

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA
MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Medidas de probabilidad en estructuras topológicas



Junio 2016

Autor:
José Fulgencio Gálvez Rodríguez
Director:
Enrique de Amo Artero
Codirector:
Miguel Ángel Sánchez Granero

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es generar una medida de probabilidad a partir de una estructura fractal. Dado que buscamos definir una medida, se tendrán en cuenta los métodos de construcción de medidas exteriores: Método I y Método II.

En primer lugar, en el Capítulo 3 se estudian aplicaciones que conservan la estructura fractal (isomorfismos fractales) y, en base a ellas, se define el concepto de completación de una estructura fractal. Además, se prueba que ésta siempre existe y es única salvo isomorfismos fractales. Mostramos, por ello, cómo construir la bicompletación de (X, d) donde d es la casi-métrica no arquimediana inducida por una estructura fractal.

En un cuarto capítulo se desarrolla la construcción de una medida de probabilidad a partir de una estructura fractal. Para llevar a cabo dicha construcción seguiremos el proceso que se sintetiza a continuación y que se desarrolla en tres etapas. En un primer paso, consideramos una familia de bolas del límite inverso sobre la que definimos una premedida ω hasta llegar a definir una primera medida, μ , en \tilde{X} (la bicompletación de X). Una vez que la hemos definido, construimos una nueva medida a partir de los elementos de una estructura fractal teselación. Finalmente, para poner fin a las construcciones teóricas, exploramos condiciones sobre ω de forma que la restricción de μ a X sea una medida de probabilidad. Dicho capítulo culmina con la presentación de algunos ejemplos de construcción de medidas a partir de estructuras fractales concretas y diversas premedidas.

La construcción detallada en el Capítulo 4 sugiere la definición de una función de distribución. Con dicho objetivo, en el Capítulo 5 definiremos un orden sobre los elementos de \tilde{X} , orden que junto con la medida definida en el capítulo anterior, nos proporcionará una función de distribución definida sobre la bi-

completación de X .

Por otra parte, tratamos de mostrar algunas aplicaciones que pueden llevarse a cabo a partir de las construcciones anteriores (Capítulo 5). Una primera aplicación consiste en generar una muestra aleatoria de una determinada distribución de probabilidad a partir de una medida de probabilidad, μ , definida sobre una estructura fractal Γ . Se trata de un proceso iterativo que, basado en un número aleatorio entre 0 y 1 asigna un valor de la función de distribución de probabilidad a un punto que se obtiene como intersección de una sucesión de conjuntos en la estructura fractal. Cabe destacar que dicho método resulta de gran utilidad ya que nos permite generar muestras de una determinada distribución de probabilidad en el caso n -dimensional, a diferencia del método de la transformada inversa que solo nos ofrece dicha posibilidad en el caso de una dimensión.

La segunda aplicación presentada consiste en un nuevo método de estimación de parámetros de una determinada distribución a partir de una estructura fractal, la cual consideraremos finita en un primer caso y uniforme en una segunda prueba, método que posteriormente compararemos frente al método de máxima verosimilitud. Para poner fin a dicho capítulo se comprueba la bondad de cada estimación supuesto que la misma esta sometida a datos totalmente ajenos a la muestra considerada para abordar el estudio.

Índice general

Resumen	3
1. Introducción	7
2. Preliminares	11
2.1. Teoría de la medida	11
2.2. Estadística	15
2.3. Topología general	16
2.4. Estructuras fractales	17
3. Completación de estructura fractal	19
3.1. Funciones fractal-preserving	24
3.2. Construcción de la completación	26
3.3. La bicompletación	32
3.4. Otras propiedades de la bicompletación	32
3.5. Unicidad de la bicompletación	35
4. Generación de medida de probabilidad	39
4.1. Definición de medida en \tilde{X} : primer método	40
4.2. Definición de medida en \tilde{X} : segundo método	44
4.3. Definición de una medida en X	46
4.4. Ejemplos	50
4.4.1. Obtención de una medida a partir de una variable alea- toria conocida	50
4.4.2. Obtención de una medida a partir de una definición uniforme de ω	52
5. Función de distribución	57
5.1. Definición de la función de distribución	57
5.2. Generación de muestras	64

6. Aplicaciones	67
6.1. Generación de muestras	67
6.2. Un nuevo método de estimación	73
6.2.1. Estimación a partir de una definición de ω basada en una variable aleatoria conocida	76
6.2.2. Estimación a partir de una definición uniforme de ω . .	82
6.3. La nueva estimación frente a ruidos	85
7. Conclusiones	91
Bibliografía	94

Capítulo 1

Introducción

El análisis y estudio de los fractales se ha desarrollado cada vez más en los últimos años debido a la amplia gama de aplicaciones en diferentes áreas donde se han detectado los mismos.

Por su parte, las estructuras fractales fueron introducidas con el objetivo de estudiar la estructura de conjuntos autosimilares y fractales en general. Sin embargo, la estructura fractal introducida, además del interés en el estudio de fractales, resultó una estructura de gran interés para el estudio de propiedades topológicas y en particular se mostró que está muy relacionada con las estructuras propias de la Topología Asimétrica, en particular con las casi métricas no arquimedianas (véase [1]).

Un uso interesante de dichas estructuras es un método recursivo para construir aplicaciones continuas, que puede ser de utilidad para obtener curvas de llenado de espacio u otras transformaciones continuas. Véase [6] para conocer algunas de sus aplicaciones. Pero, ¿qué ocurre si esta curva está relacionada con una distribución de probabilidad? En este trabajo trataremos de definir una medida a partir de una distribución de masa, idea que subyace en los dos ejemplos que se detallan a continuación.

Un primer ejemplo puede verse en [5], donde se presenta un método conocido para construir la distribución de masas en un subconjunto de \mathbb{R}^n . Dicho método consiste en una subdivisión repetitiva de una masa entre diferentes partes de un conjunto de Borel acotado E . Sea ε_0 el conjunto inicial y sea, para cada $k = 1, 2, \dots$ ε_k una colección de conjuntos de Borel disjuntos de E de manera que cada conjunto U de ε_k está contenido en uno de los conjuntos de ε_{k-1} y contiene un número finito de conjuntos en ε_{k+1} . Supongamos que el máximo diámetro de los conjuntos de ε_k tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$. Definiremos una distribución de masas en E a través de una subdivisión sucesiva como se muestra en la Figura 1.1. Pongamos $\mu(E)$ con $0 < \mu(E) < \infty$, y dividamos dicha masa entre los conjuntos U_1, \dots, U_m en ε_1 definiendo $\mu(U_i)$

de manera que $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(U)$. De manera análoga, asignaremos masas a los conjuntos de ε_2 de manera que si U_1, \dots, U_m son los conjuntos de ε_2 contenidos en un conjunto U de ε_1 , entonces $\sum_{i=1}^m \mu(U_i) = \mu(U)$. Vemos pues, que, en general asignamos masas de manera que

$$\sum_i \mu(U_i) = \mu(U)$$

para cada conjunto U de ε_k , donde $\{U_i\}$ son los conjuntos disjuntos de ε_{k+1} contenidos en U . Para cada k , denotemos por E_k a la unión de los conjun-

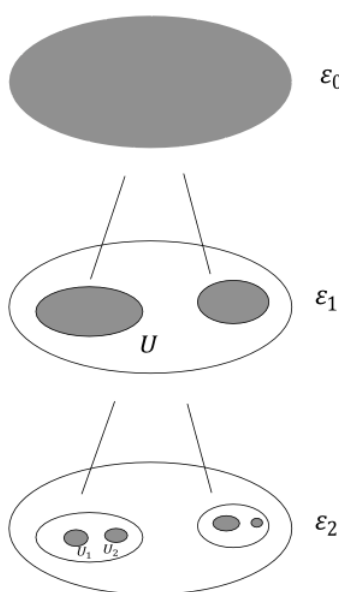


Figura 1.1: Distribución de masa

tos de ε_k , y pongamos $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E_k) = 0$. Denotemos por ε a la colección de conjuntos que pertenecen a ε_k para algún k junto con los conjuntos $\mathbb{R}^n \setminus E_k$. El procedimiento detallado previamente define la masa $\mu(A)$ de cada conjunto $A \in \varepsilon$, y parece razonable que, construyendo conjuntos a partir de los conjuntos de ε , sea suficiente para distribuir la masa μ sobre E con el objetivo de determinar $\mu(A)$ para cualquier conjunto de Borel A . La proposición que se presenta a continuación nos ofrece una medida construida a partir del proceso seguido previamente.

Proposición 1.0.1. ([5, Prop. 1.7]) *Supongamos μ definida en una colección de conjuntos ε como previamente. Entonces la definición de μ puede*

extenderse a todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n de manera que μ es una medida exterior. Además, será una medida en la σ -álgebra de Borel. El valor de $\mu(A)$ queda únicamente determinado si A es un conjunto de Borel. El soporte de μ está contenido en $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{E_k}$. Si A es cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces $\mu(A) = \inf\{\sum_i \mu(U_i) : A \subset \bigcup_i U_i \text{ y } U_i \in \varepsilon\}$.

Como segundo ejemplo en el cual tiene lugar una distribución de masa cabe destacar la definición de cascadas multiplicativas las cuales se construyen siguiendo un proceso similar al llevado a cabo anteriormente. Véase, para conocer cómo se definen las mismas, [14]. Una cascada multiplicativa es una distribución fractal o multifractal de puntos a través de un proceso aleatorio de carácter iterativo y multiplicativo. Los gráficos de la Figura 1.2 muestran tres ejemplos de cascadas multiplicativas multifractales. Para obtener dicha distribución de puntos hay que seguir una serie de pasos. En primer lugar, debemos crear una maya de puntos que será nuestro campo de densidad de probabilidad subyacente. A continuación vamos a poblar esta maya con puntos colocados aleatoriamente, partiendo de que la probabilidad de que puedan colocarse los puntos es proporcional a la probabilidad de la celda sobre la que se sitúen.

El fractal se construye como sigue: en primer lugar, dividimos el espacio de partida en partes iguales. En los ejemplos que se muestran de manera gráfica, como puede apreciarse, lo dividimos en cuatro partes. A continuación asignamos una probabilidad del conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ a cada subdivisión (el orden respectivo para asignarlas en los gráficos mostrados es: parte inferior derecha, parte inferior izquierda, parte superior derecha y parte superior izquierda), siendo $p_i \in [0, 1]$. Cada subespacio se divide de nuevo y se le asigna una probabilidad al azar del mismo conjunto y esto se repite sucesivamente hasta el nivel n -ésimo. Por tanto, la probabilidad de que cierta celda en el nivel n -ésimo se encuentre ocupada por puntos es el producto de probabilidades p_i asignadas a las celdas que, estando en niveles desde el $n - 1$ -ésimo hasta el nivel 1, contienen al subespacio correspondiente a la celda seleccionada en el nivel n -ésimo por la probabilidad de la celda escogida. Con objeto de conocer algún otro ejemplo de cascada multiplicativa véase [2].

En este trabajo obtendremos resultados similares en un contexto más general. Con dicho propósito vamos a usar la estructura fractal inducida en un dominio concreto, Γ_n , para asignar una probabilidad a cada conjunto medible asociado a los posibles resultados de un experimento aleatorio o procedimiento de inferencia estadística. El eje central en torno al cual se desarrolla este trabajo es la generación de una probabilidad a partir de ciertas estructuras conocidas como estructuras fractales, en un dominio concreto de

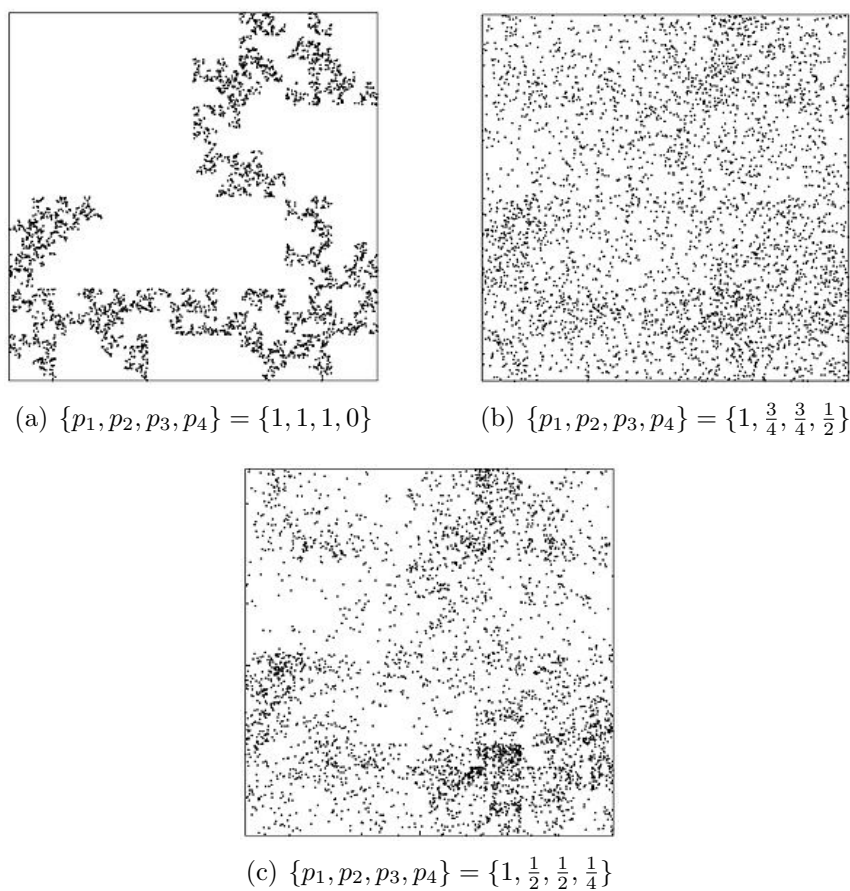


Figura 1.2: Cascadas multiplicativas multifractales

manera que se asigna una probabilidad a cada uno de los subconjuntos en los que quedará dividida dicha estructura. Buscaremos, además, extender dicha definición a todo el espacio en cuestión.

Una vez llevada a cabo la construcción de cara a la generación de una probabilidad, esta nos permitirá realizar diferentes estudios estadísticos, entre ellos: métodos de estimación de parámetros de una distribución, métodos para generar muestras asociadas a una distribución de probabilidad y comparaciones entre un método de estimación ya conocido y uno nuevo que diseñaremos en la subsección 6.2. En definitiva, nuestro objetivo será determinar la distribución de probabilidad del mismo a partir de aproximaciones realizadas mediante estructuras fractales.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan una serie de conceptos y resultados que serán de utilidad de cara a la elaboración de resultados en las próximas sesiones. A continuación se hace una distinción de los mismos en subsecciones teniendo en cuenta el ámbito en el que se enmarcan.

2.1. Teoría de la medida

Las cuatro referencias principales de los resultados y definiciones presentados a continuación son [9], [10], [12] y [15].

Proposición 2.1.1. *Las sucesiones monótonas son convergentes.*

$$A_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

donde $A_n \uparrow$ denota una sucesión monótona no decreciente, es decir, $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo n ; mientras que $A_n \downarrow$ denota una sucesión monótona no creciente, es decir, $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo n .

En cuanto a estructuras de clases de conjuntos vamos a destacar las que aparecen a continuación. Sea X un conjunto

Definición 2.1.2. *Supongamos que \mathcal{R} es una colección no vacía de subconjuntos de X . Entonces \mathcal{R} es un anillo si es cerrada para la intersección finita y la diferencia simétrica.*

Definición 2.1.3. *Supongamos que \mathcal{Q} es una colección no vacía de conjuntos de X . Entonces \mathcal{Q} es un álgebra si es un anillo tal que $X \in \mathcal{Q}$.*

No obstante, consideraremos la siguiente caracterización más operativa que las anteriores:

Caracterización 2.1.4. *Supongamos que \mathcal{Q} es una colección no vacía de conjuntos de X . Entonces \mathcal{Q} es un álgebra si, y solo si es cerrada para la complementación, para la unión finita y $X \in \mathcal{Q}$.*

Ahora introduciremos los conceptos y resultados relacionados con las medidas y su construcción:

Definición 2.1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$ es la σ -álgebra de Borel del espacio X , esto es, es la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de X .*

Definición 2.1.6. *Una función de conjunto φ sobre un σ -álgebra \mathcal{A} es σ -aditiva si para cualquier clase numerable y disjunta de conjuntos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, es*

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

La definición de medida es la siguiente:

Definición 2.1.7. *Dado un espacio medible (Ω, \mathcal{A}) , se llama medida a toda función de conjunto μ σ -aditiva y no negativa sobre \mathcal{A} . El sistema $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se conoce como espacio de medida.*

y sus propiedades son:

Proposición 2.1.8 (Propiedades de una medida). *Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, se verifican:*

1. *Monotonía: Si $A \subset B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Es subaditiva: $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$, es $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.*
3. *Es continua: Si $A_n \rightarrow A$, entonces $\lim_n \mu(A_n) = \mu(A)$.*
4. *La suma de medidas sobre un mismo σ -álgebra es una medida; y el producto de una medida por un escalar positivo, es una medida.*
5. *La restricción de una medida a una sub- σ -álgebra de \mathcal{A} , es una medida.*

La definición de medida exterior es la que sigue.

Definición 2.1.9. ([10]) *Sea X un conjunto. Una medida exterior en X es una función $\overline{\mathcal{M}}$ definida en todos los subconjuntos de X , que toma valores en los reales no negativos, $[0, \infty]$ que es monótona, subaditiva y verifica que $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$.*

Y la de medida exterior métrica es:

Definición 2.1.10. ([10]) Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una medida exterior μ definida en X es medida exterior métrica si para cada dos conjuntos $A, B \subset X$ tales que $d(A, B) > 0$ se cumple $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Recordemos también la definición de medida de probabilidad:

Definición 2.1.11. Una probabilidad es toda medida P sobre (Ω, \mathcal{A}) tal que $P(\Omega) = 1$. El sistema (Ω, \mathcal{A}, P) se llama espacio de probabilidad.

Definición 2.1.12. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función de distribución (f.d.) si es:

- Monótona no decreciente. Esto significa que si $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$.
- Continua a la derecha. Esto significa que para todo $x \in \mathbb{R}$ ese tiene que $\lim_{a \rightarrow x, a \geq x} F(a) = F(x)$.

Definición 2.1.13. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función de distribución de probabilidad (f.d.p.) si es monótona no decreciente, continua a la derecha y está acotada entre 0 y 1.

De cara a probar la unicidad de la medida en las próximas secciones emplearemos el

Teorema 2.1.14. ([9, Th. A Chapter III]) Si μ es una medida σ -finita en un anillo R , entonces existe una única medida $\bar{\mu}$ en el σ -anillo $S(R)$ de forma que, para E en R , $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$; siendo la medida $\bar{\mu}$ σ -finita.

Los siguientes dos teoremas nos serán de gran utilidad de cara a probar el Teorema presentado en la siguiente sección. En primer lugar, sea X un conjunto y sea \mathcal{A} una familia de conjuntos de X que recubren X y sea $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ cualquier función. El teorema de construcción de medidas exteriores es el siguiente:

Teorema 2.1.15 (Método I). ([10, Th 5.2.2]) Existe una única medida $\overline{\mathcal{M}}$ en X tal que

1. $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq c(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
2. Si $\overline{\mathcal{N}}$ es cualquier medida exterior en X con $\overline{\mathcal{N}}(A) \leq c(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{N}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$ para todo $B \subset X$.

Además, para cualquier subconjunto B de X , se define la medida de B como $\overline{\mathcal{M}}(B) = \inf \sum_{A \in \mathcal{D}} c(A)$ donde el ínfimo es de todos los recubrimientos numerables \mathcal{D} de B por conjuntos de \mathcal{A} .

Proposición 2.1.16. ([10, Ex 5.4.1])

Sean $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ dos recubrimientos de X y sea $c : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ una función de conjunto. Si $\overline{\mathcal{M}}$ es la medida exterior según el método I definida por c y \mathcal{A} , y si $\overline{\mathcal{N}}$ es la medida exterior según el Método I definida por c y \mathcal{B} , entonces $\overline{\mathcal{M}}(A) \geq \overline{\mathcal{N}}(A)$ para todo $A \subseteq X$.

Por otra parte, existe otro teorema que nos proporciona una medida exterior métrica. Sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de un espacio métrico S , y supongamos que para cada $x \in S$ y $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ con $x \in A$ y $\text{diam} A \leq \varepsilon$. Supongamos que $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ es una función dada. A partir de dicha información es posible construir una medida exterior. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{A} : \text{diam} A \leq \varepsilon\}$. Sea $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$ la medida exterior proporcionada por el teorema anterior determinada a través de c usando la familia \mathcal{A}_ε . Entonces, por la Proposición 2.1.16, para un conjunto dado E , cuando ε decrece, $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$ crece. Definamos $\overline{\mathcal{M}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E)$.

Esta construcción de una medida es conocida como Método II.

Teorema 2.1.17. ([10, Ex 5.4.2]) La función de conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ definida mediante el Método II es una medida exterior métrica.

Definición 2.1.18. ([10]) Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior definida en un conjunto X . Un conjunto $A \subseteq X$ es $\overline{\mathcal{M}}$ -medible (en el sentido de Carathéodory) si, y solo si $\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ para todos los conjuntos $E \subseteq X$.

Teorema 2.1.19. ([10, Th. 5.2.3]) La colección \mathcal{F} de conjuntos $\overline{\mathcal{M}}$ -medibles es un σ -álgebra y $\overline{\mathcal{M}}$ es numerable aditiva en \mathcal{F} .

Teorema 2.1.20. ([10, Th. 5.2.6]) Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior métrica en un espacio métrico S . Entonces todo subconjunto de Borel de S es $\overline{\mathcal{M}}$ -medible.

Nótese que a partir de los dos teoremas anteriores se puede deducir el siguiente:

Teorema 2.1.21. Toda medida exterior métrica $\overline{\mathcal{M}}$ es una medida en la σ -álgebra de Borel.

Teorema 2.1.22. ([15, Th A. 81.]) Una función medible f de un espacio de medida $(S_1, \mathcal{A}_\infty, \mu_1)$ a un espacio de medida $(S_2, \mathcal{A}_\varepsilon)$, $f : S_1 \rightarrow S_2$, induce una medida en el dominio S_2 . Para cada, $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, definimos $\mu_2(A) =$

$\mu_1(f^{-1}(A))$. Las integrales con respecto a μ_2 pueden escribirse como integrales con respecto a μ_1 de la siguiente manera: $g : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces,

$$\int g(y) d\mu_2(y) = \int g(f(x)) d\mu_1(x)$$

2.2. Estadística

A continuación se recogen todos los conceptos y resultados relacionados con la rama de la Estadística que nos serán de gran utilidad de cara al desarrollo del trabajo:

Definición 2.2.1. *Una muestra aleatoria es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas X_1, X_2, \dots, X_n cuya distribución viene dada por una familia paramétrica $\mathcal{F}_\theta = \{f(x; \theta) | \theta \in \Theta\}$.*

Puesto que la muestra es aleatoria, la función de densidad o masa de probabilidad conjunta viene dada por la expresión

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

En ocasiones, los parámetros son cantidades fijas que desconocemos y la única información de la que disponemos acerca de ellos es la presente en la muestra. La función de verosimilitud será la que nos proporcionará dicha información. La necesidad de asignar un valor o conjunto de valores a dicho parámetro es la responsable del nacimiento de las técnicas de estimación puntual, cuyo objetivo es asignar un cierto valor al parámetro o parámetros desconocidos a través de algún método de búsqueda de forma que el valor asignado posea “buenas propiedades”.

Definición 2.2.2. *Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ una muestra aleatoria, entonces un estadístico $T(\mathbf{X})$ es una función medible de las variables que forman la muestra.*

Definición 2.2.3. *Sea una muestra aleatoria $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ entonces un estadístico $T(\mathbf{X})$ se dice que es suficiente para θ si la distribución de la muestra condicionada a dicho estadístico es independiente del parámetro desconocido.*

Definición 2.2.4. *Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ una muestra aleatoria en la que $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, entonces se define un estimador puntual de θ como un estadístico que toma valores en el espacio paramétrico Θ y que no puede ser función de ningún valor desconocido.*

Definición 2.2.5. Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ una muestra aleatoria, entonces la función de verosimilitud, que denotaremos por $l(\theta/\mathbf{x})$, será la función de densidad o masa de probabilidad considerada como función del parámetro, es decir,

$$l(\theta/\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Definición 2.2.6. Sea $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x}; \theta)$ una muestra aleatoria, entonces el estimador de máxima verosimilitud es el valor $\hat{\theta}$ que maximiza la función de verosimilitud, es decir,

$$l(\hat{\theta}/\mathbf{x}) = \sup_{\theta \in \Theta} l(\theta/\mathbf{x})$$

2.3. Topología general

Sea X un conjunto y consideremos la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. A continuación presentamos algunas propiedades que puede tener d para cualesquiera $x, y, z \in X$ con el objetivo de caracterizar diferentes tipos de distancias, las cuales han sido tomadas de [11].

1. $d(x, x) = 0$.
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) = 0$ implica que $x = y$.
5. $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ implica que $x = y$.
6. $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Definición 2.3.1. d es una métrica en X si se verifican 1, 2, 3 y 4.

d es una pseudo-métrica en X si se verifican 1, 2 y 3.

d es una casi-métrica en X si se verifican 1, 2 y 4.

d es una casi-pseudo-métrica en X si se verifican 1 y 2.

d es una T_0 -casi-métrica en X si se verifican 1, 2 y 5.

Además, si alguna de las anteriores verifica la propiedad 6, diremos que ésta es no arquimediana.

Recopilamos ahora los conceptos y resultados tomados de [7]:

Definición 2.3.2. Una sucesión (x_n) de un espacio métrico (X, d) es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, para todo $n, m \geq n_0$.

Definición 2.3.3. Un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Lema 2.3.4. Dado A un subconjunto denso de un espacio métrico X . Entonces X es completo si, y solo si toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n \in A$ es convergente.

Proposición 2.3.5. Toda sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente. Además, ambas tienen el mismo límite.

Definición 2.3.6. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos, una aplicación $\varphi : X \rightarrow Y$ es una isometría si $d_1(x, y) = d_2(\varphi(x), \varphi(y))$ para todo par de puntos $x, y \in X$.

2.4. Estructuras fractales

Los siguientes conceptos están relacionados con las estructuras que trataremos en las próximas secciones, las estructuras fractales, las cuales fueron introducidas en [1] para un espacio topológico. La definición que emplearemos en este trabajo está hecha sobre un conjunto en lugar de un espacio topológico.

Usaremos las siguientes notaciones:

- $U_\Gamma = \{(x, y) \in X \times X : y \notin \bigcup\{A \in \Gamma : x \in A\}\}$, donde Γ es un recubrimiento de un conjunto X .
- Un recubrimiento Γ_2 es un refinamiento fuerte de otro recubrimiento Γ_1 , lo que denotaremos por $\Gamma_2 \prec\prec \Gamma_1$ si Γ_2 es un refinamiento de Γ_1 , lo que denotaremos por $\Gamma_2 \prec \Gamma_1$ (esto es, cada elemento de Γ_2 está contenido en algún elemento de Γ_1) y para todo $B \in \Gamma_1$ se tiene que $B = \bigcup\{A \in \Gamma_2 : A \subseteq B\}$.

