivable, cuya β-derivada $D^\beta u$ es débilmente α-derivable a su vez, entonces u es débilmente $(\alpha + \beta)$-derivable, con $D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha(D^\beta u))$. De esto se deduce el carácter inductivo del espacio $W^k(\Omega)$, es decir, la propiedad de que $W^k(\Omega)$ es el conjunto de las funciones de $W^{k-1}(\Omega)$ cuyas derivadas débiles de orden $k-1$ pertenecen a $W^1(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que una función débilmente derivable sea derivable en el sentido clásico (recuérdese que la inclusión $C^1(\Omega) \subset W^1(\Omega)$ se satisface necesariamente).

Teorema 22. *Si la función* $u \in W^1(\Omega)$ *satisface*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N\},$$

entonces $u \in C^1(\Omega)$*.* □

Como consecuencia del anterior teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 23. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es abierto y conexo, y* $u \in W^1(\Omega)$ *cumple que* $\nabla u = 0$ *en casi todo* Ω*, entonces* u *es constante.* □

Otra condición, en este caso suficiente, para que una función sea débilmente derivable nos la proporciona el siguiente resultado.

Teorema 24. *Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función localmente lipschitziana en Ω, entonces $u \in W^1(\Omega)$.* $\square$

El próximo resultado muestra en qué condiciones el producto de dos funciones débilmente derivables es también débilmente derivable.

Teorema 25. *Sean $u, v \in W^1(\Omega)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$uv \in W^1(\Omega)$ con $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$.*
2. *$uv \in L^1_{loc}(\Omega)$ y, dado $i \in \{1, 2, ..., N\}$, $u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)$.* $\square$

La afirmación (2) del teorema anterior se satisface en particular si $u, v \in W^1(\Omega) \cup L^\infty(\Omega)$.

El último resultado que enunciaremos sobre la derivada débil se trata de la versión de la regla de la cadena para funciones débilmente derivables.

Teorema 26. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz, y sea $u \in W^k(\Omega)$. Consideremos el conjunto $A = \{t \in \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } t\}$[8], y definamos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$g(x) = \begin{cases} f'(t), & t \in A, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Entonces, la composición $f \circ u \in W^1(\Omega)$ con

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u)(x) = g(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$. $\square$

Estamos ya en condiciones de introducir los espacios de Sobolev. Dados $p \in [1, +\infty]$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Es claro que $W^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio lineal de $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$. Podemos considerar la siguiente norma en $W^{k,p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

para cada $u \in W^{k,p}(\Omega)$. En particular, si $p = 2$ denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Podemos equipar al espacio $H^k(\Omega)$ con el producto escalar dado por

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

para cada $u, v \in H^k(\Omega)$. El producto escalar definido de esta manera induce la norma $\|\cdot\|_{W^{k,2}} = \|\cdot\|_{H^k}$.

Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach para cualesquier $p \in [1, \infty]$ y $k \in \mathbb{N}$. En particular, $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Enunciamos a continuación las versiones de las reglas del producto y de la cadena adaptadas a los espacios de Sobolev.

[8] El teorema fundamental del cálculo implica que la medida de $\mathbb{R} \setminus A$ es cero.

Teorema 27. *Sean $p, q, r \in [1, +\infty]$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y $v \in W^{k,q}(\Omega)$, entonces $uv \in W^{k,r}(\Omega)$ con

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_i}(x) = v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$. □

Teorema 28. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz. Consideremos el conjunto $A = \{t \in \mathbb{R} : f$ es derivable en $t\}$ y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x) = \begin{cases} f'(t), & t \in A, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Si $f \circ u \in L^p(\Omega)$, entonces $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u)(x) = g(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$ y para todo $i \in \{1, 2, ..., N\}$. □

Una condición suficiente para que $f \circ u \in L^p(\Omega)$ es que $f(0) = 0$, o que Ω sea acotado.

Es claro que toda función en $C^k(\Omega)$ tal que sus derivadas parciales hasta orden k pertencen a $L^p(\Omega)$ pertenece a $W^{k,p}(\Omega)$. Para $1 \leq p < +\infty$ se puede probar un resultado más fuerte, que enunciamos a continuación.

Teorema 29. *Si $1 \leq p < +\infty$, entonces el subespacio $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$.* □

Necesitaremos en lo sucesivo la siguiente notación. Dado $x \in \mathbb{R}^N$, escribimos

$$x = (x', x_N) \quad \text{con} \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}), \quad \text{y} \quad |x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) : x_N > 0\}, \\ &Q = \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ y } |x_N| < 1\}, \\ &Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^N_+, \\ &Q_0 = \{x = (x', 0) : |x'| < 1\}. \end{aligned}$$

Definición 30. *Decimos que un conjunto abierto Ω es de* clase C^m*, con $m \in \mathbb{N}$, si para todo $x \in \Gamma$ existe un entorno U de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $F : Q \to U$ tal que*

$$F \in C^m(\overline{Q}), \quad F^{-1} \in C^m(\overline{U}), \quad F(Q_+) = U \cap \Omega, \quad F(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

El siguiente resultado recoge algunas inclusiones entre los distintos espacios que hemos visto hasta ahora.

Teorema 31. *Sea Ω de clase C^1 con Γ acotado, o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p \in [1, +\infty)$. Se tienen las siguientes inclusiones.*

$$\begin{array}{lll} W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \textit{donde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, & \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, \\ W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [p, +\infty), & \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, \\ W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), & & \textit{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0. \end{array}$$

Las tres inmersiones inducidas por cada una de estas inclusiones son todas continuas.

Además, si $m - (N/p) > 0$ no es un entero y llamamos k a la parte entera de $m - (N/p)$, entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k_b(\overline{\Omega})^9,$$

con inmersión también continua. □

Presentamos a continuación un nuevo espacio. Escribimos $W^{k,p}_0(\Omega)$ para denotar el cierre de $C^\infty_0(\Omega)$ en el espacio $W^{k,p}(\Omega)$. Para el caso concreto de $p = 2$ escribimos $W^{k,2}_0(\Omega) = H^k_0(\Omega)$. Es claro que $W^{k,p}_0(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma inducida de $W^{k,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1, +\infty]$ y todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, $H^k_0(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Dado que las funciones de clase $C^\infty_0(\Omega)$ se anulan en Γ, parece intuitivo admitir que las funciones de $W^1_0(\Omega)$ también lo hagan en cierto sentido. Sin embargo, es claro que la igualdad en sentido estricto no nos aporta información, ya que el valor que tome una función de $W^1_0(\Omega)$ en un conjunto de medida cero (como Γ) es irrelevante. Formalizamos estas ideas en la siguiente definición.

Definición 32. *Sea Ω un abierto de clase C^1, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty)$. Decimos que $u = 0$* débilmente *en Γ si $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.*

El siguiente teorema nos dice en qué condiciones la igualdad de la definición anterior es una igualdad fuerte o usual.

Teorema 33. *Supongamos que Ω es de clase C^1. Sea*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \textit{con} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $u = 0$ *en* Γ.

(ii) $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. □

Los dos próximos resultados también relacionan los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ y $W^{k,p}_0(\Omega)$.

Proposición 34. *Si $p \in [1, +\infty]$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tiene soporte compacto, entonces $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$.* □

Proposición 35. *Si $p \in [1, +\infty)$, entonces $W^{k,p}_0(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$.* □

Tenemos también una nueva versión de la regla de la cadena.

[9] Esta inclusión es módulo la elección de un representante continuo.

Teorema 36. *Si $p \in [1, +\infty)$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitziana con $f(0) = 0$, entonces $f \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.* □

La siguiente proposición, que proporciona una igualdad de gran utilidad, se deduce fácilmente de la definición de la derivabilidad débil junto con un argumento de densidad.

Proposición 37. *Sea Ω abierto, y sean $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces*

$$\int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \qquad \square$$

Para acabar el resumen de propiedades del espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ enunciamos la *desigualdad de Poincaré.*

Teorema 38 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Supongamos que $p \in [1, +\infty)$ y Ω es un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante C (que depende de Ω y de p) tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particular, la expresión $\|\nabla u\|_{L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}$, y es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}}$; en $H_0^1(\Omega)$ la expresión $\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2}$ y es equivalente a la norma $\|u\|_{H^1}$. □

2.4. Formulación débil de ecuaciones en derivadas parciales

La importancia de los espacios de Sobolev estriba en que proporcionan un marco funcional idóneo para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales. Ilustraremos este hecho en el caso particular del problema de Dirichlet asociado a una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico. Además, los resultados que mostramos serán de utilidad en la última parte de la memoria. Veremos cómo se define un concepto de solución débil y cómo se puede obtener existencia y unicidad usando las herramientas del análisis funcional. Finalmente se darán condiciones suficientes para asegurar que la solución débil es en realidad solución en sentido clásico.

