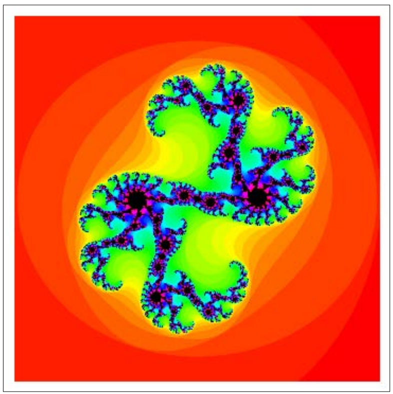
Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen II. Número 2 — 21 de enero de 2009



Fractales

Adornados generalmente de una enorme belleza, los fractales son unos curiosos objetos matemáticos que forman parte de la geometría de los seres vivos.

En este número, el alumno de la Titulación de Matemáticas Antonio Carlos Márquez García nos introduce de manera sencilla y amena el concepto de fractal, ilustrándolo con numerosos ejemplos, y mostrándonos varias de sus sorprendentes propiedades matemáticas y algunos de sus múltiples usos.

(Artículo completo en la página 18)

Concurso de resolución de problemas

Ganadora del concurso

En este *Boletín* anunciamos la ganadora del concurso de resolución de problemas que planteamos en el número anterior.

El premio ha recaído en la alumna del *IES «Cerro Milano»* de Alhama de Almería, **Lorena Beltrán González**. El problema propuesto en este número lo puedes encontrar en la página 10 y las bases del concurso en la página web del Boletín. **¡Anímate y participa!**

Editorial

Muchos estudiantes con buenas capacidades, a menudo aconsejados por sus familiares, creen que pueden *«perder su tiempo y desperdiciar su talento»* si deciden estudiar la carrera de Matemáticas, y que es más provechoso realizar otros estudios, digamos técnicos, con más reconocimiento social y mejores perspectivas laborales. Los tópicos siguen siendo los tópicos. Sin embargo, no parece estar muy de acuerdo con ésto el conocido periódico americano *The Wall Street Journal* cuando en un artículo del 6 de enero de 2009 titulado *«Doing the Maths to find the good jobs»*, que podemos traducir como *«Hacer Matemáticas para encontrar buenos empleos»*, sitúa la **profesión de matemático** como la número uno entre otras doscientas profesiones en Estados Unidos. ¡Atención!, no la cien, ni la veinte, ni la diez,... **es la número uno**. Para clasificarla en este puesto los autores del estudio han tenido en cuenta el entorno de trabajo, ingresos (salario medio sobre los 94 000 dólares anuales), estrés, etc. Lo dice la *Real Sociedad Matemática Española*, la *American Mathematical Society* y ahora el diario *The Wall Street Journal*: en Matemáticas no hay paro y está mucho mejor situada que otras carreras. ¿Cuándo estos datos formarán parte del imaginario colectivo? ¿Cuándo empezaremos a transmitir que ser matemático no equivale necesaria y obligatoriamente a ser docente, sino que es una opción más?

Resumen

Actividad Matemática p. 2

Enseñanza Secundaria p. 6

Divulgación Matemática p. 9

Territorio Estudiante p. 18

ISSN 1988-5318

INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

María Jesús Carro Rosell

Entrevista

Juan Cuadra Díaz
Juan José Moreno Balcázar
Universidad de Almería

María Jesús Carro

La doctora Carro es catedrática de Análisis Matemático en la Universidad de Barcelona, miembro del Consejo de Dirección del *Institut de Matemàtica* de dicha universidad y fue coordinadora del área de Matemáticas de la *Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva* (ANEP) durante el periodo 2005-2008.

• Desde el punto de vista de la investigación matemática y de su experiencia en la ANEP, ¿a qué nivel se encuentra España?

El nivel de la investigación matemática en España ha aumentado mucho en los últimos años y nos encontramos a buen nivel respecto al resto del mundo. Cada vez más, estamos siendo reconocidos en la comunidad internacional como un país donde las Matemáticas ya no sólo no pasan desapercibidas sino que se miran con mucho interés.

• ¿Qué aspectos destacaría de la política científica del Ministerio de Ciencia e Innovación para potenciar la investigación en matemáticas durante su cargo en la ANEP?

El periodo de duración de mi cargo en la ANEP (octubre 2005-septiembre 2008) coincidió prácticamente con el mandato de Francisco Marcellán como Secretario General y entre los aspectos que más destacaría está la enorme preocupación de Paco por mejorar el sistema de evaluación simplificando la burocracia a la hora de solicitar financiación al ministerio e implementando la evaluación «ex–post» y que consiste en hacer un seguimiento serio de los proyectos concedidos y de los resultados en ellos obtenidos. Este tipo de evaluación es pionera en nuestro sistema y es absolutamente fundamental para mejorar el sistema y optimizar los recursos. La creación de una nueva agencia de evaluación que englobe a la ANEP con la DGI también fue, en mi opinión, una buena idea que aún no se ha llevado a cabo pero que sigue estando a la espera de que se realice. Todo esto beneficiaría no sólo a las Matemáticas sino a todas las áreas.

Respecto a las Matemáticas, la creación del Instituto Español de Matemáticas fue, sin lugar a duda, uno de los aspectos a destacar de la política científica del momento.

• ¿Cómo cree que afectará la actual crisis económica a la financiación de los proyectos de investigación? ¿Podría verse perjudicada la matemática pura en favor de la aplicada?

Lamentablemente me temo que va a afectar bastante. Por lo pronto se han paralizado las convocatorias de proyectos CONSOLIDER y CENIT y posiblemente habrá menos dinero para los proyectos de investigación. Confiemos en que el recorte no sea excesivo.

En cualquier caso, no creo que la crisis afecte más a la matemática pura que a la aplicada.

• El número de catedráticas en áreas de matemáticas es muy pequeño en comparación al de hombres, ¿a qué cree que es debido? ¿Cómo ve el papel de la mujer en la investigación matemática?

Las causas son fundamentalmente sociales. Piensa que las catedráticas de ahora estudiamos hace más de 20 años y las cosas no se veían de igual manera entonces que en nuestros días. Yo soy muy optimista en este aspecto y estoy convencida de que en un futuro cercano la situación cambiará. El papel de la mujer en la investigación matemática lo veo exactamente igual que el del hombre. Quizás hay una tendencia de las mujeres hacia la Matemática Aplicada. Por ejemplo, hoy en día el área donde hay más mujeres que son investigadoras principales es Estadística. En cualquier caso los datos que manejamos son muy pequeños para poder sacar conclusiones.

• En estos momentos muchos jóvenes investigadores tienen serias dudas sobre su futuro. Desde su experiencia, ¿qué les diría?

Verdaderamente es un riesgo opinar sobre el tema. No quisiera engañar a nadie en estos momentos. Yo veo que la situación va a cambiar mucho en los próximos años. Sólo hay que mirar la plantilla de profesores en las universidades y verles las canas para saber que en unos años la escasez de plazas desaparecerá. El problema es para los jóvenes que ya han terminado y necesitan ahora un hueco que no hay. A ellos sólo puedo expresarles mi profundo malestar con la situación, que en mi opinión es consecuencia de una mala o nula planificación de las plantillas del

ISSN 1988-5318

profesorado universitario de hace unos años y de no haber sabido convencer a las empresas que han de financiar seriamente la investigación en beneficio propio.

• Cada vez son menos los jóvenes españoles que cursan carreras de ciencias, y en particular matemáticas. ¿A qué cree que se debe? ¿Cree que es consciente el gobierno de la problemática que generará esta situación? ¿Cómo se podría hacer frente a los problemas que esto acarreará a la ciencia española?

La mentalidad de los jóvenes ha cambiado mucho. No piensan como pensábamos nosotros a su edad y el amor a las matemáticas *per se* ha desaparecido. Los jóvenes han tenido una vida fácil y en muchos casos han realizado unos estudios de primaria y secundaria de mínimos. Mi experiencia es que los buenos estudiantes de la ESO se aburren en las clases y cuando llegan a la universidad no están preparados para esforzarse y estudiar en serio. Les falta motivación. Si la motivación es únicamente ganar dinero, no ven que el esfuerzo de estudiar Matemáticas o una carrera de Ciencias vaya a compensar.

Por supuesto que el gobierno es consciente del tema. El problema es que la solución es compleja y se necesita mucha coordinación entre diferentes estamentos. Cosa que falla por todos los lados.

En mi opinión hay que empezar buscando la solución en los estudios de primaria. Los colegios deberían estar dotados de personal para atender a la diversidad tanto con los niños que necesitan ayuda extra como con los niños que destacan por arriba en alguna materia. En los colegios de España no se presta ninguna atención a éstos últimos y esto es un fallo tremendo.

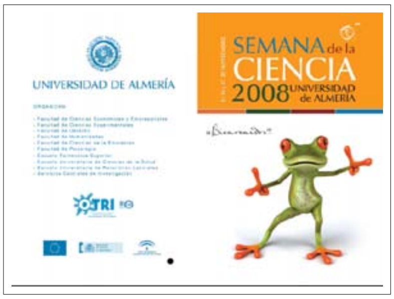
Mientras no se solucione el problema desde abajo, sólo nos queda ir poniendo parches por arriba.

• Para terminar, ¿cómo consiguió compaginar su trabajo en la ANEP con su actividad en la investigación matemática?

Bueno, la palabra clave es organización. No hay nada que funcione mejor. Créeme. ■

Actividades matemáticas

La Semana de la Ciencia en la Universidad de Almería



Cartel anunciador

Del 13 al 20 de noviembre se celebró la Semana de la Ciencia 2008 en la Universidad de Almería. El Vicerrectorado de Investigación, Desarrollo e Innovación a través de la OTRI, junto con las Facultades de la Universidad de Almería, organizó una serie de actividades de difusión que pretendían dar a conocer las tareas docentes e investigadoras que se realizan en nuestra universidad. El objetivo principal fue acercar el conocimiento científico y tecnológico a la sociedad, en particular, al alumnado de los institutos de bachillerato de la provincia que visitaron la Universidad de Almería durante esos días. Se puede obtener más información sobre las actividades matemáticas y de otro tipo que se han desarrollado pinchando *aquí*.

Así fue ExpoMat 2008

La exposición

El Patio de Luces de la Diputación de Almería fue tomado durante una semana por 1500 estudiantes de colegios e institutos de Almería y por el profesorado, familias y personas curiosas, que al pasar por la calle Navarro Rodrigo veían algo extraño pero bonito, con forma triangular, y que cuando entraban para descubrir lo que era sonreían y se acercaban a tocar.

El Triángulo de Sierpiński, con más de 4 metros de altura, fue un reclamo perfecto para que cualquier almeriense supiera que en la Diputación había una exposición diferente. Hubo que reajustar turnos y horarios para los institutos y colegios que no habían reservado plaza para asistir y se tuvo que optimizar el horario para que nadie se quedara sin disfrutar de la exposición. La mañana del viernes, los IES *«Celia Viñas»*, *«Sol de Portocarrero»* de La Cañada de San Urbano y *«Manuel de Góngora»* de Tabernas, además del Colegio *«Altaduna»*, grabaron microespacios matemáticos para el programa de televisión *«El club de las ideas»* de Canal Sur.

Haciendo un pequeño balance numérico, visitaron la exposición unas 2000 personas entre alumnado y profesorado de 25 institutos y colegios; además, se realizaron 2969 descargas del cuaderno de la exposición, aparte de las 3000 fotocopias de material que se puso a disposición de los visitantes.

En definitiva, todo un éxito de organización y público que esperamos sirva de motivación y acicate para próximas ediciones.

Olimpiada Matemática

El viernes día 23 de enero en jornada de mañana y tarde se va a celebrar en el aula 2 del Aulario II de la Universidad de Almería la Primera

ISSN 1988-5318

Fase o Fase Local de la XLV Olimpiada Matemática Española, que convoca la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) bajo el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Promoción Educativa del Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Podrán participar todos los alumnos del sistema educativo español que estén matriculados durante el curso académico 2008-2009 en Bachillerato. Con carácter excepcional, y si son avalados por escrito por su profesor, también podrán tomar parte alumnos del 2º Ciclo de ESO de excelentes capacidades.

