

UNIVERSIDAD DE ALMERIA

ESCUELA INTERNACIONAL DE MÁSTER



**Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.**

Curso académico: 2016/2017

Motivación en clase de álgebra

Nombre del Director/a: Eva María Artés Rodríguez

**Especialidad Matemáticas
María José Casado Márquez**

Resumen

En este trabajo se pretende buscar la motivación de los alumnos y alumnas en la clase de matemáticas centrándonos en el álgebra. Dado el poco interés que muestran la mayoría de los alumnos hacia la asignatura, es necesario buscar otras alternativas para trabajar en el aula.

Se presentan distintos juegos y pasatiempos que se pueden llevar a cabo en una sesión en el aula. Cada una de las actividades aquí planteadas, van seguidas de los objetivos que se pretenden conseguir, así como del curso al que van destinadas.

INDICE

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUCCIÓN. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS | 4 |
| 2. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA. | 12 |
| 3. PROPUESTAS DE INTERVENCIÓN PARA LA MOTIVACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS..... | 14 |
| 3.1 La letra como incógnita..... | 14 |
| 3.2 Piensa un número | 16 |
| 3.3 Traducción del lenguaje natural al algebraico | 18 |
| 3.4 Destrezas algebraicas..... | 23 |
| 3.5 Ecuaciones de primer grado | 25 |
| 3.6 Ecuaciones de segundo grado | 26 |
| 3.7 Sistemas de ecuaciones | 28 |
| 3.8 Resolución de problemas algebraicos | 30 |
| 4. CONCLUSIONES | 33 |
| 5. BIBLIOGRAFÍA | 35 |
| 6. ANEXOS | 36 |

1. INTRODUCCIÓN. JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

La asignatura de matemáticas es una de las más *apáticas* para los alumnos de Educación Secundaria en la actualidad. Diversos son los estudios que lo demuestran. La mayoría de nuestros alumnos presentan desmotivación hacia esta asignatura, puesto que piensan que es una asignatura aislada, cuyos procedimientos son mecánicos y sin utilidad. ¿Cómo podemos los docentes cambiar este hecho? ¿Qué debemos los docentes modificar en el aula? ¿Cómo captar la atención y motivación de nuestros alumnos? ¿Es un problema de los alumnos o de los profesores?

Una de las mayores dificultades que se encuentra un alumno al iniciar los estudios de matemáticas está en el uso y significado de las letras. Y, sin embargo, poder resolver problemas utilizando lo desconocido y operando con él es lo que hace que el álgebra haya sido a lo largo de la historia un instrumento potente.

En el presente trabajo se pretenden mostrar distintos recursos que acompañen a una clase magistral. El álgebra será motivo de este, ya que en el periodo de prácticas se han observado grandes lagunas y dificultades en esta área. Bien sea porque hay carencias de cursos anteriores, las cuales nuestros alumnos van arrastrando posteriormente, o por la falta de interés de estos respecto a la asignatura, en general.

Los objetivos primordiales que se plantean con los distintos recursos son:

- Despertar el interés por la asignatura de matemáticas.
- Motivar a los alumnos mediante actividades no tradicionales en el aula.
- Iniciarles a la investigación desde un nivel básico.
- Valorar las ventajas de trabajar en grupo.

Se mostrarán distintas actividades para la Educación Secundaria Obligatoria que se pueden poner en práctica en el aula. Estas actividades llevan consigo una serie de objetivos y competencias que el alumno desarrollará. No se pretende eliminar una explicación del profesor, sino usar recursos en el aula para que las clases no lleguen a

ser monótonas, diarias y por tanto aburridas para nuestros alumnos. Se plantea un intercambio entre las conocidas como clases magistrales y clases dinámicas, de juegos y pasatiempos. *En la variedad está el gusto.*

Según se lee en el BOE vigente de la actualidad, en el desarrollo del currículo básico de la materia de Matemáticas se pretende que los conocimientos, las competencias y los valores estén integrados; de esta manera, los estándares de aprendizaje evaluables se han formulado teniendo en cuenta la imprescindible relación entre dichos elementos.

| Matemáticas. 1º y 2º ESO | | |
|---|--|---|
| Álgebra | | |
| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje evaluables |
| <p>Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales al algebraico y viceversa.</p> <p>El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.</p> <p>Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades, operaciones con polinomios en casos sencillos.</p> <p>Ecuaciones de primer</p> | <p>1. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.</p> | <p>1.1 Comprueba, dada una ecuación (o sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.</p> <p>1.2 Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.</p> |

| | | |
|---|--|--|
| <p>grado con una incógnita (método algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.</p> | | |
|---|--|--|

| Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO. | | |
|--|---|--|
| Álgebra | | |
| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje evaluables |
| <p>Expresión usando lenguaje algebraico. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). Transformación de expresiones algebraicas.</p> | <p>1. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola. 2. Resolver problemas</p> | <p>1.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana. 1.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y</p> |

| | | |
|---|---|--|
| <p>Igualdades notables.</p> <p>Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.</p> <p>Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.</p> | <p>de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.</p> | <p>una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.</p> <p>1.3. Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notales y extracción del factor común.</p> <p>2.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.</p> |
|---|---|--|

| Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 3º ESO. | | |
|---|---|--|
| Álgebra | | |
| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje evaluables |
| <p>Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada.</p> <p>Igualdades notables.</p> <p>Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.</p> | <p>1. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado extrayendo la información relevante y</p> | <p>1.1. Suma, resta y multiplica polinomios, expresando el resultado en forma de polinomio ordenado y aplicándolos a ejemplos de la vida</p> |

| | | |
|--|--|---|
| <p>Resolución (método algebraico y gráfico). Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas.</p> | <p>transformándola.</p> <p>2. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos.</p> | <p>cotidiana.</p> <p>1.2. Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.</p> <p>1. Resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas mediante procedimientos algebraicos y gráficos.</p> <p>2.1. Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos.</p> <p>2.2. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado</p> |
|--|--|---|