A continuación se presenta el concepto de estructura fractal así como una recopilación de propiedades de las mismas. Como referencia de esta teoría véanse, por ejemplo, [1] y [6].

Definición 2.4.1. Una estructura fractal es una familia numerable de recubrimientos $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\Gamma_{n+1} \prec\prec \Gamma_n$. Llamaremos nivel n de la estructura fractal al recubrimiento Γ_n .

Ejemplo 2.4.2. Una estructura fractal sencilla es la natural.
Si la definimos en $[0, 1]$, los elementos de cada nivel serán:

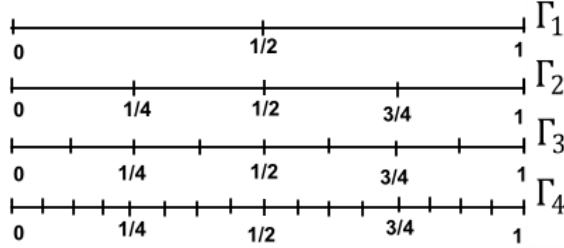


Figura 2.1: Primeros niveles de la estructura fractal natural en $[0, 1]$

Si la definimos en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, los elementos de los tres primeros niveles serán los que aparecen en la figura 2.2.

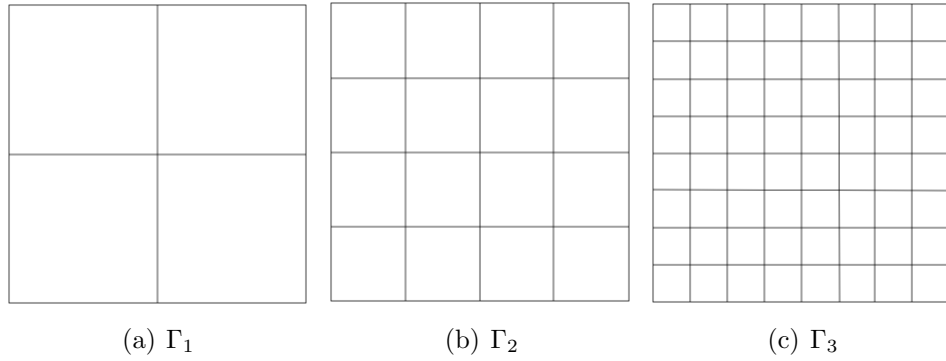


Figura 2.2: Primeros niveles de la estructura fractal natural en $[0, 1] \times [0, 1]$

Definición 2.4.3. Un recubrimiento Γ de X se dice que es teselación si los elementos de Γ son regularmente cerrados ($A = \overline{A^\circ}$ para todo $A \in \Gamma$) y sus interiores son disjuntos dos a dos ($A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ para cada $A, B \in \Gamma$ con $A \neq B$).

Una estructura fractal $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ se dice teselación si Γ_n es teselación para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.4.4. Dado X un conjunto no vacío y Γ un recubrimiento de X , definimos $St(x, \Gamma) = \bigcup \{A \in \Gamma : x \in A\}$.

Definición 2.4.5. Sea $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una estructura fractal en un espacio X , se dice que $\mathbf{\Gamma}$ es Cantor completa si para cada sucesión decreciente de conjuntos (A_n) de X con $A_n \in \Gamma$ es $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Capítulo 3

La completación de una estructura fractal

Una estructura fractal induce una casi-pseudo-métrica no arquimediana, la cual definiremos más adelante en esta misma sección, por lo que siempre podremos trabajar con la bicompletación (o cualquier otro tipo de completación) de la casi-pseudo-métrica inducida, y entonces podemos tener la estructura fractal inducida por la casi-pseudo-métrica (no arquimediana) en la bicompletación.

Desde el punto de vista de las casi-uniformidades todo funciona bien bajo este enfoque, pero si necesitamos preservar una estructura más fuerte como la estructura fractal necesitaremos una nueva forma de construir una completación de la misma. De hecho, nos enfrentaremos a este problema en la próxima sección cuando, tratando de definir una medida de probabilidad en un espacio a partir de una premedida definida en los elementos de cada nivel de la estructura fractal, necesitaremos definirla primero en la completación y en la estructuras inducidas por la estructura fractal. Además, con objeto de preservar la estructura fractal introduciremos las aplicaciones que conservan la misma antes de ponernos manos a la obra con la construcción de la completación. Para culminar probamos un resultado sobre la unicidad de la completación de una estructura fractal.

Por tanto, en esta sección, proporcionamos una construcción de manera que todas las estructuras inducidas por la estructura fractal (casi-pseudo-métrica, métrica, topología, la estructura fractal en sí misma, etc.) se extiendan adecuadamente.

La casi-pseudo-métrica no arquimediana d_{Γ} inducida por la estructura fractal Γ se define como

$$d_{\Gamma}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } y \in U_{xn} \setminus U_{xn+1} \\ 1 & \text{si } y \notin U_{x1} \end{cases}$$

La denotaremos simplemente por d si no hay lugar a confusión sobre la estructura fractal Γ .

Nótese que $B(x, \frac{1}{2^n}) = U_{xn+1}$. Adicionalmente, podemos considerar la casi-pseudo-métrica conjugada $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$ y la métrica del supremo $d^*(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$ que es una métrica no arquimediana (o ultramétrica).

Emplearemos la notación $U_{xn}^{-1} = \{y \in X : x \in U_{yn}\}$ y $U_{xn}^* = U_{xn} \cap U_{xn}^{-1}$.

Cuando trabajamos con estructuras fractales, podemos considerar las topologías inducidas por d , d^{-1} o d^* . Si nos referimos a una propiedad topológica en un espacio con una estructura fractal, siempre nos referiremos a la topología inducida por d (una base de entornos de cada punto x es $\{U_{xn} : n \in \mathbb{N}\}$), a menos que indiquemos que la topología empleada es otra.

La siguiente proposición reúne ciertas propiedades de los conjuntos citados previamente:

Proposición 3.0.6. *Sea Γ una estructura fractal en X , $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. ([1, Prop 3.2]) $U_{xn}^{-1} = \bigcap_{x \in A, A \in \Gamma_n} A$.
2. ([1, Prop 2.1]) $\{U_{xn}^* : x \in X\}$ es una partición de X , esto es, recubre X y dados $x, y \in X$ se tiene que $U_{xn}^* = U_{yn}^*$ o bien que $U_{xn}^* \cap U_{yn}^* = \emptyset$.
3. ([1, Prop 3.5]) Sean $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $y \in U_{xn}$. Entonces $U_{yn} \subseteq U_{xn}$.
4. ([1, Lemma 3.7]) $U_{xm} \subseteq U_{xn}$ para todo $m \geq n$. Como consecuencia $U_{xm}^{-1} \subseteq U_{xn}^{-1}$ y $U_{xm}^* \subseteq U_{xn}^*$ para todo $m \geq n$.
5. $U_{xn}^* = \bigcap_{x \in A, A \in \Gamma_n} A \setminus \bigcup_{x \notin A, A \in \Gamma_n} A$.
6. $U_{xn}^* \cap U_{yn}^* \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in U_{xn}^* \Leftrightarrow U_{xn}^* = U_{yn}^* \Leftrightarrow x \in U_{yn}^*$.

Nótese que las dos últimas propiedades son consecuencia directa de las anteriores.

Ahora recopilamos algunas propiedades más de los mismos conjuntos que nos serán de utilidad.

Proposición 3.0.7. *1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in A$. Entonces $U_{xm}^* \subseteq U_{xm}^{-1} \subseteq A$ para todo $m \geq n$.*

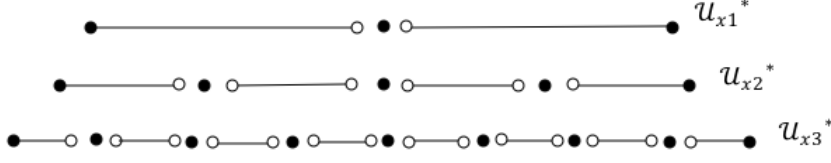


Figura 3.1: U_{xn}^* para $n = 1, 2, 3$ para la estructura fractal natural en $[0, 1]$

2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$. Entonces $A = \bigcup_{x \in A} U_{xn}^*$ y $A = \bigcup_{x \in A} U_{xn}^{-1}$.
3. A es abierto en la topología τ_{d-1} y cerrado en τ_d para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, A es abierto y cerrado en τ_{d^*} para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
4. U_{xn}^* es abierto y cerrado en (X, d^*) para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.
5. Dados $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in X$ se tiene que $U_{xn}^* \subseteq A$ o $U_{xn}^* \cap A = \emptyset$. Como consecuencia de este hecho se obtiene que $U_{xn}^* \subseteq A$ si, y solo si $x \in A$.

Demostración. 1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in A$. Por la definición de U_{xm}^* es claro que $U_{xm}^* \subseteq U_{xm}^{-1}$ y en virtud de la Proposición 3.0.6 se sigue que $U_{xm}^{-1} \subseteq U_{xn}^{-1} = \bigcap_{x \in B, B \in \Gamma_n} B \subseteq A$.

2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$.

Es obvio que $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_{xn}^* \subseteq \bigcup_{x \in A} U_{xn}^{-1}$, por lo que vamos a probar que $\bigcup_{x \in A} U_{xn}^{-1} \subseteq A$.

Sea $x \in A$, entonces $U_{xn}^{-1} \subseteq A$ por la afirmación anterior y, por consiguiente, $\bigcup_{x \in A} U_{xn}^{-1} \subseteq A$.

3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$. Primero probaremos que A es cerrado en τ_d . Consideremos $x \in Cl_{\tau_d} A$, entonces $U_{xn} \cap A \neq \emptyset$. Del hecho de que $U_{xn} = X \setminus \bigcup_{B \in \Gamma_n; x \notin B} B$, se desprende que $x \in A$ y por tanto $Cl_{\tau_d} A = A$, así que A es cerrado en τ_d .

Lo próximo es probar que A es abierto en τ_{d-1} . Sea $x \in A$, como $U_{xn}^{-1} \subseteq A$ por el primer apartado, se llega a que A es abierto en τ_{d-1} , por ser entorno de todos sus puntos en τ_{d-1} .

Finalmente, como $\tau_d \subseteq \tau_{d^*}$ y $\tau_{d-1} \subseteq \tau_{d^*}$, se concluye que A es abierto y cerrado en τ_{d^*} .

4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Consideremos $y \in U_{xn}^*$, entonces $U_{yn}^* = U_{xn}^*$ por la Proposición 3.0.6. En particular, $U_{yn}^* \subseteq U_{xn}^*$ y U_{xn}^* es abierto en τ_{d^*} .

Por otra parte, si $y \in Cl_{\tau_{d^*}}(U_{xn}^*)$ entonces $U_{yn}^* \cap U_{xn}^* \neq \emptyset$, y por la Proposición 3.0.6 se sigue que $y \in U_{xn}^*$. Luego $Cl_{\tau_{d^*}}(U_{xn}^*) = U_{xn}^*$, y por consiguiente U_{xn}^* es cerrado en τ_{d^*} .

5. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in X$ y supongamos que $U_{xn}^* \cap A \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in U_{xn}^* \cap A$ y por ello, en virtud del apartado 1, $x \in U_{yn}^* \subseteq A$. Puesto que $U_{xn}^* = U_{yn}^*$, la Proposición 3.0.6 nos permite concluir que $U_{xn}^* \subseteq A$. □

Sea Γ una estructura fractal en X . Vamos a introducir algunas caracterizaciones para las propiedades T_0 , T_1 y T_2 de X en términos de la estructura fractal.

Proposición 3.0.8. *X es T_0 si, y solo si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$ de forma que A contiene a uno de los puntos (x o y) pero no al otro.*

Demostración. \Rightarrow) Sea X un espacio T_0 y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $y \notin U_{xn}$ o $x \notin U_{yn}$. Supongamos que $y \notin U_{xn}$, en cuyo caso $x \notin U_{yn}^{-1} = \bigcap_{A \in \Gamma_n, y \in A} A$ lo que implica la existencia de $A \in \Gamma_n$ de tal manera que $y \in A$ y $x \notin A$. Análogamente, supongamos que $x \notin U_{yn}$, entonces $y \notin U_{xn}^{-1}$ lo que implica la existencia de $A \in \Gamma_n$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

\Leftarrow) Recíprocamente, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ por hipótesis existe $A \in \Gamma_n$ de forma que $x \in A$ e $y \notin A$ (o $y \in A$ y $x \notin A$), lo que implica que $y \notin \bigcap_{B \in \Gamma_n, x \in B} B = U_{xn}^{-1}$ y, por tanto, $x \notin U_{yn}$ (análogamente se procede para el otro caso). Se tiene pues que X es T_0 . □

Proposición 3.0.9. *X es T_1 si, y solo si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$ tales que $x \in A$ e $y \notin A$.*

Demostración. \Rightarrow) Sea X un espacio T_1 y consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $x \notin U_{yn}$. Dado que $x \notin U_{yn}$, $y \notin U_{xn}^{-1}$ y por ello existe $A \in \Gamma_n$ de manera que $x \in A$ e $y \notin A$.

\Leftarrow) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, por hipótesis existen $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$ tales que $x \in A$ e $y \notin A$, lo que implica que $y \notin U_{xn}^{-1}$ y, por tanto, $x \notin U_{yn}$.

Por otra parte, existen $m \in \mathbb{N}$ y $B \in \Gamma_m$ de forma que $y \in B$ y $x \notin B$ lo que conduce a que $x \notin U_{ym}^{-1}$ y esto a su vez nos lleva a que $y \notin U_{xm}$.

En conclusión, X es T_1 . □

La caracterización de la propiedad de T_2 resulta ser un poco más compleja.

Proposición 3.0.10. *X es T_2 si, y solo si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que para cada $z \in X$, existe $A \in \Gamma_n$ con $z \in A$ que no contiene a x e y simultáneamente.*

Demostración. Como sabemos, $U_{xn} \cap U_{yn} = \emptyset$ si, y solo si no existe ningún $z \in U_{xn} \cap U_{yn}$ si, y solo si no existe ningún z de forma que $x, y \in U_{zn}^{-1}$ si, y solo si no existe ningún z tal que para cada $A \in \Gamma_n$ con $z \in A$ se tenga que A contiene simultáneamente a x e y . □

Una condición suficiente para la propiedad de T_2 es la siguiente.

Proposición 3.0.11. *X es T_2 si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que no exista ningún elemento $A \in \Gamma_n$ que contenga simultáneamente a x e y .*

Demostración. Supongamos que X no es T_2 . Entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tales que $U_{xn} \cap U_{yn} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $U_{xn} \cap U_{yn} \neq \emptyset$ por lo que existe $z \in U_{xn} \cap U_{yn}$, y por ello $x, y \in U_{zn}^{-1}$. Por consiguiente, cualquier $A \in \Gamma_n$ con $z \in A$ debe contener a x e y , pero esto contradice la hipótesis. Luego, X es T_2 . □

Obsérvese que si la estructura fractal es irreducible (esto es, todo nivel de la misma es un recubrimiento irreducible, lo que significa que no posee subrecubrimientos propios), entonces el recíproco de la proposición anterior es cierto. Por tanto, vamos a probar el siguiente resultado:

Proposición 3.0.12. *Sean X un espacio T_2 y Γ una estructura fractal irreducible en X , entonces para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que no hay ningún elemento $A \in \Gamma_n$ que contenga simultáneamente a x e y .*

Demostración. Supongamos que existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $A \in \Gamma_n$ con $x, y \in A$. Dado que Γ es irreducible, existe $z \in A \setminus \bigcup_{B \in \Gamma_n, B \neq A} B$. Por la Proposición 3.0.10 tenemos que X no es T_2 lo que es una contradicción. □

Observación 3.0.13. *Sea Γ una estructura fractal en X . Obsérvese que d_Γ es T_0 si, y solo si d_Γ^* es T_2 .*

3.1. Funciones fractal-preserving

Dada una estructura fractal Γ en un espacio X e $Y \subseteq X$, la estructura fractal inducida por Γ en Y se define como $\Gamma|_Y = \{\{A \cap Y : A \in \Gamma_n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Nótese que $\Gamma|_Y$ es una estructura fractal en virtud de [1, Prop. 3.3].

Por otro lado, dada una estructura fractal Γ en X y $f : X \rightarrow Y$. La estructura fractal inducida por f y Γ en $f(X)$ se define como $f(\Gamma) = \{f(\Gamma_n) : n \in \mathbb{N}\}$, donde $f(\Gamma_n) = \{f(A) : A \in \Gamma_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por falta de referencia probaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. *Sea Γ una estructura fractal en X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces $f(\Gamma)$ es una estructura fractal en $f(X)$.*

Demostración. Pongamos $\Delta = f(\Gamma)$. Vamos a probar que $\Delta_{n+1} \prec \Delta_n$, para todo n .

- $\Delta_{n+1} \prec \Delta_n$.

Sea $C \in \Delta_{n+1}$, entonces $C = f(A)$ para algún $A \in \Gamma_{n+1}$. Ahora bien, dado que Γ es una estructura fractal en X , existe $B \in \Gamma_n$ tal que $A \subseteq B$. Por ello $f(A) \subseteq f(B) \in \Delta_n$.

- $C = \cup\{D \in \Delta_{n+1} : D \subseteq C\}$ para todo $C \in \Delta_n$.

\subseteq) Sean $C \in \Delta_n$ y $x \in C$, por la definición de Δ tenemos que $C = f(A)$ para algún $A \in \Gamma_n$. Se tiene que $x \in f(A)$, lo que implica que $x = f(a)$ para algún $a \in A$. Además, existe $B \in \Gamma_{n+1}$ de manera que $a \in B \subseteq A$. Eso significa que $x \in f(B) \subseteq f(A)$. Se sigue pues que $x \in \cup\{D \in \Delta_{n+1} : D \subseteq C\}$ ya que $f(B) \in \Delta_{n+1}$.

\supseteq) Sea $x \in \cup\{D \in \Delta_{n+1} : D \subseteq C\}$, es claro que $x \in C$.

□

A continuación vamos a introducir algunos conceptos relacionados con funciones que conservan la estructura fractal:

Definición 3.1.2. *Sean Δ una estructura fractal en Y , Γ una estructura fractal en X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Diremos que f es fractal-preserving si $\Delta|_{f(X)} = f(\Gamma)$.*

Además, si f es inyectiva, diremos que f es un embebimiento fractal. Si f es biyectiva, diremos que f es un isomorfismo fractal.

Observación 3.1.3. *Nótese que si f es un isomorfismo fractal, entonces f^{-1} también lo es.*

Proposición 3.1.4. *Sea Δ una estructura fractal en Y , Γ una estructura fractal en X y $f : X \rightarrow Y$ una función fractal-preserving de forma que el hecho de que $f(x) \in f(A)$ implica que $x \in A$ para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. $y \in U_{xn}$ si, y solo si $f(y) \in U_{f(x)n}$.
2. $y \in U_{xn}^{-1}$ si, y solo si $f(y) \in U_{f(x)n}^{-1}$.
3. $y \in U_{xn}^*$ si, y solo si $f(y) \in U_{f(x)n}^*$.
4. f es una isometría con respecto a d . De este hecho se desprende que f sea una isometría con respecto a d^{-1} y d^* .
5. $f(U_{xn}) = U_{f(x)n} \cap f(X)$.
6. $f(U_{xn}^{-1}) = U_{f(x)n}^{-1} \cap f(X)$.
7. $f(U_{xn}^*) = U_{f(x)n}^* \cap f(X)$.

Demostración. Probemos que $y \in U_{xn}$ si, y solo si $f(y) \in U_{f(x)n}$, ya que este hecho implica el resto de apartados previamente citados.

\Rightarrow) Sea $y \in U_{xn}$, entonces $x \in U_{yn}^{-1}$. Sea ahora $B \in \Delta_n$ de manera que $f(y) \in B$, entonces $f(y) \in B \cap f(X) = f(A)$ para algún $A \in \Gamma_n$. Dado que $f(y) \in f(A)$, por hipótesis se sigue que $y \in A$ lo que implica que $x \in A$ (ya que $x \in U_{yn}^{-1}$). En consecuencia, $f(x) \in f(A) = B \cap f(X)$, por lo que $f(x) \in B$. Se concluye que $f(x) \in \bigcap_{B \in \Delta_n, f(y) \in B} B = U_{f(y)n}^{-1}$ lo que nos garantiza que $f(y) \in U_{f(x)n}$.

\Leftarrow) Sea $f(y) \in U_{f(x)n}$, entonces $f(x) \in U_{f(y)n}^{-1}$. Sea $A \in \Gamma_n$ tal que $y \in A$, entonces $f(y) \in f(A) = B \cap f(X)$ para algún $B \in \Delta_n$. Puesto que $f(y) \in B$, se sigue que $f(x) \in B$ (ya que $f(x) \in U_{f(y)n}^{-1}$), lo que significa que $f(x) \in B \cap f(X) = f(A)$. Finalmente, como $f(x) \in f(A)$, $x \in A$ por hipótesis, de donde $x \in \bigcap_{A \in \Gamma_n, y \in A} A = U_{yn}^{-1}$. Por tanto, $y \in U_{xn}$. □

En particular, si f es inyectiva, se tiene la siguiente

Observación 3.1.5. *Nótese que si $f : X \rightarrow Y$ es un embebimiento fractal, entonces las afirmaciones anteriores son ciertas.*

3.2. La construcción de la completación de una estructura fractal

En esta sección recordaremos la construcción de \tilde{X} llevada a cabo en [1] y posteriormente definiremos una estructura fractal en dicho espacio. En lo que sigue, vamos a asumir que $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una estructura fractal en un conjunto X .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{U_{x_n}^* : x \in X\}$. En G_n definimos el orden parcial $U_{x_n}^* \leq U_{y_n}^*$ si, y solo si $y \in U_{x_n}$. Entonces (G_n, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora definimos las funciones $\rho_n : X \rightarrow G_n$ dada por $\rho_n(x) = U_{x_n}^*$ y $\phi_n : G_{n+1} \rightarrow G_n$ como la dada por $\phi_n(\rho_{n+1}(x)) = \rho_n(x)$. Finalmente, el límite inverso $\varprojlim G_n$ se define, como viene siendo habitual, como $\varprojlim G_n = \{(g_1, g_2, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n : \phi(g_{n+1}) = g_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Emplearemos la notación $\tilde{X} = \varprojlim G_n$ de ahora en adelante. Para terminar, definimos la aplicación $\rho : X \rightarrow \tilde{X}$ como $\rho(x) = (\rho_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

A continuación veamos cómo extender una estructura fractal en X a una estructura fractal en \tilde{X} .

Sea $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\Gamma}_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\tilde{\Gamma}_n = \{\tilde{A} : A \in \Gamma_n\}$ y, para cada $A \in \Gamma_n$, \tilde{A} se define como $\tilde{A} = \{(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X} : x_n \in A\}$.

Ejemplo 3.2.1. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la estructura fractal natural. Los elementos de \tilde{X} son sucesiones de $U_{x_n}^*$ encajados como la que se describe en la Figura 3.2.



Figura 3.2: Elemento de $\tilde{\Gamma}$

Los dos lemas siguientes nos ayudarán a probar que $\tilde{\Gamma}$ es una estructura fractal en \tilde{X} .

Lema 3.2.2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $a = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ tales que $x_k \in A$ para algún $k \geq n$. Entonces $x_i \in A$ para todo $i \geq n$.

Demostración. Sea $i \geq n$, por la definición del límite inverso es $U_{x_i n}^* = U_{x_n n}^*$ (1). Además, $U_{x_n n}^* = U_{x_k n}^*$ (2) debido al mismo hecho ya que $k \geq n$.

Por otra parte, $U_{x_k n}^* \subseteq U_{x_k n}^{-1} \subseteq A$ (3). Si juntamos las expresiones (1), (2) y (3), dado que $x_i \in U_{x_i n}^*$, se tiene que $x_i \in A$. \square

Lema 3.2.3. Sean $A \in \Gamma_{n+1}$ y $B \in \Gamma_n$ tales que $A \subseteq B$. Entonces $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

Demostración. Sea $a \in \tilde{A}$, entonces $a = (\rho_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ con $x_{n+1} \in A$, por lo que $x_{n+1} \in A \subseteq B$. En virtud del Lema 3.2.2, $x_n \in B$. Se sigue pues que $a = (\rho_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{B}$. \square

Lo siguiente que hacemos es probar que, efectivamente, $\tilde{\Gamma}$ es una estructura fractal en \tilde{X} .

Proposición 3.2.4. $\tilde{\Gamma}$ es una estructura fractal en \tilde{X} .

Demostración. Es claro que $\tilde{\Gamma}_n$ es un recubrimiento de \tilde{X} , por ser Γ_n un recubrimiento de X . Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ y probemos que $\tilde{\Gamma}_{n+1} \prec \tilde{\Gamma}_n$. Esto será cierto si se verifican las siguientes afirmaciones:

1. $\tilde{\Gamma}_{n+1} \prec \tilde{\Gamma}_n$.

Sea $\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$, entonces $A \in \Gamma_{n+1}$ de modo que existe $B \in \Gamma_n$ tal que $A \subseteq B$. En virtud del Lema 3.2.3, concluimos que $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, y es claro que $\tilde{B} \in \tilde{\Gamma}_n$.

2. $\tilde{B} = \cup \{ \tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_{n+1} : \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \}$ para todo $B \in \Gamma_n$.

Sea $B \in \Gamma_n$.

\supseteq) Es obvio.

\subseteq) Sea $b \in \tilde{B}$, entonces $b = (\rho_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$, con $x_n \in B$. Por el Lema 3.2.2, $x_{n+1} \in B$. Dado que $\Gamma_{n+1} \prec \Gamma_n$, existe $A \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$ de forma que $x_{n+1} \in A \subseteq B$. Se sigue que $b \in \tilde{A}$. Por tanto $b \in \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ en virtud del Lema 3.2.3 y es claro que $\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$. \square

Denotemos por $\tilde{d} = d_{\tilde{\Gamma}}$ a la casi-pseudo-métrica no arquimediana inducida por $\tilde{\Gamma}$ en \tilde{X} , por \tilde{U}_n a la base transitiva de la casi-uniformidad inducida por $\tilde{\Gamma}$ en \tilde{X} , por lo que $\tilde{U}_{x_n} = X \setminus \bigcup_{x \notin \tilde{A}; \tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n} \tilde{A}$ para todo $x \in \tilde{X}$, por $\tilde{\tau}$ a la topología inducida por \tilde{d} y por $\tilde{\tau}^*$ a la topología inducida por \tilde{d}^* .

La siguiente proposición recoge algunas relaciones existentes entre elementos de X y sus extensiones a \tilde{X} .

Proposición 3.2.5. 1. Consideremos $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho_n(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ tales que $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\rho_n(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$, y sean $m \in \Gamma_m$ y $A \in \Gamma_m$. Entonces $x_m \in A$ si, y solo si $y_m \in A$ (intuitivamente, la definición de \tilde{A} no depende de la sucesión x_n).

2. Sean $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$ y $A \in \Gamma_k$, entonces $x \in \tilde{A}$ si, y solo si $x_k \in A$.

3. Dado $x = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$, entonces $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Dado $x = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$, entonces $\rho(x_n) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*} x$.

5. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X de forma que $x_{n+1} \in U_{x_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$.

6. Sean $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$. Entonces $\rho(x) \in \tilde{A}$ si, y solo si $x \in A$. En particular $\tilde{A} \cap \rho(X) = \rho(A)$, para todo $A \in \Gamma_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (intuitivamente, Γ es la restricción de $\tilde{\Gamma}$ a X), es decir, $\rho(\Gamma) = \tilde{\Gamma}|_{\rho(X)}$. Esto significa que ρ es una función fractal-preserving entre X y \tilde{X} .

7. Sean $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\rho(y) \in \tilde{U}_{\rho(x)n}$ si, y solo si $y \in U_{x_n}$. En particular, $\tilde{U}_{\rho(x)n} \cap \rho(X) = \rho(U_{x_n})$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ (intuitivamente, U_{x_n} es la restricción de $\tilde{U}_{\rho(x)n}$ a X). Se sigue también que $\tilde{U}_{\rho(x)n}^{-1} \cap \rho(X) = \rho(U_{x_n}^{-1})$ y $\tilde{U}_{\rho(x)n}^* \cap \rho(X) = \rho(U_{x_n}^*)$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

8. Sea $x = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Entonces $\tilde{U}_{x_n}^* = \tilde{U}_{\rho(x_n)n}^*$.

9. $\tilde{A} = Cl_{\tilde{\tau}^*}(\rho(A))$, para todo $A \in \Gamma_n$.

10. $\tilde{d}(\rho(x), \rho(y)) = d(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in X$ (esto es, $\rho : (X, d) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$ es una isometría). Se sigue además que $\rho : (X, d^{-1}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d}^{-1})$ y $\rho : (X, d^*) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d}^*)$ son isometrías.

11. $\rho(X)$ es denso en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .

12. Si X es T_0 , entonces ρ es inyectiva y, en consecuencia, ρ es un embebiendo fractal.
13. $(\tilde{X}, \tilde{\Gamma})$ es T_0 .
14. Si X no es T_0 , $\rho(X)$ es homeomorfo a la T_0 -reflexión de X .

Demostración. 1. Por hipótesis, $U_{x_n n}^* = U_{y_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora sean $m \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_m$:

\Rightarrow) Supongamos que $x_m \in A$, en cuyo caso $y_m \in U_{x_m m}^* \subseteq U_{x_m m}^{-1} = \bigcap_{B \in \Gamma_m, x_m \in B} B$ lo que implica que $y_m \in A$.

\Leftarrow) Recíprocamente, supongamos que $y_m \in A$, en cuyo caso $x_m \in U_{y_m m}^* \subseteq U_{y_m m}^{-1} = \bigcap_{B \in \Gamma_m, y_m \in B} B$ lo que implica que $x_m \in A$.

2. \Leftarrow) Si $x_k \in A$, del hecho de que $x = (\rho_n(x_n))$ tenemos que $x \in \tilde{A}$ por la definición de los elementos de $\tilde{\Gamma}$.

\Rightarrow) Si $x \in \tilde{A}$, existe $y_n \in X$ tal que $x = (\rho_n(y_n))$ con $y_k \in A$. Por el apartado anterior, y teniendo en cuenta que $y_k \in A$, es $x_k \in A$.

3. Sea $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$, tenemos que $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}^*$ si, y solo si $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}$ y $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}^{-1}$.

- Por una parte, tenemos que $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}$ si, y solo si $x \in \tilde{U}_{\rho(x_n)n}^{-1} = \bigcap_{\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n; \rho(x_n) \in \tilde{A}} \tilde{A}$. Sea ahora $\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n$ tal que $\rho(x_n) \in \tilde{A}$, entonces $x_n \in A$ por el apartado 2 y por consiguiente $x \in \tilde{A}$.
- Por otra parte, sea $\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n$ de forma que $x \in \tilde{A}$ lo que implica, por el apartado 2, que $x_n \in A$ lo que significa que $\rho(x_n) \in \tilde{A}$. Por tanto, $\rho(x_n) \in \bigcap_{\tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n; x \in \tilde{A}} \tilde{A} = \tilde{U}_{x_n}^{-1}$.

4. Sea $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$, por el apartado anterior $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}^*$, por lo que $\tilde{d}^*(\rho(x_n), x) \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\rho(x_n) \xrightarrow{\tau_{d^*}} x$.

5. Por la definición del límite inverso se sigue que $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ si $\phi_n(\rho_{n+1}(x_{n+1})) = \rho_n(x_n)$. Además, $\phi_n(\rho_{n+1}(x_{n+1})) = \rho_n(x_n)$ si, y solo si $U_{x_{n+1}n}^* = U_{x_n n}^*$. Si probamos la última igualdad tendremos que $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$.

Dado que $x_{n+1} \in U_{x_n n}^*$ es cierto que $U_{x_{n+1}n}^* = U_{x_n n}^*$ en virtud de la Proposición 3.0.6.

6. Sean $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$.

Supongamos que $x \in A$, en cuyo caso $\rho(x) = (\rho_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ y por ello $\rho(x) \in \tilde{A}$.

Recíprocamente, supongamos que $\rho(x) \in \tilde{A}$, de donde $\rho(x) = (\rho_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$, y por el apartado 2, $x \in A$.

7. Es claro por la Proposición 3.1.4.

8. Por el apartado 3, tenemos que $\rho(x_n) \in \tilde{U}_{x_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, por el tercer apartado de la Proposición 3.0.6, se sigue que $\tilde{U}_{x_n}^* = \tilde{U}_{\rho(x_n)n}^*$.

9. Sea $A \in \Gamma_n$.

\subseteq) Consideremos $x \in \tilde{A}$, entonces $x = (\rho_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$. En virtud del apartado 4, $\rho(x_i) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*} x$. Por otra parte, y en virtud del Lema 3.2.2, $x_m \in A$ para todo $m \geq n$. Concluimos que $x \in Cl_{\tilde{\tau}^*}(\rho(A))$.

\supseteq) $\rho(A) = \tilde{A} \cap \rho(X)$ por el apartado 6. Luego $\rho(A) \subseteq \tilde{A}$ y por ello $Cl_{\tau_{d^*}}(\rho(A)) \subseteq Cl_{\tau_{d^*}}(\tilde{A})$. Dado que \tilde{A} es un cerrado en τ_{d^*} , $Cl_{\tau_{d^*}}(\tilde{A}) = \tilde{A}$ y, por consiguiente, $Cl_{\tau_{d^*}}(\rho(A)) \subseteq \tilde{A}$.

10. Se sigue de la Proposición 3.1.4.

11. Sea $x = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Por el punto 4, $\rho(x_n) \xrightarrow{\tilde{\tau}_{d^*}} x$. Se sigue que $\rho(X)$ es denso en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .

12. Supongamos que X es T_0 y sea $\rho(x) = \rho(y)$, entonces $\rho_n(x) = \rho_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, $U_{x_n}^* = U_{y_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x \neq y$. Dado que X es T_0 , por la Proposición 3.0.8 se sigue la existencia de un n y un $A \in \Gamma_n$ tales que $x \in A$ e $y \notin A$ (o $x \notin A$ e $y \in A$). Si $x \in A$, entonces $U_{x_n}^* \subseteq A$, esto es, $U_{y_n}^* \subseteq A$ lo que significa que $y \in A$, lo que es una contradicción. Por tanto, $x = y$ y ρ es inyectiva.

13. Sean $x = (\rho_n(x_n))$ e $y = (\rho_n(y_n))$ con $x \neq y$, entonces $U_{x_{nn}}^* \neq U_{y_{nn}}^*$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $y_n \notin U_{x_{nn}}^* = U_{x_{nn}} \cap U_{x_{nn}}^{-1}$. Esto implica uno de los dos siguientes hechos:

- $y_n \notin U_{x_{nn}}$ de donde se tiene que $x_n \notin U_{y_{nn}}^{-1}$ y por tanto existe $A \in \Gamma_n$ tal que $y_n \in A$ y $x_n \notin A$. Se sigue, del apartado 2, que $y \in \tilde{A}$ y $x \notin \tilde{A}$. Por tanto, $x \notin \tilde{U}_{y_n}^{-1} = \bigcap_{y \in \tilde{A}, \tilde{A} \in \tilde{\Gamma}_n} \tilde{A}$ y, en consecuencia, $y \notin \tilde{U}_{x_n}$.

- $y_n \notin U_{x_n}^{-1}$ lo que implica (de manera análoga al caso anterior) que $x \notin \tilde{U}_{y_n}$.

Por ello \tilde{X} es T_0 .

14. Consideremos la relación de equivalencia $x \sim y$ si, y solo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, entonces X/\sim es la T_0 -reflexión de X . A continuación probamos que $f : \rho(X) \rightarrow X/\sim$ dada por $f(\rho(x)) = [x]$ es un homeomorfismo:

En primer lugar, probaremos que f está bien definida. Sean $x, y \in X$ tales que $\rho(x) = \rho(y)$, entonces, $U_{x_n}^* = U_{y_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $x \in U_{y_n}^*$ e $y \in U_{x_n}^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, así que $[x] = [y]$ y, por ello, $f(\rho(x)) = f(\rho(y))$.

En segundo lugar, probaremos que f es continua. Sea G un abierto en X/\sim e $y \in f^{-1}(G)$, entonces existe $x \in X$ tal que $\rho(x) = y$. Además, $f(\rho(x)) = [x] \in G$. Sea $\Pi : X \rightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Como Π es continua, $\Pi^{-1}(G)$ es un abierto. Por tanto, existe n tal que $U_{x_n} \subseteq \Pi^{-1}(G)$.

Lo siguiente que hacemos es ver que $\rho(X) \cap \tilde{U}_{\rho(x)n} \subseteq f^{-1}(G)$. Sabemos que $\rho(X) \cap \tilde{U}_{\rho(x)n} = \rho(U_{x_n})$. Sea $z \in \rho(U_{x_n})$, entonces podemos escribir $z = \rho(z')$ con $z' \in U_{x_n}$. Además, $z' \in U_{x_n} \subseteq \Pi^{-1}(G)$. Por consiguiente, $\Pi(z') \in G$ y $f(z) = f(\rho(z')) = \Pi(z') \in G$. Por tanto, $z \in f^{-1}(G)$. Luego, $\rho(X) \cap \tilde{U}_{\rho(x)n} = \rho(U_{x_n}) \subseteq f^{-1}(G)$ y, en consecuencia, $f^{-1}(G)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto. Por ello, f es continua.

Veamos ahora que f es biyectiva.

Por una parte, es claro que f es sobreyectiva. En efecto, sea $[x] \in X/\sim$, si consideramos $\rho(x)$, tenemos $f(\rho(x)) = [x]$.

Por otra parte, sean $[x] = [y]$, entonces

- $y \in \overline{\{x\}}$.
- $x \in \overline{\{y\}}$.

Por el primer apartado se tiene que $U_{y_n} \cap \{x\} \neq \emptyset$ y por ello $x \in U_{y_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del segundo apartado, se deduce que $y \in U_{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $U_{x_n}^* = U_{y_n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde $\rho(x) = \rho(y)$. Por tanto, f es inyectiva.

Para terminar probemos que f^{-1} es continua. En primer lugar retomemos 3.2.5.10 con el objetivo de recordar que ρ es una isometría y, por tanto, es

continua. Además, $\Pi(x) = \Pi(y)$ implica que $\rho(x) = \rho(y)$, como hemos probado previamente. Luego, f^{-1} es continua en virtud de la propiedad universal de la topología cociente. \square

3.3. La bicompletación

En primer lugar hemos de destacar que el Lema 2.3.4, nos será de utilidad en cuanto a probar que un espacio métrico es completo se refiere.

Ahora demostraremos que nuestra completación es la bicompletación de la casi-pseudo-métrica no arquimediana inducida por la estructura fractal.

Proposición 3.3.1. *Si (X, d) es T_0 entonces (\tilde{X}, \tilde{d}^*) es la completación de (X, d^*) .*

Demostración. En virtud de la Proposición 3.2.5, solo tenemos que probar que (\tilde{X}, \tilde{d}^*) es completo.

Emplearemos el Lema 2.3.4, por lo que consideramos una sucesión de Cauchy $(\rho(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $(\rho(X), \tilde{d}^*)$. Dado que ρ es una isometría por la Proposición 3.2.5, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d^*) . Entonces:

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d^*(x_p, x_q) < \frac{1}{2}$ para todo $p, q \geq n_0$. Definimos $\sigma(1) = n_0$.

Existe $n_1 \geq \sigma(1)$ de forma que $d^*(x_p, x_q) < \frac{1}{2^2}$, para todo $p, q \geq n_1$. Definamos ahora $\sigma(2) = n_1$.

Por recursividad podemos definir $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de forma que $d^*(x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(q)}) < \frac{1}{2^{\min\{p, q\}}}$ para todo p, q y $\sigma(n+1) \geq \sigma(n)$. En particular σ es creciente y $d^*(x_{\sigma(n+1)}, x_{\sigma(n)}) < \frac{1}{2^n}$. Esto implica que $x_{\sigma(n+1)} \in U_{x_{\sigma(n)}}^*$ y por la Proposición 3.2.5, $z = (\rho_n(x_{\sigma(n)})) \in \tilde{X}$. Por la Proposición 3.2.5, $\rho(x_{\sigma(n)}) \xrightarrow{\tilde{\tau}^*} z$. Dado que $(\rho(x_{\sigma(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, $\rho(x_n)$ es también convergente (toda sucesión de Cauchy (x_n) que posee una subsucesión convergente $(x_{\sigma(n)}) \rightarrow x$ es convergente y su límite es x). Concluimos que \tilde{d} es completa. \square

Corolario 3.3.2. *Si (X, d) es T_0 entonces (\tilde{X}, \tilde{d}) es la bicompletación de (X, d) .*

3.4. Otras propiedades de completitud de la bicompletación

En esta sección buscaremos condiciones que nos garanticen que la completación construida en la sección anterior sea Cantor completa. Para ello necesitamos algunas definiciones que enunciamos a continuación.

Un recubrimiento Γ de un espacio topológico se dice que es punto finito si cada punto del mismo pertenece a un número finito de elementos de Γ . Por otro lado, se dice que Γ es localmente finito si todo punto posee un entorno que solo corta a un número finito de elementos de Γ .

Para nuestros propósitos, necesitamos introducir un concepto nuevo el cual está relacionado con los anteriores. Es el siguiente:

Definición 3.4.1. *Sea Γ un recubrimiento de X . Diremos que Γ es cover-finita si el conjunto $\{B \in \Gamma : B \cap A \neq \emptyset\}$ es finito para cada $A \in \Gamma$.*

Nótese que, por las definiciones anteriores, si Γ es un recubrimiento finito, entonces Γ es cover-finito. Es más, si Γ es cover-finito, se tiene que Γ es punto finito.

Definición 3.4.2. *Diremos que una estructura fractal $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita (resp. finita, cover-finita) si Γ_n es localmente finito (resp. finito, cover-finito) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Obsérvese que una estructura fractal $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ cuyos niveles Γ_n sean todos punto finitos, es localmente finita, ya que para cada $A \in \Gamma_n$ se tiene que un punto $x \in X$ pertenece a A si, y solo si $U_{xn} \cap A \neq \emptyset$ (y por supuesto U_{xn} es un entorno de x). Se sigue pues que una estructura fractal finita es cover-finita y que una estructura fractal cover-finita es localmente finita.

A partir de la definición de estructura fractal cover-finita se desprende el siguiente

Lema 3.4.3. *Si $\mathbf{\Gamma}$ es una estructura fractal cover-finita, entonces el conjunto $\{U_{xn}^* : U_{xn}^* \subseteq A\}$ es finito para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in X$. En virtud de la Proposición 3.0.6, $U_{xn}^* \subseteq A$ o $U_{xn}^* \cap A = \emptyset$. Ahora mostraremos cómo construir una aplicación inyectiva entre $\{U_{xn}^* : U_{xn}^* \subseteq A\}$ y $\mathcal{P}(\{B \in \Gamma_n : B \cap A \neq \emptyset\})$ lo que nos da que $\{U_{xn}^* : U_{xn}^* \subseteq A\}$ es finito, donde $\mathcal{P}(Y)$ es la familia de todos los subconjuntos de Y .

Nótese que $U_{xn}^* \subseteq A$ si, y solo si $x \in A$, así que consideremos $x \in A$. Por ello, $U_{xn}^* = \bigcap_{x \in B, B \in \Gamma_n} B \setminus \bigcup_{x \notin B, B \in \Gamma_n} B$. Además, si $x \in B$, entonces $B \cap A \neq \emptyset$. Ahora definimos $\phi : \{U_{xn}^* : U_{xn}^* \subseteq A\} \rightarrow \mathcal{P}(\{B \in \Gamma_n : B \cap A \neq \emptyset\})$ como la dada por $\phi(U_{xn}^*) = \{B : x \in B\}$. Probemos que ésta última es inyectiva:

Sean $U_{xn}^* \neq U_{yn}^*$, entonces $y \notin U_{xn}^{-1} = \bigcap_{x \in B, B \in \Gamma_n} B$ o $x \notin U_{yn}^{-1}$. Por tanto existe $B \in \Gamma_n$ de forma que $x \in B$ e $y \notin B$, o $x \notin B$ e $y \in B$. Esto conduce a que $\phi(U_{xn}^*) \neq \phi(U_{yn}^*)$ y, por tanto, ϕ es inyectiva. \square

Ya estamos en condición de probar que la completación de una estructura fractal cover-finita es Cantor completa.

Teorema 3.4.4. *Sea Γ una estructura fractal cover-finita. Entonces $(\tilde{X}, \tilde{\Gamma})$ es Cantor completa.*

Demostración. En primer lugar, recordemos que la Proposición 3.0.7 nos garantiza que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $x \in X$, $U_{xn}^* \subseteq A$ si, y solo si $x \in A$.

Sea $(\tilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $\tilde{A}_n \in \tilde{\Gamma}_n$ que verifica $\tilde{A}_{n+1} \subseteq \tilde{A}_n$. Probemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \neq \emptyset$. Nótese que $A_{n+1} \subseteq A_n$, ya que $A_n = \tilde{A}_n \cap \rho(X)$ en virtud de la Proposición 3.0.8.

Vamos a construir una sucesión de puntos de A_n de forma que obtengamos un elemento en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$. Consideremos A_1 , entonces por la Proposición 3.0.7, $A_1 = \bigcup \{U_{x_1}^* : U_{x_1}^* \subseteq A_1\}$. Ahora bien, en virtud del Lema 3.4.3, el conjunto $\{U_{x_1}^* : U_{x_1}^* \subseteq A_1\}$ es finito, por lo que existe $x_1 \in A$ tal que $U_{x_1}^* \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, $U_{x_1}^* \cap A_2 = \bigcup \{U_{y_2}^* : y \in U_{x_1}^* \cap A_2\}$. Dado que el conjunto $\{U_{y_2}^* : y \in U_{x_1}^* \cap A_2\} \subseteq \{U_{y_2}^* : U_{y_2}^* \subseteq A_2\}$, se tiene que el mismo es finito por el Lema 3.4.3 y no vacío por construcción. Luego existe $x_2 \in A_2 \cap U_{x_1}^*$ tal que $U_{x_2}^* \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recursivamente, definamos x_n de forma que $x_n \in A_n \cap U_{x_{n-1}, n-1}^*$ y $U_{x_n}^* \cap A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dado que $x_{n+1} \in U_{x_n}^*$, se sigue, a partir de la Proposición 3.2.5, que $(\rho_i(x_i)) \in \tilde{X}$ y también tenemos que $(\rho_i(x_i)) \in \tilde{A}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, puesto que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $(\rho_i(x_i)) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$ y, por tanto, $\tilde{\Gamma}$ es Cantor completa. \square

El siguiente ejemplo muestra que el hecho de que Γ sea localmente finita no es suficiente para asegurar que $\tilde{\Gamma}$ sea Cantor completa.

Ejemplo 3.4.5. *Consideremos la estructura fractal $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada nivel, n , viene dado por $\Gamma_n = \{] - \infty, -k] : k \geq n\} \cup \{[k, \infty[: k \geq n\} \cup \{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}] : i = -n2^n, \dots, n2^n - 1\}$. Entonces Γ es una estructura fractal localmente finita pero $\tilde{\Gamma}$ no es Cantor completa.*

Probemos, en primer lugar, que Γ es localmente finita. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se pueden dar los siguientes casos:

- $x \in [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ para algún i , por lo que x pertenece, a lo sumo, a dos elementos de Γ_n .
- $x \in \cup\{[k, \infty[: k \geq n\}$ lo que implica que x solo pueda pertenecer a $[n, \infty[, \dots, [x], \infty[$ o $[\frac{n2^n-1}{2^n}, n]$ si $x = n$, lo que es un número finito de elementos de Γ_n , donde $[a]$ denota el entero más grande que es menor o igual que x .

- $x \in \cup\{]-\infty, -k]; k \geq n\}$ lo que significa que x solo puede pertenecer a $]-\infty, -n], \dots]-\infty, -[x]]$ o $[-n, \frac{-n2^n+1}{2^n}]$ si $x = -n$, lo que es un número finito de elementos de Γ_n .

Por tanto, Γ_n es localmente finita según los comentarios anteriores sobre la relación entre localmente finito y punto finito para una estructura fractal.

Veamos ahora que $\tilde{\Gamma}$ no es Cantor completa.

Consideremos la sucesión decreciente de elementos $A_n =]-\infty, -n] \in \Gamma_n$. Entonces $\tilde{A}_n \in \tilde{\Gamma}_n$ y por el Lema 3.2.3, como $A_{n+1} \subseteq A_n$, se sigue que $\tilde{A}_{n+1} \subseteq \tilde{A}_n$. Sea $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$ y supongamos que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$, entonces $x \in \tilde{A}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, por la Proposición 3.2.5 se tiene que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por ello, $U_{x_n n}^* = \{x_n\}$ si $x_n = -n$, $U_{x_n n}^* =]\lfloor x_n \rfloor - 1, \lfloor x_n \rfloor]$ si $x_n \in \mathbb{Z}$ o $U_{x_n n}^* =]\lfloor x_n \rfloor, \lfloor x_n \rfloor + 1]$ en otro caso. Dado que $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$, se llega a que $x_k \in U_{x_n n}^*$ para todo $k \geq n$. Para $k \geq -\lfloor x_n \rfloor + 1$ obtenemos que $x_k \in A_k =]-\infty, -k] \subseteq]-\infty, \lfloor x_n \rfloor - 1]$ lo que es una contradicción con que $x_k \in U_{x_n n}^*$. en consecuencia, $\bigcap \tilde{A}_n = \emptyset$ y $\tilde{\Gamma}$ no es Cantor completa.

3.5. Unicidad de la bicompletación

Para poner fin a este capítulo, en esta sección vamos a dar un teorema de unicidad relacionado con la bicompletación de una estructura fractal. En primer lugar, daremos una definición de bicompletación.

Definición 3.5.1. Sean Γ una estructura fractal en X , Δ una estructura fractal en Y , $i : X \rightarrow Y$ un embebimiento fractal y supongamos que d_Δ es bicompleto, $i(X)$ es denso en (Y, d_Δ^*) e Y es T_0 . Diremos que, en este caso, (Y, Δ, i) es una bicompletación de (X, Γ) .

Corolario 3.5.2. Si (X, Γ) es T_0 entonces $(\tilde{X}, \tilde{\Gamma}, \rho)$ es una bicompletación de (X, Γ) .

Demostración. Se sigue de las Secciones 4 y 5. □

El próximo resultado trata sobre la unicidad de la bicompletación de una estructura fractal.

Teorema 3.5.3. Si (Y, Δ, i) es una bicompleción de (X, Γ) , existe $I : \tilde{X} \rightarrow Y$, un isomorfismo fractal tal que $I \circ \rho = i$. Intuitivamente, la bicompletación es única salvo isomorfismos fractales.

Demostración. 1. Definición de I .

Con el objetivo de definir I , sea $x = (\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$. Por una parte, dado que i es fractal preserving e inyectiva, $y \in U_{xn}$ si, y solo si $i(y) \in U_{i(x)n}$ de acuerdo con la Observación 3.1.5.

Por otra parte, dado que $x \in \tilde{X}$, $x_{n+1} \in U_{x_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $i(x_{n+1}) \in U_{i(x_n)n}^*$ en virtud de la Observación 3.1.5, lo que significa que $(i(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_{Δ}^*) . Por tanto, existe $y \in Y$ tal que $i(x_n)$ converge a y en (Y, d_{Δ}^*) .

Ahora podemos definir $I(x) = y$.

2. I está bien definida.

Sea $(\rho_n(x_n)) = (\rho_n(y_n)) \in \tilde{X}$, entonces $U_{x_n n}^* = U_{y_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $y_n \in U_{x_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por una parte, puesto que $(\rho_n(x_n)) \in \tilde{X}$, $x_{n+1} \in U_{x_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $i(x_{n+1}) \in U_{i(x_n)n}^*$ en virtud de la Observación 3.1.5, lo que implica que $(i(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_{Δ}^*) . Por tanto, existe $z \in Y$ tal que $(i(x_n)) \rightarrow z$ en (Y, d_{Δ}^*) (y su límite es único ya que (Y, d_{Δ}^*) es T_2). Por ello $I((\rho_n(x_n))) = z$.

Por otra parte, dado que $y_n \in U_{x_n n}^*$, $d^*(i(y_n), i(x_n)) \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por consiguiente $(i(y_n)) \rightarrow z$ en (Y, d_{Δ}^*) . Luego, $I((\rho_n(x_n))) = z = I((\rho_n(y_n)))$.

3. $I \circ \rho = i$.

Sea $x \in X$, entonces $\rho(x) = (\rho_n(x))$. Ahora bien, dado que $x \in U_{x_n}^*$, $i(x) \in U_{i(x)n}^*$ lo que significa que $(i(x))$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_{Δ}^*) . Además, $i(x) \xrightarrow{d^*} i(x)$. Por tanto, $I \circ \rho = i$.

4. $I(\tilde{\Gamma}) = \Delta$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$, veamos que $I(\tilde{A}) \in \Delta_n$. En efecto, $i(A) = B \cap i(X)$ para algún $B \in \Delta_n$, por lo que vamos a probar que $I(\tilde{A}) = B$.

\subseteq) Sea $x = (\rho_k(x_k)) \in \tilde{A}$, entonces $x_n \in A$, y por el Lema 3.2.2 $x_k \in A$ para todo $k \geq n$. Se sigue que $i(x_k) \in i(A) \subseteq B$ para todo $k \geq n$. Por tanto, $I(x) \in \overline{B}^* = B$.

\supseteq) Ahora sea $y \in B$. Por ser $i(X)$ denso, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in i(X)$ de forma que $y_k \in U_{y_k}^*$. Se sigue que $y_{k+1} \in U_{y, k+1}^* \subseteq U_{y_k}^* = U_{y_k k}^*$ y también es claro que $y_k \xrightarrow{d_{\Delta}^*} y$. Entonces existe $x_k \in X$ tal que $y_k = i(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se sigue que $i(x_{k+1}) \in U_{i(x_k)k}^*$, por lo que en virtud

de la Observación 3.1.5 tenemos que $x_{k+1} \in U_{x_k k}^*$, y, por la Proposición 3.2.5, $x = (\rho_k(x_k)) \in \tilde{X}$. Nótese que de la definición de I se tiene que $I(x) = y$.