La Subdirección General de Becas y Promoción Educativa del Ministerio de Educación, Política Social y Deporte concede, para la Primera Fase y por cada Universidad pública integrada en la Olimpiada de Distrito los siguientes premios en metálico: un primer premio de 380€, un segundo premio de 285€ y un tercer premio de 220€. Además, la RSME premiará a los ganadores con un diploma acreditativo y una cuota anual de socio-estudiante, lo que le da derecho, entre otros beneficios, a recibir la revistas *«La Gaceta»* de la RSME durante un año.

La Segunda Fase o Fase Nacional tendrá lugar en San Feliu de Guíxols (Gerona) entre los días 26 y 29 de marzo de 2009. Los alumnos españoles que hayan obtenido Medalla de Oro en la Fase Nacional formarán parte del Equipo Olímpico de España y la representará en la 50ª Olimpiada Matemática Internacional que se celebrará en Bremen (República Federal de Alemania) en julio de 2009.

Para una más amplia información contactar en la dirección de correo electrónico *rruiz@ual.es*.

Logotipo de la Olimpiada

Noticias matemáticas

Proyectos educativos en Estadística e Investigación Operativa

La *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa* (SEIO) ha convocado el IV Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Dicha sociedad, consciente de la importancia que estas disciplinas tienen hoy en día como materias de formación académica y herramientas para la toma de decisiones en los entornos públicos, privados y empresariales, desea contribuir a la difusión de la Estadística y de la Investigación Operativa en la sociedad. Por ello, reconociendo la trascendencia que tiene el aprendizaje de estas materias en la enseñanza no universitaria, la SEIO ha decidido convocar un concurso con el fin de fomentar la elaboración de material didáctico en los ámbitos de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato.

Podrán participar en el concurso, individualmente o en grupo, todos los profesores que en el curso 2008-09 realicen tareas docentes en los niveles de Educación Secundaria y Bachillerato.

La fecha límite de remisión de los trabajos será el 30 de junio de 2009 y se otorgará un premio de 600€ al mejor trabajo presentado. Se puede encontrar información más extensa al respecto en la página de la sociedad (*www.seio.es*).

Concurso de dibujo matemático

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales de Almería ha convocado el II Concurso de Dibujo Matemático de Almería.

Participantes: Alumnado de Educación Primaria de la provincia de Almería.

Tema: cualquier situación donde se encuentren las Matemáticas, números, juegos de azar, formas geométricas, mosaicos, juegos, etc.

Recepción de Dibujos: del 12 de enero al 30 de marzo de 2009.

Se puede obtener más información sobre este concurso (y sobre los concursos: I Concurso de Vídeo Matemático de Almería y II Concurso de Fotografía Matemática de Almería –que se convocarán próximamente–) en *thales.cica.es/almeria*.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado numerosos investigadores de diferentes universidades con las que los grupos de investigación de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de su actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: Reinaldo Rodríguez-Ramos, de la Universidad de La Habana (Cuba); Cleonice Fátima Bracciali, de la UNESP-Universidade Estadual Paulista (Brasil); Herbert Stahl, del Technische Fachhochschule Berlín (Alemania); Maxim Yattselev, del INRIA, Sophia-Antipolis (Francia); Mike Prest, de la Universidad de Manchester (Reino Unido); Imen Bhouri, Hichem Ounaies y Amor Haouaoui, de la Universidad de Monastir (Túnez); Joaquín Sánchez Lara, de la Universidad de Sevilla; L'Moufadal Ben Yakoub, de

ISSN 1988-5318

la Universidad de Tetuán (Marruecos); Abdelfattah Häily, de la Universidad de El Jadida (Marruecos); Claudia Menini y Viola Bruni, de la Universidad de Ferrara (Italia); Alejandro Zarzo Altarejos, de la ETSII de la Universidad Politécnica de Madrid; Lidia Fernández Rodríguez, Domingo Barrera y Antonia Delgado, de la Universidad de Granada; y David Radford, de la Universidad de Illinois (Estados Unidos).

Preguntas frecuentes

José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

¿Se tiene en cuenta la opinión del alumnado en la gestión de la Universidad?

El alumnado tiene una representación proporcional en todos los órganos colegiados de la Universidad de Almería: Consejos de Departamento, Juntas de Centro, Claustro y Consejo de Gobierno. Aparte de esto, existen diferentes asociaciones y organizaciones de alumnos con sus propias normas y que defienden sus propios intereses. En cada grupo de teoría de todas las asignaturas de la UAL existe un delegado de clase que es su representante legal y es elegido por votación entre sus compañeros.

¿Qué opinión tiene el alumnado sobre la labor docente del profesorado que imparte clase en la Titulación de Matemáticas?

Cada curso se realiza una encuesta anónima al alumnado sobre esta cuestión consistente en una serie de preguntas concretas sobre cada profesor que se puntúan de 1 a 5. Los resultados del curso 2007-2008 indican que el promedio en la Titulación de Matemáticas es de 4,28 sobre 5. La media global de toda la Universidad de Almería es de 4,00.

¿Cuándo debe estar elaborado el nuevo plan de estudios del Grado de Matemáticas?

Toda nueva titulación debe pasar un proceso de verificación y de acreditación que certifique su calidad y viabilidad. En España, los nuevos planes han de estar acreditados en el curso 2010-2011, aunque el proceso puede haber acabado anteriormente. No obstante, el curso académico de implantación del Título de Grado puede ser distinto si las universidades pertenecen a diferentes comunidades autónomas.

¿Obliga el proceso de Convergencia Europea a que los sistemas universitarios sean idénticos en todas partes?

Aunque este caso podría darse, lo que se persigue, más que la unificación, es la armonización de los estudios por medio de una serie de medidas y herramientas que permiten comparar las distintas ofertas, los resultados de los programas y la movilidad dentro del sistema. Respetando estas normas, cada universidad conserva cierta autonomía.

¿Es obligatoria la asistencia a clase?

En principio la asistencia a clase no es obligatoria aunque actualmente es muy recomendable y en muchos casos imprescindible ya que el profesorado de la Universidad de Almería desarrolla métodos docentes innovadores que involucran al alumno de manera activa en el proceso de aprendizaje.

¿Qué diferencias fundamentales habrá entre las nuevas enseñanzas de Grado y las antiguas?

Se pretende conseguir una orientación al mercado laboral y una mayor formación práctica. Se cambian los planes de estudios para que puedan ser válidos en todo el territorio europeo y se quiere que el graduado adquiera determinadas competencias y habilidades, por encima, aunque sin olvidarlos, de los tradicionales conocimientos.

¿Voy a tener tiempo de hacer otras cosas además de estudiar?

Es cierto que la dedicación al estudio será mayor que el desarrollado hasta ahora en bachillerato, pero esto es propio del nivel de enseñanza universitario más que de la propia Titulación de Matemáticas. En la Universidad de Almería, esta dedicación se ve reforzada por la atención prácticamente individualizada del profesorado. De esta forma y con una buena organización, podrás dedicar también una parte de tu tiempo a otras actividades.

¿Qué actividades complementarias me ofrece la Universidad de Almería?

La UAL cuenta con una variada gama de actividades sociales. Desde el Vicerrectorado de Estudiantes y Empleo se apoya el asociacionismo y la participación así como el voluntariado y la solidaridad. Además, te ofrece actividades complementarias el Vicerrectorado de Cultura, Extensión Universitaria y Deportes, como el cineclub universitario, el aula de teatro, etc. El Servicio de Deportes dispone de una gran cantidad de instalaciones y un programa de actividades físico–deportivas actualizado mensualmente.

¿Tengo que saber inglés?

Es recomendable, aunque no necesario para comenzar. Conforme avances en los cursos, al igual que sucede en la mayoría de titulaciones actuales, el inglés será imprescindible. El nivel de inglés adquirido en Bachillerato te permitirá leer algunos textos específicos de la titulación. Además, todas las titulaciones de la Universidad de Almería deben proporcionar a sus alumnos la competencia del conocimiento de una segunda lengua.

ISSN 1988-5318

EXPERIENCIA DOCENTE

Software libre en el Aula de Matemáticas

María del Mar Mateo Ropero
IES Río Aguas (Sorbas)

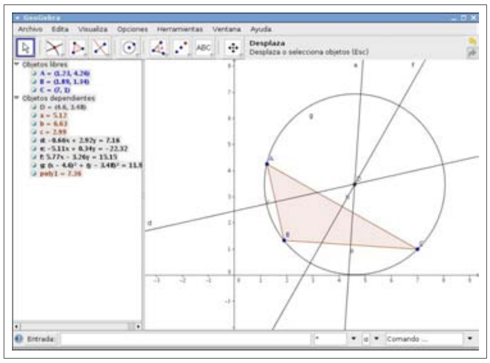
En los últimos años una de las políticas de las administraciones educativas consiste en introducir el uso del ordenador en el desarrollo de las clases de la Enseñanza Secundaria. Todos los años se abre una convocatoria para que los centros andaluces que lo deseen, presenten un proyecto de utilización de las tecnologías de la información y comunicación en el aula. Los centros seleccionados son dotados con una gran cantidad de material: un ordenador por cada dos alumnos aproximadamente (fijo o portátil), equipos informáticos completos para los departamentos, una red interna, etc. (red de centros TIC en *www.juntadeandalucia.es/averroes/helvia/sitio*). Una vez concedido el proyecto hay que poner a funcionar este hardware con el software apropiado.

Tradicionalmente, en la asignatura de Matemáticas se han utilizado los programas *Mathematica*, *Matlab*, *Statgraphics*, *Derive*, *Cabri*, etcétera.

Estos programas entran dentro de lo que se denomina software propietario y para poder utilizarlos hay que pagar costosas licencias. Como contraposición está el software libre que puede ser usado, modificado y distribuido libremente, y que suele ser gratuito. La Junta de Andalucía está apostando por este tipo de software, como pone de manifiesto el desarrollo del sistema operativo *Guadalinex*.

La cantidad de programas distribuidos con licencia libre relacionados con las Matemáticas es grande. Existen muchos paquetes pequeños que permiten realizar tareas muy concretas. Por ejemplo, están los programas de generación de ejercicios para secundaria, como *gMatEso* (*lubrin.org/gmateso*) o *kpercentage*, programas para representar gráficamente funciones, como *kmplot* (*edu.kde.org/kmplot*), programas de cálculo mental como *tuxmath*, etc. Pero también hay proyectos libres más potentes. Podemos citar el *Proyecto Descartes* (*descartes.cnice.mec.es*), que ya se comentó en un número anterior (Vol I, nº 3, pág. 6), un gran «libro digital interactivo» que contiene la mayoría de las unidades didácticas que se estudian en secundaria.

Dentro de estos programas más sofisticados se encuentra *Geogebra* (*www.geogebra.org*). *Geogebra* es un software geométrico que permite realizar todo tipo de construcciones. Su principal característica es que está formado por dos ventanas de entrada de datos, una algebraica y otra geométrica, de forma que al introducir cualquier objeto en alguna de ellas, nos aparece automáticamente en la otra expresado en el lenguaje correspondiente (algebraico o geométrico). Además, con *Geogebra* se pueden crear de manera sencilla «applets» que pueden ser introducidos en páginas web, con lo que es posible elaborar materiales similares a los que componen el proyecto Descartes.



Ventana de Geogebra

Una alternativa libre de *Mathematica* es el programa *Maxima* (*maxima.sourceforge.net*). Este software permite hacer todo tipo de cálculos simbólicos (operaciones con polinomios, derivadas, cálculo de primitivas, etcétera), representaciones gráficas en 2 y 3 dimensiones, y se puede utilizar como lenguaje de programación para construir nuestras propias funciones.