El problema de Dirichlet homogéneo asociado a la EDP elíptica $-\Delta u + \lambda u = f$ consiste en encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde f es una función dada definida en Ω, y $\lambda \geq 0$ es una constante arbitraria.

Las herramientas que nos proporcionan los espacios de Sobolev nos permiten definir un tipo de función que puede considerarse solución de (2.3) en cierto modo, pero no en el sentido usual. Es decir, a dicha solución no se le pide que satisfaga las ecuaciones de (2.3) de forma estricta, sino que se le imponen otras condiciones más débiles. Es por ello que la denominaremos *solución débil*, y a la solución clásica la llamaremos también *solución fuerte* por contraposición. Recogemos estas ideas con más precisión en la siguiente definición.

Definición 39. *Una* solución fuerte (o clásica) *de* (2.3) *es una función* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *que satisface* (2.3) *(en el sentido usual). Una* solución débil *de* (2.3) *es una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Supongamos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (2.3). Obsérvese que, en particular, $u \in H^2(\Omega)$. Entonces, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, se tiene, aplicando la Proposición 37, que

$$\int_\Omega fv = \int_\Omega (-\Delta u + \lambda u)v = \int_\Omega (-\Delta u)v + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv.$$

Además, por el Teorema 33, dado que se satisface la igualdad (usual) $u = 0$ en Γ, se tiene que $u \in H_0^1(\Omega)$. En definitiva, toda solución fuerte es también solución débil.

El siguiente resultado nos aporta la existencia y unicidad de solución débil como consecuencia directa del Teorema de Lax-Milgram, ver [2, Corollary 5.8], que además proporciona una caracterización variacional de dicha solución como un mínimo.

Teorema 40 (Dirichlet, Riemann, Poincaré, Hilbert)**.** *Dada* $f \in L^2(\Omega)$*, existe una única solución débil* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (2.3)*. Además, u satisface*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda |u|^2) - \int_\Omega fu = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + \lambda |v|^2) - \int_\Omega fv \right\}. \qquad \square$$

Acabamos la sección con un teorema que nos da condiciones suficientes para la regularidad de la solución débil del problema (2.3).

Teorema 41. *Sea* Ω *un abierto de clase* C^2 *con* Γ *acotado, o bien,* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$*. Sea* $f \in L^2(\Omega)$ *y sea* $u \in H_0^1(\Omega)$ *la solución débil de* (2.3) *dada por el Teorema 40. Entonces*

$$u \in H^2(\Omega) \quad y \quad ||u||_{H^2} \leq C||f||_{L^2},$$

donde C *es una constante que depende sólo de* Ω*. Además, si* Ω *es de clase* C^{m+2} *y* $f \in H^m(\Omega)$*, entonces*

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad y \quad ||u||_{H^{m+2}} \leq C||f||_{H^m}.$$

En particular, si $f \in H^m(\Omega)$ *con* $m > N/2$*, entonces* $u \in C^2(\overline{\Omega})$*. Finalmente, si* Ω *es de clase* C^∞ *y* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$*, entonces* $u \in C^\infty(\Omega)$*.* $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Hille-Yosida

El núcleo de este capítulo consitirá en la prueba del Teorema 5. Para llevar a cabo la demostración serán necesarias algunas definiciones previas, así como el enunciado de ciertas proposiciones y lemas. A su vez, se presentará otra versión del Teorema de Hille-Yosida, que se diferencia ligeramente del Teorema 5 pero que será igualmente de gran utilidad.

Antes de continuar indicamos que en este capítulo H denotará a un espacio de Hilbert.

Como se recordará, una hipótesis del Teorema 5 exige que el operador A sea maximal monótono. Nótese que dicho operador está definido en un subespacio[1] $D(A)$ de H, el cual no necesariamente coincide con el propio H. Sin embargo, veremos que los operadores maximales monótonos siempre se pueden aproximar por operadores acotados definidos en H, es decir, admiten una regularización en el sentido de la siguiente definición.

Definición 42. *Sea A un operador maximal monótono. Para todo $\lambda > 0$, denotamos*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad y \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda);$$

El operador $J_\lambda : H \to H$ se denomina resolvente *de A, y el operador $A_\lambda : H \to H$ es la* regularización de Yosida *de A.*

La siguiente proposición es una lista de propiedades del resolvente y de la regularización de Yosida de A. Las usaremos con frecuencia en la demostración del Teorema 5. Su prueba es elemental a partir de la definición anterior; se puede consultar en [2].

Proposición 43. *Sea A un operador maximal monótono. Entonces*

(a.1) $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H \quad y \quad \forall \lambda > 0$,

(a.2) $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A) \quad y \quad \forall \lambda > 0$,

(b) $|A_\lambda v| \leq |Av| \quad \forall v \in D(A) \quad y \quad \forall \lambda > 0$,

(c) $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H$,

(d) $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$,

(e) $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H \quad y \quad \forall \lambda > 0$,

[1] El espacio $D(A)$ lo equiparemos con la norma $|u|_{D(A)} = |u|_H + |Au|_H$ para cada $u \in D(A)$.

(f) $|A_\lambda v| \leq (\frac{1}{\lambda})|v| \quad \forall v \in H \quad y \quad \forall \lambda > 0,$ □

Del apartado *(f)* de la proposición anterior se sigue que $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ es una familia de operadores *acotados*, y del apartado *(d)*, que dichos operadores se aproximan al operador *no necesariamente acotado* A cuando $\lambda \to 0$. Además, A_λ está definido de H a H y de su propia definición se deduce que es lineal para cada $\lambda > 0$ (dado que A lo es). Esto implica que A_λ es lipschitziano, como muestra la desigualdad (1). Así pues, el Teorema 2 nos asegura la existencia de una única solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{en } [0, +\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{3.1}$$

La idea de la prueba de la existencia de solución en el Teorema 5, al menos para el caso de $u_0 \in D(A^2)$, se basa en encontrar la solución de (5) como límite de las soluciones de (3.1) cuando $\lambda \to 0$. Para el caso general de $u_0 \in D(A)$ necesitaremos aplicar el siguiente lema.

Lema 44. *Sea* $u_0 \in D(A)$. *Entonces* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{u}_0 \in D(A^2)$ *tal que* $|u_0 - \overline{u}_0| < \varepsilon$ *y* $|Au_0 - A\overline{u}_0| < \varepsilon$. *En otras palabras,* $D(A^2)$ *es denso en* $D(A)$ *con la norma de* $D(A)$.

Demostración. Sea $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$ para cierto $\lambda > 0$ que fijaremos después. Por la definición de J_λ tenemos que

$$\overline{u}_0 \in D(A) \quad \text{y} \quad \overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0.$$

Así, $A\overline{u}_0 \in D(A)$, o lo que es lo mismo, $\overline{u}_0 \in D(A^2)$. Por otro lado, por la Proposición 43 sabemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \\ &\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda A u_0 - Au_0| = 0, \\ &J_\lambda A u_0 = A J_\lambda u_0. \end{aligned}$$

Tomando λ suficiente pequeño se tiene lo deseado. □

Este lema nos da una sucesión (u_{0n}) en $D(A^2)$ convergente a $u_0 \in D(A)$ tal que la sucesión (Au_{0n}) converge a Au_0. Como $u_{0n} \in D(A^2)$, el problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{en } [0, +\infty), \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \tag{3.2}$$

tendrá solución para cada $n \in \mathbb{N}$. Veremos al final de la prueba del Teorema 5 que la sucesión de soluciones así obtenida es convergente, y su límite será la solución de (5).

Otro lema necesario, en este caso para la prueba de ciertas cotas a partir de las cuales se obtendrán

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{y} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$$

para $u_0 \in D(A)$ y $t \geq 0$, es el siguiente.

Lema 45. *Sea $w \in C^1([0,+\infty); H)$ una función que satisface*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad en\ [0,+\infty). \tag{3.3}$$

Entonces las funciones $t \mapsto |w(t)|$ y $t \mapsto |\frac{dw}{dt}(t)| = |A_\lambda w(t)|$ son decrecientes en $[0,+\infty)$.