| | | |
|--|--|-----------|
| | | obtenido. |
|--|--|-----------|

| Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4º ESO. | | |
|---|--|--|
| Álgebra | | |
| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje evaluables |
| Manipulación de expresiones algebraicas. Utilización de igualdades notables. Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización. Ecuaciones de grado superior a dos. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Inecuaciones de primer y segundo grado. Interpretación gráfica. Resolución de problemas. | 1. Construir e interpretar expresiones algebraicas, utilizando con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades. 2. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales. | 1.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico. 1.2. Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado. 1.3. Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas. 2.1. Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. 2.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, |

| | | |
|--|--|--|
| | | mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos. |
|--|--|--|

| Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. 4º ESO | | |
|---|---|--|
| Álgebra | | |
| Contenidos | Criterios de evaluación | Estándares de aprendizaje |
| <p>Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables.</p> <p>Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.</p> <p>Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.</p> | <p>1. Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.</p> <p>2. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas.</p> | <p>1.1 Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.</p> <p>1.2 Realiza operaciones de suma, resta, producto y división de polinomios y utiliza identidades notables.</p> <p>1.3 Obtiene raíces de un polinomio y lo factoriza, mediante la aplicación de la regla de Ruffini.</p> <p>2.1 Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado</p> |

| | | |
|--|--|-----------|
| | | obtenido. |
|--|--|-----------|

A continuación, se trabaja la motivación en el aula de matemáticas. Diversos son los estudios acerca de la motivación en el aula. En este trabajo, se intenta despertar el interés de nuestros alumnos de Educación Secundaria, mediante pasatiempos y juegos que hagan practicar al alumno la materia de forma amena y divertida.

2. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA.

Uno de los mayores retos para los docentes del presente siglo es proporcionar un ambiente que pueda estimular la motivación para aprender el alumnado (Theobald, 2006).

Como bien redacta Jorge Pozo (2013) en su trabajo fin de máster *se pretende una metodología activa, intuitiva y motivadora que despierte el interés y fomente el aprendizaje por el descubrimiento de los conceptos a partir de los conocimientos adquiridos en la fase teórica.* Se pretende construir actividades para que los estudiantes descubran y practiquen los conceptos de álgebra y no sólo realicen ejercicios de repetición que conllevan a la desmotivación y aburrimiento de estos.

Javier Gasco Txavbarri y José Domingo Villarreal Villamor (2014) entienden por motivación al conjunto de procesos implicados en la activación y animación de los alumnos y puede ser:

- Extrínseca donde influyen distintas condiciones externas que afectan a la conducta del alumno.
- Intrínseca donde influyen sus creencias, afectos y valores. Junto a esto, se plantean nuevos modelos sociales y culturales de aprendizaje que ponen énfasis en el aula, la familia y el entorno social.

La motivación relacionada con el aprendizaje de las matemáticas ha sido estudiada en multitud de niveles educativos.

Según Juan Godino (2004) los profesores deseamos que nuestros alumnos adquieran:

- ✓ La demostración lógica de los resultados, frente a un único camino de resolución.
- ✓ El razonamiento matemático, frente a los procesos de memorización y aplicación de logaritmos.

- ✓ La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas, descartando la búsqueda mecánica de respuestas.
- ✓ La conexión de ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la idea de las matemáticas como un cuerpo aislado construidos por conceptos y procedimientos.

Sin duda, estos deseos no pueden cumplirse sin una metodología adecuada que llame la atención a nuestros alumnos. En el libro de Ana García Azcárate, su autora dice textualmente *que para muchos profesores de matemáticas, muchos padres y gran parte de la sociedad las matemáticas son cosas serias, y no son, desde luego, compatibles con una actividad que tenga que ver con los juegos o los divertimentos.* Este trabajo está destinado a profesores de Educación Secundaria que confíen en las ventajas que pueden aportar los juegos y pasatiempos a nuestros alumnos y alumnas para conseguir aumentar la motivación en las clases de matemáticas.

A continuación, se van a exponer distintos recursos creativos en los cuales nuestros alumnos practicarán de forma amena, divertida y no tradicional. Cada una de las actividades está destinada a un curso o ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

3. PROPUESTAS DE INTERVENCIÓN PARA LA MOTIVACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Vamos a utilizar juegos y pasatiempos matemáticos que necesitan del álgebra para resolverse, dichos juegos y pasatiempos se han recopilado del libro de Ana García Azcárate (2010).

¿Cómo explicar que una letra puede tener un valor? ¿Las matemáticas no son números? ¿Una ecuación? ¿Puede tener más de una letra y más de una ecuación? Empecemos.

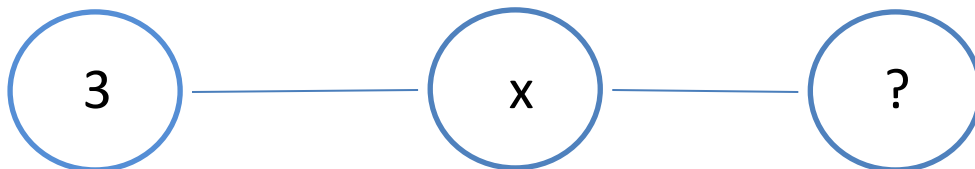
3.1 La letra como incógnita

Empezamos a simbolizar relaciones entre números y una cantidad desconocida, que llamaremos por una letra, por ejemplo, x .

Ejemplo 1: Líneas

Estas 3 casillas contienen tres números diferentes que suman 14. Si la primera casilla contiene un 3 y la segunda casilla un número desconocido x , expresa el número de la tercera casilla en función de x .

Si x vale 5, ¿qué número hay que poner en la tercera casilla?



Un ejemplo sencillo en el que trabajamos la suma de monomios, y nuestros alumnos entienden de manera fácil que $3+x$ es $3+x$ y no $3x$. Paso esencial para trabajar con el álgebra de forma correcta.

Ejemplo 2: Cuadrado mágico 3x3

En este cuadrado mágico, que tiene 15 como número mágico, expresa, en función de la incógnita y , las tres casillas con los puntos de interrogación. Recuerda para que eso que todas las líneas, verticales, horizontales y diagonales suman 15.