En el ámbito de la estadística se encuentra *R* (*www.r-project.org*). En palabras de la página oficial del programa, *R* «es un lenguaje y un entorno para cálculo estadístico y realización de gráficos». Es, además, un lenguaje de programación utilizado en el ámbito científico y que está en constante desarrollo. Y esto es tan sólo una pequeña muestra de la cantidad de programas libres para Matemáticas existente. Una cantidad que, con la proliferación del software libre irá, sin duda, aumentando. ■

DEPARTAMENTOS DE MATEMÁTICAS

IES Juan Goytisolo

Carboneras (Almería)

El *IES «Juan Goytisolo»*, situado en Carboneras, en la comarca del Levante almeriense, comenzó a funcionar en el año 1984 como una extensión del *IES «El Palmeral»* de Vera, pasando a ser instituto en el curso 1988/89. En la actualidad se imparten 14 grupos de ESO, 4 de bachillerato y dos de ciclos formativos de grado medio.

El Departamento de Matemáticas en la actualidad está compuesto por 6 miembros: Mª Crespo Egea, Mª Ángeles Guil Artés, Juan Francisco Freire Quesada, Francisco Morales Haro,

ISSN 1988-5318

Francisco Morales Latorre y Marcos García Piedra.

Miembros del Departamento

En el departamento, además del desarrollo normal del currículo, llevamos dos años incidiendo en el planteamiento y resolución de problemas. Para ello, de forma específica, todas las semanas y en cada uno de los niveles es planteado un problema concreto a tal efecto, que luego es resuelto y comentado en clase. En este aspecto se ha implicado a otros departamentos de ciencias con el objeto de que el alumnado vea la relación de las matemáticas con el resto de áreas científicas.

En el primer trimestre de este curso, el departamento ha colaborado en un trabajo de campo realizado por un antiguo alumno del instituto que en la actualidad estudia Matemáticas en la universidad de nuestra provincia. Para ello se le ha pasado una encuesta a los alumnos del centro y a los profesores del departamento. Desde estas páginas manifestamos nuestra predisposición, en un futuro, a colaborar en experiencias de este tipo.

Uno de los objetivos que se persigue desde el área de Matemáticas es el fomento de la cultura matemática, divulgando sus aspectos más lúdicos y atractivos, y el descubrimiento y utilización de las matemáticas en el entorno cotidiano. Para ello, durante el presente curso académico nos hemos planteado las siguientes actividades complementarias:

✔ Prueba de ingenio matemático

La prueba de ingenio matemático es una especie de gymkhana formada por pequeños y divertidos retos. Cada alumno pasará por cada una de las mesas en las cuales se encontrará con una prueba de ingenio del campo de la matemática recreativa. Se tratará de obtener el máximo de retos resueltos correctamente en el mínimo de tiempo.

✔ Rincón matemático

Esta actividad se desarrollará a lo largo de todo el año. Se elegirá un lugar visible del centro y en él se irán exponiendo noticias, curiosidades, historias, etc. (que pueden ir desde notas de efemérides hasta recortes de noticias de prensa) relacionadas con las matemáticas. Pueden participar profesores, alumnos y padres.

✔ Participación en concursos matemáticos

Los alumnos que lo deseen y cumplan una serie de requisitos, podrán participar individualmente o representando al centro en los distintos concursos matemáticos que a nivel provincial se organizan. ■

Problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad

Presentamos la solución al problema propuesto en el número anterior. Os planteamos otro para que nos enviéis vuestras soluciones a *bmatema@ual.es*.

Los juegos de exámenes propuestos desde el año 2001 hasta la fecha de las dos asignaturas de matemáticas que participan en las pruebas están disponibles en la página web *distritounicoandaluz.cica.es* en el apartado de las Pruebas de Acceso.

Problema propuesto en el número anterior

Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro. Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

Solución:

José Fernández Gómez
IES La Puebla (Vícar)

Vamos a ordenar un poco todos estos datos:

	Nº píldoras	*Hierro*	*Vit. B*	*Precio*
Marca P	x	40 mg	10 mg	6 cénts.
Marca Q	y	10 mg	20 mg	8 cénts.
Max. mg		240 mg	200 mg	

Tomaremos $x=$ nº de píldoras de la marca P diarias e $y=$ nº de píldoras de la marca Q.

Con estos datos generamos las inecuaciones:

$$40x + 10y \leq 240 \quad \text{(restricción de Hierro)}$$
$$10x + 20y \leq 200 \quad \text{(restricción de Vit. B)}$$

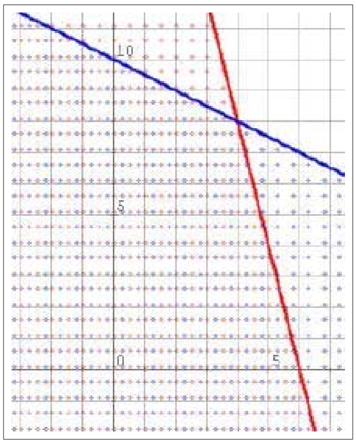
Consideramos $x \geq 0$ e $y \geq 0$ lógicamente.

Para determinar la región factible, dibujaremos la recta frontera determinada por la primera inecuación $40x + 10y = 240$ con un par de puntos (los de corte con los ejes). Si $x = 0$ entonces $y = 24$ con lo que tendríamos el punto $A = (0, 24)$. Si $y = 0$ entonces $x = 6$ con lo que tendríamos el punto $B = (6, 0)$. Comprobamos que el origen $(0, 0)$ satisface la inecuación dada, con lo que determinamos el semiplano solución.

ISSN 1988-5318

Repetimos el proceso para la segunda inecuación. Dibujaremos la recta frontera determinada por la segunda inecuación $10x+20y = 200$ dando los puntos de corte con los ejes. Si $x = 0$ entonces $y = 10$ con lo que tendríamos el punto $C = (0, 10)$. Si $y = 0$ entonces $x = 20$ con lo que tendríamos el punto $D = (20, 0)$. De nuevo, comprobamos que el origen $(0, 0)$ satisface la inecuación dada, obteniendo así el semiplano solución.

La intersección de los dos semiplanos la vemos en el siguiente gráfico.



Región factible

La región factible está determinada por la zona de doble punto (azul y rojo). Debemos calcular la intersección de las rectas azul y roja resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$10x + 20y = 200$$
$$40x + 10y = 240$$

La solución del mismo es $x = 4$ e $y = 8$, con lo que tenemos una región factible de vértices $O = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 10)$ y el nuevo vértice $E = (4, 8)$.

La función objetivo, en este caso el coste del tratamiento, será $F(x, y) = 6x + 8y$. Sabemos que ésta se maximiza en alguno de los vértices anteriores. Si calculamos el coste en cada uno de ellos, obtenemos: $F(O) = 0$; $F(B) = 36$; $F(C) = 80$ y $F(E) = 24 + 64 = 88$. Por lo tanto el tratamiento de coste máximo lo obtenemos tomando 4 píldoras del tipo P y 8 de Q.

En la siguiente escena de Descartes, de José Ireno Fernández, podemos observar por una parte las inecuaciones con las que debemos trabajar, dadas las restricciones de la máxima cantidad de mg de Hierro y Vitamina B que puede ingerir el individuo, junto con la función objetivo del coste del tratamiento.

La escena nos dibuja la recta roja (correspondiente a la restricción del hierro) y el semiplano solución. Igualmente nos dibuja la recta azul (correspondiente a la restricción de la vitamina B) y su semiplano solución. Junto con la restricciones de cantidades positivas para x e y, que nos limitan al primer cuadrante, obtenemos la región factible determinada con puntos de color rojo y puntos de color azul.

La escena nos da la posibilidad de dibujar igualmente la recta de nivel correspondiente a la función objetivo (recta negra). La escena es totalmente interactiva, lo que nos permite mover el punto negro o lo que es lo mismo desplazar la recta negra en diferentes rectas de nivel.

La captura de pantalla está hecha situando el punto negro en las proximidades del punto $(3, 7)$, o lo que es lo mismo, 3 píldoras de P y 7 de Q, obteniendo un coste para este tratamiento de 73,96 céntimos. ¿Podemos aumentar el coste del tratamiento? Sí. Aún nos quedan «peores» puntos en la región factible.

Situemos el punto negro, más cerca del punto de corte de la recta roja y la recta azul, vértice $(4, 8)$, o desplacemos la recta negra. Empeoramos el coste llegando a 82,96 céntimos.

¿Podemos seguir maximizando el coste?, ¿sin salir de la región factible? No creo que sea necesario que os conteste.

Nuevo problema propuesto

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

ISSN 1988-5318

PROBLEMAS DE INTERÉS

Criptografía

La ciencia que protege tus secretos

María del Carmen Castro Alférez
Alumna de la Doble Titulación Matemáticas e Informática
Universidad de Almería

A todos se nos han presentado situaciones en las que nos habría sido útil conocer la ciencia de la criptografía. Seguro que alguna vez has escrito un mensaje que no querías que nadie leyera excepto el receptor o has hecho una marca en un texto para que quien lo lea sepa que el mensaje era tuyo. Pues bien, la criptografía es la ciencia que se encarga precisamente de esto: proteger la información aplicando una serie de algoritmos que modifiquen la representación de un mensaje. De esta forma el nuevo texto será ilegible a no ser que se disponga de la clave que permita descifrarlo.

Un sencillo y muy antiguo algoritmo de cifrado es el que se conoce como algoritmo de sustitución, que consiste en tomar las letras del abecedario y permutar su orden. Por ejemplo, podemos cifrar el abecedario del siguiente modo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
G	Y	A	Ñ	D	B	O	C	M	E	F	V	H	S

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
I	N	J	P	T	W	Q	X	Z	K	R	U	L

Si ahora quisiéramos cifrar el mensaje: *«La criptografía es la ciencia que protege tus secretos»* sólo tendríamos que cambiar cada letra del mensaje por su correspondiente letra del alfabeto cifrado y obtendríamos: *«VGATMJQNOTGBMGDWVGAMDSAMGPXDJTNQDODQXWWDATDQNW»*.

De esta forma si alguien quisiera leer este mensaje sólo tendría que tomar el alfabeto cifrado y sustituir las letras del criptograma (mensaje cifrado). Por tanto, sólo podremos descifrarlo si conocemos el alfabeto cifrado, es decir, la clave.

Pero, ¿es realmente esto así? ¿Podríamos estar seguros de que nadie sería capaz de descifrar el mensaje sin conocer la clave? Éste ha sido uno de los grandes errores de la humanidad durante siglos: el creer que una comunicación era segura por estar cifrada.

Fue el caso de la reina de Escocia, María Estuardo. En el siglo XVI participó en la conspiración contra su prima, la reina Isabel, para matarla y apoderarse del trono de Inglaterra. Sus planes no salieron bien pues confió en que sus enemigos no podrían leer sus cartas cifradas. Sin embargo, en aquella fecha la ciencia que se encargaba de descifrar los mensajes, llamada criptoanálisis, estaba muy avanzada, por lo que los seguidores de la reina Isabel fueron capaces de descifrar los mensajes de la reina de Escocia y descubrieron sus planes. Finalmente, la reina María Estuardo fue condenada a muerte.

Así pues, no seamos tan ingenuos como la reina de Escocia y no pensemos que nadie podrá leer nuestros mensajes aplicando el algoritmo de sustitución pues dicho algoritmo también se puede romper aunque no conozcamos el abecedario cifrado.