Demostración. Multiplicando escalarmente ambos miembros de (3.3) por w se tiene que

$$\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0$$

en $[0,+\infty)$. Por el apartado *(e)* de la Proposición 43 sabemos que $(A_\lambda w, w) \geq 0$ y así

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 = -(A_\lambda w(t), w(t)) \leq 0$$

para todo $t \geq 0$, luego la función $t \mapsto |w(t)|$ es no creciente.

Por otro lado, usando que A_λ es un operador lineal acotado se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_\lambda w(t+h) - A_\lambda w(t)}{h} - A_\lambda \frac{dw}{dt}(t)\right| =& \left|A_\lambda\left(\frac{w(t+h)-w(t)}{h} - \frac{dw}{dt}(t)\right)\right| \\ \leq& \|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h} - \frac{dw}{dt}(t)\right|\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Por tanto, dado que

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{w(t+h)-w(t)}{h} - \frac{dw}{dt}(t)\right| = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{A_\lambda w(t+h) - A_\lambda w(t)}{h} - A_\lambda\frac{dw}{dt}(t)\right| = 0$$

para todo $t \geq 0$. Es decir, $A_\lambda w$ es derivable y su derivada es $A_\lambda \frac{dw}{dt}$. De (3.3) se sigue que $\frac{dw}{dt}$ es derivable, y satisface

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0 \tag{3.4}$$

en $[0,+\infty)$. Este proceso se puede reiterar indefinidamente, de manera que se concluye que $w \in C^\infty([0,+\infty); H)$.

Multiplicando escalarmente ambos miembros de (3.4) por $\frac{dw}{dt}$ se deduce de forma análoga que $t \mapsto \left|\frac{dw}{dt}(t)\right|$ es decreciente. De hecho, la función $t \mapsto \left|\frac{d^k w}{dt^k}(t)\right|$ es decreciente para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Comenzaremos ahora la prueba del Teorema 5 demostrando de forma breve y sencilla la unicidad de solución, para a continuación abordar el tema de la existencia, primero para $u_0 \in D(A^2)$ y finalmente para el caso general de $u_0 \in D(A)$.

Demostración del Teorema 5. Sean u y $\overline{u}$ dos soluciones de (5). Como A es monótono se tiene

$$\left(\frac{d}{dt}(u-\overline{u}), u-\overline{u}\right) = -(A(u-\overline{u}), u-\overline{u}) \leq 0.$$

Pero

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t)-\overline{u}(t)), u(t)-\overline{u}(t)\right) \quad \forall t \geq 0$$

Así, la función $t \mapsto |u(t)-\overline{u}(t)|^2$ es decreciente en $[0,+\infty)$, y por tanto también lo es la función $t \mapsto |u(t)-\overline{u}(t)|$. Como $|u(0)-\overline{u}(0)| = |u_0 - u_0| = 0$ se sigue que

$$|u(t)-\overline{u}(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Es decir, $u = \overline{u}$ y la solución es por tanto única.

El resto de la demostración la dedicaremos a la existencia de solución, junto con su regularidad y las cotas que nos da el enunciado del teorema. Obtendremos toda la información a lo largo del mismo proceso.

Sea u_λ la solución dada por el Teorema 2 del problema (3.1). Empezaremos probando que para cada $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge a cierto límite $u(t)$ cuando $\lambda \to 0$. Además, la convergencia es uniforme en cada intervalo acotado $[0,T]$.

Tenemos las estimas

$$|u_\lambda(t)| \leq |u_0|, \tag{3.5}$$

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \tag{3.6}$$

para todo $t \geq 0$ y para todo $\lambda > 0$. Se deducen directamente del Lema 45 y del apartado *(b)* de la Proposición 43.

Por otro lado, para todo $\lambda, \mu > 0$ se tiene

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

en $[0,+\infty)$, y así, multiplicando escalarmente por $u_\lambda - u_\mu$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \tag{3.7}$$

en $[0,+\infty)$.

Además, aplicando la definición de A_λ, el apartado *(a.1)* de la Proposición 43 y que A es monótono se tiene

$$\begin{aligned}(3.8) \quad &(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)\\ &=(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu)\\ &=(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)\\ &\geq(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)\end{aligned}$$

De (3.6), (3.7) y (3.8) se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 &= -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)\\ &\leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)\\ &\leq |A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu|\ |\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu|\\ &\leq (|A_\lambda u_\lambda| + |A_\mu u_\mu|)(\lambda |A_\lambda u_\lambda| + \mu |A_\mu u_\mu|)\\ &\leq 2(\lambda+\mu)|Au_0|^2\end{aligned}$$

en $[0, +\infty)$. Integrando entre 0 y algún $t \geq 0$ el primer y el último miembro de esta desigualdad obtenemos

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t|Au_0|^2,$$

es decir,

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}|Au_0|. \tag{3.9}$$

Esto implica que para cada $t \geq 0$ fijo, $u_\lambda(t)$ es una sucesión de Cauchy[1] cuando $\lambda \to 0$, y así, converge a algún límite, que denotamos por $u(t)$. Pasando al límite en (3.9) cuando $\mu \to 0$ obtenemos que

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

Por tanto, la convergencia es uniforme en t en cada intervalo acotado $[0, T]$, luego $u \in C([0, +\infty); H)$.

Imponiendo ahora como hipótesis adicional que $u_0 \in D(A^2)$, es decir, $u_0 \in D(A)$ y $Au_0 \in D(A)$, pobaremos que, para cada $t \geq 0$, $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge a $\frac{du}{dt}(t)$ cuando $\lambda \to 0$, y que la convergencia es uniforme en cada intervalo acotado $[0, T]$.

Sea $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$. De (3.4) se sigue que $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$. Por el mismo razonamiento que se hizo más arriba se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda |A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|). \tag{3.10}$$

Por otro lado, del Lema 45 deducimos que

$$|A_\lambda v_\lambda(t)| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|, \tag{3.11}$$

y de forma análoga

$$|A_\mu v_\mu(t)| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0| \tag{3.12}$$

Por último, como $Au_0 \in D(A)$, por los puntos *(a.1)* y *(a.2)* de la Proposición 43 obtenemos que

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda A_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A^2 u_0,$$

y así, aplicando que $||J_\lambda||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$,

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0|. \tag{3.13}$$

[1]Para ser precisos, $u_{\lambda_n}(t)$ es de Cauchy para cada sucesión de números reales positivos λ_n convergente a cero.

Combinando (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13) se sigue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda+\mu)|A^2u_0^2|.$$

De la misma forma que se hizo anteriormente concluimos que $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \to 0$ a algún límite v, y que la convergencia es uniforme en cada intervalo acotado $[0,T]$, luego $v \in C([0,+\infty);H)$.

Dado que $v_\lambda \in C([0,+\infty);H)$, en virtud del Corolario 16 se tiene que, para cada $t \geq 0$, $v_\lambda \in L^1([0,t];H)$. Usando esto, además de la estima (3.6), podemos aplicar el Teorema 17 para obtener, para cada $t \geq 0$,

$$\int_0^t v(s)ds = \int_0^t \lim_{\lambda\to 0} v_\lambda(s)ds = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t v_\lambda(s)ds = \lim_{\lambda\to 0}(u_\lambda(t)-u_0) = u(t)-u_0,$$

donde se ha empleado también el Teorema 20. De esta igualdad se sigue de forma inmediata que u es derivable en $[0,+\infty)$. Derivando los términos primero y último se tiene que

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t) \quad \forall t \geq 0,$$

luego $u \in C^1([0,+\infty);H)$.

Hasta ahora hemos probado que, para $T < +\infty$,

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t), \\ \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \to \dfrac{du}{dt}(t) \end{cases}$$

cuando $\lambda \to +\infty$, siendo ambas convergencias uniformes para cada $t \in [0,T]$, y que $u \in C^1([0,+\infty);H)$. Lo que haremos a continuación será demostrar que la función u, obtenida como límite de las soluciones del problema (3.1), es en realidad la solución de (5) y que satisface el resto de condiciones que se le imponen a dicha solución en el Teorema 5.

Empezamos probando que se cumple la condición del dato inicial. Pues bien, sabemos que $u_\lambda(0) = u_0$ y que la sucesión constantemente igual a u_0 converge a u_0. Por otro lado, $u_\lambda(0)$ converge a $u(0)$ cuando $\lambda \to 0$. Por la unicidad del límite, necesariamente $u(0) = u_0$.