Sabiendo que estas 3 casillas, función de y , suman también 15, halla el valor de y . utilizando este valor, encuentra los números que faltan de las casillas.

| | | |
|---|-----|---|
| 2 | | 6 |
| | y | |
| ? | ? | ? |

Objetivos:

Para que los alumnos aprendan a simbolizar es necesario empezar con situaciones concretas, sencillas donde la propiedad o la ley que se quiere expresar esté clara para todos los alumnos.

En estas dos primeras actividades se pretende:

- Simbolizar relaciones y situaciones sencillas, en función de las incógnitas.
- Utilizar símbolos para representar variables y cadenas de operaciones.
- Atribuir un significado adecuado a los símbolos interpretándolos de forma apropiada y sin ambigüedad.
- Hacer uso de las posibilidades de cálculo que permite el lenguaje simbólico.

Curso:

Este tipo de actividades está destinado a alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.

3.2 Piensa un número

Actividades del tipo *“Piensa un número”* son actividades que refuerzan el proceso de simbolización del álgebra. Dichas actividades son sorprendentes y excitantes para nuestros alumnos, y permiten justificar el álgebra como método para resolver situaciones y problemas. Nuestros alumnos quieren saber “el truco” y nosotros pretendemos que razonen de manera algebraica cómo hemos llegado hasta ahí. ¿Magia o realidad?

Ejemplo 3: La sabiduría del gran mago

El gran mago me ordenó:

- Piensa un número cualquiera.
- Súmale 3.
- Multiplica el resultado por 2.
- Réstale 8.
- Divide por 2.

Me preguntó:

- ¿Cuánto te da?

Yo le contesté:

- Me da 54.

Y él me dijo, inmediatamente:

- El número que cogiste era 55.

¿En qué consiste el truco del gran mago?

Lo que hace el gran mago es, simplemente, expresar en lenguaje algebraico las operaciones que se han ido efectuando. Nuestros alumnos para aprender a ser un mago, deben traducir al lenguaje de las letras las órdenes que han ido recibiendo. ¿Cómo? Esta actividad puede ser planteada en el aula para toda la clase e id haciendo la siguiente tabla entre todos.

| Frase en lenguaje natural | Frase en lenguaje algebraico |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| Piensa un número | X |
| Súmale 3 | |
| Multiplica por 2 | |
| Réstale 8 | |
| Divide por 2 | |
| ¿Cuánto te da? | |

¿Entiendes ahora por qué adivinó el resultado el mago?

La utilización de las tablas para la traducción al lenguaje simbólico es necesaria para su utilización en clase. Es visual y sencillo para que nuestros alumnos nos sigan en clase ya que se va paso a paso.

Ejemplo 4: Adivino tu fecha de cumpleaños

Con este truco, podrás adivinar la fecha de cumpleaños de tus amigos. Para eso, numeramos los meses del 1 al 12 y los días del 1 al 31. Dile a un amigo que haga lo siguiente:

- Multiplica por 5 el número del mes de tu cumpleaños.
- Súmale 7.
- Multiplícalo por 4.
- Súmale 13.
- Multiplícalo por 5.

- Súmale el día en que naciste.
- Resta 205 al resultado.

Las centenas son el mes de tu cumpleaños y lo que queda es el día. Compruébalo y, sobre todo, explícalo.

Si esta actividad se planteara en clase, el primer alumno en adivinar el procedimiento que hay que llevar a cabo, podría explicarlo para todos sus compañeros. Tener ese protagonismo entre sus compañeros puede ser positivo para mejorar su expresión comunicativa.

Objetivos.

Los principales objetivos que se pretenden conseguir son los siguientes:

- Simbolizar cadenas de operaciones.
- Trabajar destrezas básicas algebraicas: el uso de paréntesis, reducción de la expresión, entre otras.

Curso.

Este tipo de actividades están planteados para alumnos de 2º y 3º de Educación Secundaria Obligatoria ya que ellos ya han tenido un contacto más cercano con el álgebra.

3.3 Traducción del lenguaje natural al algebraico

La mayoría de los profesores piensan que una de las mayores dificultades del álgebra es la traducción del lenguaje natural al algebraico para la posterior resolución de problemas de enunciado verbal en los que se utiliza una ecuación de primer grado o un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Cabe pensar que si un alumno no resuelve un problema de enunciado verbal por métodos algebraicos, es porque no comprende el enunciado. (Castelnuovo, 1994).

Se plantea, a continuación, una gymkana de matemáticas, donde los alumnos trabajarán en grupos. De esta manera, se pone en práctica el aprendizaje de igual a igual donde los alumnos actúan como profesores, se ayudan unos a los otros, intervienen en la actividad mental del compañero y aprenden nuevas sugerencias y nuevos puntos de vistas. Al fin y al cabo, se trata de llevar a cabo un aprendizaje cooperativo (Roper, M. V., 2012).

Ejemplo 5: La gymkana de matemáticas

Material:

- 28 tarjetas con enunciados.
- La tabla con las frases.

Reglas del juego:

- Juego para cuatro, cinco o seis jugadores.
- se reparten cinco tarjetas a cada equipo.
- Se entrega a cada equipo una hoja con la tabla de frases.
- Cada equipo debe primero traducir las frases a su expresión simbólica, simplificando al máximo las expresiones, y después resolver las preguntas que aparecen en sus cinco tarjetas.
- Gana el equipo que acaba primero y de forma correcta sus cinco preguntas.