Puesto que $U_{y_n n}^* = U_{y_n}^* \subseteq B$, es $y_n \in B$ y $i(x_n) = y_n \in B \cap i(X) = i(A)$ de donde $x_n \in A$ (ya que i es inyectiva) y por tanto $x = (\rho_k(x_k)) \in \tilde{A}$. Por ello $y = I(x) \in I(\tilde{A})$.

Recíprocamente, dado $B \in \Delta_n$, como i es fractal-preserving existe $A \in \Gamma_n$ de forma que $B \cap i(X) = i(A)$. Se obtiene que $B = I(\tilde{A})$, así que $B \in I(\tilde{\Gamma}_n)$. Obsérvese que, del hecho de que B sea abierto en (Y, d^*) y $i(X)$ sea denso en (Y, d^*) , se desprende que $B \cap i(X) \neq \emptyset$.

5. I es inyectiva.

Sean $x = (\rho_n(x_n))$ e $y = (\rho_n(y_n))$ con $I(x) = I(y)$. Entonces $i(x_n) \xrightarrow{d^*} I(x)$ y $i(y_n) \xrightarrow{d^*} I(y)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $k \geq n$ tal que $i(x_k) \in U_{I(x)n}^*$ y $i(y_k) \in U_{I(y)n}^*$. Se sigue pues que $U_{i(x_k)n}^* = U_{I(x)n}^* = U_{I(y)n}^* = U_{i(y_k)n}^*$. Por tanto, $i(y_k) \in U_{i(x_k)n}^*$, y, en virtud de la Observación 3.1.5, $y_k \in U_{x_k n}^*$, así que $U_{y_n n}^* = U_{y_k n}^* = U_{x_k n}^* = U_{x_n n}^*$. Concluimos que $U_{y_n n}^* = U_{x_n n}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente $\rho_n(x_n) = \rho_n(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $x = y$. Por ello I es inyectiva.

6. I es sobreyectiva.

Sea $y \in Y$. Por ser $i(X)$ denso, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $y_k \in i(X)$ tal que $y_k \in U_{y_k}^*$. Se sigue que $y_{k+1} \in U_{y, k+1}^* \subseteq U_{y_k}^* = U_{y_k k}^*$ y es también claro que $y_k \xrightarrow{d^*} y$. Entonces existe $x_k \in X$ de manera que $y_k = i(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se tiene pues que $i(x_{k+1}) \in U_{i(x_k)k}^*$, así que por la Observación 3.1.5 tenemos que $x_{k+1} \in U_{x_k k}^*$, y, por la Proposición 3.2.5, $x = (\rho_k(x_k)) \in \tilde{X}$. Nótese que por la definición de I tenemos que $I(x) = y$. Por consiguiente, I es sobreyectiva. □

Capítulo 4

Generación de una medida de probabilidad

El objetivo principal que perseguimos en este capítulo es generar una medida de probabilidad a partir de una estructura fractal. Con dicho propósito, tendremos en cuenta dos teoremas de construcción de medidas exteriores: el Método I y el Método II. Además, cabe destacar que dicha construcción será llevada a cabo en tres pasos, partiendo de una estructura fractal Γ en X que induzca una topología T_0 en dicho espacio. Véase la caracterización de dicha propiedad en términos de la estructura fractal en la Proposición 3.0.8.

En primer lugar trataremos de definir una primera medida en la bicompletación de X a partir de la familia $\mathcal{G} = \{U_{x_n}^* : n \in \mathbb{N}\}$. Una vez encontradas las condiciones que garantizan la definición de una probabilidad sobre los conjuntos $U_{x_n}^*$, en la segunda sección trataremos de definir dicha medida sobre los conjuntos $U_{x_n}^*$, en este caso partiendo de los elementos de la estructura fractal y ya, para culminar la construcción, en una tercera sección buscaremos condiciones que nos aseguren que la restricción de dicha medida al espacio original, X , nos proporciona una medida de probabilidad.

Para culminar con este capítulo, en la última sección se presentan una serie de ejemplos basados en la obtención de una medida de probabilidad en espacios con una estructura fractal. Dicha sección queda dividida en dos subsecciones. En la primera de ellas se pretende obtener una medida de probabilidad a partir de la definición de una premedida definida en los elementos de cada nivel de la estructura fractal conocida una variable aleatoria concreta. La idea es definir el peso de cada elemento de la estructura fractal haciendo uso de la función de distribución de probabilidad asociada a la variable aleatoria en cuestión. En cuanto a la segunda subsección, la obtención de la medida de probabilidad se realiza a través de una distribución uniforme de la masa entre los elementos de cada nivel de la estructura fractal o los elemen-

tos de la bicompletación, esto es, definiremos una premedida de forma que el valor de la misma en cada uno de los elementos de un nivel sea la misma. En definitiva, el objetivo de esta sección es ilustrar una serie de ejemplos que generalicen los presentados en la introducción del trabajo.

4.1. Definición de una medida en \tilde{X}

En esta sección mostraremos como construir una medida en \tilde{X} a partir de una premedida definida en los conjuntos $\rho_n(x) = U_{xn}^*$.

Debido a las propiedades de la isometría ρ que reflejamos en el capítulo anterior, con objeto de simplificar la notación, usaremos las identificaciones $x \equiv \rho(x)$, $X \equiv \rho(X)$, $U_{xn} \equiv \rho(U_{xn})$, etcétera.

Sea $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una estructura fractal en X , y denotemos $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{U_{xn}^* : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$. Sea ω una función $\omega : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ (una premedida) tal que:

1. $\sum_{\rho_1(x) \in G_1} \omega(\rho_1(x)) = 1$.
2. $\omega(\rho_n(x)) = \sum_{\rho_{n+1}(y) \in G_{n+1}, \rho_n(y) = \rho_n(x)} \omega(\rho_{n+1}(y))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $\rho_n(x) \in G_n$.

A partir de ahora nos referiremos a los dos puntos anteriores como las condiciones de distribución de masa.

Dichas condiciones podrán escribirse, alternativamente, como

1. $\sum_{x \in X} \omega(U_{x1}^*) = 1$.
2. $\omega(U_{xn}^*) = \sum_{y \in U_{xn}^*} \omega(U_{yn+1}^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$.

pero teniendo en cuenta que, en dicho caso, estamos empleando el convenio que presentamos en la Observación 4.1.1 y que usaremos con objeto de simplificar la notación en lo que resta de esta sección.

Observación 4.1.1. *La suma $\sum_{x \in A} \omega(U_{xn}^*)$ hace referencia a $\sum \{\omega(U_{xn}^*) : U_{xn}^* \in G_n \text{ con } x \in A\}$. Es decir, con el conjunto de índices de dicha suma, no nos referimos a los puntos de A sino a los conjuntos U_{xn}^* , ya que a muchos puntos de A les corresponde el mismo U_{xn}^* .*

Observación 4.1.2. *Nótese que las condiciones de distribución de la masa implican que $\sum_{\rho_n(x) \in G_n} \omega(\rho_n(x)) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ahora, sea $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{\rho}_n(x) : x \in \tilde{X}, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{U}_{xn}^* : x \in \tilde{X}; n \in \mathbb{N}\}$, donde $\tilde{\rho}_n(x) = \tilde{U}_{xn}^*$. Nótese que, por la Proposición 3.2.5.8, $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{U}_{xn}^* : x \in X; n \in \mathbb{N}\}$, y consideremos la función $\tilde{\omega} : \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow [0, 1]$ definida como $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*)$. Es sencillo comprobar que $\tilde{\omega}$ satisface las condiciones de distribución de masa para ω .

Sea μ la medida exterior en \tilde{X} dada por el Teorema 2.1.15 partiendo de $\tilde{\mathcal{G}}$ y $\tilde{\omega}$. Entonces μ se define para un subconjunto A de \tilde{X} como sigue: $\mu(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_i n_i}^*); A \subseteq \bigcup \tilde{U}_{x_i n_i}^*\}$, donde se considera el ínfimo sobre todos los recubrimientos numerables de A por elementos de $\tilde{\mathcal{G}}$.

De hecho, por las hipótesis sobre ω probaremos en la siguiente proposición que μ coincide con la medida exterior proporcionada por el Método II.

Proposición 4.1.3. *μ es una medida exterior métrica en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea μ_ε la medida exterior proporcionada por el Método I, determinada por $\tilde{\omega}$ usando la familia $\tilde{\mathcal{G}}_\varepsilon = \{A \in \tilde{\mathcal{G}} : \text{diam} A \leq \varepsilon\}$, donde el diámetro se ha considerado con respecto a la métrica \tilde{d}^* . Definamos $\overline{\mathcal{M}}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(E)$. Por consiguiente, $\overline{\mathcal{M}}$ es la medida exterior proporcionada por el Método II, que por el Teorema 2.1.17 es una medida exterior métrica. Así pues, solo tenemos que probar que $\overline{\mathcal{M}} = \mu$.

Sea $0 < \varepsilon \leq \delta$. Se tiene que $\tilde{\mathcal{G}}_\varepsilon \subseteq \tilde{\mathcal{G}}_\delta$ y por la Proposición 2.1.16 tenemos que $\mu_\varepsilon(E) \geq \mu_\delta(E)$ para todo $E \subseteq \tilde{X}$.

Por otra parte, si tomamos en consideración las igualdades $\tilde{\omega}(\tilde{\rho}_n(x)) = \sum_{\tilde{\phi}_n(\tilde{\rho}_{n+1}(y)) = \tilde{\rho}_n(x)} \tilde{\omega}(\tilde{\rho}_{n+1}(y))$ y $\tilde{\rho}_n(x) = \bigcup_{\tilde{\phi}_n(\tilde{\rho}_{n+1}(y)) = \tilde{\rho}_n(x)} \tilde{\rho}_{n+1}(y)$ recursivamente, es claro que, dado m de forma que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$, podemos sustituir los conjuntos \tilde{U}_{xn}^* con $\varepsilon < \text{diam}(\tilde{U}_{xn}^*) \leq \delta$ por la familia $\{\tilde{U}_{ym}^* : y \in U_{xn}^*\}$ ya que $\text{diam}(\tilde{U}_{ym}^*) \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

Podemos concluir que $\mu_\varepsilon = \mu_\delta$ y, por tanto, $\overline{\mathcal{M}} = \mu$. \square

Observemos que $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\tau}^*$, por lo que la σ -álgebra de Borel de $\tilde{\tau}$ está contenida en la σ -álgebra de Borel de $\tilde{\tau}^*$.

Corolario 4.1.4. *μ es una medida en las σ -álgebras de Borel de $(\tilde{X}, \tilde{\tau}^*)$ y $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$.*

A continuación se prueban algunas propiedades de μ .

Proposición 4.1.5. *μ es una extensión de $\tilde{\omega}$. De hecho, $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$ para todo $x \in X, n \in \mathbb{N}$ y $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$ para todo $x \in \tilde{X}, n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. 1. Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar, nótese que $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*)$ por la definición de $\tilde{\omega}$. Así, probemos la igualdad $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$.

Por una parte, es claro que $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) \leq \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$ usando el primer punto del Teorema 2.1.15 (recuérdese que μ es la medida exterior proporcionada por el Método I).

Por otra parte, supongamos que $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$, por lo que, por la definición de μ , existe un recubrimiento $\mathcal{A}' \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ de \tilde{U}_{xn}^* de forma que $\sum_{A \in \mathcal{A}'} \tilde{\omega}(A) < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$. Si existe $\tilde{U}_{yk}^* \in \mathcal{A}'$ tal que $y \notin \tilde{U}_{xn}^*$ entonces $\tilde{U}_{yk}^* \cap \tilde{U}_{xn}^* = \emptyset$, así que definiendo $\mathcal{A} = \{\tilde{U}_{yk}^* \in \mathcal{A}' : y \in \tilde{U}_{xn}^*\}$, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, \mathcal{A} es un recubrimiento de \tilde{U}_{xn}^* y $\sum_{A \in \mathcal{A}} \tilde{\omega}(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}'} \tilde{\omega}(A) < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$.

Debido al hecho de que $\tilde{\omega}(\tilde{\rho}_n(x)) = \sum_{\tilde{\phi}_n(\tilde{\rho}_{n+1}(y))=\tilde{\rho}_n(x)} \tilde{\omega}(\tilde{\rho}_{n+1}(y))$ y $\tilde{\rho}_n(x) = \bigcup_{\tilde{\phi}_n(\tilde{\rho}_{n+1}(y))=\tilde{\rho}_n(x)} \tilde{\rho}_{n+1}(y)$, existe $y \in \tilde{U}_{xn}^*$ tal que $\sum\{\tilde{\omega}(U) : U \in \mathcal{A}; U \subseteq \tilde{U}_{y,n+1}^*\} < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{y,n+1}^*)$. Pongamos $x_{n+1} = y$. Definiendo $x_k = x$ para cada $k \leq n$ y x_k para $k > n + 1$ por recursión de manera análoga a la definición de x_{n+1} , podemos definir una sucesión x_k tal que $x_{k+1} \in \tilde{U}_{x_k k}^*$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sum\{\tilde{\omega}(U) : U \in \mathcal{A}; U \subseteq \tilde{U}_{x_k k}^*\} < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_k k}^*)$ para todo $k \geq n$.

Por la Proposición 3.2.5.5 se sigue que $z = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Por otra parte, dado que $x_k \in \tilde{U}_{xn}^*$ para cada $k \in \mathbb{N}$, \tilde{U}_{xn}^* es cerrado en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) (Proposición 3.0.6) y x_k converge a z en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) (Proposición 3.2.5.4), se sigue que $z \in \tilde{U}_{xn}^*$. Como \mathcal{A} es un recubrimiento de \tilde{U}_{xn}^* , existe $\tilde{U}_{yk}^* \in \mathcal{A}$ (con $y \in \tilde{U}_{xn}^*$) tal que $z \in \tilde{U}_{yk}^*$. Puesto que $y \in \tilde{U}_{xn}^*$ y $\sum_{A \in \mathcal{A}} \tilde{\omega}(A) < \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$, se llega a que $k \geq n + 1$. En virtud de la Proposición 3.0.6, $\tilde{U}_{zk}^* = \tilde{U}_{yk}^*$, y por la Proposición 3.2.5.8, $\tilde{U}_{zk}^* = \tilde{U}_{x_k k}^*$ y entonces $\tilde{U}_{x_k k}^* = \tilde{U}_{yk}^* \in \mathcal{A}$, pero entonces $\sum\{\tilde{\omega}(U) : U \in \mathcal{A}; U \subseteq \tilde{U}_{x_k k}^*\} \geq \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_k k}^*)$, una contradicción con la definición de la sucesión x_k .

Concluimos que $\mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$.

2. Ahora, sean $x = (\rho_k(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$ y $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que por la Proposición 3.2.5.8, $\tilde{U}_{xn}^* = \tilde{U}_{x_n n}^*$. Por tanto, $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_n n}^*) = \mu(\tilde{U}_{x_n n}^*) = \mu(\tilde{U}_{xn}^*)$. □

Proposición 4.1.6. $\mu(\tilde{X}) = 1$ y, por tanto, μ es una medida de probabilidad en \tilde{X} .

Demostración. Es claro que $\mu(\tilde{X}) = \mu(\bigcup_{x \in \tilde{X}} \tilde{U}_{x1}^*) = \sum \mu(\tilde{U}_{x1}^*) = \sum \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x1}^*) = \sum \omega(U_{x1}^*) = 1$. □

Proposición 4.1.7. *Sea $A \in \Gamma_n$, entonces $\mu(\tilde{A}) = \sum \omega(U_{xn}^*) = \sum \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$, donde la primera suma es sobre la familia $\{U_{xn}^* : x \in A\}$ y la segunda es sobre la familia $\{\tilde{U}_{xn}^* : x \in A\} = \{\tilde{U}_{xn}^* : x \in \tilde{A}\}$.*

Demostración. En efecto, en virtud de la Proposición 3.0.6, para cada $m \geq n$, la familia $\mathcal{A} = \{\tilde{U}_{xm}^* : x \in A\}$ es una partición de \tilde{A} , por lo que por la Proposición 4.1.5 y el Corolario 4.1.4 (nótese que \tilde{A} es cerrado en \tilde{d}^* , por ser cerrado en \tilde{d}), $\mu(\tilde{A}) = \sum_{\mathcal{A}} \mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \sum_{\mathcal{A}} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$, y por la definición de $\tilde{\omega}$, $\omega(U_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$. \square

Busquemos ahora una manera más sencilla de calcular la medida de un conjunto abierto o cerrado en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .

Lema 4.1.8. *Sea F un conjunto cerrado de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . Entonces $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(F)$ donde $\tilde{U}_n^*(F) = \bigcup_{x \in F} \tilde{U}_{xn}^*$.*

Demostración. \subseteq) Es claro que $F \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(F)$.

\supseteq) Sea ahora $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(F)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in F$ de forma que $x \in \tilde{U}_{x_n n}^*$ y, por tanto, $\tilde{d}^*(x, x_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Luego $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de F que converge a x en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) y, como F es cerrado en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) , se tiene que $x \in F$. \square

El siguiente resultado nos permite calcular la medida, por niveles de la estructura fractal, de un conjunto cerrado en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .

Proposición 4.1.9. *Sea F un conjunto cerrado de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . Entonces $\mu(F) = \lim \mu_n(F)$ donde $\mu_n(F) = \sum \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$ y la suma es sobre la familia $\{\tilde{U}_{xn}^* : x \in F\}$.*

Demostración. En virtud del Lema 4.1.8, $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(F)$, y es claro que $\tilde{U}_{n+1}^*(F) \subseteq \tilde{U}_n^*(F)$. Además, $\mu_n(F) = \sum_{\mathcal{A}} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \mu(\bigcup_{\mathcal{A}} \tilde{U}_{xn}^*) = \mu(\tilde{U}_n^*(F))$, donde $\mathcal{A} = \{\tilde{U}_{xn}^* : x \in F\}$. Dado que μ es una medida (y, por ello, continua), se tiene que $\mu_n(F) = \mu(\tilde{U}_n^*(F)) \rightarrow \mu(F)$. \square

Ahora introducimos una proposición con el objetivo de obtener la medida, por niveles de la estructura fractal, de un conjunto abierto en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .

Proposición 4.1.10. *Sea G un conjunto abierto de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . Entonces $\mu(G) = \lim \mu_n(G)$ donde $\mu_n(G) = \sum_{\tilde{U}_{x_n n}^* \in \mathcal{G}_n : x \in G_n} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_n n}^*)$ y $G_n = \{x \in G : \tilde{U}_{x_n n}^* \subseteq G\}$, donde $\{x \in G : \tilde{U}_{x_n n}^* \subseteq G\}$ se refiere al conjunto $\{\tilde{U}_{x_n n}^* : x \in G\}$.*

Demostración. Sea G un conjunto abierto de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) , entonces podemos escribir $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(G_n)$ donde $G_n = \{x \in G : \tilde{U}_{xn}^* \subseteq G\}$. Es claro que $\tilde{U}_n(G_n) \subseteq \tilde{U}_{n+1}(G_{n+1})$. Además, $\mu_n(G) = \sum_{G_n} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \mu(\bigcup_{G_n} \tilde{U}_{xn}^*) = \mu(\tilde{U}_n(G_n))$. Dado que μ es una medida (y, por tanto, continua), se sigue que $\mu_n(G) = \mu(\tilde{U}_n(G_n)) \rightarrow \mu(G)$. \square

Lo siguiente que hacemos es probar la unicidad de la medida.

Proposición 4.1.11. *Sea δ una medida que verifica $\delta(\tilde{U}_{xn}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$ para todo $x \in \tilde{X}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta = \mu$ en la σ -álgebra de Borel de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .*

Demostración. Sea $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{A})$ donde $\mathfrak{A} = \{\tilde{U}_n^*(F) : F \subseteq \tilde{X}, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces \mathfrak{A} es un álgebra. En efecto, para todo $F, F' \subseteq \tilde{X}$ y $n \leq m$ se verifican:

1. $\tilde{U}_n^*(F) \cup \tilde{U}_m^*(F') \in \mathfrak{A}$. En efecto, esto es cierto debido al hecho de que $\tilde{U}_n^*(F) \cup \tilde{U}_m^*(F') = \tilde{U}_m^*(\tilde{U}_n^*(F) \cup F') \in \mathfrak{A}$, ya que $\tilde{U}_m^*(\tilde{U}_n^*(F)) = \tilde{U}_n^*(F)$.
2. $\tilde{U}_n^*(F) \cap \tilde{U}_m^*(F') \in \mathfrak{A}$. En efecto, esto es cierto debido al hecho de que $\tilde{U}_n^*(F) \cap \tilde{U}_m^*(F') = \tilde{U}_m^*(\tilde{U}_n^*(F) \cap \tilde{U}_m^*(F')) \in \mathfrak{A}$.
3. $\tilde{X} \setminus \tilde{U}_n^*(F) \in \mathfrak{A}$. En efecto, esto es cierto debido a que $\tilde{X} \setminus \tilde{U}_n^*(F) = \tilde{U}_n^*(\tilde{X} \setminus \tilde{U}_n^*(F)) \in \mathfrak{A}$.

Obsérvese que cada elemento de \mathfrak{A} es abierto en (\tilde{X}, \tilde{d}^*) , por lo que \mathfrak{S} está contenido en la σ -álgebra de Borel de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) , y por lo tanto μ y δ son medidas en \mathfrak{S} . Además, dados $n \in \mathbb{N}$ y $F \subseteq \tilde{X}$, $\mu(\tilde{U}_n^*(F)) = \mu(\bigcup_{x \in F} \tilde{U}_{xn}^*) = \sum_{x \in F} \mu(\tilde{U}_{xn}^*) = \sum_{x \in F} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \sum_{x \in F} \delta(\tilde{U}_{xn}^*) = \delta(\bigcup_{x \in F} \tilde{U}_{xn}^*) = \delta(\tilde{U}_n^*(F))$, lo que prueba que $\mu(A) = \delta(A)$, para todo $A \in \mathfrak{A}$. Por el Teorema 2.1.14, concluimos que $\mu = \delta$ en \mathfrak{S} .

Finalmente, si G es un abierto de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) , entonces $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n^*(G_n)$, donde $G_n = \{x \in G : \tilde{U}_{xn}^* \subseteq G\}$. En consecuencia, \mathfrak{S} es la σ -álgebra de Borel de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . \square

4.2. Definición de una medida en \tilde{X} a partir de la estructura fractal

En esta sección asumiremos que Γ es una estructura fractal teselación en X y usaremos la notación y la definición del capítulo anterior.

Lema 4.2.1. *Sea Γ un teselación. Entonces $A^\circ \cap B = \emptyset$ para todo $A, B \in \Gamma$ con $A \neq B$.*

Demostración. Supongamos que existen $A, B \in \Gamma$ con $A \neq B$ tales que $A^\circ \cap B \neq \emptyset$, y sea $x \in A^\circ \cap B = A^\circ \cap \overline{B^\circ}$ (puesto que $B = \overline{B^\circ}$). Así, $x \in A^\circ$ y $x \in \overline{B^\circ}$ y por lo tanto $A^\circ \cap B^\circ \neq \emptyset$, lo que es una contradicción con el hecho de que Γ sea teselación. Se sigue pues que $A^\circ \cap B = \emptyset$ para todo $A, B \in \Gamma$ con $A \neq B$. \square

Para cada $A \in \Gamma_n$, definamos $i_n(A) = A \setminus \bigcup_{B \in \Gamma_n; B \neq A} B$. Obsérvese que, dado que Γ es teselación, el lema previo nos garantiza que $\emptyset \neq A^\circ \subseteq i_n(A)$ para todo $A \in \Gamma_n$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, si $x \in i_n(A)$ entonces $U_{xn}^* = i_n(A)$.

Sea $\omega : \bigcup \Gamma_n \rightarrow [0, 1]$ una función que verifica las condiciones de distribución de masa, es decir:

1. $\sum_{A \in \Gamma_1} \omega(A) = 1$.
2. $\omega(A) = \sum_{B \in \Gamma_{n+1}, B \subseteq A} \omega(B)$, para todo $A \in \Gamma_n$.

A partir de ω , podemos definir una función (a la que llamaremos también ω) en \mathcal{G} como sigue:

$$\omega(\rho_n(x)) = \omega(U_{xn}^*) = \begin{cases} \omega(A) & \text{si } x \in i_n(A) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nótese que dados $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, si existe un solo elemento A de Γ_n que contenga a x , entonces $\omega(U_{xn}^*) = \omega(A)$, mientras que si hay más de un elemento de Γ_n que contiene a x , entonces $\omega(U_{xn}^*) = 0$.

Proposición 4.2.2. $\omega : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ verifica las condiciones de distribución de masa, es decir:

1. $\sum \omega(U_{xn}^*) = 1$ para cada n .
2. $\omega(U_{xn}^*) = \sum_{y \in U_{xn}^*} \omega(U_{y,n+1}^*)$ para $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \Gamma_n$ se tiene que $\omega(A) = \sum_{x \in A} \omega(U_{xn}^*) = \omega(U_{zn}^*)$ para cualquier $z \in i_n(A)$.

1. $\sum \omega(U_{xn}^*) = 1$ para cada n .
 $\sum_{x \in X} \omega(U_{x1}^*) = \sum_{A \in \Gamma_1; x \in i_1(A)} \omega(U_{x1}^*) = \sum_{A \in \Gamma_1} \omega(A) = 1$.
2. $\omega(U_{xn}^*) = \sum_{y \in U_{xn}^*} \omega(U_{y,n+1}^*)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Por una parte, supongamos que existen $A, B \in \Gamma_n$ con $A \neq B$ y tales que $x \in A \cap B$. Entonces $\omega(U_{xn}^*) = 0$.

Sea $y \in U_{xn}^*$ y supongamos que existe $C \in \Gamma_{n+1}$ de forma que $y \in i_n(C)$. Dado que $y \in U_{xn}^*$ se tiene que $y \in A \cap B$. Como $\Gamma_{n+1} \prec \prec \Gamma_n$ e $y \in i_n(C)$ se sigue que $y \in C \subseteq A$ e $y \in C \subseteq B$, y por lo tanto $C^\circ \subseteq A^\circ$ y $C^\circ \subseteq B^\circ$, así que $\emptyset \neq C^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, una contradicción. Concluimos pues que no existe ningún $C \in \Gamma_{n+1}$ tal que $y \in i_n(C)$. Por tanto $\omega(U_{y,n+1}^*) = 0$ para todo $y \in U_{xn}^*$ y se tiene la igualdad.

Por otra parte, supongamos que existe $A \in \Gamma_n$ de manera que $x \in i_n(A)$. Entonces $\omega(U_{xn}^*) = \omega(A) = \sum_{B \in \Gamma_{n+1}, B \subseteq A} \omega(B)$. Por la observación realizada al principio de la prueba, $\omega(B) = \sum_{y \in B} \omega(U_{y,n+1}^*)$ y, por ello, $\sum_{B \in \Gamma_{n+1}, B \subseteq A} \omega(B) = \sum_{y \in A} \omega(U_{y,n+1}^*)$. Puesto que $\omega(U_{y,n+1}^*) = 0$ si $y \notin i_n(A)$ y $i_n(A) = U_{xn}^*$ entonces $\sum_{y \in A} \omega(U_{y,n+1}^*) = \sum_{y \in U_{xn}^*} \omega(U_{y,n+1}^*)$. Por consiguiente, $\omega(U_{xn}^*) = \sum_{y \in U_{xn}^*} \omega(U_{y,n+1}^*)$.