La técnica que permite romper este algoritmo se conoce como análisis de frecuencia y su origen se remonta a la civilización musulmana del siglo IX que la descubrió en su inmensa labor de traducción de textos de otras culturas y el estudio de libros religiosos. La debilidad del algoritmo de sustitución radica en que en cada idioma unas letras se repiten con más frecuencia que otras. De esta forma se puede construir una tabla con la frecuencia de aparición de cada letra. En español, por ejemplo, la tabla sería la siguiente:

Letras de alta frecuencia		Letras de frecuencia media		Letras de frecuencia baja	
Letra	Frecuencia	Letra	Frecuencia	Letra	Frecuencia
E	16,78 %	R	4,94 %	Y	1,54 %
A	11,96 %	U	4,80 %	Q	1,53 %
O	8,69 %	I	4,15 %	B	0,92 %
L	8,37 %	T	3,31 %	H	0,89 %
S	7,88 %	C	2,92 %	El resto de letras: G,F,V, W,J,Z,X,K tienen una frecuencia inferior a 0,5 %	
N	7,01 %	P	2,76 %		
D	6,87 %	M	2,12 %		

Fuente: *www.mundocripto.com/mambo/content/view/79/54/*

Así, si tenemos un criptograma que queremos descifrar, sólo hemos de contar el número de veces que aparece cada letra y dividirlo por el número total de letras del texto para averiguar su frecuencia. Una vez que tengamos la frecuencia de todas las letras las comparamos con la tabla de frecuencias e identificamos cada una. Cuanto más largo sea el texto mayor precisión habrá en la identificación de cada letra.

Para que descubras cómo funciona esta técnica proponemos como problema descifrar el texto que aparece al final de este artículo.

Fíjate que hemos cifrado el texto dejando espacios entre las palabras para que resulte más fácil de descifrar. Normalmente se escribe todo el texto seguido para dificultar la labor del criptoanalista, ya que conocer la longitud de las palabras facilita el descifrado. Por ejemplo, es frecuente que las palabras de dos letras correspondan a: de, en, el, la... Existe también una tabla de frecuencias en español para las palabras de dos, tres y cuatro letras más usadas.

Una vez que hemos visto cómo romper el algoritmo de sustitución podemos preguntarnos si existe algún algoritmo que actualmente sea seguro. La respuesta a esta pregunta es que sí. Existen algoritmos como el RSA que hoy en día es completamente seguro pues se basa en la dificultad computacional de factorizar un número grande en factores primos.

ISSN 1988-5318

Aunque no seamos conscientes de la importancia de la criptografía y de este algoritmo en concreto, hacemos uso del algoritmo RSA a diario. Actividades tan cotidianas como utilizar *Internet Explorer*, mandar un mensaje con el móvil o realizar una transferencia bancaria, basan su seguridad en él. Además, dicho algoritmo es la base que nos permite firmar digitalmente un mensaje.

La escitala es un instrumento que utilizaban los antiguos griegos para encriptar mensajes

A pesar de la gran confianza que nos proporciona RSA, se ha demostrado teóricamente que sería posible resolver el problema de la factorización de números enteros si se construyera la computadora cuántica, por lo que RSA dejaría de ser seguro. Estas nuevas computadoras tendrían una gran velocidad de cálculo gracias a que usarían fenómenos cuánticos (el cambio de posición de un electrón respecto al núcleo del átomo) en lugar de impulsos electrónicos como hoy día. En un futuro veremos si la ciencia avanza tanto que es capaz de construir este tipo de computador o si alguien puede encontrar alguna técnica que permita descifrar el RSA haciendo uso de un ordenador tradicional. Por si esto ocurriera, ya se trabaja en la creación de criptosistemas que sean seguros incluso con la computadora cuántica.

Actualmente, la criptografía va de la mano de las matemáticas y de la informática. No debemos olvidar que fue la criptografía la que propició la aparición de los primeros ordenadores, ya que se necesitaba mayor capacidad de cálculo para descifrar los mensajes de los alemanes que estaban cifrados con la endiablada máquina *Enigma* durante la Segunda Guerra Mundial.

La máquina Enigma

Para saber más: S. Singh, *Los códigos secretos*. Editorial Debate, 2000. ■

Concurso de problemas

Propuesto por María del Carmen Castro Alférez

Problema propuesto

«XT LÑEZÑXS ÑL XT BZWLWSAÑZS; LW GS LTÑGXDL, XT ÑZÑL LT BZWLWSAÑZS». ESA ÑLXD QDYWQD LÑ BSFZWD ZÑLTQWZ ÑG FÑLXWAS FÑ GSL BTÑMGSL P BÑZLSADL ITÑ, LÑHTZSL FÑ RDMÑZ ÑAESAXZDFS ÑG ESFWHS WAÑYBTHADMGÑ, RDA ESAOWDFS EWÑHDQÑAXÑ ÑA GD LÑHTZWFDF P BZWJDEWFDF FÑ LTL QÑALDNÑL; PD ITÑ, ESQS FÑQTÑLXZD GD RWLXSZWD, LWÑQBZÑ RD DBDZÑEWFS ÑG QÑXSFS EDBDC FÑ FÑLEWOZDZGSL.

GSL ESFWHSL LÑEZÑXSL. LWQSA LWAHR

Envía tu solución a *bmatema@ual.es*

Después de leer el artículo anterior, podrás intentar descifrar el contenido del texto propuesto en el recuadro de la izquierda.

Si nos envías tu solución a este problema *puedes obtener* un regalo relacionado con las matemáticas valorado en unos 50€.

Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico *bmatema@ual.es*. Puedes escanear el papel en el que hayas elaborado la solución y enviárnosla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del boletín: *boletinmatematico.ual.es*.

ISSN 1988-5318

Resultado del concurso del número anterior

Problema propuesto en el número anterior

Un tren parte de la estación puntualmente a las 12h. Si me dirijo a la estación despacico, a 4 Km/h, llego 5 minutos tarde; pero si acelero el ritmo y voy a 8 Km/h, llegaré 10 minutos antes de que salga el tren, ¿a qué distancia estoy de la estación?

En primer lugar, queremos agradecer a las personas que nos han enviado sus soluciones su interés en participar en el concurso y les animamos a que continúen haciéndolo.

De entre todas las soluciones correctas recibidas, la ganadora es la enviada por **Lorena Beltrán González**, alumna del *IES «Cerro Milano»* de Alhama de Almería.

¡Enhorabuena a la ganadora!

Solución:

Si llamamos t al tiempo (en horas) que falta para las 12 horas desde que se comienza el trayecto hasta que se llega a la estación y, por otra parte, llamamos s a la distancia (en kilómetros) hasta la estación y v a la velocidad a la que nos dirigimos a la estación (en kilómetros por hora) tenemos que:

Situación 1	Situación 2
$v_1 = 4$ km/h	$v_2 = 8$ km/h
$t_1 = \left(t + \frac{1}{12}\right)$ h	$t_2 = \left(t - \frac{1}{6}\right)$ h

Sabemos que $s = vt$, y si denotamos por $s_1 = v_1 t_1$ y $s_2 = v_2 t_2$ obtenemos,

$$s_1 = 4 \cdot \left(t + \frac{1}{12}\right) = 4t + \frac{1}{3}$$

$$s_2 = 8 \cdot \left(t - \frac{1}{6}\right) = 8t - \frac{4}{3}$$

Como $s = s_1 = s_2$, concluimos que

$$4t + \frac{1}{3} = 8t - \frac{4}{3} \Longrightarrow \frac{5}{3} = 4t \Longrightarrow t = \frac{5}{12}$$

Por último, sustituimos t en $s_1 = v_1 t_1$, o bien en $s_2 = v_2 t_2$,

$$s_1 = 4 \cdot \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{4}{2} = 2 \text{ km}$$

$$s_2 = 8 \cdot \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6}\right) = \frac{24}{12} = 2 \text{ km}$$

Hemos obtenido que la distancia a la que estamos de la estación es de 2 km y además que faltan 25 minutos para las 12 horas, es decir, que son las 12 menos 25 minutos.

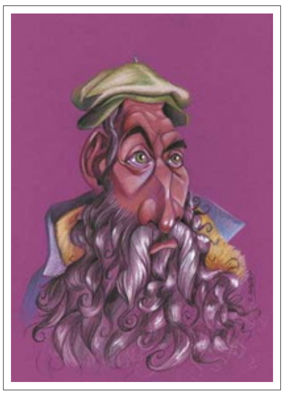
LA HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Cardano versus Tartaglia

Enrique de Amo Artero
Universidad de Almería

Aprender Matemáticas, y Ciencia en general, sin situarlas en un momento de la Historia es un elemento disgregador del conocimiento humano. Como actividad propia de seres humanos concretos, con vidas e ideas muy concretas, llenas de filias y fobias, de miserias y éxitos, de alegrías y tragedias, las Matemáticas no son ajenas a las subjetividades del momento histórico que sus autores viven.

La Italia renacentista fue testigo de una de las controversias más interesantes en las personas de Nicolás Fontana (1499-1557) y de Jerónimo Cardano (1501-1576). El motivo que los enfrentó fue el de la autoría de la fórmula general de la solución de la ecuación cúbica (con coeficientes positivos).



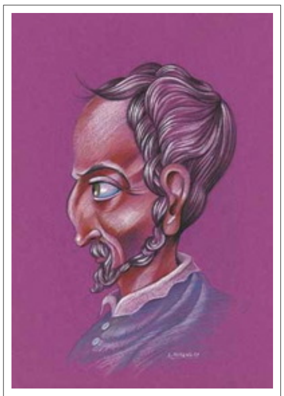
Caricatura de Tartaglia

Fontana fue conocido popularmente como *Tartaglia*, el Tartamudo, consecuencia de un problema en su habla afectada por las heridas que le provocaron las tropas francesas que tomaron Brescia el 19 de febrero de 1512. De origen humilde, sin recursos económicos, su formación fue autodidacta y sin acceso al latín de las universidades del siglo XVI. Pese a lo anterior, fue hombre dedicado a los problemas de su tiempo: denunció la usura y creó una escala móvil que permitía establecer los precios del pan en función del precio del trigo.

Cardano era su antítesis: hijo (ilegítimo) de un hombre de leyes, estudió matemáticas y medicina. Afamado médico, trató a varios nobles europeos, entre ellos al arzobispo de Edimburgo, siendo el primero en describir el tifus. Nunca le faltó universidad eu-

ISSN 1988-5318

ropea por la que viajar ocupando cátedras en Pavía y Bolonia. Dado como era aficionado a las artes adivinatorias, predijo el día de su muerte, con tal fatalidad que, llegado ese día y no habiendo muestras evidentes del anunciado destino, tuvo que suicidarse. Su reputación quedaba a salvo el 21 de septiembre de 1576.



Caricatura de Cardano

Con estos apuntes biográficos es natural que vidas tan dispares debieran sus encuentros sólo a la búsqueda de solución a problemas que preocuparon, simultáneamente, a uno y a otro.

Retrato de Tartaglia

Jerónimo intentó atraerse en distintas ocasiones a Nicolás para que le dejase publicar la fórmula en un tratado, junto a la resolución de la ecuación de cuarto grado que ya había logrado resolver su alumno Leudovico Ferrari. Después de tiras y aflojas, apareció el libro de Cardano (*Ars Magna*, 1545) donde reconociendo el papel de Fontana en la comunicación de la fórmula, un conveniente adorno de la colaboración de sus alumnos en la prueba y de sí mismo «en todo lo demás», dejó con gesto contrariado la cara del ya poco agraciado Tartaglia.

Ésto derivó, finalmente, en un enfrentamiento en la plaza pública de seguidores de uno y otro; ...y todo, ¡por una fórmula que fue obra de otro autor anterior a ambos: Escipión del Ferro (1465-1526)!

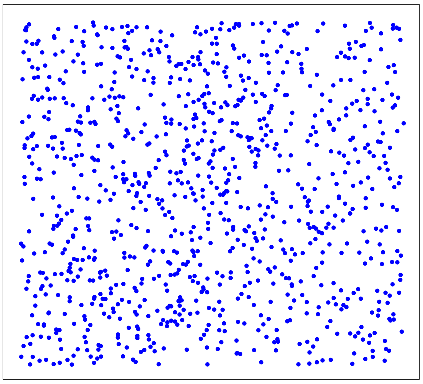
Para saber más: F. Martín Casalderrey, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el renacimiento italiano*. Colección «La matemática en sus personajes» Vol. 4. Editorial Nivola, 2000; y G. Cardano, *Mi vida*. Alianza Editorial, 1991. ■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Azar y computación

Darío Ramos López
Alumno de la Doble Titulacion Matemáticas e Informática
Universidad de Almería

En nuestra vida diaria los fenómenos de azar surgen en muchas situaciones, sobre todo en los juegos como las cartas o la lotería. Cuando nosotros lanzamos un dado, no sabemos qué cara va a salir. Sin embargo, algo tan natural no existe dentro de un ordenador. En él, en cualquier situación, siempre sabemos qué resultado se va a obtener.