TABLA CON LAS FRASES

| Frase | Expresión | Expresión reducida |
|--|-----------|--------------------|
| Ana tenía x puntos. | x | |
| Isabel, el doble de Ana menos 100 puntos. | | |
| A Pablo le faltaban 500 puntos para tener como Isabel. | | |
| Sergio consiguió el triple de Ana más 300 puntos. | | |
| Lo de Pilar menos lo de Isabel en 3 veces lo de Ana. Pilar tuvo entonces: | | |
| Marta tuvo la quinta parte de lo de Pilar. | | |
| A Rafael le faltan 1000 puntos para tener como Sergio. | | |
| Si a Raquel le quitase Ana Belén 500 puntos, tendría como Ana. Raquel tiene: | | |
| Patricia tiene dos veces lo de Raquel, más 100 puntos. | | |
| Juntas, Teresa y Patricia, suman 3 veces lo de Ana. Teresa tiene: | | |
| Daniel obtuvo la tercera parte de Sergio, más 200 puntos. | | |

TARJETAS

| | | |
|--|--|---|
| 1. Si Raquel obtuvo 3500 puntos, ¿cuántos puntos sacó Teresa? | 2. Si Daniel y Pablo juntaron 7500 puntos, ¿cuántos puntos sacó Isabel? | 3. Si Pilar consiguió 4900 puntos, ¿cuántos tenía Patricia? |
| 4. Si Isabel obtuvo la misma puntuación que Rafael, ¿cuántos puntos sacó Marta? | 5. Si Marta e Isabel juntaron ellas dos 5520 puntos, ¿cuántos puntos tuvo Daniel? | 6. La puntuación de Isabel menos la de Marta fue de 1320, ¿cuántos sacó Teresa? |
| 7. Lo de Pablo, menos lo de Rafael fueron 90 puntos, ¿cuántos puntos sacó Daniel? | 8. Dos veces lo de Ana menos lo de Marta fueron 9020 puntos, ¿cuántos sacó Raquel? | 9. Sumando lo de Sergio, lo de Pablo y lo de Rafael se obtienen 7000 puntos, ¿cuántos tuvo Patricia? |
| 10. La novena parte de los de Pablo son 600 puntos, ¿cuánto sacó Ana? | 11. La puntuación de Pilar menos la de Isabel fueron 3600 puntos, ¿cuántos sacó Sergio? | 12. Teresa y Patricia tuvieron 800 puntos más que Isabel, ¿cuánto obtuvo Ana? |
| 13. Ocho veces lo de Marta fueron 6240 puntos, ¿cuántos puntos tuvo Sergio? | 14. Daniel sacó 12100 puntos, ¿cuántos puntos sacó Patricia? | 15. Tres veces lo de Patricia es 18300 puntos, ¿cuántos obtuvo Daniel? |
| 16. Lo de Sergio menos lo de Teresa eran 11400 puntos, ¿cuánto sacó Patricia? | 17. La quinta parte de los de Pilar más lo de Raquel eran 7520 puntos, ¿cuánto sacó Teresa? | 18. El doble de los puntos de Rafael son 16300, ¿cuántos puntos sacó Marta? |
| 19. Si Daniel hubiese sacado 400 puntos más, tendría 12500, ¿cuántos sacó Pilar? | 20. Si Rocío le regalase 1000 puntos a Marta, entonces ésta tendría 2980 puntos, ¿cuántos puntos obtuvo | 21. Pablo obtuvo la tercera parte de los de Daniel, ¿cuántos puntos consiguió Ana? |

| | | |
|---|---|---|
| | Rafael? | |
| 22. Si a Patricia le diese alguien 700 puntos más, llegaría a tener 5 veces lo de Pilar. ¿Y Ana cuánto tuvo? | 23. La cuarta parte de los puntos de Marta son 1370 puntos, ¿cuántos tiene Isabel? | 24. La raíz cuadrada de los puntos de Patricia son 90 puntos, ¿cuántos sacó Rafael? |
| 25. La tercera parte de los puntos de Raquel, aumentados en 450 son 1550, ¿cuántos puntos sacó Teresa? | 26. Raquel obtuvo cinco veces más puntos que Teresa, ¿cuántos puntos sacó Ana? | 27. La quinta parte de lo que ha sacado Daniel, más 400 puntos suman 1500, ¿cuántos puntos sacó Pilar? |
| 28. Lo de Rafael menos lo de Pablo son 1650, ¿cuántos consiguió Raquel? | | |

La traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico es automático, incluso conociendo y comprendiendo ambos lenguajes. Existen numerosas dificultades ligadas a la sintaxis algebraica que no se corresponde muchas veces con la sintaxis del castellano. Los profesores debemos ser conscientes de estas dificultades y dedicar gran parte de nuestros esfuerzos a trabajar en el aula esta traducción.

Objetivos.

Los objetivos que se pretende conseguir con este juego son:

- Plantear la traducción al lenguaje algebraico de relaciones entre variables.
- Resolución de ecuaciones sencillas.

Curso.

Esta actividad está planteada para una sesión en el aula de 2º y 3º de la ESO.

3.4 Destrezas algebraicas

El objetivo del siguiente juego es calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.

Los pasatiempos y juegos son muchas veces un buen pretexto para que los alumnos repitan un mismo algoritmo de cálculo sin darse cuenta, al estar inmerso y motivado en un reto de tipo lúdico.

Ejemplo 6: Juego: Subir al cero

Material:

- Un tablero de <<subir al cero>>.
- Un dado.
- Dos fichas diferentes, una para cada jugador

Reglas del juego

- Juego para dos jugadores.
- Los jugadores tiran el dado para decidir quién empieza el juego.
- El primer jugador lanza el dado, y con el resultado del dado calcula el valor de la expresión de alguno de los caminos que salen de la casilla negra inferior; sube así a alguna de las tres casillas primeras apuntándose como puntuación el valor numérico de la expresión utilizada para subir.
- Para ser válido ese valor numérico debe ser entero y no fraccionario.
- A continuación, el segundo jugador hace lo mismo.
- Las casillas pueden ser ocupadas por las dos fichas.
- Al cabo de cinco turnos, los jugadores llegan al último nivel antes del cero al mismo tiempo, e intentan sacar con el dado el valor que permite anular la función $x-1$, $x-2$, o $x-3$ correspondiente.
- El juego se acaba cuando uno de los dos jugadores ha **subido al cero**.

- El jugador que sube al cero primero obtiene por este hecho 10 puntos adicionales.

Gana el que más puntuación ha acumulado a lo largo de las jugadas.

Tabla de resultados

| Jugada nº | Puntos primer jugador | Puntos segundo jugador |
|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| Puntos adicionales | | |
| Total | | |

(Ver tablero en Anexo 1.)