Para probar que u es solución de la ecuación diferencial, reescribimos (3.1) como

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{3.14}$$

Esta igualdad implica que $A(J_\lambda u_\lambda(t))$ converge cuando $\lambda \to 0$.

Observamos por otro lado que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ cuando $\lambda \to 0$, ya que

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &= |J_\lambda(u_\lambda(t) - u(t))| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \to 0. \end{aligned}$$

En definitiva, tenemos una sucesión $(J_\lambda u_\lambda, A(J_\lambda u_\lambda))$ en la gráfica de A que es convergente. Dado que A es un operador cerrado, o lo que es lo mismo, la gráfica de A es un conjunto cerrado de $H \times H$, se tiene que

$$u(t) \in D(A) \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} A(J_\lambda u_\lambda(t)) = Au(t)$$

para todo $t \geq 0$. Tomando ahora límites cuando $\lambda \to 0$ en (3.14) concluimos que

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$$

para todo $t \geq 0$.

Además, dado que $u \in C^1([0,+\infty); H)$, de lo anterior deducimos que la función $t \mapsto Au(t)$ es continua de $[0,+\infty)$ a H. Así pues, para cualquier $t \geq 0$ y cualquier sucesión de números reales no negativos (t_n) convergente a t se tiene que

$$|u(t_n) - u(t)|_{D(A)} = |u(t_n) - u(t)|_H + |Au(t_n) - Au(t)|_H \to 0$$

cuando $n \to +\infty$. Es decir, $u \in C([0,+\infty); D(A))$.

Finalmente tomamos límites en (3.5) y en (3.6) para obtener las cotas

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{y} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$$

para todo $t \geq 0$.

Llegados a este punto, podemos afirmar que el Teorema 5 es cierto si $u_0 \in D(A^2)$. Acabaremos la prueba viendo que para $u_0 \in D(A)$ (es decir, no se cumple necesariamente que $Au_0 \in D(A)$) el teorema se satisface de igual manera.

Usando la densidad dada por el Lema 44 podemos encontrar una sucesión (u_{0n}) en $D(A^2)$ tal que $u_{0n} \to u_0$ y $Au_{0n} \to Au_0$. Según lo ya probado sabemos que existe una solución u_n del problema (3.2) para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dados $n, m \in \mathbb{N}$, es claro que $u_n - u_m$ satisface

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_n - u_m) + A(u_n - u_m) = 0 \quad \text{en } [0,+\infty), \\ u_n(0) - u_m(0) = u_{0n} - u_{0m}. \end{cases}$$

Por tanto, para cada $t \geq 0$ se tienen las cotas

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}|, \tag{3.15}$$

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \leq |Au_{0n} - Au_{0m}|. \tag{3.16}$$

Sabemos que (u_{0n}) y (Au_{0n}) son convergentes, luego en particular son de Cauchy. Así, de las dos desigualdades anteriores se sigue que $(u_n(t))$ y $\left(\frac{du_n}{dt}(t)\right)$ son también de Cauchy para cada $t \geq 0$. La completitud de H nos da la convergencia de $(u_n(t))$ y $\left(\frac{du_n}{dt}(t)\right)$ para cada $t \geq 0$. En definitiva, existen dos funciones $t \mapsto u(t)$ y $t \mapsto v(t)$ tales que

$$\begin{aligned} u_n(t) &\to u(t) \quad \text{cuando } n \to +\infty, \\ \frac{du_n}{dt}(t) &\to v(t) \quad \text{cuando } n \to +\infty, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Tomamos límites en (3.15) y en (3.16) cuando $m \to +\infty$ y obtenemos que

$$\begin{gathered} |u_n(t) - u(t)| \leq |u_{0n} - u_0|, \\ \left|\frac{du_n}{dt}(t) - v(t)\right| \leq |Au_{0n} - Au_0| \end{gathered}$$

para todo $t \geq 0$. Esto implica que las convergencias son uniformes en $[0, +\infty)$. En particular, $u, v \in C([0, +\infty); H)$.

Por otro lado, la sucesión (Au_{0n}) es convergente, luego en particular es acotada. Por tanto, existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) \right| \leq |Au_{0n}| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0.$$

Esta cota, junto con el hecho de que $\frac{du_n}{dt} \in C([0, t]; H) \subset L^1([0, t]; H)$ para todo $t \geq 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, nos permite aplicar de nuevo el Teorema 17 de manera que, para cada $t \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t v(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to+\infty} \frac{du_n}{dt}(s)ds = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \frac{du_n}{dt}(s)ds \\ &= \lim_{n\to+\infty} (u_n(t) - u_{0n}) = u(t) - u_0. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t) \quad \forall t \geq 0,$$

luego $u \in C^1([0, +\infty); H)$.

Así pues, por la continuidad de $\frac{du_n}{dt}$ sabemos que

$$Au_n = -\frac{du_n}{dt} \to -\frac{du}{dt}$$

cuando $n \to +\infty$. Ahora bien, dado que A es un operador cerrado, se tiene que $u(t) \in D(A)$ para cada $t \geq 0$ y además

$$Au_n \to Au$$

cuando $n \to +\infty$. En virtud de la unicidad del límite, necesariamente $-\frac{du}{dt} = Au$ en $[0, +\infty)$, o lo que es lo mismo,

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{en } [0, +\infty).$$

Para ver que se satisface la condición del dato inicial, observamos que

$$\begin{aligned} u_n(0) &\to u(0) \quad \text{cuando } n \to +\infty, \\ u_n(0) = u_{0n} &\to u_0 \quad \text{cuando } n \to +\infty. \end{aligned}$$

De nuevo la unicidad del límite nos dice que $u(0) = u_0$.

Por otra parte, de la misma forma que se hizo en el caso de $u_0 \in D(A^2)$ se razona que $u \in C([0, +\infty); D(A))$.

Por último, tenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq |u_{0n}|, \\ \left| \frac{du_n}{dt}(t) \right| = |Au_n(t)| &\leq |Au_{0n}| \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si hacemos tender n a infinito obtenemos que

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u_0|, \\ \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| &\leq |Au_0| \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, acabando así la demostración. □

Gracias a la observación siguiente ampliamos el abanico de problemas que podemos resolver con el Teorema de Hille-Yosida.

Observación 46. *Sea A un operador maximal monótono y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. El problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \ \textit{en } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

se reduce al problema (5) *realizando el cambio de variable*

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t) \ \forall t \geq 0.$$

Es claro entonces que v satisface

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \ \textit{en } [0, +\infty), \\ v(0) = u_0, \end{cases}$$

A continuación presentaremos una versión diferente del Teorema 5, que impone unas condiciones más restrictivas sobre el operador A pero, por contra, deja más libertad en la elección del dato inicial u_0. Como resultado, la solución que se obtiene del problema (5) es más regular en $(0, +\infty)$, pero en $t = 0$ sólo podremos asegurar que es continua.

En este nuevo teorema se exigirá que el operador A sea *autoadjunto*, en el sentido de la siguiente definición.

Definición 47. *Sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal no necesariamente acotado. Se dice que*

- *A es* simétrico *si $(Au, v) = (u, Av)$ $\forall u, v \in D(A)$,*
- *A es* autoadjunto *si $D(A^*) = D(A)$ y $A^* = A$,*

donde A^* denota al operador adjunto de A.

Es claro que todo operador autoadjunto es simétrico. Sin embargo, el recíproco no se tiene en general. La siguiente proposición, cuya prueba se puede consultar en [2], nos da la equivalencia para operadores maximales monótonos.

Proposición 48. *Sea A un operador simétrico maximal monótono. Entonces A es autoadjunto.*

Estamos en condiciones de enunciar el nuevo teorema. Su prueba puede consultarse en [2].

Teorema 49. *Sea A un operador autoadjunto maximal monótono. Entonces para cada $u_0 \in H$ existe una única función*

$$u \in C([0, +\infty); H) \cap C^1((0, +\infty); H) \cap C((0, +\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textit{en } (0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad y \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0,$$

$$u \in C^k((0,+\infty); D(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

$\square$

Capítulo 4

Aplicación del Teorema de Hille-Yosida en problemas de evolución

En este capítulo se pondrán en práctica las dos versiones del Teorema de Hille-Yosida que se estudiaron en el Capítulo 3 aplicándolas en la resolución de dos problemas de evolución clásicos: la *ecuación del calor* y la *ecuación de ondas*. Será una forma de mostrar la clara utilidad científica de los teoremas, observando los resultados de forma más o menos inmediata. Además se pondrán de manifiesto sus potentes capacidades, en el sentido de que comprobando unas hipótesis sencillas obtendremos resultados de relevancia.