□

Según la proposición anterior podemos aplicar las construcciones de la sección anterior para que podamos definir $\tilde{\omega}$, μ , etcétera.

Proposición 4.2.3. $\mu(\tilde{A}) = \omega(A)$ para todo $A \in \Gamma_n$ y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \in \Gamma_n$ y $z \in i_n(A)$. Entonces se tiene que $\mu(\tilde{A}) = \mu(\bigcup_{x \in A} \tilde{U}_{xn}^*) = \sum_{x \in A} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*) = \omega(U_{zn}^*) = \omega(A)$.

□

4.3. Definición de una medida en X

En las secciones anteriores hemos visto como generar una medida en \tilde{X} a partir de \mathcal{G} o de la estructura fractal $\mathbf{\Gamma}$. En esta sección exploraremos condiciones sobre ω que nos garanticen que la restricción de μ a X sea una medida de probabilidad (o lo que es lo mismo $\mu(X) = 1$ o $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$).

En primer lugar, veremos que si $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$, entonces μ es una medida de probabilidad en X y una extensión, no solo de ω , sino también de ω .

Teorema 4.3.1. *Supongamos que $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$. Entonces μ es una medida en las σ -álgebras de Borel de (X, d) y (X, d^*) y $\mu(X) = 1$. Además, $\mu(U_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ y si ω está definida a partir de $\mathbf{\Gamma}$ entonces $\mu(A) = \omega(A)$ para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, μ es una extensión de ω .*

Demostración. En primer lugar vamos a probar que X es μ -medible. Sea $F \subseteq \tilde{X}$, entonces $F = (F \cap X) \cup (F \setminus X)$. Se sigue que $\mu(F) \leq \mu(F \cap X)$

$X) + \mu(F \setminus X)$. Además, $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ implica que $\mu(F \setminus X) = 0$ y por lo tanto $\mu(F) \leq \mu(F \cap X)$. Por una parte, dado que $\mu(F \cap X) \leq \mu(F)$ por la monotonía de μ se sigue que $\mu(F) = \mu(F \cap X) = \mu(F \cap X) + \mu(F \setminus X)$. Por tanto, X es μ -medible.

A continuación veamos que μ es una medida en la σ -álgebra de Borel de (X, d) . Tal y como sabemos, la topología inducida por $\tau_{\tilde{d}^*}$ en X es τ_{d^*} , esto es, todo conjunto abierto $G' \in \tau_{d^*}$ puede escribirse como $G' = G \cap X$ donde $G \in \tau_{\tilde{d}^*}$. Puesto que G y X son medibles y dado que todos los conjuntos medibles forman una σ -álgebra, su intersección es también medible. Luego, G' es medible. En consecuencia, la σ -álgebra generada por los abiertos de τ_{d^*} , $\sigma(\tau_{d^*})$ está contenida en la σ -álgebra de los conjuntos μ -medibles. Se sigue que μ es una medida en la σ -álgebra de Borel de (X, d^*) , y como $\tau_d \subseteq \tau_{d^*}$, concluimos que μ es una medida en la σ -álgebra de Borel de (X, d) .

Ahora veamos que μ es una medida de probabilidad en X . En efecto, sabemos que μ es una medida de probabilidad en \tilde{X} (véase Sección 4.1) por lo que $1 = \mu(\tilde{X}) = \mu(X) + \mu(\tilde{X} \setminus X)$ de donde se sigue que $\mu(X) = 1$ ya que, por hipótesis, $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$.

Finalmente, comprobemos que μ es una extensión de ω . Obsérvese que $\mu(\tilde{U}_{x_n}^*) = \mu((\tilde{U}_{x_n}^* \cap X) \cup (\tilde{U}_{x_n}^* \cap (\tilde{X} \setminus X))) = \mu(\tilde{U}_{x_n}^* \cap X) = \mu(U_{x_n}^*)$ ya que $\tilde{\Gamma}$ es una extensión de Γ y $\tilde{U}_{x_n}^* \cap (\tilde{X} \setminus X) \subseteq \tilde{X} \setminus X$ implica que $\mu(\tilde{U}_{x_n}^* \cap (\tilde{X} \setminus X)) = 0$ porque $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ por hipótesis. Además, por la Proposición 4.1.5 se tiene que $\mu(U_{x_n}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_n}^*) = \omega(U_{x_n}^*)$.

Para terminar, $\mu(\tilde{A}) = \mu((\tilde{A} \cap X) \cup (\tilde{A} \cap (\tilde{X} \setminus X))) = \mu(\tilde{A} \cap X) = \mu(A)$ donde hemos usado que $\tilde{\Gamma}$ es una extensión de Γ y que el hecho de que $\tilde{A} \cap (\tilde{X} \setminus X) \subseteq \tilde{X} \setminus X$ implica que $\mu(\tilde{A} \cap (\tilde{X} \setminus X)) = 0$ debido a que $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ por hipótesis.

Además, por la Proposición 4.2.3 $\mu(\tilde{A}) = \omega(A)$ y como $\mu(\tilde{A}) = \mu(A)$, se tiene que $\mu(A) = \omega(A)$ para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Así, μ es una extensión de ω .

□

Definición 4.3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathcal{C}_n = \bigcup \{A \cap B : A, B \in \Gamma_n; A \neq B\}$.

Lema 4.3.3. Sea Γ una estructura fractal Cantor completa en X . Entonces $\tilde{X} \setminus X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$.

Demostración. Consideremos $x = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X} \setminus X$ y supongamos que $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ (podemos suponer que $m \geq n$) de forma que $x \notin St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$.

Se sigue que $x_m \notin \mathcal{C}_n$. De hecho, si $x_m \in \mathcal{C}_n$, sea $A \in \Gamma_m$ con $x_m \in A$. Entonces $x \in \tilde{A}$ y por lo tanto $x \in St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$, una contradicción.

Probemos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin \mathcal{C}_n$, esto, existe un único elemento $A_n \in \Gamma_n$ tal que $x_n \in A_n$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que existen $A \neq B \in \Gamma_n$ tales que $x_n \in A \cap B$. Sea $m \geq n$ de forma que $x \notin St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$. Entonces $x_m \notin \mathcal{C}_n$, pero dado que $U_{x_n n}^* = U_{x_m n}^*$, tenemos que $x_m \in A \cap B$, una contradicción.

Lo siguiente es probar que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, en otro caso tenemos que $A_{n+1} \not\subseteq A_n$, por lo que existe $B \in \Gamma_n$ con $B \neq A_n$ y de manera que $A_{n+1} \subseteq B$, pero entonces $x_{n+1} \in B$, y como $U_{x_n n}^* = U_{x_{n+1} n}^*$, llegamos a que $x_n \in A_n \cap B$, de donde $x_n \in \mathcal{C}_n$, una contradicción.

Del hecho de que Γ sea Cantor completa, y de que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión con $A_n \in \Gamma_n$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$ se desprende la existencia de un $z \in X$ tal que $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Debido a que $x \notin X$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $U_{x_n n}^* \neq U_{z n}^*$, y por lo tanto existe $B_n \in \Gamma_n$ con $z \in B_n$ pero $x_n \notin B_n$. Por consiguiente, $B_n \neq A_n$ y $z \in A_n \cap B_n$, por lo que $z \in \mathcal{C}_n$. Por una parte, del hecho de que $x, z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ se obtiene que $x \in St(z, \tilde{\Gamma}_k) \subseteq St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por hipótesis, existe $m \geq n$ de forma que $x \notin St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$, una contradicción.

Concluimos pues que $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$. □

Definición 4.3.4. [10] Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior definida en un conjunto X . Un conjunto $A \subseteq X$ es $\overline{\mathcal{M}}$ -medible en el sentido de Carathéodory) si, y solo si $\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ para todo conjunto $E \subseteq X$.

Además, los conjuntos $\overline{\mathcal{M}}$ -medibles forman un σ -álgebra y $\overline{\mathcal{M}}$ restringida a dicho σ -álgebra es una medida.

En el siguiente teorema, $\omega(St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m))$ se referirá a $\sum_{U_{xm}^* \subseteq St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)} \omega(U_{xm}^*)$. Nótese que si definimos ω en Γ , entonces la suma anterior queda como $\sum_{U_{xm}^* \subseteq St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)} \omega(U_{xm}^*) = \sum_{A \in \Gamma_m; A \cap \mathcal{C}_n \neq \emptyset} \omega(A)$.

Teorema 4.3.5. Sea Γ una estructura fractal Cantor completa en X y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\omega(St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)) \rightarrow 0$. Entonces μ es una medida en las σ -álgebras de Borel de (X, d) y (X, d^*) y $\mu(X) = 1$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_{m+1}) \subseteq St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$, por la continuidad de μ tenemos que $\mu(St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) \rightarrow \mu(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m))$.

Por otra parte,

$$\mu(St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) = \sum_{\tilde{U}_{xm}^* \subseteq St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xm}^*) = \sum_{U_{xm}^* \subseteq St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)} \omega(U_{xm}^*) = \omega(St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m))$$

Por hipótesis $\omega(St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)) \rightarrow 0$, de donde $\mu(St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) \rightarrow 0$ y, por tanto, $\mu(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, por el lema anterior es $\tilde{X} \setminus X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)$, por lo que $\mu(\tilde{X} \setminus X) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} St(\mathcal{C}_n, \tilde{\Gamma}_m)) = 0$. Por tanto, $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ y, por el Teorema 4.3.1, X es μ -medible y además $\mu(X) = 1$, esto es, μ es una medida de probabilidad en las σ -álgebras de Borel de (X, d) y (X, d^*) . □

Nótese que si $A \cap B = \emptyset$ para cualquier par de elementos $A, B \in \Gamma_n$ y todo n entonces $C_n = \emptyset$ para todo n lo que implica que $\omega(St(\mathcal{C}_n, \Gamma_m)) \rightarrow 0$ y, en consecuencia, en virtud del Teorema 4.3.5 queda probado el siguiente

Corolario 4.3.6. *Sea Γ una estructura fractal Cantor completa en X de forma que $A \cap B = \emptyset$ para cualesquiera $A, B \in \Gamma_n$ con $A \neq B$ y para todo n , entonces μ es una medida de probabilidad en X .*

Observación 4.3.7. *Nótese que el corolario anterior generaliza el primero de los ejemplos presentados en la introducción con objeto de ilustrar la distribución de masa entre conjuntos.*

A partir del teorema recientemente probado puede obtenerse, además, los siguientes resultados:

Proposición 4.3.8. *Sea Γ una estructura fractal en X , entonces μ es una extensión de ω si, y solo si $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$.*

Demostración. \Leftarrow) Es bien sabido en virtud del Teorema 4.3.1.

\Rightarrow) tenemos que distinguir dos casos dependiendo de las estructuras con respecto a las cuales estemos suponiendo que μ es una extensión de ω :

- Supongamos que $\mu(U_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*)$. Podemos escribir $X = \bigcup_{x \in X} U_{x1}^*$ donde $\bigcup_{x \in X} U_{x1}^*$ hace referencia al conjunto $\{\bigcup U_{x1}^* : U_{x1}^* \in G_1 \text{ con } x \in X\}$. Luego, $\mu(X) = \mu(\bigcup_{x \in X} U_{x1}^*) = \sum \mu(U_{x1}^*) = \sum \omega(U_{x1}^*) = 1$.
- Supongamos que $\mu(A) = \omega(A)$, para todo $A \in \Gamma_n$. Por una parte, podemos escribir $A \cup B = i_1(A) \cup i_1(B) \cup U_{x_1 1}^* \cup \dots \cup U_{x_n 1}^*$, donde $x_i \in C_1$, lo que implica que $\mu(A \cup B) = \mu(i_1(A)) + \mu(i_1(B))$. Puesto que $\mu(A) = \omega(A)$ para todo $A \in \Gamma_n$, se sigue que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Razonando por inducción se llega a que $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \omega(A_i)$. Si tomamos límite cuando n tiende a infinito, tenemos que $\sum_{i=1}^n \omega(A_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \omega(A_i) = 1$. Además, $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Por tanto, si juntamos las expresiones obtenidas: $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ y $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \rightarrow 1$ concluimos que $\mu(X) = 1$.

En ambos casos tenemos que $\mu(X) = 1$, por lo que $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$. \square

Corolario 4.3.9. *Si X es bicompleto, entonces μ es una medida de probabilidad en X .*

Demostración. Supongamos que X es bicompleto, entonces $X = \tilde{X}$. Ahora bien, ya sabemos que $\mu(\tilde{X}) = 1$ por lo que $\mu(X) = 1$. \square

Una condición necesaria para que μ sea una medida de probabilidad en X queda recogida en el siguiente

Corolario 4.3.10. *Supongamos que μ es una medida de probabilidad en X , entonces $\omega(U_{x_n n}^*) \rightarrow 0$ para toda sucesión decreciente $U_{x_n n}^*$ con $\bigcap U_{x_n n}^* = \emptyset$.*

Demostración. Sea $U_{x_n n}^*$ una sucesión decreciente de forma que $\bigcap U_{x_n n}^* = \emptyset$, entonces $U_{x_{n+1} n}^* = U_{x_n n}^*$, esto es, $\tilde{x} = (x_n) \in \tilde{X}$. De hecho, $\tilde{x} \in \bigcap \tilde{U}_{x_n n}^*$. Ahora bien, como $U_{x_n n}^*$ es decreciente, su límite es $\bigcap U_{x_n n}^*$. El hecho de que μ sea continua implica que $\lim \mu(U_{x_n n}^*) = \mu(\bigcap U_{x_n n}^*) = \mu(\{\tilde{x}\}) = 0$ ya que μ es una medida en X . \square

4.4. Ejemplos

En esta sección introducimos algunos ejemplos de construcción de diferentes medidas en espacios con diferentes estructuras fractales de acuerdo con los estudios llevados a cabo en las secciones anteriores.

Con este propósito, vamos a mostrar dos posibles construcciones dependiendo de la información de la que partimos para obtener la medida.

4.4.1. Obtención de una medida a partir de una variable aleatoria conocida

A continuación proporcionamos un método con el objetivo de obtener, en dos situaciones diferentes, una estructura fractal, Γ , y una premedida ω de forma que dicha premedida coincida con la recientemente construida medida μ , la cual va a estar generada por una variable aleatoria continua y su función de distribución de probabilidad correspondiente.

Ejemplo 4.4.1. *La estructura fractal natural en el espacio euclídeo \mathbb{R} es la definida como la familia numerable de recubrimientos $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\Gamma_n = \{[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] : k \in \mathbb{Z}\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definimos, para esta estructura fractal, $\omega(A) = \omega([a, b]) = F(b) - F(a)$, para cada $A \in \Gamma_n$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Esto nos proporciona una medida en X de acuerdo con la construcción llevada a cabo previamente.

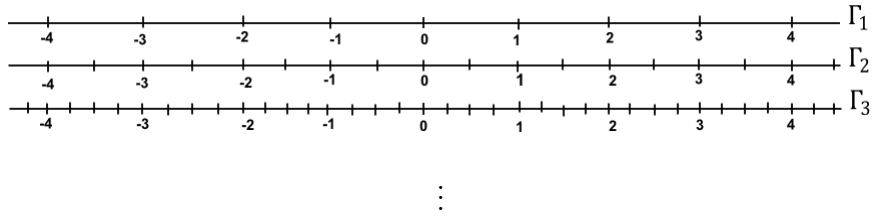


Figura 4.1: Primeros tres niveles de la estructura fractal natural en \mathbb{R}

Vamos a probar que, en efecto, la medida μ obtenida a partir de la pre-medida ω siguiendo la construcción previa es una medida de probabilidad en X .

Nótese que si definimos $\tilde{C}_n = \bigcap_m St(C_n, \tilde{\Gamma}_m)$, dicho conjunto es numerable. En virtud del Lema 4.3.3, $\tilde{X} \setminus X \subseteq \bigcup_n \tilde{C}_n$, y como dicha unión es numerable y μ es una medida y, por tanto, subaditiva, es $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ de donde se sigue que $\mu(X) = 1$ que es lo que buscábamos.

Ejemplo 4.4.2. (\mathbb{R}, Γ) donde Γ es una estructura fractal cuyos niveles se definen como $\Gamma_n = \{] - \infty, -n] \} \cup \{ [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] : k = -n2^{n-1}, \dots, n2^{n-1} - 1 \} \cup \{ [n, +\infty[\}$.

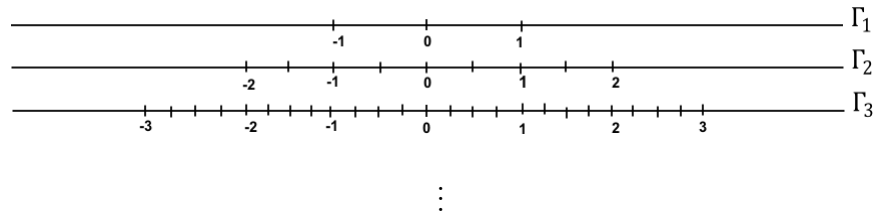


Figura 4.2: Tres primeros niveles de la estructura fractal Γ en \mathbb{R}

Definimos $\omega(A) = \omega([a, b]) = F(b) - F(a)$, para todo $A \in \Gamma_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$ donde F es la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria de tipo continuo.

Vamos a probar que, en efecto, la medida μ obtenida a partir de la pre-medida ω es, en efecto, una medida de probabilidad es análoga a la llevaba a cabo para el ejemplo anterior.

Además, podemos definir una estructura fractal, Δ , en X a partir de una estructura fractal finita, Γ , en $[0, 1]$ de forma que $\omega(A)$ sea uniforme para cada $A \in \Delta_n$ y cada $n \in \mathbb{N}$.

A continuación mostramos cómo construir la estructura fractal Δ en \mathbb{R} a partir de la estructura fractal natural en $[0, 1]$ y una variable aleatoria conocida.

Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X y consideremos $([0, 1], \Gamma)$ donde Γ es la estructura fractal natural. Los niveles de la nueva estructura fractal, Δ , se determinan a partir de Δ como sigue: $\Delta_n = \{F^{-1}(A) : A \in \Gamma_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$, es claro que podemos escribir $B = [F^{-1}(\frac{k}{2^n}), F^{-1}(\frac{k+1}{2^n})] = F^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}])$ y, por tanto, $\omega(B) = \frac{1}{2^n}$ para cada nivel n de la estructura fractal Δ .

Al igual que para los ejemplos anteriores y de manera análoga se puede probar que μ obtenida a partir de ω es una medida de probabilidad en X .

Por otro lado, de manera análoga al ejemplo anterior se puede justificar que $\mu(\tilde{X} \setminus X) = 0$ de donde, en virtud del Teorema 4.3.1 se tiene que $\mu(X) = 1$, es decir, μ es una medida de probabilidad en X .

Ejemplo 4.4.3. Consideremos la variable aleatoria $X \sim \varepsilon(1)$. Su función de distribución de probabilidad es $F \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Si consideramos la estructura fractal natural en $[0, 1]$, entonces los elementos de los primeros niveles de la estructura fractal Δ cuyos niveles $\Delta_n = \{F^{-1}(A) : A \in \Gamma_n\}$ son:

$$\Delta_1 = \{F^{-1}([0, \frac{1}{2}]), F^{-1}([\frac{1}{2}, 1])\} = \{]-\infty, \ln 2], [\ln 2, +\infty[$$

$$\Delta_2 = \{]-\infty, \ln \frac{4}{3}], [\ln \frac{4}{3}, \ln 2], [\ln 2, \ln 4], [\ln 4, +\infty[$$

⋮

Por ello, $\omega(A) = \frac{1}{2^n}$, para todo $A \in \Delta_n$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2. Obtención de una medida a partir de una definición uniforme de ω

La idea llevada a cabo en esta subsección consiste en definir una premedida ω a partir de una estructura fractal finita Γ de forma que $\omega(A)$ tenga un valor uniforme para cada $A \in \Gamma$ y para cada nivel n .

Por un lado, vamos a definir una medida en X . Para el primer nivel escribimos $\omega(A) = \frac{1}{\#\Gamma_1}$, para todo $A \in \Gamma_1$ donde $\#A$ denota el cardinal de A . Sea ahora $A \in \Gamma_2$ con $A \subseteq B \in \Gamma_1$, podemos definir $\omega(A) = \frac{\omega(B)}{\#\{C \in \Gamma_2: C \subseteq B\}}$ con el objetivo de asegurar que todos los elementos de B tengan asignada la misma premedida. Análogamente, sean $A \in \Gamma_{n+1}$ y $B \in \Gamma_n$ tales que $A \subseteq B$, entonces $\omega(A) = \frac{\omega(B)}{\#\{C \in \Gamma_{n+1}: C \subseteq B\}}$.

En otras palabras, la masa de $A \in \Gamma_n$ ha sido distribuida entre sus subconjuntos de Γ_{n+1} de manera uniforme.

Ejemplo 4.4.4. Sea X el triángulo de Sierpinski y $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow X$ las similaridades que definen dicho fractal.

Dado que estamos tratando con un sistema de funciones iteradas que no se solapan compuesto por 3 similaridades con factores de contracción $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2}$, entonces la dimensión fractal s de dicha figura satisface la ecuación $c_1^s + c_2^s + c_3^s = 1$, esto es, $s = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Por tanto $\omega(f_{i1} \circ \dots \circ f_{in}(X)) = c_{i1}^s \dots c_{in}^s$.

Luego, tenemos una distribución uniforme de ω de acuerdo con la construcción anterior:

$$\omega(f_1(X)) = \omega(f_2(X)) = \omega(f_3(X)) = \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{3}$$

$$\omega(f_{11}(X)) = \omega(f_{12}(X)) = \dots = \omega(f_{32}(X)) = \omega(f_{33}(X)) = \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{9}$$

⋮

Por otro lado definimos una medida en \tilde{X} usando los conjuntos U_{xn}^* . La idea es similar a la anterior. Podemos escribir $\omega(U_{x1}^*) = \frac{1}{\#G_1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, para el segundo nivel $\omega(U_{x2}^*) = \frac{\omega(U_{x1}^*)}{\#\{U_{x2}^* \in G_2: U_{x2}^* \subseteq U_{x1}^*\}}$. Análogamente, sean $U_{xn+1}^* \in G_{n+1}$ y $U_{xn}^* \in G_n$ entonces $\omega(U_{xn+1}^*) = \frac{\omega(U_{xn}^*)}{\#\{U_{xn+1}^* \in G_{n+1}: U_{xn+1}^* \subseteq U_{xn}^*\}}$.

Ejemplo 4.4.5. Consideremos $([0, 1], \Gamma)$ donde Γ es la estructura fractal natural. De acuerdo con la construcción anterior ω se distribuye como sigue:

Dado que $G_1 = \{U_{\frac{1}{2}}^*, U_{01}^*, U_{11}^*\}$, $\omega(U_{x1}^*) = \frac{1}{3}$ para todo $x \in [0, 1]$.

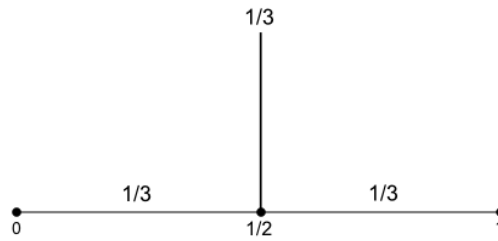
De la misma forma, $\omega(U_{x2}^*) = \frac{1}{9}$ para todo $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ y $\omega(U_{\frac{1}{2}2}^*) = \frac{1}{3}$.

$\omega(U_{x3}^*) = \frac{1}{27}$ para todo $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$, $\omega(U_{\frac{1}{2}2}^*) = \frac{1}{3}$ y $\omega(U_{\frac{1}{4}3}^*) = \frac{1}{9}$.

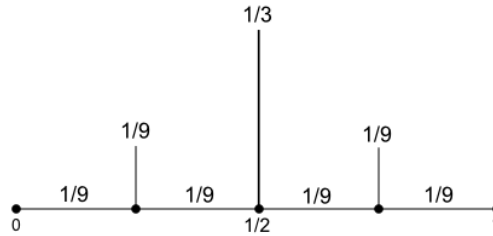
⋮

Puede verse la distribución de masa llevada a cabo de manera gráfica en la Figura 4.3.

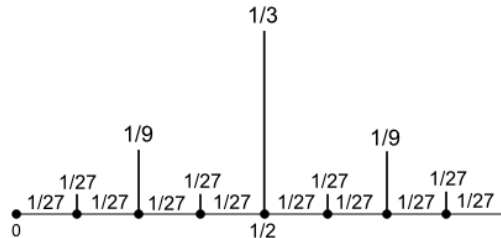
Nótese que la masa queda distribuída entre los puntos de la forma $\frac{k}{2^n}$, para todo $k = 1, \dots, 2^n - 1$. De hecho, $\mu(\{\frac{k}{2^n} : k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\}) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \omega(\frac{i}{2^n})$. Luego, la medida de X puede escribirse como $\mu(X) = \mu(\bigcup_n \{\frac{k}{2^n} : k = 1, \dots, 2^n - 1\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1$ siendo, por tanto, μ una medida de probabilidad discreta en X .



(a) Distribución para el primer nivel, Γ_1



(b) Distribución para el segundo nivel, Γ_2



(c) Distribución para el tercer nivel, Γ_3

Figura 4.3: Distribución de masa uniforme por niveles

Obsérvese que una distribución similar de la masa se lleva a cabo para definir cascadas multiplicativas, como puede verse en en Capítulo 1 del trabajo.

Capítulo 5

Función de distribución

5.1. Definición de la función de distribución

En esta sección se pretende definir una función de distribución a partir de una medida μ definida sobre la completación de X . Posteriormente, este concepto se trasladará a una función de distribución que vendrá dada en términos de la medida construida en el capítulo anterior.

Previamente a ponernos manos a la obra con la definición de dicha función nótese que cada punto $x \in \tilde{X}$ puede escribirse como una sucesión, $x_{w_1 \dots w_n \dots}$ de forma que $\tilde{U}_{xn}^* = \tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n \dots n}}^*$. Consideremos el siguiente orden en \tilde{X} : $x \leq y$ si, y solo si $w_1 \dots w_k \dots \leq u_1 \dots u_k \dots$ para todo k donde estamos considerando el orden lexicográfico, esto es, $x \leq y$ si, y solo si $w_1 < u_1$ o $w_1 = u_1 \wedge w_2 < u_2$ o \dots . En definitiva:

Definición 5.1.1. *Podemos enumerar $G_1 = \{g_1, g_2, \dots\}$. A continuación enumeramos G_2 de forma que $g_i = g_{i1} \cup g_{i2} \cup \dots$ para cada $g_i \in G_1$, y definimos el orden lexicográfico en G_2 .*

Dicho orden induce un orden en \tilde{X} dado por $x \leq y$ si, y solo si $\tilde{U}_{xn}^ \leq \tilde{U}_{yn}^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Una vez considerado un orden en \tilde{X} procedemos a la definición de la función de distribución en \tilde{X} para una medida μ :

Definición 5.1.2. *La función de distribución de una medida de probabilidad μ sobre \tilde{X} es $F : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ definida como $F(x) = \mu(\leq x)$, donde $\leq x = \{y \in \tilde{X} : y \leq x\}$.*

Además, necesitamos introducir el concepto de límite cuando $x \rightarrow \infty$ partiendo del orden definido en \tilde{X} con objeto de ilustrar algunas propiedades de F posteriormente.