En este juego, al obligar que la puntuación sea entera, puntuación que corresponde al valor numérico de la expresión algebraica, sea entera, obligamos a nuestros alumnos a calcular mentalmente los valores numéricos de los caminos que salen para escoger el camino que da lugar a la mayor puntuación entera posible.

Objetivos.

- Mejora en el cálculo mental.
- Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas.

Curso.

La actividad planteada anteriormente, es para una sesión de los alumnos de 3º ESO. El tablero puede ser modificado, aquí solo se muestra un claro ejemplo, se pueden complicar las operaciones tanto como el profesor crea que es conveniente.

3.5 Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones de primer grado se usan en el periodo completo de Educación Secundaria Obligatoria. Si se practican tanto, ¿por qué los alumnos siguen teniendo problemas para resolverlas? En mi experiencia como estudiante, lo que recuerdo de las ecuaciones de primer grado en todos los cursos de Educación Secundaria es: <<los números para un lado y las letras para otro>>, o <<si está sumando, pasa restando>>, o <<si el número le está multiplicando a la x , pasa dividiendo>>, o viceversa. Sin duda, método sistemático, mecánico y sin comprensión alguna. Fue posteriormente a la Educación Secundaria Obligatoria, cuando entendí estos algoritmos, o reglas. ¿Por qué no explicar la razón desde un principio? Si nuestros alumnos comprenden estas <<reglas>>, será más difícil olvidarlas. Aun así, gran parte de los docentes seguirán dando una serie de normas y aplicándolas en una serie de ejercicios repetitivos.

Aquí se muestra una de muchas actividades que podemos practicar en clase o en casa para la resolución de ecuaciones de primer grado.

Ejemplo 7: El cuadrado mágico del salto del caballo

En este cuadrado, todas las líneas verticales y horizontales suman 260. Averigua los valores de las letras que aparecen x , y , t , entre otras, para conocer el valor numérico de cada casilla. Cuando conozcas todos los números, parte del 1, los siguientes números naturales van apareciendo siguiendo el movimiento del caballo en el juego de ajedrez.

(Ver cuadrado en el Anexo 2.)

Este cuadrado sirve de pretexto para que los alumnos resuelvan ecuaciones de primer grado de dificultad variada. El profesor puede utilizar el mismo soporte para inventarse condiciones que den lugar a ecuaciones de nivel más o menos alto, según proceda.

Las ecuaciones de primer grado se trabajan también con otros soportes lúdicos, como la baraja de ecuaciones, o el bingo de ecuaciones, que podemos encontrar en el blog de Ana García Azcárate.

Objetivo.

El objetivo de esta actividad es que el alumno resuelva ecuaciones de primer grado con coeficientes de todo tipo.

Curso.

El nivel al que está destinado este juego es 2º o 3º de Educación Secundaria Obligatoria. Los alumnos deben ir poco a poco. Deberían utilizar las líneas que tienen una sola incógnita, sustituyendo los valores numéricos de las casillas en cuanto sean conocidos. Es un juego en el que los alumnos pueden corregirse al final, intentando comprobar la propiedad especial del salto del caballo.

3.6 Ecuaciones de segundo grado

En este apartado se han agrupado acertijos y juegos matemáticos relacionados con las ecuaciones de segundo grado. Está destinado al alumnado de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria. Se intenta practicar la resolución de segundo grado así como la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Ejemplo 8: Poesía

Regocíjense los monos
divididos en dos bandos
su octava parte al cuadrado
en el bosque se solaza.

Con alegres gritos, doce
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos hay
en la manada en total?

Ejemplo 9: Juego del cuatro en raya algebraico

Material necesario:

- Un tablero de expresiones de segundo grado.
- Una regleta de factores de primer grado.
- 16 fichas por jugador, una de ellas será el testigo.

Reglas del juego:

- Juego para dos jugadores.
- Los jugadores tiran el dado para decidir quién empieza el juego.
- El primer jugador empieza el juego colocando sobre un factor de la regleta, su ficha testigo, y colocando a continuación sobre el otro factor (o sobre el mismo) la ficha testigo del otro jugador. Hace el producto de los dos factores señalados y rellena con una de sus quince fichas restantes la casilla correspondiente al resultado.
- El segundo jugador coge su ficha testigo de la regleta y la coloca sobre otro factor, hace el producto de su factor y del que señalaba la ficha del primer jugador y ocupa una ficha la casilla del tablero donde aparece el resultado.
- Para escoger su factor, el segundo jugador debe seguir la estrategia del juego clásico del cuatro en raya:
 - ~ Trata de impedir con la casilla que va a ocupar, que su adversario consiga alinear cuatro fichas.

- ~ Conseguir él también, lo antes posible, tener cuatro fichas alineadas en el tablero.
- El juego continúa con cada jugador moviendo únicamente su ficha testigo y colocando, cada vez, una ficha en cada casilla del tablero.
- Se puede ocupar la regleta por dos fichas a la vez.
- Si un jugador se equivoca en los cálculos, pierde su turno.
- Gana el jugador que consigue primero un **cuatro en raya**.

(Ver en Anexo 3.)

Objetivo.

Con este juego se pretende que los alumnos trabajen la resolución mental de ecuaciones de segundo grado, utilizando su factorización.