También recurriremos en gran medida a la teoría desarrollada en el Capítulo 3, que nos permitirá trabajar en un ambiente funcional más acorde con la realidad física que hay detrás de los problemas matemáticos que se plantean. Cobrarán especial protagonismo los espacios de Sobolev y la derivada débil.

Dividiremos el capítulo en dos secciones, la primera dedicada exclusivamente a la ecuación del calor, y la que resta a la ecuación de ondas. La estructura de la redacción en ambas será similar: en primer lugar se presentará el modelo matemático por el que se rige el fenómeno físico, después se enunciarán y demostrarán los lemas que sean necesarios para la demostración del teorema principal, a continuación se enunciará y demostrará el teorema que resuelve el problema de evolución que se plantea, y acabaremos con algunos comentarios acerca de los resultados.

4.1. La ecuación del calor

A lo largo de esta sección asumiremos que Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^∞ con Γ acotado. Denotemos

$$Q = \Omega \times (0, \infty),$$
$$\Sigma = \Gamma \times (0, \infty).$$

El conjunto Σ es la *frontera lateral* del cilindro Q.

El problema que se plantea consiste en encontrar una función $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{en } Q, \tag{4.1}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Sigma, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega, \tag{4.3}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota el *laplaciano* en el espacio de variables x, t es la variable *tiempo*, y $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función dada, que llamaremos *dato inicial.*

La ecuación (4.1) modela la distribución de temperatura u en el espacio Ω en cada instante de tiempo t. De ahí su nombre, se trata de la *ecuación del calor*. La ecuación (4.2) es la *condición de frontera de Dirichlet*, que se corresponde con la hipótesis de que la frontera Γ se mantiene a temperatura nula.

Desde un punto de vista puramente matemático, la ecuación (4.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Se trata en particular de una ecuación de tipo *parabólico*. Decimos además que (4.1), (4.2), (4.3) es un *problema de evolución* debido a la dependencia en t, que se relaciona precisamente con la "evolución" de la temperatura a lo largo del tiempo (nótese la diferencia con el problema (2.3)).

Con objeto de resolver el problema, podemos ver a u como una función definida en $[0, \infty)$ con valores en un espacio de Hilbert H, donde H es un espacio de funciones que dependen sólo de x; en nuestro caso tomaremos $H = L^2(\Omega)$. Cuando escribimos sólo $u(t)$ para algún $t \geq 0$ nos referimos a un elemento de H, es decir, a la función $x \mapsto u(x,t)$. Esta forma de plantearlo nos permite resolver el problema (4.1), (4.2), (4.3) fácilmente usando el Teorema de Hille-Yosida.

Es claro que nuestro candidato a operador maximal monótono va a ser $A = -\Delta$. Por tanto, $D(A)$ debe ser un subespacio de $L^2(\Omega)$ de funciones al menos dos veces derivables. Si elegimos $D(A)$ de forma que tales funciones sean dos veces *débilmente derivables*, por ejemplo $D(A) = H^2(\Omega)$, entonces lo que nos dará el teorema será una *solución débil* de la ecuación (4.1) con dato inicial (4.3). Sin embargo, necesitamos tomar $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para que se cumpla también (4.2).

Además de econtrar una solución del problema de evolución, en este caso seremos capaces de demostrar que dicha solución presenta un mayor grado de regularidad que el dado por el Teorema de Hille-Yosida. Al final de la sección se harán algunas aclaraciones sobre la interpretación física de dicha regularidad.

El enunciado del teorema principal de esta sección, seguido inmediatamente por su demostración, es el siguiente.

Teorema 50. *Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única función u que satisface* (4.1), (4.2), (4.3) *débilmente, y*

$$u \in C([0,+\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{4.4}$$

$$u \in C^1((0,+\infty); L^2(\Omega)). \tag{4.5}$$

Además,

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\theta, +\infty)) \quad \forall \theta > 0. \tag{4.6}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2}|u(T)|_{L^2}^2 + \int_0^T |\nabla u(t)|_{L^2}^2 dt = \frac{1}{2}|u_0|_{L^2}^2 \quad \forall T > 0 \tag{4.7}$$

y, si en particular Ω es acotado,

$$u \in L^2((0,+\infty); H_0^1(\Omega)). \tag{4.8}$$

Demostración. Denotemos $H = L^2(\Omega)$, y consideremos el operador $A : D(A) \subset H \to H$ definido por

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

A continuación probaremos que que A es un operador autoadjunto maximal monótono. Después podremos aplicar el Teorema 49 y concluir que existe una única solución de la ecuación (4.1) que satisface el dato inicial (4.3), y que cumple además (4.4) y (4.5), y por consiguiente también (4.2). Más tarde comprobaremos el resultado de regularidad (4.6). Dejaremos para el final la prueba de (4.8) y (4.7).

Veamos pues que el operador A cumple las hipótesis del Teorema 49.

(i) A **es monótono.** Para todo $u \in D(A)$ se tiene, aplicando la Proposición 37, que

$$(Au, u)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

(ii) A **es maximal monótono.** Sea $f \in L^2(\Omega)$. En virtud del Teorema 40, sabemos que existe una única función $u \in H^2(\Omega)$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

y gracias al Teorema 41, se tiene que, además, $u \in H_0^1(\Omega)$. En definitiva,

$$u \in D(A) \quad \text{y} \quad u + Au = f.$$

(iii) A **es autoadjunto.** En vista de la Proposición 48 basta con comprobar que A es simétrico. Para cada $u, v \in D(A)$ tenemos que

$$(Au, v)_{L^2} = \int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

y

$$(u, Av)_{L^2} = \int_\Omega u(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

luego $(Au, v)_{L^2} = (u, Av)_{L^2}$.

Es inmediato a partir del Teorema 49 que existe una única función u que satisface (4.1), (4.3), (4.4) y (4.5). Además, por (4.4) sabemos que $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para todo $t > 0$. Por definición, se tiene que $u(t) = 0$ débilmente en Γ para todo $t > 0$, o equivalentemente, (4.2).

Nos disponemos ahora a probar (4.6). Para darle una estructura visual más clara, dividimos la prueba en cuatro pasos.

Paso 1. Empezamos demostrando que, para cada $l \in \mathbb{N}$, se tiene que $D(A^l) \subset H^{2l}(\Omega)$ con inmersión continua.

Realizamos la prueba por inducción sobre l. Empezaremos por el caso $l = 1$. Sea $u \in D(A)$. Entonces $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, luego $\Delta u \in L^2(\Omega)$. En particular, si tomamos $f = u - \Delta u$, se tiene que $f \in L^2(\Omega)$. Aplicando el Teorema 41 se sigue que $u \in H^2(\Omega)$ y

$$|u|_{H^2} \leq C|u - \Delta u|_{L^2} \leq C(|u|_{L^2} + |\Delta u|_{L^2}) = C|u|_{D(A)}.$$

Esta última desigualdad nos dice que la inmersión $D(A) \hookrightarrow H^2(\Omega)$ es continua.

Sea ahora $l \in \mathbb{N}$, y supongamos que lo que queremos probar es cierto para el natural $l-1$. Sea $u \in D(A^l)$. Obsérvese que, en particular, $u \in H_0^1(\Omega)$, y que u, $\Delta u \in H^{2(l-1)}(\Omega)$. Así, tomando de nuevo $f = u - \Delta u$, se tiene que $f \in H^{2(l-1)}(\Omega)$. Por el Teorema 41, $u \in H^{2l}(\Omega)$. Aplicando la estima dada por dicho teorema, además de la hipótesis de inducción, deducimos que

$$\begin{aligned}
|u|_{H^{2l}} &\leq C|u - \Delta u|_{H^{2(l-1)}} \leq C'|u - \Delta u|_{D(A^{l-1})} \\
&\leq C' \sum_{i=0}^{l-1} (|\Delta^i u|_{L^2} + |\Delta^{i+1} u|_{L^2}) = C' \left(|u|_{L^2} + 2\sum_{i=1}^{l-1} |\Delta^i u|_{L^2} + |\Delta^l u|_{L^2} \right) \\
&\leq 2C' \sum_{i=0}^{l} |\Delta^i u|_{L^2} = 2C'|u|_{D(A^l)}.
\end{aligned}$$

La anterior desigualdad nos dice que la inmersión $D(A^l) \hookrightarrow H^{2l}(\Omega)$ es continua.