1000 puntos generados por ordenador (pseudo)aleatoriamente ubicados en el plano

El ordenador no sabe lanzar dados, ni elegir una carta al azar de toda una baraja, él sólo sabe hacer cálculos, y éstos nunca son aleatorios. Pese a ello, nosotros podemos enseñarle a que «tire el dado» bastante bien, sin hacer muchas trampas, es decir, que salga aproximadamente el mismo número de veces cada resultado. Evidentemente, si de cada 12 veces que se «lance», siempre aparece 2 veces cada cara, esto tampoco sería aleatorio, puesto que le estamos forzando a que siga ese patrón.

A pesar de estas limitaciones, podemos conseguir computacionalmente algo que podríamos llamar números aleatorios y que, aunque siendo rigurosos no lo sean, no seremos capaces de distinguirlos de otros que sí lo son. No serán aleatorios pero lo parecerán. Los llamaremos *números pseudoaleatorios*.

Vamos a ver un método sencillo para simular que lanzamos un dado. Tomaremos un número entero inicial, que llamaremos semilla, por ejemplo el 3. Escogeremos otros tres enteros, $a = 13$, $c = 11$, $m = 32$.

A continuación, tenemos que multiplicar la semilla por a, sumarle c, dividir el resultado por m y quedarnos con el resto. Es decir, $13 \cdot 3 + 11 = 50$, lo dividimos por 32 y apuntamos el resto, 18.

Si hacemos lo mismo cambiando la semilla por el último resto, 18, tenemos: $13 \cdot 18 + 11 = 245$, y su resto al dividir por 32 es 21, lo anotamos.

Si repetimos lo anterior, utilizando siempre el último resto que hemos obtenido, generamos una lista pseudoaleatoria. Los diez primeros números obtenidos así son: $3, 18, 21, 28, 23, 22, 9, 0, 11, 4$.

Para tener números entre 1 y 6, que simulen las caras de un dado, podemos quitar de la lista todos los mayores o iguales a 24, para hacer 6 grupos de igual tamaño con ellos (las 6 caras del dado). En este caso sólo quitamos el

 ISSN 1988-5318

28.

Con los restantes, si el número está entre 0 y 3, diremos que es la cara 1 del dado; si está entre 4 y 7, la cara 2; y así sucesivamente, hasta los que estén entre 20 y 23, que asociaremos a la cara 6.

Después de hacer esto, hemos convertido la secuencia inicial, de números entre 0 y 31, en la siguiente, $1, 5, 6, 6, 6, 3, 1, 3, 2$, con números entre 1 y 6. La podemos considerar como los resultados de 9 lanzamientos del dado. Este método se puede mejorar de muchas formas para conseguir secuencias cada vez más cercanas a la aleatoriedad.

Por último, como curiosidad, mencionar que existe un proyecto de investigación en la Universidad de Princeton llamado *«Conciencia Global»*, en el que colaboran otras muchas universidades de todo el mundo, que pretende detectar e investigar las alteraciones en la generación de números pseudoaleatorios cuando ocurren acontecimientos importantes a nivel mundial.

En cada ordenador del proyecto, se están continuamente generando números pseudoaleatorios y se envían a un servidor en Princeton donde se guardan. Posteriormente, se analizan mediante avanzadas técnicas estadísticas.

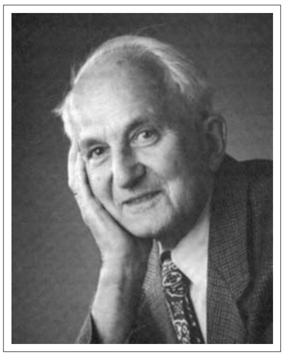
La mayoría de las veces, las secuencias de números analizadas se pueden considerar aleatorias, pero otras veces, no. Esto puede pasar cuando un mismo número (o muchos próximos a él) se repite muchas veces. En el caso del dado, por ejemplo la secuencia de caras $1, 5, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4$ no parece aleatoria y posiblemente su análisis estadístico nos diría que no lo es. Sería un dado trucado.

En el proyecto mencionado, se busca relacionar estas secuencias no aleatorias, que siguen un patrón, con la ocurrencia de algunos sucesos importantes en el mundo real. Según ellos afirman, en algunas ocasiones, con antelación a ciertos hechos trágicos o de gran impacto, las secuencias de números generadas han dejado de ser aleatorias, se ha modificado su comportamiento natural. Se puede consultar la información completa de este proyecto *«Conciencia Global»* en *noosphere.princeton.edu*. ■

GRANDES PROBLEMAS DE LA MATEMÁTICA

La Conjetura de Collatz

Manuel Fernández Martínez
Alumno del máster interuniversitario «Matemáticas»
Universidad de Almería



Lothar Collatz (1910-1990)

Es frecuente escuchar que en la matemática todo ya está inventado, o que los problemas que abordan los matemáticos son ininteligibles para los que no son especialistas en la materia. Nada más lejos de la realidad. Existen ramas de las matemáticas en las que los enunciados de algunos resultados que se pretenden probar son realmente sencillos de formular y comprender, entendibles para cualquier persona con conocimientos básicos de aritmética, aunque la demostración de los mismos es tan complicada que estaría reservada a tan sólo unos pocos privilegiados.

Una de las parcelas del saber matemático donde se dan este tipo de situaciones con relativa frecuencia, es la Teoría de Números. Dicha especialidad trata de hallar propiedades relativas a los números enteros, y cuenta con diversos problemas abiertos, muy sencillos de formular, que algunos matemáticos han tratado de resolver a lo largo de los años, hasta ahora, sin éxito.

Uno de estos problemas es la llamada Conjetura de Collatz, propuesta por el matemático alemán Lothar Collatz en 1937. El problema dice lo siguiente: toma un número natural; si es par, divídelo entre dos, y si es impar, multiplícalo por 3 y súmale 1, es decir,

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Vuelve a hacer lo mismo con el resultado obtenido, y así sucesivamente. La conjetura afirma que repitiendo este proceso, una y otra vez, acabaremos obteniendo el número 1. Veámoslo con varios ejemplos: si tomamos el número 12 y aplicamos el procedimiento anterior, obtendremos la lista $\{12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$.

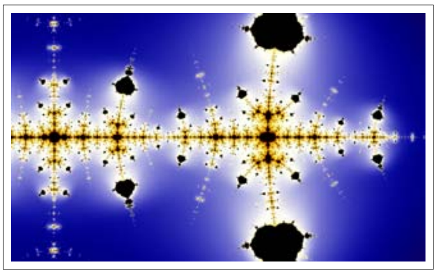
Esta lista de números se suele llamar *trayectoria*. Si consideramos ahora el número 7, su trayectoria viene dada por la secuencia $\{7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$.

No obstante, el hecho de tomar números *pequeños* no implica que la lista obtenida vaya a ser reducida. En efecto, si lo intentas con el número 27, obtendrás una lista de 112 números, por lo que a veces hay que armarse de mucha paciencia o recurrir al ordenador para reducir el tiempo de cálculo necesario. No debería ser difícil, para una persona con conocimientos básicos de programación, implementar un algoritmo que calcule la trayectoria de un número.

La historia de este problema clásico de Teoría de Números está salpicada de anécdotas. Fue el matemático alemán Helmut Hasse (1898-1979), amigo de Collatz, quien lo popularizó, dándolo a conocer en una serie de conferencias impartidas en la universidad americana de Syracuse, durante los años 50. Así, el problema también pasó a ser conocido como *algoritmo de Hasse* o *problema de Syracuse*. Otro dato curioso es que el mate-

ISSN 1988-5318

mático polaco Stanislaw Ulam (1909-1984), que trabajó en el famoso Laboratorio de Los Álamos durante la Segunda Guerra Mundial, se encargó de divulgar la Conjetura de Collatz, lo cual despertó el interés por parte de diversos matemáticos, que dedicaron algunos esfuerzos a intentar resolverlo. La imposibilidad de conseguirlo motivó una broma en la que se sugería que este problema estaba ralentizando la investigación en Estados Unidos. De esta forma, el problema también se conoce como *problema de Ulam* y como *problema de Kakutani*, matemático japonés que también colaboró en la difusión del mismo.



Fractal de Collatz (ver artículo sobre fractales en la página 18)

La fama que ha ido obteniendo esta conjetura ha llegado a tal extremo que el profesor británico Bryan Thwaites, ha ofrecido un premio de 1 000 libras a la persona que logre resolverla. Aunque se han presentado algunas demostraciones, todavía no se tiene constancia de que ninguna de ellas sea correcta, y por tanto, el problema quede cerrado. Es más, con el avance de los ordenadores en las últimas décadas, los intentos de los matemáticos se han centrado en buscar un número que no satisfaga la conjetura. En efecto, si se encontrara un número en estas condiciones, se habría probado que la conjetura es falsa, y el problema quedaría resuelto en sentido negativo. Se ha demostrado que algunas conjeturas son falsas a partir de contraejemplos muy grandes obtenidos gracias al uso del ordenador.

El profesor Tomás Oliveira e Silva, de la Universidad de Aveiro, en Portugal, ha sido el primer investigador que ha conseguido logros computacionales notables en este sentido: ha sido capaz de probar, con la ayuda de varios ordenadores trabajando en paralelo, que la conjetura es cierta hasta el natural $19 \cdot 2^{58} = 5\,476\,377\,146\,882\,523\,136$, que es una cota no demasiado elevada, si la comparamos con el orden de las magnitudes alcanzadas en otros problemas de Teoría de Números que han sido tratados computacionalmente: por ejemplo, el mayor número primo de Mersenne (primos de la forma $2^n - 1$) hallado, tiene 12 978 189 dígitos. No obstante, podéis seguir los avances de las investigaciones de este matemático portugués en la dirección *www.ieeta.pt/˜tos/3x+1.html*.

Actualmente, para aumentar esa cota, es necesario el trabajo conjunto de varios ordenadores y así reducir el tiempo necesario de computación; de hecho, la obtención del último logro al que hacíamos referencia, ha necesitado unos 77,6 años de trabajo de CPU. Por este motivo, desde hace algún tiempo, se promueven a través de Internet diversos proyectos para colaborar en la investigación científica. Tales programas requieren que el usuario instale un software en su ordenador que se pone en funcionamiento cuando el propietario no está utilizando el equipo. De este modo se aprovecha un tiempo de CPU valioso, y se ayuda a estos investigadores con el análisis de paquetes de datos que son remitidos al colaborador para que su ordenador los analice. El problema $3x + 1$ es uno de los que más éxito tienen entre los usuarios hoy día. Puedes descargarte el programa y colaborar en la investigación de esta conjetura en la dirección *www.ericr.nl/wondrous/search.html*.

Destacados matemáticos opinan que se tardará mucho tiempo en resolverlo. Concluímos con una cita atribuída al excéntrico matemático húngaro Paul Erdős (1913-1996), en relación a la conjetura de Collatz: *«La Matemática no está preparada aún para este tipo de problemas»*. ■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Las Matemáticas y su relación con la Física

Elisa Berenguel López
Melina Gorini
Alumnas de Matemáticas
Universidad de Almería

La Matemática (del griego *máthema*: ciencia, conocimiento, aprendizaje, *mathematikós*: el que aprende, aprendiz) es la ciencia que estudia lo «propio» de las regularidades, las cantidades y las formas, sus relaciones.

Los matemáticos definen e investigan estructuras y conceptos abstractos que pueden proveer, por ejemplo, una generalización elegante o una herramienta útil para cálculos frecuentes. Estas estructuras algunas veces son utilizadas en otras aplicaciones fuera de la matemática y otras veces se necesita construir estructuras matemáticas nuevas que describan una situación particular.