Definición 5.1.3. Sea $F : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$, diremos que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in \tilde{X}$ existe $y \in \tilde{X}$ de forma que $y \geq x$ y, además, $1 - F(y) < \varepsilon$.

Las propiedades que verifica F quedan recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.4. Sea F una función de distribución sobre \tilde{X} asociada a una medida μ , entonces se verifican:

1. F es monótona no decreciente.
2. F es continua a la derecha con respecto a la topología τ_{d^*} .
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Demostración. 1. Este hecho es obvio si tenemos en cuenta la monotonía de μ la cual se desprende del hecho de que μ sea una medida.

2. Con objeto de probar la continuidad a la derecha de F sea x_n una sucesión de puntos de \tilde{X} convergente a x en la topología τ_{d^*} con $x_n \geq x$ para todo n . Veamos pues que $F(x_n) \rightarrow F(x)$.

Sea $z \leq x_n$ para todo n , vamos a probar que entonces $z \leq x$. En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$, entonces de la convergencia de la sucesión x_n a x en la topología τ_{d^*} se sigue la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \in \tilde{U}_{xm}^*$, para todo $n \geq n_0$, lo que implica que $\tilde{U}_{xm}^* = \tilde{U}_{x_n m}^*$, para todo $n \geq n_0$. Ahora bien, como $z \leq x_n$, se llega a que $\tilde{U}_{zm}^* \leq \tilde{U}_{x_n m}^*$ de donde $z \leq x$.

Como el hecho de que $z \leq x_n$ implica que $z \leq x$, podemos afirmar que $\bigcap_n (\leq x_n) = \leq x$. Además, $\leq x_n$ es una sucesión monótona decreciente por lo que $\leq x_n \rightarrow \bigcap_n (\leq x_n) = \leq x$. Por tanto, en virtud de la continuidad de la medida μ , se tiene que $\mu(\leq x_n) \rightarrow \mu(\leq x)$, esto es, $F(x_n) \rightarrow F(x)$.

3. Con objeto de probarlo vamos a distinguir dos casos dependiendo de si existe el máximo de \tilde{X} o no:

- a) Existe $\text{máx } \tilde{X}$. En este caso $F(\text{máx } \tilde{X}) = \mu(\tilde{X}) = 1$, lo que implica que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \tilde{X}$, entonces $\text{máx } \tilde{X} \geq x$ y $1 - \varepsilon < F(\text{máx } \tilde{X})$. Por consiguiente $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

- b) Supongamos que no existe $\max \tilde{X}$, entonces es porque o bien G_1 es finito o bien existe un n tal que el último elemento de G_i se descompone en una unión finita de elementos en G_{i+1} , para todo $i < n - 1$, pero el último elemento de G_{n-1} se descompone en una unión infinita de elementos en G_n entonces G_n puede escribirse como $G_n = \{g_{\dots}, \dots, g_{w1}, g_{w2}, \dots\}$ donde g_w denota el último elemento de G_{n-1} . Si $g_{wi} = \tilde{U}_{x_i n}^*$, entonces se tiene que $\bigcup(\leq x_i) = \tilde{X}$. Ahora bien, dado que $\leq x_i$ es una sucesión monótona creciente, es $\leq x_i \rightarrow \bigcup(\leq x_i) = \tilde{X}$. Por la continuidad de la medida μ se llega a que $\mu(\leq x_i) \rightarrow \mu(\tilde{X}) = 1$. Aplicando el razonamiento llevado a cabo en el apartado anterior se concluye que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

□

Definición 5.1.5. Definimos la función $h_n^+(x) : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ como la dada por $h_n^+(x) = \sum \{\tilde{\omega}(g) : g \in G_n; g \leq \tilde{U}_{xn}^*\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También definimos $h_n^- : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ como la dada por $h_n^-(x) = \sum \{\tilde{\omega}(g) : g \in G_n; g < \tilde{U}_{xn}^*\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.1.6. $\lim h_n^+(x) = \lim h_n^-(x) + \mu(\{x\})$.

Demostración. Es claro, teniendo en cuenta la definición de h_n^+ y h_n^- , que $h_n^+(x) = h_n^-(x) + \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \tilde{X}$. Por tanto, tomando límites en la igualdad anterior tenemos que $\lim h_n^+(x) = \lim h_n^-(x) + \mu(\{x\})$ ya que $\{x\} = \bigcap \tilde{U}_{xn}^*$ por el hecho de ser X T_0 con la topología τ_d (recuérdese que se indicó dicha suposición al comienzo del Capítulo 4) y $\mu(\{x\}) = \lim \tilde{\omega}(\tilde{U}_{xn}^*)$.

□

A continuación se presenta la descripción de la función de distribución que surge de considerar como medida la construida en el capítulo anterior, a la cual nos referiremos como μ_{Γ} . En este contexto, el siguiente teorema muestra que es posible calcular la función de distribución evaluada en cualquier punto a partir de la premedida de la que se parte.

Teorema 5.1.7. La función de distribución asociada a la medida μ_{Γ} , F_{μ} , se puede calcular como $F_{\mu}(x) = \lim h_n^+(x)$, donde $h_n^+(x) : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ es la dada por $h_n^+(x) = \sum \{\tilde{\omega}(g) : g \in G_n; g \leq \tilde{U}_{xn}^*\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Obsérvese que $0 \leq h_{n+1}^+(x) \leq h_n^+(x)$ para todo n y todo $x \in \tilde{X}$, de donde se sigue la existencia del límite de $h_n^+(x)$, ya que $h_n^+(x)$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente.

Vamos a probar este resultado denotando por μ a la medida μ_{Γ} y por F a la función de distribución F_{μ} . Hemos de comprobar que $\mu(\leq x) =$

$\lim h_n^+(x)$. Por una parte, sabemos que $\lim h_n^+(x) = \lim \sum \{\tilde{\omega}(g) : g \in G_n; g \leq \tilde{U}_{xn}^*\} = \lim \sum_{u \leq x} \mu(U_{un}^*) = \lim \mu(\bigcup_{u \leq x} U_{un}^*)$. Ahora bien, es claro que $\leq x \subseteq \bigcup_{u \leq x} U_{un}^*$ para todo n . Por la monotonía de la medida μ se tiene entonces que $\mu(\leq x) \leq \mu(\bigcup_{u \leq x} U_{un}^*)$ para todo n . Si tomamos límites se obtiene $\mu(\leq x) \leq \lim \mu(\bigcup_{u \leq x} U_{un}^*) = \lim h_n^+(x)$, de donde $F(x) = \mu(\leq x) \leq \lim h_n^+(x)$.

Por otro lado, probemos que $\lim h_n^+(x) \leq \mu(\leq x)$. Obsérvese que $\{x\} \cup \bigcup_{u < x} U_{un}^* \subseteq \leq x$. Por consiguiente, $\mu(\{x\}) + \mu(\bigcup_{u < x} U_{un}^*) \leq \mu(\leq x)$, esto es, $\mu(\{x\}) + h_n^-(x) \leq \mu(\leq x)$. Si tomamos límites, en virtud del Lema 5.1.6, podemos escribir $\mu(\{x\}) + \lim h_n^-(x) - \mu(\{x\}) \leq \mu(\leq x)$ y, por ello, $\lim h_n^+(x) \leq \mu(\leq x)$.

Así, $F(x) = \lim h_n^+(x)$. □

Proposición 5.1.8. $F(x) = \lim h_n^-(x) + \mu(\{x\})$.

Demostración. La demostración es inmediata. Se sigue a partir del Lema 5.1.6 y el Teorema 5.1.7. □

Observación 5.1.9. *Por cuestión de notación aclararemos que, a partir de ahora, nos referiremos a la función de distribución asociada a μ_{Γ} como F_{μ} o, alternativamente, como F_{ω} . También emplearemos la identificación $F \equiv F_{\mu}$ en caso de que no quepa lugar a duda en cuanto a la medida μ se refiere.*

Observación 5.1.10. *Nótese que si definimos la función h_n^+ sobre los puntos de X , entonces ésta queda como $h_n^+(x) = \sum \{\tilde{\omega}(g) : g \in G_n; g \leq \tilde{U}_{xn}^*\} = \sum \{\omega(g) : g \in G_n; g \leq U_{xn}^*\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

En vista de la observación anterior surge la siguiente:

Observación 5.1.11. *El Teorema 5.1.7 resulta de gran importancia en el contexto en el que estamos trabajando ya que nos proporciona una forma de calcular el valor de una función de distribución en un punto de la completación \tilde{X} , e incluso nos permite obtener el valor de la misma en un punto cualquier de X , en ambos casos exclusivamente a través de la premedida de la que se parte. En el primero de los casos se parte de $\tilde{\omega}$ y en el segundo de $\tilde{\omega}$ o de ω .*

La siguiente proposición nos proporciona una condición necesaria para que la función de distribución de la medida construida en la sección anterior sea continua.

Proposición 5.1.12. *Si $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n n}}) \rightarrow 0$ para todo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, entonces F_{μ} es continua en la topología $\tau_{\tilde{\mathfrak{d}}^*}$.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n n}}^*) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $x_n \xrightarrow{\tau_d^*} x$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $n_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \tilde{U}_{xm}^*$ para todo $n \geq n_0(m)$ lo que implica que $F(x_n), F(x) \in [h_m^-(x), h_m^+(x)]$ y, en consecuencia, $|F(x_n) - F(x)| \leq \omega(U_{xm}^*)$. Por la suposición hecha, si tomamos límite cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene que $|F(x_n) - F(x)| \rightarrow 0$ lo que supone que F sea continua. \square

Lo siguiente es definir una premedida a partir de una función que verifique las propiedades recogidas en la Proposición 5.1.4, premedida que, a posteriori, nos proporcionará una función de distribución que coincidirá con la función de partida.

Definición 5.1.13. *Sea Γ una estructura fractal y sea $F : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ una función monótona no decreciente, continua a la derecha en la topología τ_{d^*} de forma que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Definimos la premedida ω_F como $\omega_F(U_{xn}^*) = \sup F(\tilde{U}_{xn}^*) - \sup F(\bigcup \{\tilde{U}_{yn}^* : \tilde{U}_{yn}^* \in G_n; \tilde{U}_{yn}^* < \tilde{U}_{xn}^*\})$ con el convenio de que $\sup F(\emptyset) = 0$.*

Teorema 5.1.14. *Sea $F : \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ una función monótona no decreciente, continua a la derecha en la topología τ_{d^*} de forma que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Entonces $\omega_F : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ verifica las condiciones de distribución de masa y $F = F_{\omega_F}$. En particular, F es la función de distribución de una medida definida en \tilde{X} .*

Demostración. Vamos a probar, en primer lugar, que ω_F verifica las condiciones de distribución de masa. Con dicho propósito vamos a distinguir dos casos dependiendo de si G_n es finito o no:

1. $\sum_{\rho_1(x) \in G_1} \omega(U_{x1}^*) = 1$.
 - Supongamos que G_1 es infinito. Obsérvese que $\sum_{\rho_1(x) \in G_1} \omega(U_{x1}^*) = 1$ si, y solo si $\sum^k \omega(U_{x_{i1}^*}) = \sup F(\tilde{U}_{x_{k1}^*}) \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Nótese que $x_k \rightarrow \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $x_{n_0} \geq x_k$ y $1 - \varepsilon < F(x_{n_0})$ (donde hemos tenido en cuenta que el hecho de que $x \rightarrow \infty$ implica que $F(x) \rightarrow 1$). Sea ahora $n \geq n_0$, entonces $1 - \varepsilon < F(x_{n_0}) \leq F(x_n)$ ya que F es monótona no decreciente y $x_i < x_{i+1}$ para todo i . Por tanto, $1 - \varepsilon < F(x_n) \leq \sup F(\tilde{U}_{x_{n1}^*})$ lo que significa que $\sup F(\tilde{U}_{x_{n1}^*}) \rightarrow 1$.
 - Supongamos que G_1 es finito, entonces podremos escribir $G_1 = \{\rho_1(x_1), \dots, \rho_1(x_k)\}$. En este caso, la suma $\sum_i \omega(U_{x_{i1}^*})$ es finita por lo que nuestro objetivo es probar que $\sup F(\tilde{U}_{x_{k1}^*}) = 1$. Con

dicho propósito vamos a distinguir dos casos dependiendo de si existe el último elemento de G_n para cada n :

- Supongamos que existe el último elemento de G_n para cada n . En este caso, existe $\text{máx } \tilde{X}$ lo que implica que $F(\text{máx } \tilde{X}) = 1$. Además, $F(\text{máx } \tilde{X}) = \sup F(U_{x_{k1}}^*) = 1$.
- Supongamos que G_n no posee un último elemento pero G_{n-1} sí. Esto implica que el último elemento de G_{n-1} puede dividirse en una cantidad numerable de elementos de G_n . Ahora podemos probar que $\sup F(U_{x_{kn}}) \rightarrow 1$ de manera análoga al caso en que G_1 es infinito.

$$2. \omega(\rho_n(x)) = \sum_{\rho_{n+1}(y) \in G_{n+1}, \rho_n(y) = \rho_n(x)} \omega(\rho_{n+1}(y)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } \rho_n(x) \in G_n.$$

- Supongamos que G_{n+1} es finito. Se tiene entonces que $\sup F(\tilde{U}_{xn}^*) - \sup F(\text{anterior } \tilde{U}_{xn}^*) = \omega(U_{xn}^*)$. Véamoslo:

Sea $\rho_n(x) \in G_n$, entonces $\tilde{U}_{xn}^* = \tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n} n}^* = \bigcup_{i=1}^k \tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n i} n+1}^*$, esto es, \tilde{U}_{xn}^* queda dividido en k elementos. Por tanto, podemos escribir $\sup F(\tilde{U}_{xn}^*) = \sup F(\bigcup_{i=1}^k \tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n i} n+1}^*) = \sup F(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n k} n+1}^*)$. De la misma forma, si consideramos el elemento anterior a $\rho_n(x)$ en G_n , podremos escribirlo como $\tilde{U}_{x_{u_1 \dots u_n} n}^* = \bigcup_{i=1}^m \tilde{U}_{x_{u_1 \dots u_n i} n+1}^*$ por lo que $\sup F(\text{anterior } U_{xn}^*) = \sup F(\tilde{U}_{x_{u_1 \dots u_n m} n+1}^*)$. Se concluye pues, que $\sum_{\rho_{n+1}(y) \in G_{n+1}, \rho_n(y) = \rho_n(x)} \omega(\rho_{n+1}(y)) = \sup F(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n k} n+1}^*) - \sup F(\tilde{U}_{x_{u_1 \dots u_n m} n+1}^*) = \sup F(\tilde{U}_{xn}^*) - \sup F(\bigcup \{ \tilde{U}_{yn}^* : \tilde{U}_{yn}^* \in G_n; \tilde{U}_{yn}^* < \tilde{U}_{xn}^* \}) = \omega(U_{xn}^*)$.

- Supongamos que G_{n+1} no es finito (pero G_n sí lo es), entonces existe un elemento en G_n que puede subdividirse en una cantidad numerable de elementos de G_{n+1} . Pongamos que U_{xn}^* puede dividirse en un número numerable de elementos. Distingamos dos casos dependiendo de la finitud del conjunto de elementos de G_{n+1} contenidos en G_n :

- Si U_{xn}^* descompone en una cantidad finita de elementos de G_{n+1} , entonces basta aplicar el razonamiento seguido en el caso en el que G_{n+1} es finito para obtener que $\omega(U_{xn}^*) = \sum_{\rho_{n+1}(y) \in G_{n+1}, \rho_n(y) = \rho_n(x)} \omega(\rho_{n+1}(y))$.
- Si U_{xn}^* descompone en una cantidad infinita de elementos de G_{n+1} , entonces $\sum_{\rho_{n+1}(y) \in G_{n+1}, \rho_n(y) = \rho_n(x)} \omega(\rho_{n+1}(y)) = \omega(\rho_n(x))$

si, y solo si para $k \rightarrow \infty$ se tiene que $\sum^k \omega(U_{x_{w_1 \dots w_n i n+1}}) = \sup F(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n k n+1}}) - \sup F(\bigcup_{y < x_{w_1 \dots w_n 1}} \tilde{U}_{y n+1}^*) \rightarrow \sup F(\tilde{U}_{x n}^*) - \sup F(\bigcup_{y < x} \tilde{U}_{y n}^*)$, donde $x = x_{w_1 \dots w_n}$. Debido al hecho de que $\sup F(\bigcup_{y < x_{w_1 \dots w_n 1}} \tilde{U}_{y n+1}^*) = \sup F(\bigcup_{y < x} \tilde{U}_{y n}^*)$, el problema se reduce a probar que $\sup F(\tilde{U}_{x_{w_1 \dots w_n k n+1}}) \rightarrow \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)$ para $k \rightarrow \infty$ lo cual puede justificarse de manera análoga a cómo se probó la primera de las condiciones de la premedida para el caso en que G_1 es infinito.

Probemos ahora la siguiente afirmación, la cual nos es crucial de cara a la demostración de la parte restante del teorema:

Afirmación 5.1.15. *Bajo las condiciones dadas para F se tiene que $\lim h_n^+(x) = \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)$.*

Demostración. Es suficiente probar que $\sum_{u \leq x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u n}^*) = \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)$. Si tenemos en cuenta las condiciones de distribución de masa, podemos escribir la suma $\sum_{u \leq x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u n}^*)$ como la que sigue $\sum_{u_1 < x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u_1 1}^*) + \sum_{\tilde{U}_{u_2 2}^* \subseteq \tilde{U}_{u_1 1}^*; u_2 < x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u_2 2}^*) + \dots + \sum_{\tilde{U}_{u_n n}^* \subseteq \tilde{U}_{x_{n-1}}^*; u_n \leq x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u_n n}^*)$. Ahora bien, obsérvese que la primera de las sumas de la igualdad anterior queda como el supremo de F aplicada al último elemento de G_1 que aparece en la suma ya que, por convenio, hemos tomado que $\sup F(\emptyset) = 0$. Por su parte, la segunda suma será igual al supremo de F aplicada al último elemento de G_2 que aparece en la suma menos el supremo de F aplicada a la unión de todos los anteriores al primer elemento de G_2 que aparece en la suma. Sin embargo, éste último supremo coincide con el supremo de F aplicada al último elemento de G_1 que aparece en la suma por lo que dichos términos se cancelan. Así, aplicando dicho razonamiento reiteradamente, se llega a que $\sum_{u \leq x} \tilde{\omega}(\tilde{U}_{u n}^*) = \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)$ que es lo que buscábamos. \square

Finalmente vamos a probar que $F_{\omega_F} = F$.

\leq) Nótese que $F(x) \in [\sup F(\bigcup \{\tilde{U}_{y n}^* : \tilde{U}_{y n}^* \in G_n; \tilde{U}_{y n}^* < \tilde{U}_{x n}^*\}), \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)]$, por lo que $F(x) \leq \sup F(\tilde{U}_{x n}^*)$, es decir, $F(x) \leq h_n^+(x)$ por la Afirmación 5.1.15 de donde, tomando límites, tenemos que $F(x) \leq F_{\omega_F}(x)$.

\geq) Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento del conjunto $F(\tilde{U}_{x n}^*)$ que es mayor o igual que $F(\tilde{U}_{x n}^*) - \varepsilon$, es decir, existe $x_n \in \tilde{U}_{x n}^*$ con $x_n \geq x$ de forma que $F(x_n) \geq \sup F(\tilde{U}_{x n}^*) - \varepsilon$, de donde $x_n \xrightarrow{\tau_{d^*}} x$. Ahora bien, dado que F es continua a la derecha, se tiene que $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Además, como $F(x_n) \geq \sup F(\tilde{U}_{x n}^*) - \varepsilon$ o, equivalentemente, $F(x_n) \geq h_n^+(x) - \varepsilon$ en virtud de la Afirmación 5.1.15, tomando límites, se llega a que $F(x) \geq F_{\omega_F}(x) - \varepsilon$. Dado

que la última desigualdad la tenemos para todo $\varepsilon > 0$, podemos concluir que $F(x) \geq F_{\omega_F}(x)$. \square

En otras palabras, cualquier medida sobre \tilde{X} nos define una función de distribución y recíprocamente, toda función de distribución nos proporciona una medida, es decir, ambas se determinan biunívocamente. Además, la última medida puede ser construida siguiendo el procedimiento detallado en el capítulo anterior. Con lo cual, cualquier medida que se defina sobre \tilde{X} va a poder construirse según el procedimiento seguido en el capítulo anterior.

5.2. Generación de muestras

En esta sección mostraremos como generar una muestra aleatoria para una medida de probabilidad μ definida según la construcción de una de las secciones anteriores. En cualquier caso, tendremos una función ω definida en \mathcal{G} y $\tilde{\omega}$ definida en $\tilde{\mathcal{G}}$. Supondremos, además, que la familia \mathcal{G} es numerable (lo que es equivalente a que (X, d^*) sea separable).

Empecemos con G_1 y pongamos $G_1 = \{U_{x_1 1}^*, U_{x_2 1}^*, \dots\}$. Ahora escribamos $G_2 = \{U_{x_{11} 2}^*, U_{x_{12} 2}^*, \dots, U_{x_{21} 2}^*, U_{x_{22} 2}^*, \dots\}$, donde $U_{x_1 1}^* = U_{x_{11} 2}^* \cup U_{x_{12} 2}^* \cup \dots$; $U_{x_2 1}^* = U_{x_{21} 2}^* \cup U_{x_{22} 2}^* \cup \dots$, etcétera. Así, en general, podemos escribir $G_n = \{U_{x_{w_1 \dots w_n} n}^*\}$ verificando $U_{x_{w_1 \dots w_n} n}^* \subseteq U_{x_{w_1 \dots w_{n-1}}^{n-1}}$. Consideremos el orden lexicográfico, esto es, $w \leq u \Leftrightarrow w_1 < u_1$ o $w_1 = u_1 \wedge w_2 < u_2$ o \dots .

Definamos ahora $f : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ como sigue:

Sea $x \in [0, 1[$, entonces existe una única sucesión (w_n) de forma que $\omega(U_{x_{w_1 \dots w_n} n}^*) > 0$ y $x \in [\sum_{u < w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_u n}^*), \sum_{u \leq w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_u n}^*)[$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que definiendo $x_n = x_{w_1 \dots w_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se sigue por la construcción que $U_{x_{n+1}, n+1}^* \subseteq U_{x_n n}^*$ y, por tanto $(\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Sea $f(x) = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. La definición de $f(1)$ no es demasiado relevante y solo puede hacerse en el caso en que Γ sea finita. Una manera de definirla es considerar la única sucesión (w_n) tal que $\omega(U_{x_{w_1 \dots w_n} n}^*) > 0$ y $1 = \sum_{u \leq w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_u n}^*)$, y definir $f(1)$ análogamente al caso anterior.

De la misma definición de f podemos deducir fácilmente que $f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*) = [\sum_{u < w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_u n}^*), \sum_{u \leq w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_u n}^*)[$ para todo $x \in \tilde{X}$ con $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_w n}^*) > 0$ y $w = w_1 \dots w_n$ y $f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*) = \emptyset$ para cada $x \in \tilde{X}$ con $\tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_w n}^*) = 0$ y $w = w_1 \dots w_n$. Además, si l es la medida de Lebesgue, nótese que $f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*)$ es medible (con respecto a la σ -álgebra de Borel de $[0, 1]$) y $l(f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*)) = \omega(U_{x_w n}^*) = \tilde{\omega}(\tilde{U}_{x_w n}^*) = \mu(\tilde{U}_{x_w n}^*)$.

Proposición 5.2.1. *f es medible con respecto a las σ -álgebras de Borel de $[0, 1]$ y (\tilde{X}, \tilde{d}^*) .*

Demostración. Sea $\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{A})$ donde $\mathfrak{A} = \{\tilde{U}_n^*(F) : F \subseteq \tilde{X}, n \in \mathbb{N}\}$, al igual que en la prueba de la Proposición 4.1.11. En la prueba de dicha proposición se demostró que \mathfrak{S} es la σ -álgebra de Borel de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . Con el objetivo de probar que f es medible es suficiente demostrar que $f^{-1}(\tilde{U}_n^*(F))$ es medible para cada $F \subseteq \tilde{X}$. Puesto que \mathcal{G} es numerable por hipótesis, se sigue que $f^{-1}(\tilde{U}_n^*(F))$ es la unión numerable de conjuntos de la forma $f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*)$, y, por tanto $f^{-1}(\tilde{U}_n^*(F))$ es medible. Concluimos que f es medible con respecto a las σ -álgebras de Borel de $[0, 1]$ y (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . \square

Probemos ahora que f es inyectiva.

Proposición 5.2.2. *Supongamos que $\omega(\tilde{U}_{xn}) \rightarrow 0$, para todo $x \in \tilde{X}$, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sean $x, y \in [0, 1]$ con $f(x) = f(y)$, entonces existe una única sucesión (w_n) de manera que $\omega(U_{x_{w_1 \dots w_n}}^*) > 0$ y de forma que $x \in [\sum_{u < w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_{un}}^*), \sum_{u \leq w_1 \dots w_n} \omega(U_{x_{un}}^*)]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y existe otra única sucesión (v_n) con $\omega(U_{x_{v_1 \dots v_n}}^*) > 0$ y $x \in [\sum_{u < v_1 \dots v_n} \omega(U_{x_{un}}^*), \sum_{u \leq v_1 \dots v_n} \omega(U_{x_{un}}^*)]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(x) = (\rho_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n = x_{w_1 \dots w_n}$ y $f(y) = (\rho_n(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ con $y_n = x_{v_1 \dots v_n}$. Se sigue que $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $w_n = v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como las sucesiones (w_n) y (v_n) son únicas, se tiene que $x = y$. \square

Proposición 5.2.3. *Sea μ la medida obtenida en la Sección 4.3, entonces $\mu(A) = l(f^{-1}(A))$ para todo conjunto de Borel A .*

Demostración. Por el Teorema 2.1.22 se sigue que ν definida como $\nu(A) = l(f^{-1}(A))$ es una medida en la σ -álgebra de Borel de $[0, 1]$. Por los resultados previos, $\nu(\tilde{U}_{x_w n}^*) = l(f^{-1}(\tilde{U}_{x_w n}^*)) = \mu(\tilde{U}_{x_w n}^*)$ y por tanto, por la Proposición 4.1.11 $\nu = \mu$ en la σ -álgebra de Borel de (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . \square

Finalmente, si r_n es una muestra en el espacio de probabilidad $([0, 1], l)$ (esto es, una muestra uniforme en $[0, 1]$), entonces $f(r_n)$ es una muestra en el espacio de probabilidad (\tilde{X}, \tilde{d}^*) . Si μ es una medida de probabilidad en X , entonces $f(r_n)$ pertenece a X con probabilidad uno. Esto nos permite generar muestras aleatorias con respecto a la medida de probabilidad μ .