Paso 2. Aquí demostraremos que

$$u \in C^k((0, +\infty); H^{2l}(\Omega)) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Sabemos por el Teorema 49 que la solución u de (4.1), (4.2), (4.3) satisface

$$u \in C^k((0, +\infty); D(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Fijado $l \in \mathbb{N}$, de la continuidad de la inmersión $D(A^l) \hookrightarrow H^{2l}(\Omega)$, o más concretamente, de la estima

$$|v|_{H^{2l}} \leq C|v|_{D(A^l)} \quad \forall v \in D(A^l),$$

se deduce de forma inmediata la derivabilidad de $u : (0, +\infty) \to H^{2l}(\Omega)$. De nuevo, la continuidad de la inmersión implica la continuidad de $\frac{\partial u}{\partial t} : (0, +\infty) \to H^{2l}(\Omega)$. En definitiva, $u \in C^1((0, +\infty); H^{2l}(\Omega))$. Análogamente se deduce que $\frac{\partial u}{\partial t} \in C^1((0, +\infty); H^{2l}(\Omega))$, es decir, $u \in C^2((0, +\infty); H^{2l}(\Omega))$. Así, razonando inductivamente concluimos que (4.9) se satisface.

Paso 3. A continuación probaremos que

$$u \in C^k((0, +\infty); C_b^k(\overline{\Omega})) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Lo haremos distinguiendo dos casos.

Caso 1 En primer lugar, supongamos que N es impar. Sea $k \in \mathbb{N}$, y tomemos un natural l de forma que $2l - (N/2) \geq k$. En virtud del Teorema 31, es claro que $H^{2l}(\Omega) \subset C_b^k(\overline{\Omega})$, con inmersión $H^{2l}(\Omega) \hookrightarrow C_b^k(\overline{\Omega})$ continua[1].

Caso 2 Supongamos ahora que N es par, esto es, podemos encontrar un natural N' tal que $N = 2N'$. Sea $k \in \mathbb{N}$, y tomemos un natural l de forma que $2l = k + n + N'$ para algún natural n. Sea $v \in H^{2l}(\Omega)$. Por definición de $H^{2l}(\Omega)$ se tiene que $D^\alpha v \in H^{N'}(\Omega)$ para cada $0 \leq |\alpha| \leq k + n$.

[1]Lo que nos dice realmente el Teorema 31 es que la inmersión $H^{2l}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{k'}(\overline{\Omega})$ es continua, donde k' es la parte entera de $2l - (N/2)$. Pero la inmersión $C_b^{m_1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C_b^{m_2}(\overline{\Omega})$ es continua para cualesquier números naturales m_1, m_2 tales que $m_1 \geq m_2$. En definitiva, la inmersión que nos interesa es continua por ser composición de dos inmersiones continuas.

Por otra parte, puesto que $\frac{1}{2} - \frac{N'}{N} = 0$, deducimos del Teorema 31 que $H^{N'}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ con inmersión continua, para todo $q \in [2, +\infty)$. Es decir, $D^\alpha v \in L^q(\Omega)$ para cualesquier $q \in [2, +\infty)$ y $0 \leq |\alpha| \leq k+n$. En definitiva, $v \in W^{k+n,q}(\Omega)$ para cada $q \in [2, +\infty)$. Esto es, $H^{2l}(\Omega) \subset W^{k+n,q}(\Omega)$ para $q \in [2, +\infty)$.

Además, sabemos que

$$\begin{aligned} |v|_{W^{k+n,q}} &= \sum_{|\alpha| \leq k+n} |D^\alpha v|_{L^q} \leq \sum_{|\alpha| \leq k+n} C|D^\alpha v|_{H^{N'}} = \sum_{|\alpha| \leq k+n} C \sum_{|\beta| \leq N'} |D^\beta D^\alpha v|_{L^2} \\ &= C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k+n \\ |\beta| \leq 2l-(k+n)}} |D^{\alpha+\beta} v|_{L^2} \leq C \sum_{|\alpha+\beta| \leq 2l} |D^{\alpha+\beta} v|_{L^2} = C|v|_{H^{2l}} \end{aligned}$$

para todo $q \in [2, +\infty)$. Esto implica que la inmersión $H^{2l}(\Omega) \hookrightarrow W^{k+n,q}(\Omega)$ es continua.

Por otro lado, si elegimos $q > N$ se tiene que $k + n > N/q$, que $k + n - (N/q)$ no es entero, y que $k \leq k + n - 1$, donde claramente $k + n - 1$ es la parte entera de $k + n - (N/q)$. Así, por el Teorema 31, tenemos que $W^{k+n,q}(\Omega) \subset C_b^k(\overline{\Omega})$ con inmersión continua.

Finalmente, componiendo ambas inmersiones concluimos que $H^{2l}(\Omega) \hookrightarrow C_b^k(\overline{\Omega})$ es continua.

En cualquiera de los dos casos, de (4.9) se sigue (4.10).

Paso 4. Acabamos aquí la prueba de (4.6) teniendo en cuenta lo probado en los pasos anteriores.

Sean $\theta > 0$, $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega} \times [\theta, +\infty)$, y $\varepsilon > 0$. Por un lado, de (4.10) se sigue que existe $\delta_1 > 0$ de manera que, si $t \geq \theta$ con $|t - t_0| < \delta_1$, entonces

$$|u(t) - u(t_0)|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x,t) - u(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, también de (4.10) obtenemos un $\delta_2 > 0$ tal que, si $x \in \overline{\Omega}$ con $|x - x_0| < \delta_2$, entonces

$$|u(x,t_0) - u(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [\theta, +\infty)$ con $|x - x_0| + |t - t_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u(x_0,t_0)| &\leq |u(x,t) - u(x,t_0)| + |u(x,t_0) - u(x_0,t_0)| \\ &\leq |u(t) - u(t_0)|_\infty + |u(x,t_0) - u(x_0,t_0)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Acabamos de probar que $u \in C(\overline{\Omega} \times [\theta, +\infty))$.

Además, de nuevo por (4.10) se tiene que $u(t)$ es derivable parcialmente respecto de todas sus variables en Ω para cada $t > \theta$, es decir,

$$\left| \frac{u(x + he_i, t) - u(x,t)}{h} - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right| \to 0$$

cuando $h \to 0$, para cada $x \in \Omega$, y para cada $i = 1, ..., N$. Esto es, u es derivable parcialmente respecto de cada x_i en $\Omega \times (\theta, +\infty)$, y su derivada es $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

También de (4.10) se sigue que u es derivable en $(\theta, +\infty)$ con la norma de $C^1(\overline{\Omega})$, es decir,

$$\left|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t)\right|_{C^1} \to 0$$

cuando $h \to 0$. Dado que

$$\begin{aligned}\left|\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h} - \frac{du}{dt}(x,t)\right| &\leq \sup_{x\in\Omega}\left|\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h} - \frac{du}{dt}(x,t)\right| \\ &\leq \left|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t)\right|_{C^1},\end{aligned}$$

en definitiva se tiene que u es derivable parcialmente respecto de t en $\Omega \times (\theta, +\infty)$, y su derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial t}$ coincide con $\frac{du}{dt}$.

Por otro lado, sabemos que la función $\frac{\partial u}{\partial x_i}(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua $p(t) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ para cada $t \geq \theta$. Se puede probar de forma similar a como se hizo arriba que la función $P : \overline{\Omega} \times [\theta, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $P(x,t) = (p(t))(x)$ para cada $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [\theta, +\infty)$ es continua, y evidentemente extiende a la función $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \Omega \times (\theta, +\infty) \to \mathbb{R}$. Procediendo de modo parecido, pero usando en este caso que $\frac{du}{dt}(t) \in C^1_b(\overline{\Omega})$, se demuestra que $\frac{\partial u}{\partial t} : \Omega \times (\theta, +\infty) \to \mathbb{R}$ admite una extensión continua en $\overline{\Omega} \times [\theta, +\infty)$.

En definitiva, $u \in C^1(\overline{\Omega} \times [\theta, +\infty))$. Continuando todo el proceso inductivamente y razonando de forma análoga concluimos que (4.6) se cumple.