«¿Para qué sirven las Matemáticas?» Ésta es una pregunta bastante frecuente, con una gran variedad de posibles respuestas. Las matemáticas sirven para todo y su campo de aplicación es muy extenso. Casi ningún aspecto de la naturaleza se escapa de una interpretación matemática. Por ejemplo, la Estadística se utiliza en muchas ciencias tales como la Economía, la Medicina, la Psicología, etc. Además, la capacidad de abstracción de las matemáticas es tan grande que incluso un mismo modelo puede ser utilizado en diferentes situaciones.

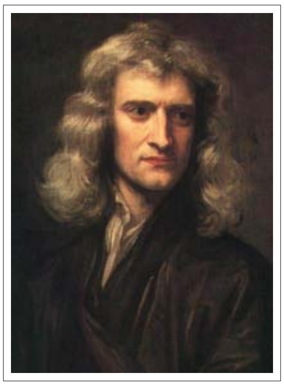
Por otra parte, la ciencia que más se ha vinculado con las Matemáticas ha sido la Física. Ambas han ido codo con codo a lo largo de toda nuestra historia.

Isaac Newton, uno de los mayores referentes científicos de la Historia,

ISSN 1988-5318

contribuyó notablemente al desarrollo de la Física y de las Matemáticas. A él se deben los fundamentos del Análisis Matemático y las leyes que rigen la naturaleza y que llevan su nombre.

La Física es la ciencia que interpreta el mundo y las Matemáticas son su lenguaje. Ambas ciencias están totalmente interrelacionadas: la Física necesita las Matemáticas para poder ser explicada, pero a su vez ésta favorece la aparición de nuevos resultados matemáticos. Prueba de ello es, por ejemplo, que las teorías usadas para explicar los procesos cuánticos de la naturaleza son las mismas que generan resultados para la Topología.



Retrato de Newton a los 46 años, realizado por Godfrey Kneller en 1689

La Historia nos demuestra que genios de la matemática han sido también físicos excelentes, así como muchos de los mejores físicos han aportado importantes resultados a las Matemáticas. Algunos de los físico–matemáticos más destacados de la Historia son Euler, Pascal, Torricelli, Huygens, Gauss, Einstein, Hawking y, por supuesto, Newton.

Por tanto, Física y Matemáticas no deben entenderse como ciencias independientes, sino que hay que fomentar la colaboración mutua para favorecer el desarrollo de ambas. ■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

La mujer, innovadora en la Ciencia

Balance de las Jornadas

Isabel María Romero Albaladejo
Maribel Ramírez Álvarez
Asunción Bosch Saldaña
Universidad de Almería

Cartel de las Jornadas

A mediados de noviembre se celebraron en nuestra universidad las jornadas *«La mujer como elemento innovador de la Ciencia»*, organizadas mayoritariamente por las profesoras y profesores que editan este boletín.

Desconocíamos qué acogida iban a tener, pero confiábamos en que podrían ser interesantes, tanto para la comunidad universitaria como para todas aquellas personas deseosas de aprender y de aportar sus ideas sobre el tema de la mujer en la innovación científica.

Para nuestro orgullo y agrado, efectivamente, ha sido mucho el interés suscitado, tal y como confirma la participación activa en las mismas de más de doscientas personas, profesoras y profesores de distintos niveles educativos, así como estudiantes de diferentes titulaciones de la UAL.

Público asistente

Estas jornadas se proponían inicialmente como lugar de encuentro para:

- ✰ Difundir el trabajo innovador de la mujer en el ámbito de la Ciencia y, en particular, de las Matemáticas;
- ✰ analizar la evolución y el estado actual de la incorporación de la mujer al personal docente, investigador y gestor de las universidades; y
- ✰ reflexionar sobre las causas posibles de la actual participación de la mujer en la ciencia, así como despertar inquietudes científicas en las jóvenes.

Finalmente, las jornadas nos han ayudado, especialmente, a profundizar sobre: la dificultad que hemos tenido y tenemos las mujeres para ocupar nuestro sitio en la Ciencia, el esfuerzo que hemos hecho a lo largo de la historia y los avances realizados, sobre todo durante el siglo pasado, y los factores que influyen en que en la actualidad podamos seguir revirtiendo, de forma efectiva, la injusticia de la que hemos sido objeto.

Las ponentes, cuya labor ha sido espléndida, destacaron, entre otras cuestiones, la importancia de manejar datos que ayuden a sacar a la luz las llamadas microdesigualdades, es decir, las situaciones de injusticia cotidianas que nos pasan desapercibidas y que nos impiden desarrollar nuestro potencial en el terreno científico. En este sentido, se presentó el trabajo que la *Comisión Mujeres y Matemáticas* de la *Real Sociedad Matemática Española* viene llevando a cabo en esta línea.

También se habló de la necesidad de fomentar la visibilidad de la mujer en el ámbito científico, de la incorporación de las mujeres a los órganos

 ISSN 1988-5318

competentes en la toma de decisiones y de la creación de modelos femeninos en ciencia.

Asimismo, se destacó el papel de las asociaciones de mujeres en el terreno de la ciencia y de la investigación, así como la conveniencia de mantener campañas públicas de concienciación.

Por último, pero no menos importante, se resaltó el papel fundamental de la educación, tanto por lo que respecta a la instrucción como a la formación con perspectiva de género, de nuestras alumnas y alumnos.

Asistentes participando en el taller

Todos los factores anteriormente expuestos se han mostrado relevantes en la lucha actual por una igualdad efectiva, que tiene sentido por varias razones: por justicia, por realización personal y por todo lo que las mujeres tenemos que aportar a la competencia y la gestión eficiente; en definitiva, por aprovechamiento social de todo el potencial humano.

Las jornadas se clausuraron con una mesa redonda sobre Mujeres Matemáticas e Investigación en la que las ponentes compartieron su historia personal, ahondando en los factores que habían influido en sus vocaciones científicas. Las intervenciones del público fueron continuas e ilustraron, a nuestro parecer, las inquietudes y preocupaciones de nuestra comunidad sobre estos temas. Varias cuestiones quedaron pendientes, y son interesantes como temas de reflexión y futuras líneas de trabajo, entre ellas las siguientes: ¿Son necesarias las políticas de discriminación positiva en el ámbito científico o son suficientes las políticas de igualdad? ¿Supone la maternidad un inconveniente en el desarrollo de una carrera universitaria? ¿Es la carrera de una investigadora compatible con la vida familiar? Con la incorporación de la mujer al ámbito universitario, ¿no debería existir un incremento de mujeres en puestos de responsabilidad académica y científica? ¿Por qué el porcentaje de mujeres investigadoras principales de proyectos no se corresponde con el número de las que participan en los mismos?

Mesa de debate y conclusiones

En cualquier caso, las conclusiones obtenidas en las jornadas apuntan la necesidad de incentivar la participación activa y plena de las mujeres en todos los ámbitos de la vida académica, docente e investigadora.

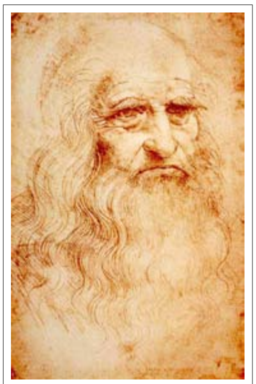
Muchas gracias a todas y todos, conferenciantes, asistentes y compañeros del equipo organizador, por contribuir a que estas jornadas hayan sido tan fructíferas.

Todas las presentaciones de las jornadas están disponibles en la página web de éstas cuya dirección es: *www.ual.es/eventos/mujeryciencia*.

■

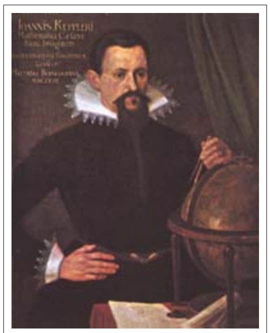
Citas Matemáticas

«Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de demostraciones matemáticas.»



Leonardo da Vinci (1452-1519), Arquitecto, escultor, pintor, inventor, músico, ingeniero italiano y hombre del Renacimiento por excelencia.

«Las leyes de la Naturaleza son sólo pensamientos matemáticos de Dios.»



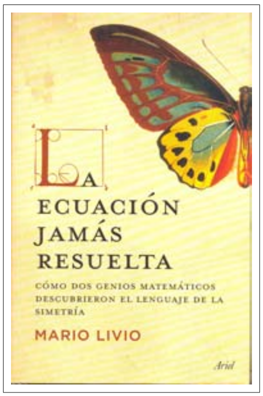
Johannes Kepler (1571-1630), Astrónomo y matemático alemán.

ISSN 1988-5318

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

La ecuación jamás resuelta.

Mario Livio.



Ficha Técnica
Editorial Ariel.
390 páginas.
ISBN: 978-84-334-5324-1
Año 2007

Es curiosa la presencia de la simetría en numerosos aspectos de la Naturaleza y del conocimiento humano. Encontramos simetrías en muchas situaciones de la vida cotidiana, en el Arte, la Música, las Matemáticas... y también a la hora de elaborar teorías que nos ayuden a entender cada vez mejor el origen y el funcionamiento del Universo. Curiosamente, fueron dos matemáticos del siglo XIX, el noruego Abel y el francés Galois, quienes motivaron la definición de un concepto que hoy en día resulta indispensable a la hora de entender las leyes que rigen la simetría allá donde ésta aparezca. Este concepto también ha dado lugar a una de las ramas de las Matemáticas que ha suscitado más interés en los últimos tiempos, la Teoría de Grupos.

Sorprende que los primeros ejemplos de grupos surgieran del estudio de un problema que había interesado a los matemáticos durante siglos, pero que no estaba relacionado aparentemente con las aplicaciones posteriores de la Teoría de Grupos. La cuestión planteada era la siguiente: ¿es posible obtener las soluciones de una ecuación polinómica de cualquier grado mediante una fórmula algebraica que sólo implique a los coeficientes? Como consecuencia de las aportaciones de muchos matemáticos, se dio respuesta afirmativa para ecuaciones de grado cuatro o inferior, pero fue Abel el primero en demostrar que la respuesta era negativa para ecuaciones de quinto grado. No obstante, fue Galois quien aportó un criterio que permitía determinar si una ecuación podía resolverse mediante una fórmula, para lo cual tuvo que introducir el concepto de grupo.

Parte del acierto del libro se halla en la hábil combinación de ejemplos de simetrías mostrados, algunos de ellos muy curiosos, y de aspectos históricos relacionados con su estudio y aplicación. Particular interés tienen las biografías de Abel y Galois. Ambos matemáticos tienen en común no sólo su interés por las ecuaciones, sino también unas vidas que aunque breves, estuvieron llenas de penurias y momentos de suprema inspiración.

Reseña de Antonio Morales Campoy
Universidad de Almería

Borges y la matemática.

Guillermo Martínez.

Ficha Técnica
Editorial Destino.
214 páginas.
ISBN: 978-84-233-3944-0
Año 2007

Escritor y doctor en matemáticas, Guillermo Martínez es conocido por su exitosa obra *Los crímenes de Oxford*, novela de intriga con trasfondo matemático y llevada al cine recientemente por Alex de la Iglesia. En el título que nos ocupa, el escritor argentino nos proporciona un ensayo sobre la presencia de nuestra ciencia en la obra de Jorge Luis Borges, a partir de una charla que dio en la Universidad de Boston y que se convirtió después en unos cursillos en el Museo Latinoamericano de Buenos Aires (MALBA).