Observación 5.2.4. *Podemos también calcular integrales con respecto a μ usando el Teorema 2.1.22, así que para $g : X \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\int g(x) d\mu(x) = \int g(f(t)) dt$$

Capítulo 6

Aplicaciones

6.1. Generación de muestras

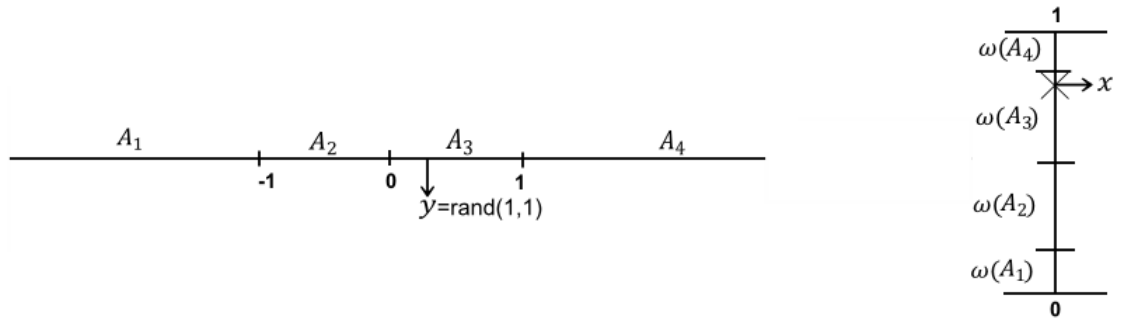
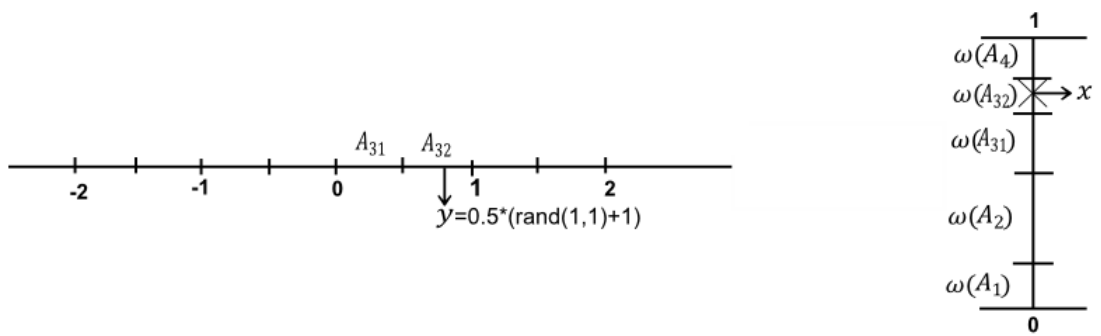
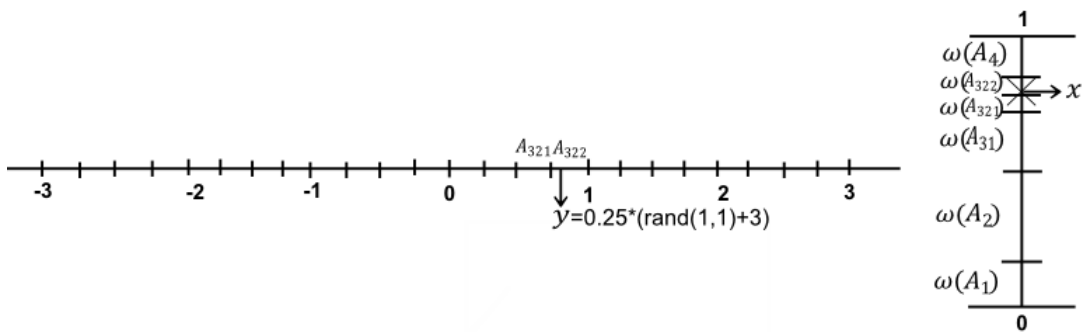
En primer lugar, veremos cómo obtener de manera práctica los pesos asociados a cada elemento de una estructura fractal considerada haciendo uso de la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria, tal y como se detalla en la Sección 5.1:

Consideremos la estructura fractal de tipo finito que ha sido descrita en el Ejemplo 4.4.2. Con ayuda de un script en MATLAB vamos a generar una muestra aleatoria de tamaño m de una determinada distribución, por ejemplo $\mathcal{N}(0, 1)$.

Comenzamos generando m números aleatorios en $[0, 1]$. Dado un nivel concreto de la estructura fractal escogida, determinamos cada uno de los elementos que componen dicho nivel y hallamos el valor de ω correspondiente a cada uno de ellos; $\omega(A_i) = \omega([a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i)$.

Realizamos una suma acumulativa de valores de $\omega(A_i)$ para $1 \leq i \leq l_n$ donde l_n denota el número de elementos en el nivel n escogido. Hacemos corresponder a cada uno de los números generados entre 0 y 1 el valor de un representante en cada elemento de la estructura fractal según el valor de ω para cada elemento. Dicho representante será un número aleatorio entre a_i y b_i .

Así, aproximamos el valor de F evaluada en dicho representante por el número aleatorio generado en $[0, 1]$. Veamos a través de los esquemas presentados en la Figura 6.1 cómo hacer corresponder a un número aleatorio en $[0, 1]$, al que denotaremos por x , su representante, al que denotaremos por y , según el proceso descrito previamente para el caso de los tres primeros niveles de la estructura fractal:

(a) Aproximación para el primer nivel, Γ_1 (b) Aproximación para el segundo nivel, Γ_2 (c) Aproximación para el tercer nivel, Γ_3 Figura 6.1: $F(y) \approx x$ según el método de generación de muestras

El código implementado es el siguiente:

```
function [el , w]=generacion_muestras(nivel , fdp , m)
% Generacion de una muestra de m datos
A=elementos_gamma(nivel);
el=zeros(1,m);
fx=fdp;
pesos=fx(A(2,:))-fx(A(1,:));
a=cumsum(pesos);
w=rand(1,m);
for j=1:m
for i=1:length(a)-1
if (w(j)<a(i))
el1=A(:,1);
el(j)=el1(1)+(el1(2)-el1(1))*rand(1,1);
% Elegimos como representante un numero
% aleatorio entre el1(1) y el1(2), F(el)=x
else if (a(i)< w(j) & w(j) < a(i+1))
el1=A(:,i+1);
el(j)=el1(1)+(el1(2)-el1(1))*rand(1,1);
% Elegimos como representante un numero
% aleatorio entre el1(1) y el1(2), F(el)=x
end
end
end
end
end
end
```

Una vez obtenidos m datos con sus respectivas imágenes según la función de distribución de probabilidad correspondiente, pasamos a realizar un histograma normalizado para los datos generados. Consideremos el caso de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$; la distribución de probabilidad más famosa. Si hacemos una representación de dicho histograma junto con la función de densidad de la misma variable aleatoria tendremos, considerando el séptimo nivel de la estructura fractal, los resultados que ofrece la Figura 6.2.

A la vista está, de dichos gráficos, que a mayor tamaño de la muestra considerada mayor proximidad del histograma generado a la función de densidad de la distribución normal. Así pues, a mayor tamaño de la muestra más fácil resulta ver cómo los datos generados se ajustan a la distribución de una normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cabe destacar que el proceso descrito anteriormente se asemeja bastante al método de la transformada inversa, procedimiento que, como es bien sabi-

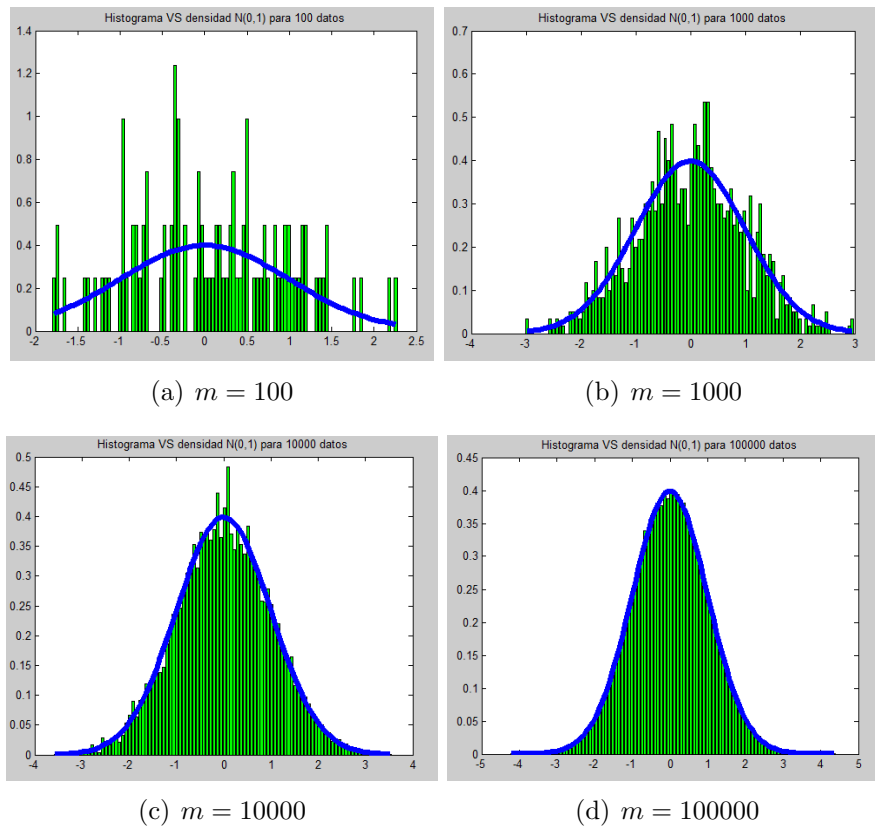


Figura 6.2: Histogramas para el nivel 7

do, consiste en la generación de números aleatorios de cualquier distribución de probabilidad cuando es conocida la inversa de la función de distribución de probabilidad en cuestión.

Sin embargo, el nuevo método introducido en esta sección nos permite ir más allá. Resulta que no solo nos permite generar una muestra de una distribución unidimensional, sino que extiende dicho procedimiento al caso n -dimensional. Basta tomar como punto de partida una estructura fractal en \mathbb{R}^n y una definición de ω de forma que la medida obtenida, μ , sea una medida en \mathbb{R}^n . En este sentido, y manteniendo la idea del ejemplo de generación de muestras desarrollado previamente para el caso unidimensional, podemos definir una estructura fractal finita en \mathbb{R}^n definida como producto cartesiano de n estructuras fractales como la del Ejemplo 4.4.2. Con el fin de ilustrar gráficamente los resultados nos ceñiremos al caso bidimensional. En este caso, dado un nivel n , $\omega(A_i) = \omega(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_i \leq x \leq b_i, c_i \leq y \leq d_i\}) = F(b_i, d_i) + F(a_i, c_i) - F(a_i, d_i) - F(b_i, c_i)$, para todo $A \in \Gamma_n$ y para todo $i = 1, \dots, (2^n n + 2)^2$. La prueba de que la medida μ que se construye a partir de ω es una medida de probabilidad en \mathbb{R}^2 es análoga a la del ejemplo 4.4.2. Una representación gráfica de los dos primeros niveles de esta estructura fractal pueden observarse en la Figura 6.3.

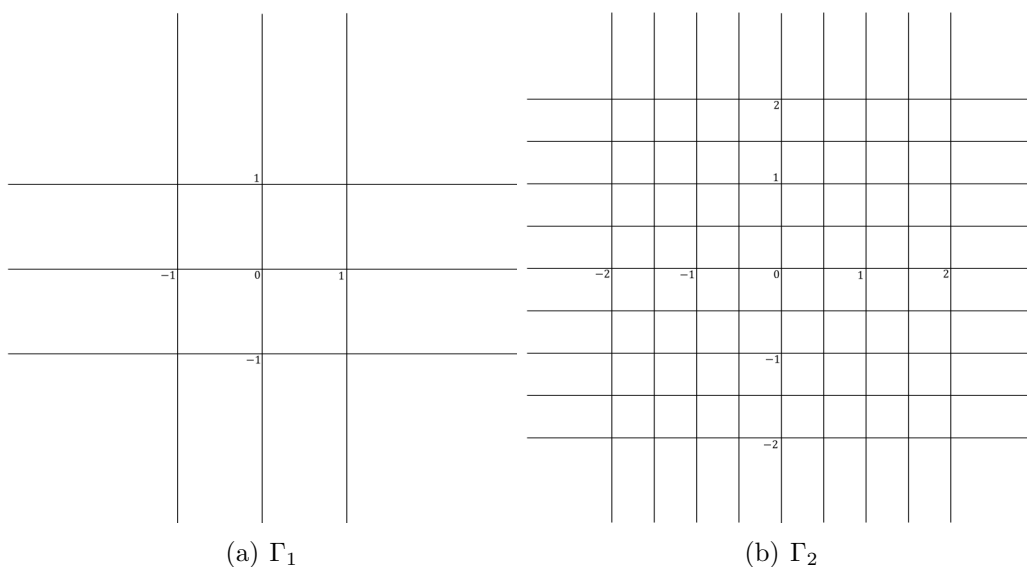


Figura 6.3: Estructura fractal finita bidimensional

Vamos a generar una muestra aleatoria de tamaño m para la distribución normal bidimensional cuya función de densidad sea:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.1)$$

Si la escribimos de la forma

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \right\}, \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ denota el vector de medias y $\boldsymbol{\Sigma}$ la matriz de covarianzas llegamos a que en este caso ambos son, respectivamente,

$$(\mu_X, \mu_Y) = (0, 0), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El script *elementos_gamma_2d.m* nos permite obtener cada uno de los elementos que componen cierto nivel de la estructura fractal. A partir de ahí, obtenemos la premedida asociada a cada uno de dichos elementos y realizamos una suma acumulativa de valores $\omega(A_i)$ para $1 \leq i \leq n2^n + 2$. A cada uno de los elementos generados en la muestra aleatoria considerada en $[0, 1]$ le hacemos corresponder el valor de un representante escogido como un número aleatorio dentro del elemento A_i correspondiente. Así, el valor de la función de distribución bidimensional evaluada en dicho representante queda aproximado por el número aleatorio generado en $[0, 1]$. El código implementado para ello es el siguiente:

```
function [el, w]=generacion_muestras_2d(nivel, fdp, m)
% Generacion de una muestra de m datos
% Como fdp hay que pasarle @(x,y)mvncdf([x,y])
A=elementos_gamma_2d(nivel);
% w=zeros(1,m);
fxy=fdp;
pesos=zeros(1,length(A(1,:)));
con=1;
for i=1:length(A(1,:))
pesos(1,con)=fxy(A(2,i),A(4,i))+fxy(A(1,i),A(3,i))
-fxy(A(2,i),A(3,i))-fxy(A(1,i),A(4,i));
con=con+1;
end
pesos;

a=cumsum(pesos);
w=rand(1,m);
```



```

el=zeros(2,m);
for j=1:m
for i=1:length(a)-1
if (w(j)<a(1))
el1=A(:,1);
el(:,j)=[el1(1)+(el1(2)-el1(1))*rand(1,1);
el1(3)+(el1(4)-el1(3))*rand(1,1)]; %Elegimos como
% representante un numero aleatorio entre el1(1), el1(2),
el1(3) y el1(4)
%F(el)=(x,y)
else if (a(i)< w(j) & w(j) < a(i+1))
el1=A(:,i+1);
el(:,j)=[el1(1)+(el1(2)-el1(1))*rand(1,1);
el1(3)+(el1(4)-el1(3))*rand(1,1)]; %Elegimos como
% representante un numero aleatorio entre el1(1), el1(2),
el1(3) y el1(4)
%F(el)=(x,y)
end
end
end
end
end
end

```

Una vez generados m datos, cada uno con su respectiva preimagen mediante F , la función de distribución de probabilidad conjunta del vector normal bidimensional (X, Y) , pasamos a la realización de un histograma para los datos generados según el valor de m considerado. Dichos histogramas pueden verse en la Figura 6.4.

A la vista está, de dichos gráficos, que a mayor tamaño de la muestra considerada mayor parecido del histograma generado a la función de densidad de la distribución normal, la cual puede verse en la Figura 6.5. Así pues, a mayor tamaño de la muestra más fácil resulta ver cómo los datos generados se ajustan a la distribución de una normal bidimensional con función de densidad 6.1.

6.2. Un nuevo método de estimación

Sabemos que el estimador por excelencia es el obtenido por el método de máxima verosimilitud, conocido como estimador máximo verosímil. Veamos un ejemplo de obtención del mismo que nos será de utilidad de cara a futuras comparaciones junto con otro estimador que será diseñado en la siguiente

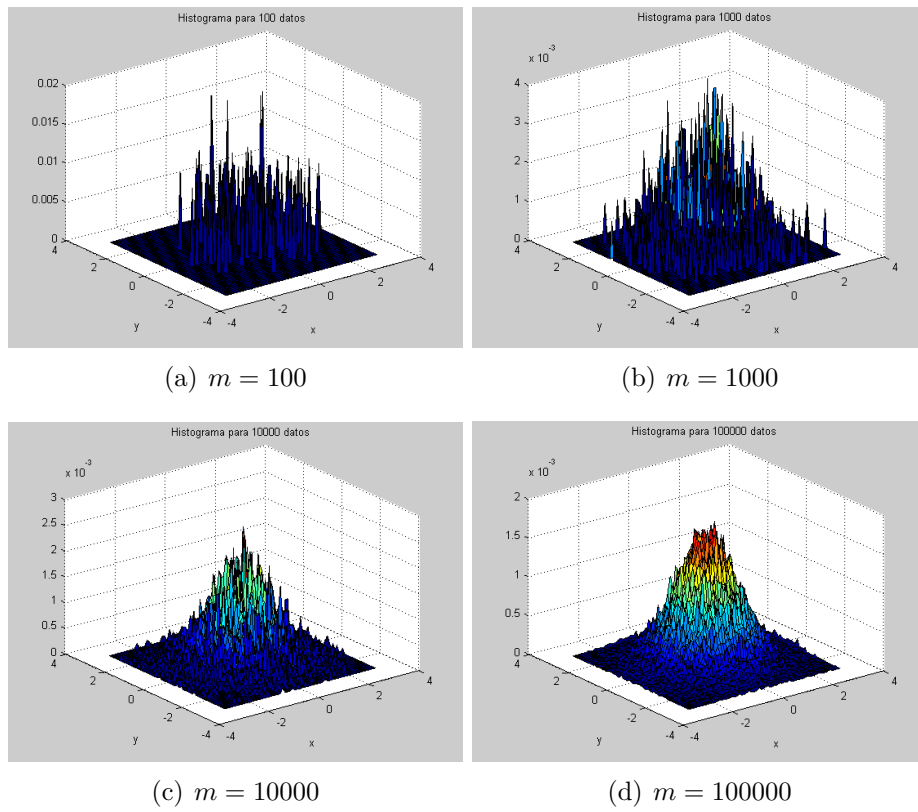


Figura 6.4: Histogramas para el nivel 3

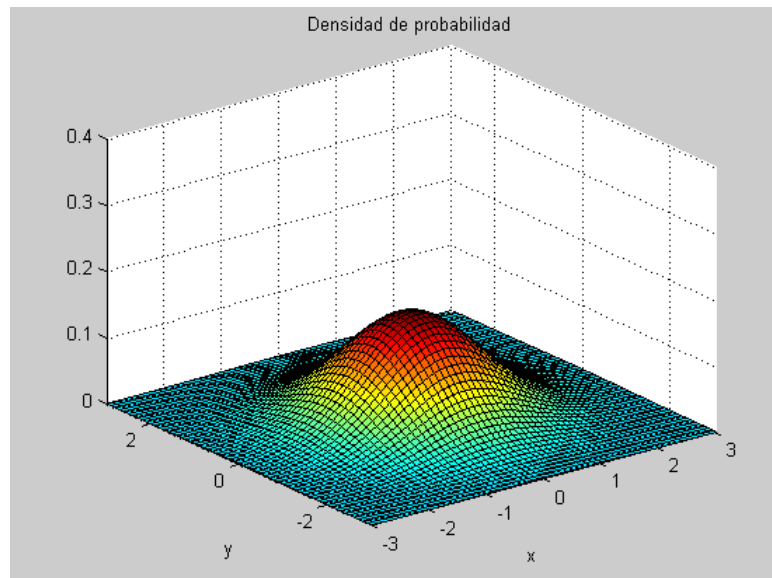


Figura 6.5: Función de densidad 6.1

subsección.

Obtengamos un estimador, según el método de máxima verosimilitud, para la desviación típica de una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, \sigma)$ de tamaño n :

La función de verosimilitud para una muestra $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es:

$$l(\sigma/\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}}$$

Luego,

$$\ln[l(\sigma/x)] = \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln[l(\sigma/x)] &= 0, \\ -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^3} &= 0, \\ \frac{-n\sigma + \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^3} &= 0, \\ -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 0, \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \end{aligned}$$

Comprobemos que, efectivamente $\hat{\sigma}$ maximiza la función $\ln[l(\sigma/x)]$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln[l(\sigma/x)] = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^4} = \frac{n\sigma^2 - 3 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^4}$$

Ahora bien, si sustituímos el valor del candidato a estimador en la función anterior tendremos que:

$$\frac{n \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \right)^2 - 3 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \right)^4} = \frac{\frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 3 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}{n^2}} = \frac{n^2 - 3n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{-2n^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} < 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que prueba que, efectivamente, se trata de un máximo y, por tanto, $\hat{\sigma}$ es el estimador máximo verosímil.

Ahora bien, puesto que ya sabemos como obtener el valor del estimador máximo verosímil para una muestra de una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, el siguiente paso es implementar una función en MATLAB que devuelva todos los valores de dicho estimador para distintas muestras generadas de manera aleatoria. La media de todos los valores obtenidos debería aproximarse al verdadero valor del parámetro (desviación típica de la distribución), $\sigma = 1$, mientras que la desviación típica debería ser cercana a 0 para garantizar la similitud entre el estimador y el verdadero valor del parámetro. Pero, ¿Y si probamos con otro método de estimación y comparamos?

6.2.1. Estimación a partir de una definición de ω basada en una variable aleatoria conocida

Consideremos una estructura fractal finita en \mathbb{R} como la descrita en el Ejemplo 4.4.2.

Si generamos una muestra aleatoria de n datos según una normal $\mathcal{N}(0, \sigma)$, la probabilidad de que r de los n datos generados se sitúen en un cierto elemento de un nivel concreto de la estructura fractal vendrá dada por una binomial $\mathcal{B}(n, p \equiv p(\sigma))$ donde $p(\sigma) = \omega(A_i)$ donde A_i es el elemento donde se encuentran los r datos.

En un primer script, *elementos_gamma.m*, creamos la función de nombre análogo con el objetivo de obtener, en una matriz de dos filas, los extremos de cada elemento de cierto nivel de la estructura fractal por columnas. El código implementado puede verse a continuación:

```
% Vamos a generar los elementos de cada nivel de
% la estructura fractal usando una matriz
function [elementos_ef]=elementos_gamma(n)
x=-n:1/(2^(n-1)):n;
u=[-Inf x]; % Generamos los extremos inferiores de cada
% elemento de la ef
v=[x Inf]; % Generamos los extremos superiores de cada
% elemento de la ef
elementos_ef=[u;v]; % Esta matriz almacena, por columnas,
% los elementos de la ef del nivel n
```

Posteriormente, pasamos a crear el script *contar2.m* con el fin de determinar el número de elementos de la muestra generada aleatoriamente que hay en un cierto elemento de la estructura fractal. El código para ello es el siguiente:

```
function [hay]=contar2(muestra, elemento_ef)
a=elemento_ef(1);
b=elemento_ef(2);
hay=sum(a<=muestra & muestra<b);
```

Ahora bien, para cada nivel i con $1 \leq i \leq nmax$ donde $nmax$ es el máximo nivel considerado, definamos la función:

$$h_i(\sigma) = P[X = r_1 | X \sim \mathcal{B}(n, p_1(\sigma))] \dots P[X = r_{l_i} | X \sim \mathcal{B}(n, p_{l_i}(\sigma))]$$

donde l_i es el número de elementos del nivel i

Fijando ahora un nivel máximo de la estructura fractal, $nmax$ definimos la función

$$h(\sigma) = \prod_{i=1}^{nmax} h_i(\sigma)$$

A continuación se detalla el código empleado para definir la función logaritmo neperiano de la anterior en MATLAB:

```
function [p]=h_sigma(sigma, muestra, nmax)
% sigma es el valor de la desv. tipica,
% muestra es la funcion normrnd(mu, sigma, datos,1)
% nmax es el nivel maximo alcanzado
p=0;
for i=1:nmax
nivel=elementos_gamma(i);
% Genera los elementos del nivel i de Gamma
for j=1:length(nivel)
elementos=contar2(muestra, nivel(:,j));
niv=nivel(:,j);
a=niv(1);
b=niv(2);
p=p+log(binomial(length(muestra), elementos, a, b, sigma));
end
end
end
```

Nos marcamos como objetivo ahora obtener el máximo de dicha función para obtener un candidato a estimador de σ . Al igual que se procede para obtener el estimador máximo verosímil, maximizaremos $\ln(h(\sigma))$ lo que es

equivalente a lo deseado. Además, puesto que maximizar $\ln(h(\sigma))$ es equivalente a minimizar $-\ln(h(\sigma))$, vamos a buscar una manera de hacer esto último con MATLAB. Si hacemos una representación de $h(\sigma)$ para un rango de valores del parámetro en un entorno del verdadero valor del parámetro considerado, observamos que la función presenta un claro máximo, o, equivalentemente, $-h(\sigma)$ un claro mínimo.

Una de las funciones proporcionadas por MATLAB y cuyo fin es la obtención del valor mínimo de una función sobre un dominio acotado, *fminbnd* no proporciona un valor exacto del mismo en este caso tras probarlo para el caso en el que el verdadero valor del parámetro sea 1. Para comprobarlo basta obtener la imagen del mínimo mediante h y la imagen del valor 1 mediante la misma función. En la mayoría de los casos se tendrá que la primera supera en gran medida a la segunda. Debido a ello se procede a la creación de una función de minimización con el objetivo de obtener un valor más aproximado del mismo en un dominio acotado de extremos a y b que contenga al verdadero valor del parámetro, siguiendo el proceso siguiente:

Dada una función a minimizar:

1. Elegimos un dominio acotado donde se encuentre el verdadero valor del parámetro, $[a, b]$ (en vista al parámetro considerado para generar la muestra aleatoria). Tomando como valor del paso 0,1 entre a y b vamos recorriendo todos los valores del vector correspondiente, calculando las imágenes de cada uno de ellos. Comparando la monotonía de la función entre tres nodos consecutivos a través del valor de la imagen de la función en cada uno de ellos, elegimos el primer punto de forma que la imagen del nodo anterior y del nodo siguiente queden por encima del nodo central. Nos quedamos con el valor del nodo central, x_k .
2. En un segundo paso, consideramos un entorno del nodo obtenido en el paso 1 de la forma $[x_k - 0.1, x_k + 0.1]$. Tomando como valor del paso 0,01 ahora, recorremos los nodos generados en el intervalo $[x_k - 0.1, x_k + 0.1]$, y buscamos aquel de forma que se verifiquen las mismas condiciones que el punto anterior en cuanto a las imágenes de la función en los nodos anterior y siguiente se refiere. Denotemos por x_{k_l} a dicho nodo.
3. En un tercer y último paso, consideramos un entorno del nodo obtenido en el paso 1 de la forma $[x_{k_l} - 0.01, x_{k_l} + 0.01]$. Tomando como valor del paso 0,001 ahora, recorremos los nodos generados en el intervalo $[x_{k_l} - 0.01, x_{k_l} + 0.01]$, y buscamos aquel de forma que se verifiquen las mismas condiciones que el punto primero en cuanto a las imágenes de la función en los nodos anterior y siguiente se refiere. Denotemos por $x_{k_{lm}}$ a dicho nodo.