Terminamos la demostración del teorema probando (4.7) y (4.8). Consideremos la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2}$$

para cada $t \geq 0$. Por (4.5) sabemos que $\varphi \in C^1((0, +\infty); \mathbb{R})$, y por (4.1) y la Proposición 37 se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2} = (u(t), \Delta u(t))_{L^2} \\ &= \int_\Omega u(t)\Delta u(t) = -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 = -|\nabla u(t)|^2_{L^2}\end{aligned} \tag{4.11}$$

para todo $t > 0$. Por tanto, para $0 < \varepsilon < T < +\infty$, obtenemos

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \varphi'(t)dt = -\int_\varepsilon^T |\nabla u(t)|^2_{L^2} dt. \tag{4.12}$$

De la continuidad de u en cero se deduce que φ también es continua en cero, luego, aplicando (4.3), se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2}.$$

En definitiva, tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$ en (4.12) se tiene (4.7).

Por otra parte, (4.11) implica que la función φ es monótona decreciente. Como además es no negativa, se sigue que

$$\lim_{T \to +\infty} \varphi(T) < \infty.$$

Así, suponiendo que Ω es acotado podemos usar la norma equivalente dada en el Teorema 38, para deducir que

$$\int_0^\infty |u(t)|^2_{H_0^1} dt = \int_0^\infty |\nabla u(t)|^2_{L^2} dt = \varphi(0) - \lim_{T\to+\infty} \varphi(T) < \infty.$$

Además, dado que la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$ es claramente continua, por (4.9) se tiene que $u \in C((0,+\infty); H_0^1(\Omega))$, luego $u : (0,+\infty) \to H_0^1(\Omega)$ es medible. Así, concluimos que se cumple (4.8). $\square$

Acabamos la sección con unos breves comentarios referentes al anterior resultado. El Teorema 50 nos muestra que la ecuación del calor tiene el efecto de aumentar de forma considerable la regularidad de su solución respecto de la regularidad del dato inicial u_0. De hecho, $u(t)$ es $C^\infty(\overline{\Omega})$ para todo $t > 0$ incluso si u_0 es discontinuo. Este efecto implica que, en particular, la ecuación de calor es *irreversible en el tiempo*. Es decir, en general no podremos resolver el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T),$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma \times (0,T),$$

con dato "final"

$$u(x,T) = u_T(x) \text{ en } \Omega.$$

Tendríamos que asumir como mínimo que

$$u_T \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{y} \quad \Delta^j u_T = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad \forall j \geq 0,$$

pero ni aún así podríamos asegurar la existencia de solución del problema.

4.2. La ecuación de ondas

De nuevo asumiremos aquí que Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^∞ con Γ acotado. Como en la anterior sección, denotamos

$$Q = \Omega \times (0,\infty),$$
$$\Sigma = \Gamma \times (0,\infty).$$

Consideremos el siguiente problema: encontrar una función $u : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{en } Q, \tag{4.13}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Sigma, \tag{4.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega, \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad \text{en } \Omega, \tag{4.16}$$

donde $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota el *laplaciano* en el espacio de variables x, t es la variable *tiempo*, y $u_0, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Cuando $N = 1$ y $\Omega = (0,1)$, la ecuación (4.13) modela las pequeñas[2] *vibraciones de una cuerda* en ausencia de fuerzas externas. Para cada t, la gráfica de la función $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ representa la configuración espacial de la cuerda en el intante t. Cuando $N = 2$, la ecuación (4.13) modela las pequeñas *vibraciones de una membrana elástica.* Para cada t, la gráfica de la función $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ representa la distribución espacial de la membrana en el instante t. En general, la ecuación (4.13) modela la *propagación de una onda* (acústica, electromagnética, etc.) en algún medio elástico homogéneo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

La ecuación (4.14) es la *condición de frontera de Dirichlet*, y significa que la cuerda (o la membrana) permanece fija en Γ. Las ecuaciones (4.15), (4.16) describen el estado inicial del sistema: la *posición inicial* viene dada por u_0, y la *velocidad inicial*, por v_0.

En cuanto a la interpretación matemática, estamos otra vez ante una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, pero en este caso es de tipo *hiperbólico*. Vuelve a haber dependencia temporal, luego nos encontramos ante otro *problema de evolución*.

Resolveremos el problema (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) siguiendo una estrategia similar a la utilizada para la ecuación del calor.

Teorema 51. *Sea $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una única solución débil de* (4.13)*,* (4.14)*,* (4.15)*,* (4.16) *que satisface*

$$u \in C([0,+\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,+\infty); L^2(\Omega)). \tag{4.17}$$

Además,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2 = |v_0|_{L^2}^2 + |\nabla u_0|_{L^2}^2 \quad \forall t \geq 0. \tag{4.18}$$

Demostración. Como en la prueba del Teorema 50, dado $t \geq 0$, $u(t)$ denotará la aplicación $x \mapsto u(x,t)$.

Reescribimos (4.13) como un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 \quad \text{en } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{en } Q, \end{cases} \tag{4.19}$$

y escribimos $U = \binom{u}{v}$, de manera que (4.19) pasa a ser

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0, \tag{4.20}$$

donde

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Sea $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, equipado con el producto escalar

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + \int_\Omega u_1 u_2 + \int_\Omega v_1 v_2,$$

[2]La ecuación general es una ecuación no lineal muy compleja; la ecuación (4.13) es una versión linealizada cerca del equilibrio.

donde $U_1 = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right)$ y $U_2 = \left(\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Consideremos el operador $A : D(A) \subset H \to H$ definido por (4.21) con

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Ahora veremos que el operador $A + I$ es maximal monótono en H.

(i) $A + I$ **es monótono.** Sea $U = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in D(A)$. Es sencillo probar que $u^2 - uv + v^2 \geq 0$ en Ω. Teniendo esto en cuenta, y por el Teorema 37, se tiene que

$$\begin{aligned}((A+I)U, U)_H &= (AU, U)_H + |U|_H^2 \\ &= -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u - \int_\Omega uv + \int_\Omega (-\Delta u) v + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \\ &= -\int_\Omega uv + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) $A + I$ **es maximal monótono.** Esto se reduce a probar que $A + 2I$ es sobreyectiva. Dado $F = \binom{f}{g} \in H$, tenemos que resolver la ecuación $AU + 2U = F$, o equivalentemente, el sistema

$$\begin{cases} -v + 2u = f & \text{en } \Omega, \\ -\Delta u + 2v = g & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.22}$$

con

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Se sigue de (4.22) que

$$-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{4.23}$$

De aplicar el Teorema 40 con $\lambda = 4$ obtenemos la única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ de (4.23). Además, del Teorema 41 se sigue que $u \in H^2(\Omega)$. Por último, obtenemos $v \in H_0^1(\Omega)$ tomando $v = 2u - f$. Con esto se resuelve (4.22).

Sea $U_0 = \left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right)$. Aplicando el Teorema 5 y la Observación 46 con $\lambda = -1$ vemos que existe una única solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 & \text{en } [0, +\infty), \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

con

$$U \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A)), \tag{4.24}$$

ya que $U_0 \in D(A)$. De (4.24) se deduce de forma inmediata (4.17). Además, de (4.17) se sigue que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t \geq 0$. En particular se tiene la igualdad (4.14), entendida en sentido débil.

Para acabar la demostración veremos que se cumple (4.18). Sabemos por (4.17) que $u \in C^2([0, +\infty); L^2(\Omega))$, o dicho de otro modo, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C^1([0, +\infty); L^2(\Omega))$. Esto implica que $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot)\right|_{L^2}^2 \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R})$, cuya derivada es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx = 2 \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx$$

para cada $t \geq 0$. De nuevo por (4.17) tenemos que $u \in C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega))$, y por tanto, $|u(\cdot)|_{H_0^1}^2 = |\nabla u(\cdot)|_{L^2}^2 + |u(\cdot)|_{L^2}^2 \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$. Como $|u(\cdot)|_{L^2}^2 \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$, entonces $|\nabla u(\cdot)|_{L^2}^2 \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$, y su derivada es, en virtud de la Proposición 37,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx = 2\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u(x,t))dx = 2\int_\Omega (-\Delta u(x,t))\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx$$

para cada $t \geq 0$. En definitva, teniendo en cuenta (4.13),

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|_{L^2}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2}^2 - |v_0|_{L^2}^2 - |\nabla u_0|_{L^2}^2 \\
&= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right|_{L^2}^2 + |\nabla u(s)|_{L^2}^2\right] ds \\
&= 2\int_0^t \int_\Omega \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s) - \Delta u(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right] dxds \\
&= 2\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,s) - \Delta u(x,s)\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right] dxds \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Es decir, (4.18) se satisface. $\square$

Terminamos la sección con algunas observaciones en relación con el problema de la ecuación de ondas. En primer lugar, si Ω es *acotado* podemos usar el producto escalar $\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2$ en $H_0^1(\Omega)$ en virtud del Teorema 38. Así, en $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ tenemos el producto escalar

$$(U_1,U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 + \int_\Omega v_1 v_2, \quad \text{donde } U_1 = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right) \text{ y } U_2 = \left(\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right).$$

Con este producto escalar tenemos, gracias a la Proposición 37, que

$$(AU,U) = -\int_\Omega \nabla v \nabla u + \int_\Omega (-\Delta u)v = 0 \quad \forall U = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in D(A).$$

Esto implica que A es un operador monótono. Además, como $(-AU,U) = -(AU,U) = 0$, también $-A$ es un operador monótono.