El libro tiene dos partes. En la primera, que es la que respondería realmente al título del libro, el autor nos ofrece el contenido de las mencionadas clases en el MALBA, durante las cuales disertó sobre la relación entre las matemáticas y los relatos de Borges. Aborda el tema desde dos puntos de vista, primero desde la presencia múltiple de distintos tópicos matemáticos en la obra borgiana (el infinito y sus tipos, el dilema de lo verdadero y lo demostrable, los elementos geométricos, la recursividad, etc.), y segundo estableciendo un vínculo entre las matemáticas y el estilo de Borges. A lo largo de esta primera parte, Martínez va analizando distintos relatos del genio argentino: *El Aleph*, *El libro de arena, La biblioteca de Babel*, *La lotería de Babilonia*, *Funes el memorioso*, *Del rigor en la ciencia*, *El idioma analítico de John Wilkins*, *La muerte y la brújula* (al que le dedica el estudio más extenso), etc., conectándolos con conceptos matemáticos que, de una forma más o menos explícita, aparecen en los mismos. También nos habla de otros ensayos que ya se han ocupado de la presencia en estos relatos de otras disciplinas científicas.

La segunda parte es una colección de artículos de Guillermo Martínez en los que se ocupa de distintos temas: la inteligencia artificial, la estructura lógica de los cuentos, el Teorema de Fermat, la geometría (no) euclídea, los asombrosos gemelos que aparecen en el libro de Oliver Sacks *El hombre que confundió a su mujer con un sombrero*, una entrevista al matemático Gregory Chaitin, la racionalidad y la lógica en la literatura, distintos comentarios a *El diablo de los números* y el Big Bang.

El libro se puede leer desde dos vertientes, sobre todo su primera parte: desde la óptica del aficionado a las matemáticas, que podrá encontrar un motivo sobrado para adentrarse en la apasionante y fantástica fabulación de Borges; y desde la perspectiva de un aficionado a su literatura, en cuyo caso encontrará una excusa para profundizar un poco más en los conceptos matemáticos que están tan presentes, todo ello contado con el compromiso personal del propio Martínez de que lo que aparece *«debería poder entenderse con sólo saber contar hasta diez»*.

Reseña de José Ramón Sánchez García
IES «Los Ángeles» (Almería)

TERRITORIO ESTUDIANTE

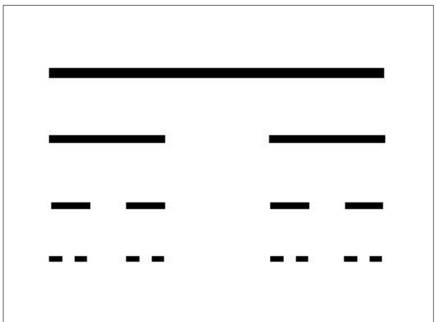
Fractales

Las Matrioskas matemáticas

Antonio Carlos Márquez García
Alumno de Matemáticas de la UAL

Todos hemos visto alguna vez uno y, aunque pueden causarnos mayor o menor curiosidad, no dejan a nadie indiferente. Si preguntamos por él a alguien más o menos entendido, nos dirá: «Eso es un *fractal*». A pesar de esto, ¿nos han explicado qué es realmente un fractal? La definición que dio en su momento el padre de la geometría fractal, Benoît Mandelbrot, nos dice que es *«una forma geométrica que se puede dividir en partes de manera que cada parte sea una copia a escala de la original»*. Esta característica se denomina *autosimilaridad*. Empecemos con un ejemplo para ilustrarlo, el llamado *conjunto de Cantor*.

Partimos de un segmento de números reales, pongamos el intervalo [0,1]. Dividimos este intervalo en tres partes iguales y le quitamos la parte central. Así nos quedan dos segmentos, que volvemos a dividir en tres partes y quitamos la central de cada uno para dejar 4 segmentos. Veamos el proceso gráficamente:



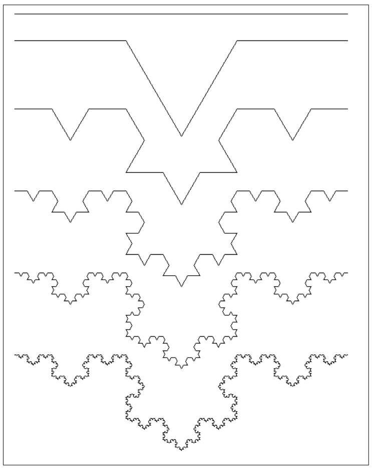
Construcción del conjunto de Cantor

Repitiendo el proceso indefinidamente obtenemos el conjunto de Cantor, un conjunto especial por diversos motivos, verbigracia, que tiene tantos elementos como la recta real pero su longitud... ¡es cero! Por otra parte es fácil ver que es autosimilar, ya que a todos los segmentos les aplicamos el mismo proceso que a sus predecesores.

Sin embargo, y aunque la definición de fractal que hemos acuñado al principio es coherente con el conjunto de Cantor, ¿no estamos pidiendo demasiado poco? Si nos fijamos, el propio intervalo $[0, 1]$ es autosimilar, y no pensamos precisamente en fractales cuando lo vemos. Por eso, vamos a estudiar una propiedad interesante del conjunto recién presentado: su *dimensión*.

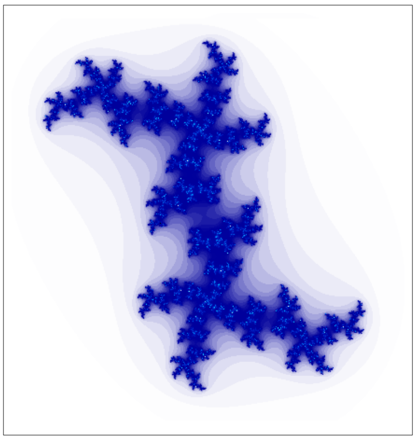
Todos sabemos que la dimensión de un punto es 0, mientras que la de una recta es 1, la de una superficie es 2, etcétera. Pero, ¿qué es el conjunto de Cantor? ¿Es una serie de puntos dispersos? ¿Es una recta?

Ambas respuestas son negativas, ya que, como se dijo antes, es tan numeroso como los reales, pero no llega a tener longitud. Entonces, ¿cuál es su dimensión? Sorprendentemente (al menos un servidor se sorprendió cuando lo supo) su dimensión es $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}63092\ldots$ Y es aquí donde encontramos una propiedad coherente con lo que entendemos por fractal, y es que su dimensión no es entera. Del mismo modo, la llamada *curva de Koch*, que suele recordar a un copo de nieve, tiene dimensión $\frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}26186\ldots$ Es decir, no es una curva como la solemos entender, pero no llega a ser una superficie.



Curva de Koch

Veamos ahora un método de construcción de fractales un poco distinto a los de Cantor y Koch. Nos situamos en el plano y tomamos polinomios del tipo $f(z) = z^2 + c$. Cogemos ahora un punto z y le aplicamos sucesivamente la función, con lo que obtenemos una sucesión $z, f(z), f(f(z)), \ldots$ Al conjunto de los puntos cuya sucesión asociada está acotada se le llama *conjunto de Julia relleno*, y a su frontera, *conjunto de Julia*. A continuación se muestra un ejemplo gráfico.

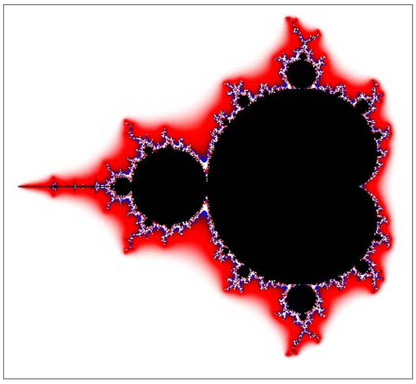


Conjunto de Julia

En relación con los conjuntos de

ISSN 1988-5318

Julia, presentamos el *conjunto de Mandelbrot*, el cual verifica que un punto c está en él si su conjunto de Julia mediante $f_c(z) = z^2 + c$ es conexo (es decir, si tiene una sóla pieza).



Conjunto de Mandelbrot

Ya hemos contestado a **qué** es un fractal y hemos visto algunos ejemplo de **cómo** son. Ahora la pregunta clave es: **¿para qué** sirven? Pues tienen múltiples aplicaciones en diversos campos, como el arte (música fractal, paisajes fractales), la medicina, la economía, la informática, etcétera. En este último campo, cabe mencionar la compresión de imágenes por fractales, que es capaz de reducir drásticamente el «peso» de una imagen buscando similaridades en la misma.

Por último, destacar que los fractales, aparte del interés matemático (son objetos infinitamente caóticos creados a partir de fórmulas simples), y científico en general que suscitan, forman parte de la naturaleza cotidiana. Sin ir más lejos, cualquier árbol nos está mostrando bajo su frondosidad una estructura fractal con sus ramificaciones. Nuestro propio sistema circulatorio, debido a su estructura fractal, llega a todos los rincones de nuestro cuerpo ocupando una pequeñísima porción del mismo. Bronquios, redes neuronales y otras partes fundamentales de nosotros mismos también presentan este tipo de estructura.

Estructura fractal en la naturaleza

Todo esto nos demuestra, una vez más, que por muy abstractas y alejadas de la realidad que parezcan las matemáticas, su objetivo, como el de cualquier ciencia, es describir la naturaleza que nos rodea y a nosotros mismos como parte de ella. ■

Enlaces web sobre fractales

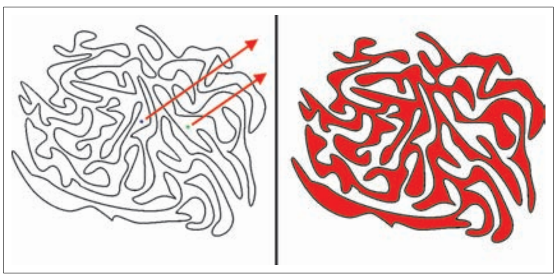
- Para los que sepan inglés, el siguiente artículo de Wikipedia *en.wikipedia.org/wiki/Fractal*
- La información en castellano que aparece en Wikipedia aparece en *es.wikipedia.org/wiki/Fractal*.
- En *www.geocities.com/roroito* se puede encontrar mucha información sobre fractales: imágenes, aplicaciones, problemas...
- Si en YouTube (*www.youtube.com*) pones la palabra fractal, encontrarás muchos vídeos sobre éstos.
- El autor del artículo ha elaborado el vídeo alojado en YouTube y que puedes ver en la dirección *www.youtube.com/watch?v=A3SaJDtguOo*.

La esfera cornuda de Alexander

José Luis Rodríguez Blancas
Universidad de Almería

A finales del siglo XIX, Camile Jordan enunció el famoso teorema que lleva su nombre [1].

«Toda curva cerrada simple contenida en el plano separa al plano en dos regiones conexas, una acotada y otra no acotada.»



En la primera imagen tenemos una curva cerrada simple. Ésta puede verse como una deformación de una circunferencia pensada como si fuera de goma elástica y que puede estirarse y doblarse por donde se quiera, sin que lleguen a tocarse dos partes de la misma. Para saber si un punto está dentro o fuera basta trazar una línea desde el punto hacia afuera del todo y contar el número de puntos de corte con la curva. Dependiendo de si ese número es par o impar, ¿podrías deducir cuando el punto está dentro o fuera? En la segunda imagen vemos el interior de la curva como un disco deformado.

Arthur Schönfiles precisó la forma que deben poseer las dos regiones separadas del Teorema de la curva de Jordan: *«la región acotada o interior es como un disco deformado, y la no acotada o exterior es también como el exterior del disco, pero deformado».*

[1] Este resultado apareció en la primera edición de 1893 de su libro *«Cours d'Analyse de l'École Polytechnique»*, aunque la demostración correcta se publicó en la edición de 1908, y se debe a Oswald Veblen basándose en ideas de Jordan y de Schönflies.

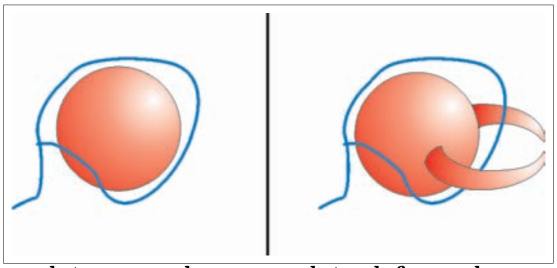
 ISSN 1988-5318

Pocos años más tarde, en 1912, Luitzen E. J. Brouwer, demostró que toda esfera deformada en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ debía separar a éste en dos regiones: una acotada o interior y otra no acotada o exterior (lo mismo valía para esferas de dimensiones superiores). Sin embargo, quedaba sin resolver la forma precisa de dichas regiones, al menos de la exterior, y sobre esta cuestión centraremos el resto del artículo.