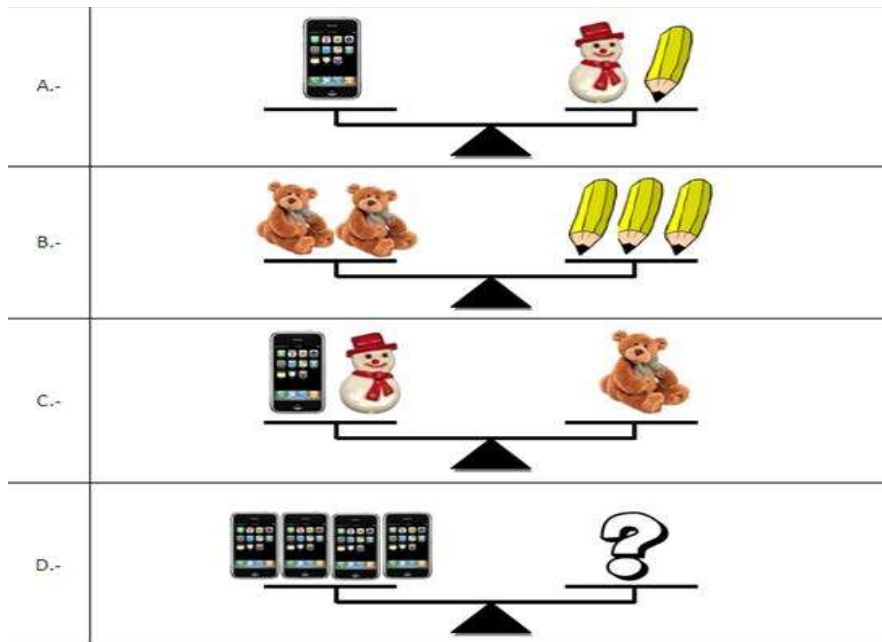
Curso.

Como la mecánica del juego no es trivial, sería recomendable que el profesor juegue con un alumno unas cuantas jugadas antes de que los alumnos empiecen a jugar entre ellos. Está destinado para alumnos de 3º y 4º de la ESO.

3.7 Sistemas de ecuaciones

Muchos pasatiempos están relacionados con los sistemas de ecuaciones. Son usuales en periódicos, revistas y últimamente son más los que nos podemos encontrar en redes sociales. Muchas veces para resolver estos acertijos, sólo es necesario la observación, sin acudir a ningún método de resolución. Como veremos a continuación.

Ejemplo 10: Peso de objetos



Este es uno de la multitud de ejemplos que podemos encontrar en diversos medios como por ejemplo periódicos, revistas y redes sociales. Esta situación está relacionada con los sistemas de ecuaciones, pero los alumnos no necesitan herramientas específicas ni métodos de resolución para seguir adelante. En cambio, con este tipo de pasatiempos los alumnos trabajan multitud de estrategias importantes, como:

- Observar regularidades en un conjunto de números y objetos.
- Hacer conjeturas y comprobarlas.
- Establecer nuevas igualdades o ecuaciones más sencillas entre objetos, utilizando el método de hacer lo mismo en los dos lados.
- Utilizar la información que ya se ha obtenido para obtener más condiciones sobre los números o los objetos.

Si el alumno necesitara ayuda, le pediríamos que observara los balancines, por ejemplo, un móvil pesa igual que un lápiz más un muñeco de nieve. También dos peluches pesan lo mismo que...

Este ejemplo no tiene una solución única, son varias las combinaciones que podemos hacer. ¿Todas las opciones que salgan en clase son válidas? Sería una

actividad para que nuestros alumnos entendieran la lógica de otro compañero, y así poder abrirse a otras soluciones y caminos.

Objetivo.

- Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Curso.

Este tipo de actividades está destinada para alumnos de 3º ESO.

3.8 Resolución de problemas algebraicos

Muñoz y Ríos (2008) concuerdan que *el paso de la aritmética al álgebra produce, en la mayoría de los estudiantes, dificultades de aprendizaje, las cuales se agudizan en el tema de la resolución de problemas cuando aplican ecuaciones lineales, ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico.*

La resolución de problemas es el punto más alto del proceso de aprendizaje del álgebra y el docente debe tener en cuenta que el miedo de enfrentarse a un problema algebraico está presente en nuestros alumnos. Esto puede influir a la desmotivación de los mismos, y ser un retroceso en su aprendizaje.

¿Nuestros alumnos se enfrentarán igual a un problema de álgebra de un libro de texto que a un problema cuyo contenido sea de su interés?

Ejemplo 14: La mula y el burro

Según la leyenda, Euclides, el padre de la Geometría fue el autor de este acertijo.

Una mula y un burro llevaban una carga de sacos. El burro lanzó un gruñido y la mula le dijo:

- ¿De qué te quejas? Si me dieras un saco, yo tendría el doble de sacos que tú; y si yo te diera uno de mis sacos, nuestras cargas serían iguales.

¿Cuántos sacos llevaban cada uno?

Cabe destacar, que nombrar a Euclides, por ejemplo, en un problema lleva consigo la explicación de un poco de historia tan necesaria y olvidada en el aula de Matemáticas.

Ejemplo 15: La esclava simpatía

En uno de los cuentos de “Las Mil y Una Noches” aparece un personaje singular, una mujer, la esclava Simpatía que, para salvar a su amo, se enfrenta a todos los sabios del reino. Una a una, va superando todas las pruebas de erudición, ingenio, sabiduría popular y teología coránica que le presentan.

La prueba que tiene que pasar Simpatía para mostrar su sabiduría en Ciencias es resolver un pequeño problema algebraico que dice así:

<<Una bandada de pajarillos se abate sobre la copa de un árbol; unos se posan en las ramas superiores y otros en las bajas. Los pajarillos que se hallan en lo alto del árbol dicen a los de abajo:

- Si se juntase a nosotros uno de vosotros, nuestro grupo sería el doble que el vuestro; pero si bajara uno de nosotros hacia vosotros nos igualaríais en número>>.

¿Cuántos pajarillos había? ¿Podrías tú también pasar la prueba de erudición?

Se han elegido solo un par de ejemplos, pero existen multitud de problemas de diferentes temas relacionados con la resolución de problemas algebraicos.

Objetivos.

Los objetivos principales son:

- Motivar a los alumnos mezclando matemáticas con historia, para despertar su interés.
- Resolver problemas a partir de los enunciados.
- Resolución de ecuaciones.

Curso.

El nivel al que podrían ir destinados sería para 2º y 3º de la ESO.

Ejemplo 16: Los tres amigos

Esta historia sólo es recomendable para los que habéis manejado sistemas.

¡Y no te desesperes!

Tres amigos hablan del dinero que tienen:

- El primero: Dadme la mitad de nuestro dinero y, con lo que yo tengo, tendré 340 euros.
- El segundo: Dadme el tercio de nuestro dinero y, con lo que yo tengo, tendré también 340 euros.
- El tercero: Dadme sólo la cuarta parte de vuestro dinero y, entonces, tendré 340 euros.