Con objeto de comprobar que A es maximal monótono, siguiendo un procedimiento similar al de la prueba del Teorema 51, tomemos $F = \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) \in H$. El problema se reduce a resolver el sistema

$$\begin{cases} -v + u = f & \text{en } \Omega, \\ -\Delta u + v = g & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con

$$u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Sumando las dos ecuaciones que forman el sistema obtenemos la nueva ecuación

$$-\Delta u + u = f + g,$$

que sabemos que tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ gracias al Teorema 40, con $\lambda = 1$ en este caso. Este mismo teorema nos asegura que $u \in H^2(\Omega)$. Por último, obtenemos $v \in H_0^1(\Omega)$ tomando $v = u - f$, con lo que el sistema queda resuelto. De forma análoga se prueba que $-A$ también es maximal monótono.

Como consecuencia, además del problema

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{en } [0, +\infty), \quad U(0) = U_0,$$

podemos resolver también el problema

$$\frac{dU}{dt} - AU = 0 \quad \text{en } [0, +\infty), \quad U(0) = U_0,$$

o equivalentemente, cambiando la variable t por $-t$,

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \text{en } (-\infty, 0], \quad U(0) = U_0.$$

En otras palabras, la ecuación de ondas es *reversible en el tiempo*, al contrario que la ecuación del calor.

Otra importante diferencia entre ambos problemas es la regularidad de la solución respecto a la del dato inicial. En la anterior sección veíamos cómo la solución que obteníamos para la ecuación del calor podía ser mucho más regular que el dato incial. Sin embargo, podemos mostrar con un contraejemplo que este efecto no ocurre con la ecuación de ondas. Considerando el caso $\Omega = \mathbb{R}$, es inmediato compobar que una solución explícita de (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds.$$

Asumiendo que $v_0 = 0$ y que $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ para cierto $x \in \mathbb{R}$, es claro que la solución queda

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)),$$

y que es C^∞ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ menos en las rectas $x + t = x_0$ y $x - t = x_0$, es decir, la solución es menos regular que cualquiera de los dos datos iniciales.

Capítulo 5

Conclusiones

Recordemos que uno de los objetivos principales de este trabajo consistía en el estudio en profundidad de la demostración del Teorema de Hille-Yosida en espacios de Hilbert. En el empeño de llevar a su fin tal objetivo he analizado la demostración minuciosamente, de forma que cada concepto o razonamiento no debía pasarse por alto sin antes haberlo comprendido. Además de eso, he estudiado con detalle las demostraciones de otros resultados relacionados (entre ellos la del Teorema 49) para habituarme a las técnicas que se suelen emplear en este tipo de pruebas y así consolidar lo aprendido en la del teorema principal. El resultado en este sentido lo considero satisfactorio, ya que no sólo he conseguido entender la demostración, sino que he conseguido aprender la estructura general, y además creo que he sido capaz de explicarla en el Capítulo 3 con bastante claridad incluso para un lector con sólo conocimientos básicos en el campo, y sin detrimento del rigor matemático.

Sobra decir que el análisis funcional, y sobre todo la teoría de espacios de Hilbert, ha estado presente continuamente a lo largo de la prueba. El estudio de dicha prueba ha ayudado sin duda a consolidar todos esos conceptos, e incluso he aprendido nuevos resultados que desconocía. Por su parte, la relación con lo estudiado en las asignaturas de ecuaciones diferenciales se pone de claro manifiesto con la aplicación del Teorema 2, junto con ciertas técnicas de paso al límite para la existencia de solución que me eran familiares de otras pruebas previamente estudiadas. Para acabar con estas ideas me gustaría destacar que gracias a este trabajo he descubierto el importantísimo papel que desempeña el análisis funcional en la teoría de ecuaciones diferenciales actual.

En la segunda sección del Capítulo 2 se observa de forma clara cómo se desarrollan, si bien de forma escueta, los fundamentos de integración de funciones vectoriales. Creo que se ha logrado una construcción de la integral de Bochner bastante comprensible a pesar de la brevedad y la complejidad, gracias en parte a la analogía con la integral de Lebesgue. Aunque no me ha sido posible profundizar más en el tema, con el material que se ha presentado ha habido más que suficiente para disponer de una idea general de la integración abstracta y para poder probar ciertos aspectos de la prueba del Teorema 5 que involucraban integrabilidad.

El segundo objetivo importante que nos marcábamos se trataba de demostrar la existencia, unicidad y regularidad de solución débil de la ecuación del calor y la ecuación de ondas. En este caso he seguido la misma filosofía que en el anterior, es decir, he estudiado en sumo detalle las dos demostraciones, además de otras similares donde la principal diferencia radicaba en que se trabajaba en espacios de Hilbert diferentes, para después plasmar en el Capítulo 4 lo aprendido. En este sentido se han cumplido las espectativas. Algo digno de mención es que se percibe con mucha claridad el proceso por el que se aplica el Teorema de Hille-Yosida, en cualquiera de las dos versiones que se emplean, lo que no deja lugar a dudas sobre la utilidad práctica de dicho teorema.

En el Capítulo 4 es clara la intervención de los espacios de Sobolev. Como se pretendía, se ha incluido en las dos últimas secciones del Capítulo 2 un resumen de la teoría de espacios de Sobolev, donde se habla en particular de la derivabilidad débil y de la formulación débil de las ecuaciones en derivadas parciales. Podemos extraer unas conclusiones parecidas a las que mencionamos para la integración abstracta: a pesar de que se presenta sólo un extracto de la amplia teoría sobre espacios de Sobolev, los resultados se entienden al nivel que necesitamos, en muchos casos de forma intuitiva gracias a la relación de la derivada débil con la clásica. Lo principal es que ha sido posible llevar a cabo la formulación y la prueba de los teoremas del Capítulo 4 de forma bastante clara.

Como valoración personal de mi trabajo fin de grado, puedo afirmar que el esfuerzo ha dado sus frutos. Gracias al tiempo que le he dedicado noto que mi madurez como matemático ha dado un salto considerable, en definitiva, no podía haber un modo más apropiado de poner punto y final a mi formación como graduado en matemáticas. Y no sólo eso, los métodos de búsqueda bibliográfica que he empleado me han llevado a descubrir ciertas ramas de las matemáticas de muy reciente nacimiento y, en algunos casos, en proceso de desarrollo, lo que se ha convertido en una motivación para orientar mis estudios próximos hacia la investigación matemática.

Bibliografía

[1] Ambrosetti, A. and Arcoya, D., *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*. Birkhäuser, 2011.

[2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[3] Coddington, E. A., Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, 1955.

[4] Crandall, M. G. and Liggett, T. M., *Generation of Semi-Groups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces. American Journal of Mathematics*, **Vol. 93**, No. 2, pp. 265-298, 1971.

[5] Hille, E. and Phillips, R. S., *Functional Analysis and Semi-Groups, rev. ed.* The American Mathematical Society, 1957.

[6] Jiménez López, V., *Ecuaciones Diferenciales: cómo enseñarlas, cómo aprenderlas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2000.

[7] Novo, S., Obaya, R., y Rojo, J., *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*. McGraw-Hill, Madrid, 1995

[8] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983.

[9] Rudin, W., *Functional Analysis. Second edition*. Mc Graw Hill, 1991.

[10] Yosida, K., *Functional Analysis. Reprint of the sixth (1980) edition*. Springer, 1995.

[11] Zuazua, E., *Introducción al Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución*. 2003.