Observación 6.2.1. *Obsérvese que para que esto funcione, la función debe tener un mínimo local en el intervalo $[a, b]$.*

El punto donde se alcanza el mínimo será, por tanto, $x_{k_{lm}}$ y su imagen mediante la función a minimizar será el valor del mismo.

A continuación se detalla el código empleado para el diseño de la función descrita anteriormente:

```
function [min, fmin]=minimo(fun, a, b)
x=a:0.1:b;
fun1=fun(x);
for k=2:length(fun1)-1
if (fun1(k)<fun1(k-1) && fun1(k)<fun1(k+1))
y=x(k-1):0.01:x(k+1)+0.01;
fun2=fun(y);
for j=2:length(fun2)-1
if (fun2(j)<fun2(j-1) && fun2(j)<fun2(j+1))
z=y(j-1):0.001:y(j+1)+0.001;
fun3=fun(z);
for l=2:length(fun3)-1
if (fun3(l)<fun3(l-1) && fun3(l)<fun3(l+1))
min=z(l);
fmin=fun3(l);
break
end
end
break

end
end
break
end
end
```

Una vez llegados a este punto nos preguntamos, ¿que diferencias existen con el estimador obtenido mediante máxima verosimilitud?

Para dar respuesta a esta pregunta, vamos a comenzar diseñando la función *estimadores_normales.m* que, echando mano de la función *estimador_normal.m* -la que para una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{N}(0, \sigma)$, determina el valor de $\hat{\sigma}$ según el método de máxima verosimilitud y según el detallado previamente- que nos devolverá una matriz columna de forma

que en la primera columna quedarán recogidos cada uno de los valores de $\hat{\sigma}$ según el método de máxima verosimilitud y del mismo según el método descrito previamente en el caso de la segunda columna de la matriz para m muestras aleatorias generadas previamente. A su vez, dicho script nos proporcionará la media y la desviación típica de los elementos recogidos en cada una de las columnas de la matriz anterior.

Partimos del script:

```
function [estimador]=estimador_normal(sigma2 , l , niveles )
% Funcion para obtener el valor del estimador en funcion
% de sigma y de la dimension de la muestra
muestra=normrnd(0 ,sigma2 ,l ,1);
for j =1:niveles
fun=@(sigma) -h_sigma(sigma , muestra , j );
new(j)=minimo(fun , 0 , 3);
end
new;
% Devuelve el valor segun el nuevo estimador
muestra_2=muestra.^2;
ver=sqrt(sum(muestra_2)./l);
estimador=[ver , new];
% Devuelve el valor segun el estimador maximo verosimil
% y el nuevo para valores del nivel maximo que vayan
% desde 1 hasta niveles
end
```

para crear la función que nos devolverá los valores de ambos estimadores según el método de máxima verosimilitud y según el nuevo método de estimación, éste último para diferentes niveles máximos de la estructura fractal, así como las medias y las desviaciones típicas de cada uno de los conjuntos de valores obtenidos:

```
function [A, media , destip]=
estimadores_normales(sigma2 , l , niveles ,m)
Devuelve una matriz cuya primera fila son los valores
del estimador segun maximo verosimil y la segunda
segun el nuevo estimador asi como el valor de la
media y la desviacion tipica de los valores obtenidos

for i =1:m
[estimador]=estimador_normal(sigma2 , l , niveles );
A(i ,:)= estimador ;
end
```



```

A;
for k=1: niveles+1
media(k)=mean(A(:,k));
destip(k)=std(A(:,k));
end
media;
destip;
end

```

Una tabla comparativa de las medias y las desviaciones típicas obtenidas para los diferentes valores obtenidos de $\hat{\sigma}$ según ambos métodos, repetido el proceso 100 veces, y según el nivel máximo alcanzado en la estructura fractal para el caso del nuevo estimador, al que nos referimos como *Nuevo*:

Para una muestra de 100 datos según una normal $\mathcal{N}(0, 1)$:

Tamaño muestra=100			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		0,9994	0,0685
Nuevo	1	1,0119	0,0880
	2	1,0072	0,0727
	3	1,0042	0,0699
	4	1,0030	0,0690
	5	1,0021	0,0685

A la vista está, de la tabla anterior, la estrecha relación que guardan ambos estimadores en cuanto a los resultados obtenidos. Notemos que cuanto mayor es el nivel máximo considerado, mayor proximidad hay entre el valor del nuevo estimador y el verdadero valor del parámetro σ . A su vez, la similitud entre los valores obtenidos según cada estimador es clara. De hecho la desviaciones típicas son iguales, aunque la media para el caso del estimador máximo verosímil sigue siendo más exacta que la del nuevo estimador.

Creamos ahora otra tabla para realizar comparaciones entre ambos métodos de estimación para una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, en este caso, tomando como tamaño de la muestra 1000:

Tamaño muestra=1000			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,0027	0,0228
Nuevo	1	1,0016	0,0281
	2	1,0030	0,0230
	3	1,0031	0,0221
	4	1,0030	0,0220
	5	1,0030	0,0219

Al aumentar el tamaño de la muestra mejora la desviación típica aún más en el sentido de que se aproxima más a 0 estando por debajo de la obtenida para valores según el estimador máximo verosímil (a partir de 3 como nivel máximo). En cuanto a las medias, vemos que son bastante similares aunque se sigue aproximando más al verdadero valor del parámetro la obtenida mediante el método de máxima verosimilitud.

Finalmente, si el tamaño de la muestra se amplia hasta 10000 datos:

Tamaño muestra=10000			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		0,9996	0,0069
Nuevo	1	0,9998	0,0098
	2	0,9995	0,0077
	3	0,9996	0,0074
	4	0,9996	0,0071
	5	0,9996	0,0071

Podemos concluir, pues, que a mayor nivel máximo considerado y mayor tamaño de la muestra generada, mayor exactitud ofrece el estimador creado si lo comparamos con el verdadero valor del parámetro e incluso ofrece resultados muy similares al estimador máximo verosímil.

6.2.2. Estimación a partir de una definición uniforme de ω

En esta subsección vamos a llevar a cabo una estimación similar a la presentada en la subsección anterior pero, en este caso, partiendo de una estructura fractal que sea el resultado de distribuir la premedida ω de una manera uniforme entre los elementos de la misma. Para definir dicha estructura fractal vamos a seguir un procedimiento análogo al detallado al final

de la Subsección 4.4.1. Para ello vamos a comenzar definiendo la estructura fractal natural en $[0, 1]$. Con objeto de comparar los dos nuevos métodos de estimación desarrollados vamos a continuar tratando de estimar la desviación típica para una distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. La imagen mediante la inversa de la función de distribución de una normal de media 0 y desviación típica 1 nos proporcionará, para cada nivel de la estructura fractal natural en $[0, 1]$ un nivel de la estructura fractal uniforme en \mathbb{R} . Con objeto de determinar los elementos de la última hemos creado el script *elementos_gamma_unif.m* el cual nos proporciona para cada nivel n y la inversa de una función de distribución de probabilidad, en una matriz de dos filas, los extremos de cada elemento de dicho nivel de la estructura fractal en cuestión por columnas.

```
% Vamos a generar los elementos de cada nivel de la
% estructura fractal uniforme usando una matriz a partir
% de la inversa de la fdp de una variable aleatoria.
function [elementos_ef]=
elementos_gamma_unif(n, distrinversa)
x=distrinversa(0:1/2^n:1);
elementos_ef=[x(1:end-1);x(2:end)];
```

El script *contar2.m* nos vuelve a ser de utilidad para saber el número de elementos de la muestra aleatoria generada que hay en un cierto elemento de la estructura fractal.

Ahora bien, para cada nivel $1 \leq i \leq nmax$ donde $nmax$ es el máximo nivel considerado volvemos a considerar la función $h_i(\sigma)$. A diferencia de la estimación desarrollada en la subsección anterior, en este caso consideraremos la función producto $h(\sigma)$ de las anteriores para cada valor de σ . El código empleado para definir la función h en este caso es:

```
% Creamos la funcion h producto de h_i correspondiente a
% cada nivel i de la ef
```

```
function [pp]=h_sigma_unif(sigma, muestra, nmax)
% sigma es el valor de la desv tipica,
% muestra es la funcion normrnd(mu, sigma, datos, 1)
% nmax es el nivel maximo alcanzado
pp=zeros(length(sigma), 1);
for i=1:length(sigma)
p=0;
for j=1:nmax
nivel=elementos_gamma_unif(j, @(x)norminv(x, 0, sigma(i)));
% Genera los elementos del nivel i de Gamma
for k=1:length(nivel)
```

```

elementos=contar2(muestra , nivel(:,k));
niv=nivel(:,k);
a=niv(1);
b=niv(2);
p=
p+log(binomial(length(muestra),elementos,a,b,sigma(i)));
end
end
pp(i)=p;
end
end

```

Una tabla comparativa de las medias y las desviaciones típicas obtenidas para los diferentes valores obtenidos de $\hat{\sigma}$ según ambos métodos, repetido el proceso 100 veces, y según el nivel máximo alcanzado en la estructura fractal para el caso del nuevo estimador, al que nos referimos como *Nuevo*.

Para una muestra de 100 datos según una normal $\mathcal{N}(0, 1)$:

Tamaño muestra=100			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		0,9890	0,0693
Nuevo	1	2,0000	0,0000
	2	0,9928	0,1194
	3	1,0046	1,1077
	4	1,0159	0,1115
	5	1,0272	0,0980

Para una muestra de 1000 datos:

Tamaño muestra=1000			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		0,9984	0,0251
Nuevo	1	2,0000	0,0000
	2	1,0063	0,0419
	3	1,0052	0,0351
	4	1,0101	0,0319
	5	1,0136	0,0316

Para una muestra de 10000 datos:

Tamaño muestra=10000			
Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,0005	0,0076
Nuevo	1	2,0000	0,0000
	2	1,0018	0,0119
	3	1,0011	0,0100
	4	1,0014	0,0081
	5	1,0006	0,0094

A la vista está, de los resultados obtenidos, que dicha estimación, al igual que la presentada en la subsección anterior, se aproxima bastante a la obtenida a través del método de máxima verosimilitud aunque en ningún caso los resultados son mejores que los obtenidos mediante éste último método. Por otro lado, cabe destacar que la estimación mejora conforme aumentamos el tamaño de la muestra considerada. Además, si comparamos los resultados obtenidos para el nuevo estimador en cada una de las dos subsecciones es obvio que la llevada a cabo a partir de una definición de ω basada en una variable aleatoria conocida es mejor que la llevada a cabo en base a una definición uniforme de ω . Por último destacaremos que el hecho de que el valor del nuevo estimador según este método sea 2 para el primer nivel siempre se debe a que, en ese caso, la estructura fractal dispone únicamente de dos elementos los cuales son simétricos con respecto a la media. Esto supone que se imposible estimar el valor de σ en dicho caso.

6.3. La nueva estimación frente a ruidos

Tal y como hemos visto en la sección anterior, el nuevo estimador no presenta resultados mejores con respecto al estimador máximo verosímil, aunque sí muy próximos al mismo. Es por ello que nos planteamos si existe alguna situación en la que el estimador según el método de máxima verosimilitud quede más atrás que el estimador recién diseñado.

El eje en torno al cual gira esta sección es la generación de valores de cada uno de los estimadores al igual que en la sección anterior, según los primeros niveles de la estructura fractal pero, en este caso, introduciendo datos ajenos a la distribución cuyo parámetro queremos estimar, es decir, vamos a estudiar cuál de los dos estimadores es menos sensible a ruidos.

El código implementado para llevar a cabo las pruebas posteriores se divide en dos scripts. Una primera función será la que nos devolverá los valores de ambos estimadores -el primero según el método de máxima verosimilitud y el segundo según el nuevo método- supuesto que hemos introducido un vector

de ruidos. Estudiaremos el funcionamiento de cada una de las estimaciones presentadas en las Subsecciones 6.2.1 y 6.2.2 cuando éstas son sometidas a ruidos.

Comenzaremos con la estimación realizada a partir de una definición de la premedida ω basada en una variable aleatoria conocida, esto es, la desarrollada en la Subsección 6.2.1.

El primer script es:

```
% Estimacion sometida a ruidos
function [estimador]
=estimador_normal_ruido(sigma2, l, niveles, ruido)
% Funcion para obtener el valor del estimador en funcion
% de sigma y el tamaño de la muestra
muestra=[normrnd(0,sigma2,l,1);ruido];
muestra_2=muestra.^2;
ver=sqrt(sum(muestra_2)./(l+length(ruido)));
% Incrementamos el tamaño de la muestra length(ruido)
% unidades por haber introducido un vector de ruidos
for j=1:niveles
fun=@(sigma) -h_sigma(sigma, muestra, j);
new(j)=minimo(fun, 0, 2);
end
new;
% Devuelve el valor segun el nuevo estimador
estimador=[ver, new];
% Devuelve el valor segun el estimador maximo verosimil
% y el nuevo para valores del nivel maximo que vayan
% desde 1 hasta niveles
end
```

Ahora bien, el segundo script consiste en una función que genera una matriz con m valores según cada uno de los estimadores. Una vez obtenidos dichos valores se hace la media y la desviación típica, la cual será mostrada por pantalla una vez llamemos a la función.

El código es el siguiente:

```
% Estimacion sometida a ruidos
function [A, media, destip]=
estimadores_normales_ruido(sigma2, l, niveles, m,ruido)
% sigma2 es el verdadero valor de la desviacion tipica,
% l es el numero de elementos generados en la muestra,
% niveles es el maximo de niveles alcanzados y ruido
% un vector con los datos ajenos a la distribucion con
```

```

% la que se genera la muestra.
% Devuelve una matriz cuya primera fila son los valores
% del estimador segun max ver y la segunda segun el
% nuevo estimador asi como el valor de la media y la
% desviacion tipica de los valores obtenidos

for i=1:m
estimador=
estimador_normal_ruido(sigma2, l, niveles, ruido);
A(i,:)=estimador;
end
A;
for k=1: niveles+1
media(k)=mean(A(:,k));
destip(k)=std(A(:,k));
end

```

A continuación, y previamente a presentar unas tablas de datos comparativas según la estimación llevada a cabo, vamos a presentar el código implementado para abordar la estimación realizada a partir de una definición uniforme de la premedida ω , esto es, la desarrollada en la Subsección 6.2.1.

El primer script es:

```

function [estimador]=
estimador_normal_unif_ruido(sigma2, l, niveles, ruido)
% Funcion para obtener el valor del estimador en
% funcion de sigma y el tamaño de la muestra.
% Introduzcase vector de ruido como 'ruido'.
muestra=[normrnd(0,sigma2,l,1);ruido];
muestra_2=muestra.^2;
ver=sqrt(sum(muestra_2)./(1+length(ruido)));
new=zeros(length(niveles),1);
for j=1:niveles
fun=@(sigma) -h_sigma_unif(sigma, muestra, j);
new(j)=fminbnd(fun,0, 2);
end
% Devuelve el valor segun el nuevo estimador
estimador=[ver, new];
% Devuelve el valor segun el estimador maximo verosimil
% y el nuevo para valores del nivel maximo que vayan
% desde 1 hasta niveles

```

end

Ahora bien, el segundo script consiste en una función que genera una matriz con m valores según cada uno de los estimadores. Una vez obtenidos dichos valores se hace la media y la desviación típica, la cual será mostrada por pantalla una vez llamemos a la función.

El código es el siguiente:

```
function [A, media, destip]=
estimadores_normales_unif_ruido(sigma2,l,niveles,m,ruido)
% Devuelve una matriz cuya primera fila son los valores
% del estimador segun max ver y la segunda segun el
% nuevo estimador asi como el valor de la media y la
% desviacion tipica de los valores obtenidos.
% Introduzcase el vector de ruidos como 'ruido'

media=zeros(niveles+1,1);
destip=zeros(niveles+1,1);

for i=1:m
estimador=
estimador_normal_unif_ruido(sigma2,l,niveles,ruido);
A(i,:)=estimador;
end
A;
for k=1:niveles+1
media(k)=mean(A(:,k));
destip(k)=std(A(:,k));
end
```

Realicemos pues varias pruebas de estimación (tomaremos $m = 100$) para una variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)$ para un tamaño de 1000 datos para muestra considerada y los cinco primeros niveles de la estructura fractal finita y uniforme a través de las cuales se ha mostrado la estimación en la sección anterior y cuya construcción puede verse en los ejemplos de la subsección 4.4.1.

1. Los ruidos introducidos provienen de una distribución $\mathcal{N}(0, \sigma)$ donde $\sigma \neq 1$. Pongamos, por ejemplo, $\sigma = 5$ y generemos 10 ruidos. Los resultados obtenidos quedan recogidos en la siguiente tabla:

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,1351	0,0169
Nuevo (Γ finita)	1	1,0114	0,3331
	2	1,0163	0,0251
	3	1,0212	0,0223
	4	1,0268	0,0210
	5	1,0337	0,0204

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,0696	0,0230
Nuevo (ω uniforme)	1	2,0000	0,0000
	2	1,0183	0,0419
	3	1,0188	0,0348
	4	1,0238	0,0345
	5	1,0290	0,0319

2. Los ruidos introducidos provienen de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ donde $\mu \neq 0$ y $\sigma \neq 1$. Pongamos, por ejemplo, $\mu = 3$ y $\sigma = 5$ y generemos 10 ruidos. Los resultados obtenidos quedan recogidos en la siguiente tabla:

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,2965	0,0176
Nuevo (Γ finita)	1	1,0112	0,0291
	2	1,0154	0,0254
	3	1,0234	0,0240
	4	1,0330	0,0232
	5	1,0440	0,0228

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,0779	0,0212
Nuevo (ω uniforme)	1	2,0000	0,0000
	2	1,0099	0,0352
	3	1,0149	0,0293
	4	1,0173	0,0295
	5	1,0236	0,0305

3. Los ruidos introducidos provienen de una distribución totalmente distinta a la normal. Consideremos por ejemplo $X \sim \varepsilon(10)$. Generemos 10 ruidos como valores aleatorios de la variable aleatoria X . Los resultados de la estimación por ambos métodos quedan recogidos en la siguiente tabla:

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,4481	0,0163
Nuevo (Γ finita)	1	1,0172	0,0319
	2	1,0223	0,0271
	3	1,0316	0,0253
	4	1,0439	0,0243
	5	1,0575	0,0237

Estimador $\hat{\sigma}$	N. máx.	Media	Desv. típica
Máx. verosímil		1,5395	0,0141
Nuevo (ω uniforme)	1	2,0000	0,0000
	2	1,0178	0,0386
	3	1,0200	0,0327
	4	1,0238	0,0347
	5	1,0271	0,0345

A la vista está, de los resultados recogidos en las tablas anteriores, la considerable mejora en cuanto a la aproximación realizada por el nuevo estimador frente al de máxima verosimilitud. Además, puede apreciarse que a medida que aumenta el nivel considerado la estimación empeora ligeramente.

Capítulo 7

Conclusiones

El objetivo principal del trabajo, tal y como se describió en el primero de los capítulos, es la construcción de una medida de probabilidad a partir de una estructura fractal. Para ello hacemos uso de los dos conocidos métodos de construcción de medidas exteriores, presentados en el segundo de los capítulos. Una estructura fractal no es más que una descomposición de un espacio de forma iterativa por niveles.

Previamente a ponernos manos a la obra con dicha construcción comenzamos describiendo la bicompletación de una estructura fractal a través de un límite inverso. A la vista de ésta última está la gran similitud con la completación de un espacio métrico en general que presenta, aunque resulta ser de carácter más geométrico en este caso. Además antes de ello, describimos unas aplicaciones que conservan la estructura fractal. Culminamos el capítulo probando la unicidad de la completación así como algunas propiedades de completitud de la misma.

Una vez llevada a cabo la construcción de la completación pasamos a la construcción de la medida. Como primer paso de cara a realizar dicha construcción, tal y como se indica en la Sección 4.1, se ha visto como definir una medida en la bicompletación, \tilde{X} , a partir de una premedida definida sobre las bolas de dicho espacio. Una vez encontradas las condiciones que garantizan la definición de una probabilidad sobre dichos conjuntos, en la siguiente sección hemos tratado una nueva definición de una medida de probabilidad a partir de una premedida definida sobre los elementos de la estructura fractal considerada.

Para poner fin a las construcciones de medidas se han buscado condiciones con el objetivo de definir una medida de probabilidad sobre un espacio X , llegando a la conclusión de que las condiciones clave para ello quedan recogidas en el Teorema 4.3.5.

Para zanjjar dicho capítulo, se dan una serie de ejemplos que resultan

cruciales para ilustrar la distribución de una masa entre los elementos de una estructura fractal, siguiendo un procedimiento parecido a los ilustrados en el primer capítulo, de forma que obtengamos una medida de probabilidad sobre el espacio en el que consideramos la estructura fractal.

En un quinto capítulo, puede verse cómo definir una función de distribución en la completación de X a partir de una medida. Para ello, primero hemos de definir un orden y , una vez que lo hemos hecho, extendemos el concepto de función de distribución. Surgen a partir de ahí una serie de resultados que resultan ser análogos al caso clásico en cuanto a la función de distribución se refiere, en el sentido de que hemos conseguido construir una función de distribución a partir de una medida y que toda medida puede describirse a partir de una función de distribución. Existe pues una relación biunívoca entre las medidas definidas en \tilde{X} y su correspondiente función de distribución. Es más, cualquier medida que se defina sobre \tilde{X} va a poder construirse siguiendo el procedimiento llevado a cabo en el Capítulo 5. Vemos además, como se puede obtener la función de distribución asociada a las medidas que construimos en los capítulos anteriores e incluso probamos un resultado que nos muestra que una función de distribución puede obtenerse a partir de una premedida definida sobre los elementos de una estructura fractal. Además, para poner fin a dicho capítulo, se propone un método de generación de muestras de una determinada distribución de probabilidad de manera teórica, procedimiento que posteriormente será ilustrado de manera gráfica en el Capítulo 6.

Para culminar, se detalla en el Capítulo 6, no solo la generación de muestras de una determinada distribución de probabilidad como se ha indicado previamente, sino un nuevo método de estimación de parámetros para una determinada distribución.

En cuanto a la primera de las aplicaciones, se trata de un proceso iterativo que, partiendo de una estructura fractal concreta en un espacio X , un número aleatorio generado en $[0, 1]$, x , una distribución de masa sobre los elementos de la estructura fractal escogida y un nivel de la misma, nos proporciona un número $y \in X$ de forma que $F(y)$ es, aproximadamente x .

Cabe destacar la gran relevancia de dicho método ya que nos ofrece la posibilidad de generar muestras de una determinada distribución de probabilidad en el caso n -dimensional, a diferencia del método de la transformada inversa que solo nos ofrece dicha posibilidad en el caso de una dimensión.

La segunda de las aplicaciones parte de una definición de la función ω hasta llegar a la creación de un nuevo método de estimación. Si partimos de una muestra aleatoria generada según una determinada distribución de probabilidad, dicho método consiste en maximizar la probabilidad de que en cada elemento de la estructura fractal considerada caigan tantos elementos de

la muestra generada como verdaderamente han caído. La variable aleatoria que nos es fundamental de cara a contabilizar dicha cantidad es la binomial. Una vez realizadas numerosas pruebas con el fin de comparar la bondad de la estimación que resulta de aplicar el método de máxima verosimilitud frente a nuestra estimación partiendo de dos posibles estructuras fractales -una finita y otra según una distribución uniforme de la masa- las conclusiones obtenidas son las que figuran a continuación.

El nuevo estimador resulta ser muy similar al proporcionado por el método de máxima verosimilitud en cuanto a la estimación que proporciona. Se concluye, tras realizar las pruebas pertinentes, que a mayor tamaño de la muestra y mayor nivel máximo considerados, más próximos se encuentran los valores de ambos estimadores, llegando a ser muy cercano, en cuanto a exactitud se refiere, el estimador diseñado al de máxima verosimilitud. Es por ello, que en la Sección 6.3 sometemos ambas estimaciones tratadas a ruidos llegando a la conclusión de que nuestro método de estimación es mejor que el de máxima verosimilitud en dicha situación. Para realizar las pruebas correspondientes se ha empleado MATLAB, al igual que para la aplicación anterior. La creación de funciones en dicho programa nos permiten obtener los resultados descritos previamente.

Bibliografía

- [1] F.G. Arenas, M.A. Sánchez-Granero, *A characterization of non-archimedeanly quasimetrizable spaces*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste XXX (1999), 21–30.
- [2] BENOIT MANDELBROT, ADLAI FISHER AND LAURENT CALVET, *A Multifractal Model of Asset Returns*, Department of Mathematics, Yale University and IBM T. J. Watson Research Center, Department of Economics, Yale University, 1996.
- [3] F.G. Arenas, M.A. Sánchez-Granero, *Completeness in metric spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. (8) 33 (2002), 1197–1208.
- [4] J.F. Gálvez-Rodríguez, M.A. Sánchez-Granero, *Completion of a fractal structure*, preprint.
- [5] KENNETH FALCONER, *FRACTAL GEOMETRY: Mathematical Foundations and Applications*, Chichester, England, 1990.
- [6] M.A. Sánchez-Granero, *Fractal structures, in: Asymmetric Topology and its Applications*, in: Quaderni di Matematica, vol. 26, Aracne, 2012, 211–245.
- [7] RYSZARD ENGELKING, *General topology*, Berlín: Heldermann, 1989.
- [8] J.F. Gálvez-Rodríguez, M.A. Sánchez-Granero, *Generating a probability measure from a fractal structure*, preprint.
- [9] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, New York, USA, Springer-Verlag, 1974.
- [10] GERALD A. EDGAR, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Columbus, USA, Springer Science+Business Media, 1990.
- [11] H.P.A. KÜNZI, *Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology*, in: C.E. Aull, R. Lowen (Eds.), Handbook of the History of General Topology, vol. 3, Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 853-968.
- [12] RAMÓN GUTIÉRREZ JÁIMEZ, ALICIA MARÍA JUAN GONZÁLEZ Y FRANCISCO HERRERA CUADRA, *Probabilidad*, España, Proyecto Sur de Ediciones, 2002.

- [13] P. Fletcher and W.F. Lindgren, *Quasi-Uniform Spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 77, Marcel Dekker, New York, 1982.
- [14] CRISTIANO G. SABIU, LUÍS F. A. TEODORO, MARTIN A. HENDRY, *Resolving the universe with multifractals*, Il Nuovo Cimento, Italia, 2008.
- [15] MARK J. SCHERVISH, *Theory of Statistics*, Pittsburgh, USA, Springer-Verlag, 1995.