Intenta averiguar cuántos euros tenía cada uno de los tres amigos.

Objetivos.

- Resolver problemas a partir de enunciados.
- Resolución de ecuaciones.

Curso.

Este último ejemplo, al ser un poco más complejo está destinado a alumnos de 4º de la ESO.

4. CONCLUSIONES

La etapa educativa de los alumnos de la Educación Secundaria es sin duda una etapa complicada a nivel personal y un cambio en la forma de estudio. Nuevas nociones, nuevas formas de trabajo, a veces, nuevos compañeros y mayores responsabilidades. Por ello, la motivación en el aula debe ser primordial. Los docentes debemos intentar captar la máxima atención de nuestros alumnos, comprender sus dificultades, resaltar sus virtudes, y premiar su buena conducta. Un estado positivo y dinámico en el aula por parte del profesor, puede causar un efecto aún más positivo en el alumno. Tenemos que ser conscientes que las clases monótonas aburren, por muy bien que expliquemos los conceptos, pero nuestros alumnos necesitan actividad.

Por otro lado, el álgebra es una herramienta esencial de la asignatura de matemáticas y muchos son los alumnos que pasan de curso, aprueban la asignatura sin saber razonar por qué el doble de un número es $2x$, por ejemplo. Esta ha sido la verdadera motivación de este trabajo, intentar comprender el álgebra de una manera dinámica, en forma de juego, que haga al alumno partícipe de sus responsabilidades en el aula, poniendo una meta, un fin, al mismo tiempo que se cambia la forma de trabajo en ésta, saliendo de las clases magistrales, clases en las que el profesor explica y el alumno escucha, toma nota y repite un mismo modelo de ejercicio una y otra vez.

En el presente trabajo, se han introducido varios pasatiempos para trabajar en grupo donde cada componente del grupo tomará un papel, se pondrá en el pensamiento de su compañero intentando comprender su lógica, ayudará y explicará conceptos a sus compañeros si fuese necesario, es decir, desarrollará una serie de capacidades tan importantes para la asignatura de matemáticas como para su vida diaria.

En conclusión, existen numerosas herramientas de aprendizaje que el profesorado puede llevar al aula. El álgebra es una materia con mucho material manipulativo que podemos encontrar en el buscador de internet. El uso de las Tics, está a la orden del día, nuestros alumnos están en la era de los avances tecnológicos y no podemos

obviarlos ni evitarlos. El uso de blogs, de videos explicativos de canales de youtube, por ejemplo, puede ser otro camino para el aprendizaje dinámico del álgebra.

5. BIBLIOGRAFÍA

García Azcárate, A. (2010). *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas*. Madrid: Aviraneta.

Gasco, J., Villarroel, J.D., (2014). La motivación para las matemáticas en la ESO. Un estudio sobre las diferencias en función del curso y del sexo. *Números Revista de didáctica de las Matemáticas*, 86, 39-50.

Godino, J.D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/>

Jorge Pozo, D., (2013). *La motivación en el aula de matemáticas en la E.S.O.* (Trabajo fin de máster). Universidad de La Rioja, La Rioja.

Ropero, M. V. (2012). Aprendemos de igual a igual. *Revista digital Inesem*. Recuperado de <https://revistadigital.inesem.es/educacion-sociedad/Aprendemos-de-igual-a-igual/>