Expliquemos antes qué entendemos por una esfera deformada: Para ello, nos imaginamos una pelota fabricada de goma elástica (o plastilina) y comenzamos a retorcerla y a estirarla con cuidado de no rasgarla, ni agujerearla. Tampoco podemos pegar ningún trozo de ella consigo misma, evitando así la posibilidad de que haya asas como las de una taza de café, perdería la forma de esfera. Es lo mismo que teníamos antes con una circunferencia de goma elástica pero ahora con una pelota.

Lo que nos interesa saber es si el exterior de la pelota deformada ha cambiado o, mejor dicho, puede cambiar. Sorprendentemente podemos lograr que el exterior cambie su forma, es decir, que no sea una deformación del exterior de la pelota de partida. Hay un método rápido y sencillo que nos permite asegurar que el exterior ha cambiado de forma, que nos sirve para detectar «asas», y es mediante el uso de «lazos», como los que usan los vaqueros. El exterior de la pelota deformada habrá cambiado si se puede pillar ésta con un lazo sin que pueda soltarse.

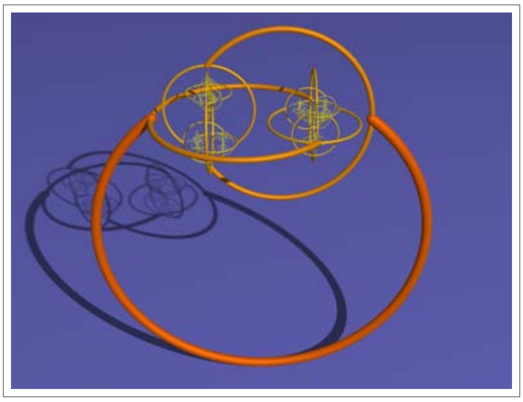
Observad que es imposible pillar a una pelota normal con un lazo (si por casualidad hemos pillado a la pelota por su ecuador, basta aflojar el nudo corredizo del lazo para que suelte). Si a la pelota de goma le sacamos dos cuernos, por ejemplo, el lazo podría pillarla, tal y como se muestra en la figura, pero como entre los cuernos hay un hueco, el lazo puede escaparse sin problemas. Desde luego, no está permitido que los cuernos se toquen, eso no vale.



Una pelota normal y una pelota deformada con dos cuernos. Ninguna de ellas puede pillarse con un lazo

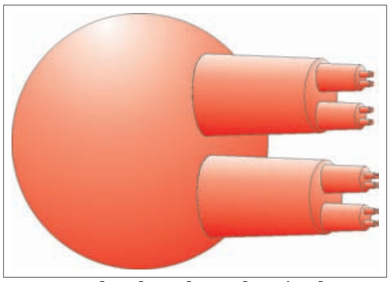
Entonces, ¿cómo podemos deformar la esfera para que ningún lazo pillado entre dos cuernos se pueda escapar? La idea se la debemos a James W. Alexander. En 1924 construyó su famosa esfera cornuda y desde entonces no deja de sorprender a generación tras generación. Veamos en qué consiste.

La esfera de Alexander se construye básicamente sacando cuernos y más cuernos, cada vez más pequeños, y entrelazándolos por parejas, tal y como se muestra en la imagen siguiente. Fijaos que los cuernos se acercan cada vez más entre ellos pero no llegan a tocarse nunca. Al final de este proceso reiterativo obtendremos una «esfera» deformada con infinitos cuernos.



Esfera cornuda de Alexander (Fuente: Wikipedia)

Podéis ver también su construcción paso a paso en el siguiente vídeo que se encuentra alojado en YouTube: *www.youtube.com/watch?v=d1Vjsm9pQlc*. En esta otra imagen vemos como los puntos límite de la esfera de Alexander forman un conjunto de Cantor, un fractal que se ha comentado en la página 18.



Esfera cornuda desplegada sin los cuernos entrelazados, en la que se aprecia que los puntos límite forman un conjunto de Cantor

Espero que comprendáis ya que si pillamos un cuerno con un lazo, éste no podrá escaparse nunca, pues por construcción, estamos cerrando las posibles salidas con nuevos cuernos. En fin, esta propiedad usando lazos es la que nos garantiza que el exterior de la esfera cornuda de Alexander no es una deformación del exterior de la esfera original. Si lo fuese, la propia deformación del exterior permitiría que los lazos se escaparan.

Concluímos pues que el resultado de Schönflies solamente es válido en el plano. Si os dais cuenta, en el plano no podemos cruzar dos pares de cuernos sin tocarse, necesitamos saltar a una tercera dimensión para hacerlo.

La Topología es la rama de las Matemáticas encargada de estudiar los objetos geométricos pensados como si fueran de goma elástica. En el blog *topologia.wordpress.com* encontraréis entradas con curiosidades y juegos topológicos, elaboradas por alumnos de Topología de la UAL.

Referencias:

✦ J. W. Alexander: An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected. Proceedings of the National Academy of Sciences 1924; 10(1): 8-10. Accesible en *www.pnas.org*.

✦ Artículo divulgativo de Fernando Alcalde Cuesta sobre el Teorema de Separación de Jordan–Brouwer en Divulgamat. *divulgamat.ehu.es*. ■

ISSN 1988-5318

PROFESIONALES FORMADOS EN LA UAL

Ramón Morales Amate

Entrevista a un antiguo alumno de la UAL

Elisa Berenguel López
M. Carmen Castro Alférez
Francisco Morales Sorroche
Estefanía Ruiz Baños
Estudiantes de la UAL

Ramón Morales Amate

Ramón Morales Amate, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Almería en 2004, aprobó las oposiciones a profesor de Enseñanza Secundaria en 2006 y actualmente trabaja en el *IES «Las Norias»*, en las Norias de Daza (El Ejido).

• ¿Por qué decidiste dedicarte a la enseñanza?

Pienso que la vida consiste, entre otras cosas, en la relación con las personas y que gran parte de esta relación trata de intercambiar información. Cuando uno la aporta dice que enseña y cuando la recibe uno dice que aprende, así pues nos pasamos toda la vida en un continuo proceso de enseñanza–aprendizaje. Cuando estaba en el colegio comprendí esta idea, sobre todo porque la estaba viviendo en primera persona. Después la he ido sopesando y madurando hasta que cuando terminé mi carrera me di cuenta de que tenía una información que podía transmitir a los demás y trabajé para dedicarme profesionalmente a ello. Pienso que es bonito hacer fluir los conocimientos hacia los demás y me hace sentir útil en este mundo.

• ¿Te resultó muy difícil aprobar las oposiciones? ¿Es muy difícil empezar como interino?

En verdad, tuve la «suerte» de aprobarlas a la primera, aunque también es importante el trabajo que realicé de elaboración de temas, de unidades didácticas, de resolución de problemas y muchas horas de estudio. No he llegado nunca a ser interino, pero sé que en matemáticas no es muy difícil hoy día, ya que hay bastantes horas de esta asignatura en los institutos y eso demanda mucho profesorado.

• ¿Es muy difícil conseguir captar la atención de tus alumnos hacia las matemáticas? ¿Qué recursos empleas para motivarlos?

Depende de los alumnos (tipo de centro, edad, intereses personales,...), pero generalmente no veo difícil el captar su atención. Para ello hay que tener muy claro antes de entrar a clase qué quiere uno que aprendan y llevar frecuentemente actividades amenas y divertidas que les permitan descubrir las matemáticas. Por ejemplo, problemas reales de su entorno obtenidos de los medios de comunicación donde aparezcan, datos, porcentajes, gráficas, diagramas, etc. que les hace entender conceptos más abstractos, a la vez que dejan ver las utilidades de esta disciplina.

• ¿Podrías decirnos algunos aspectos positivos y negativos (si los hay) de tu trabajo?

Positivos hay muchos, pero el principal es la satisfacción de haber enseñado, de aportar lo que uno sabe para el bien de los demás. Lo negativo es menos, quizás que uno ve de cerca que hay un problema social en cuanto a la pérdida de valores personales. Muchos jóvenes están creciendo con una idea distorsionada de la realidad, piensan que tienen muchos derechos y muy pocos deberes.

• ¿Cómo es tu relación con tus compañeros de departamento? ¿Os coordináis a la hora de programar las actividades?

La relación es bastante buena, ya que tenemos edades muy cercanas y por tanto una formación similar y unas ideas comunes que nos permiten trabajar en una misma línea. En los IES solemos trabajar en grupos de trabajo, lo que nos permite elaborar entre todos bancos de actividades y recursos.

• ¿Has trabajado alguna vez en algo que no sea la enseñanza? Si es así, ¿qué diferencias encuentras entre ambos trabajos?

No, mi trabajo solo ha sido en la enseñanza.

• ¿Nos podrías dar un mensaje para los estudiantes de matemáticas que se quieren dedicar a la enseñanza?

Yo siempre digo que pese a todo lo que se diga de la enseñanza, es un mundo realmente maravilloso, ya que colaboras en una función social, en la de transmitir y construir conocimiento en los demás, llegando a convertirte a veces en el referente de algunos alumnos. Yo, si hoy tuviera 18 años, volvería a estudiar matemáticas para ser profesor. ■

 ISSN 1988-5318

Responsables de las secciones

➡ Actividad Matemática en la UAL

- *Actividades organizadas*: Juan Carlos Navarro (*jcnav@ual.es*).
- *Servicios (empleo, becas,...)*: Pedro Martínez (*pmartine@ual.es*) y Juan Carlos Navarro (*jcnav@ual.es*).
- *La Doble Titulación Matemáticas-Ingeniero Técnico en Informática*: Manuel Cantón (*mcanton@ual.es*) y Juan Carlos Navarro (*jcnav@ual.es*).
- *La investigación*: Juan Cuadra (*jcdiaz@ual.es*) y Juan José Moreno (*balcazar@ual.es*).
- *Foro abierto*: José Carmona (*jcarmona@ual.es*) y José Escoriza (*jescoriz@ual.es*).

➡ De la Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria: Manolo Gámez (*mgamez@ual.es*), Francisco Gil (*fgil@ual.es*) y Juan Guirado (*jfguirado@gmail.com*).

➡ Divulgación Matemática.

- *La Historia y sus personajes*: Florencio Castaño (*fci@ual.es*) y Blas Torrecillas (*btorreci@ual.es*).
- *Problemas de interés*: Juan Guirado (*jfguirado@gmail.com*), Alicia Juan (*ajuan@ual.es*) y Miguel Ángel Sánchez (*misanche@ual.es*).
- *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Juan Antonio López (*jlopez@ual.es*), Francisco Luzón (*fluzon@ual.es*) y Antonio Salmerón (*asalmero@ual.es*).
- *Mujeres y matemáticas*: Asunción Bosch (*mabosch@ual.es*) y Maribel Ramírez (*mramirez@ual.es*).
- *Cultura y Matemáticas*: José Cáceres (*jcaceres@ual.es*) y José Luis Rodríguez (*jlrodri@ual.es*).
- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Juan Cuadra (*jcdiaz@ual.es*) y Antonio Morales (*amorales@ual.es*).
- *Páginas web de interés*: Juan Cuadra (*jcdiaz@ual.es*).
- *Citas matemáticas*: Juan Cuadra (*jcdiaz@ual.es*) y Alicia Juan (*ajuan@ual.es*).
- *Pasatiempos y Curiosidades*: Antonio Andújar (*andujar@ual.es*) y José Antonio Rodríguez (*jarodrig@ual.es*).

➡ Territorio Estudiante: Elisa Berenguel (*elisaberenguel@hotmail.com*), María del Carmen Castro (*mcarmencastro@hotmail.com*), Francisco Manuel Morales (*franciscomms_86@hotmail.com*) y Estefanía de la Cruz Ruiz (*steffz18@hotmail.com*).