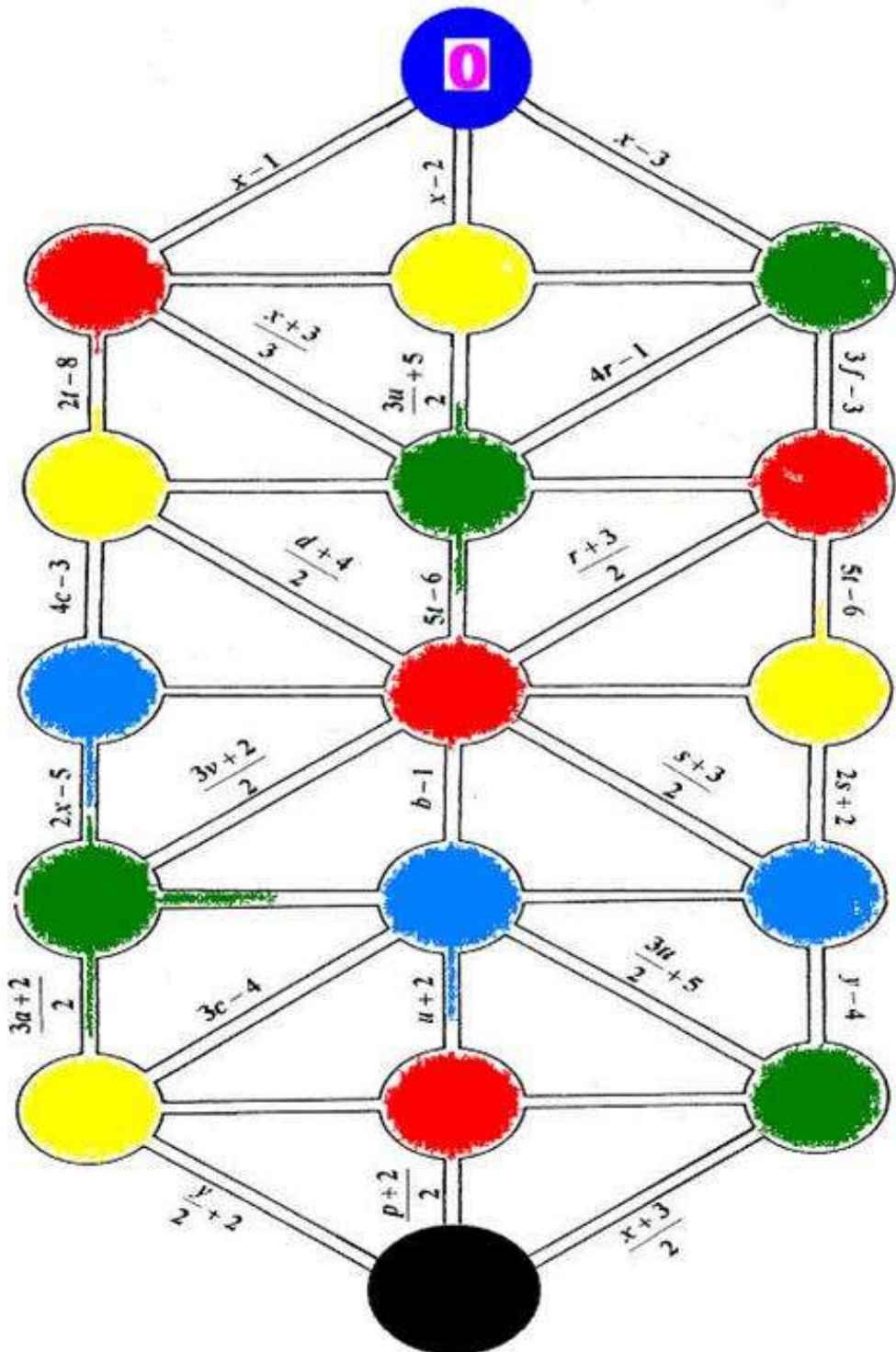
Otros enlaces

Castelnuovo, E., (1994). Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. *Revista Suma*. Primer seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/16/048-053.pdf>

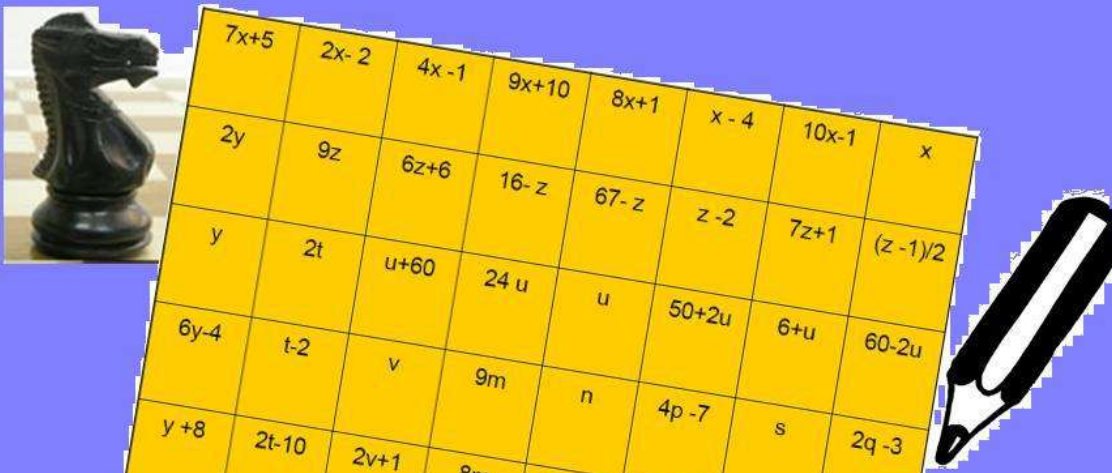
Muñoz, M., y Ríos, C. (2008). Nociones Básicas sobre álgebra: Análisis de las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje de los conceptos básicos sobre álgebra. *IX Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa*.

6. ANEXOS

Anexo 1: Subir al cero



Anexo 2: El cuadrado mágico del salto de caballo



| | | | | | | | |
|---------|---------|--------|---------|--------|---------|---------|-----------|
| $7x+5$ | $2x-2$ | $4x-1$ | $9x+10$ | $8x+1$ | $x-4$ | $10x-1$ | x |
| $2y$ | $9z$ | $6z+6$ | $16-z$ | $67-z$ | $z-2$ | $7z+1$ | $(z-1)/2$ |
| y | $2t$ | $u+60$ | $24u$ | u | $50+2u$ | $6+u$ | $60-2u$ |
| $6y-4$ | $t-2$ | v | $9m$ | n | $4p-7$ | s | $2q-3$ |
| $y+8$ | $2t-10$ | $2v+1$ | $8m$ | $2n-3$ | $3p-4$ | $15s-7$ | $q+3$ |
| $2y+4$ | $62-t$ | $v+8$ | $3+6m$ | $7n$ | $2p-3$ | $3s+2$ | $70-q$ |
| $68-3y$ | $t-5$ | $3v+1$ | $6m-2$ | $5n+1$ | p | $8s-1$ | $2q$ |
| $16+2y$ | $60-3y$ | $3y+1$ | $2y-5$ | $3y-1$ | $5y$ | $4y-2$ | $26-y$ |

Anexo 3: Juego del cuatro en raya algebraico

Tablero

| | | | | | |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $x^2 + x$ | $x^2 + 6x + 9$ | $x^2 + 3x$ | x^2 | $x^2 + 2x + 1$ | $x^2 - x$ |
| $x^2 - 4x$ | $x^2 - 9$ | $x^2 - 6x + 9$ | $x^2 - 4$ | $x^2 + 4x + 4$ | $x^2 - x$ |
| $x^2 + 2x$ | $x^2 - 16$ | $x^2 - 3x$ | $x^2 + x$ | $x^2 - 2x$ | $x^2 + 4x + 3$ |
| $x^2 + 8x + 16$ | $x^2 - 4x$ | $x^2 - 4$ | $x^2 + 3x$ | $x^2 - 2x + 1$ | $x^2 + 2x$ |
| $x^2 - 1$ | $x^2 - 5x + 6$ | $x^2 + x$ | $x^2 - 3x + 2$ | $x^2 - 2x$ | $x^2 - 8x + 16$ |
| $x^2 - x$ | $x^2 - 9$ | $x^2 + 2x$ | $x^2 - 4x + 4$ | x^2 | $x^2 + 4x$ |

Regleta

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-------|
| $x-4$ | $x-3$ | $x-2$ | $x-1$ | x | $x+1$ | $x+2$ |
| $x+3$ | $x+4$ | | | | | |