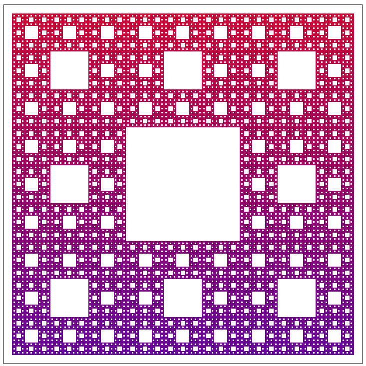
Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XII. Número 1 — 26 de octubre de 2018



Alfombra de Sierpiński

Benoît Mandelbrot

El padre de la geometría fractal

Benoît Mandelbrot es considerado como el «padre» de la geometría fractal, un concepto que revolucionó los modelos geométricos en el siglo XX.

En este artículo, David Crespo Casteleiro, miembro del comité editorial de este boletín y que, recientemente, ha publicado el libro titulado *Mandelbrot. En busca de la geometría de la naturaleza*, nos hace una breve semblanza de la vida y obra de Mandelbrot.

(Artículo completo en la página 13)

La Olimpiada Matemática Europea Femenina

El equipo español

En este número del Boletín contamos con la aportación de Elisa Lorenzo, actual presidenta de la *Comisión de Mujeres y Matemáticas* de la *Real Sociedad Matemática Española*.

Elisa nos presenta la Olimpiada Matemática Europea Femenina, una iniciativa que pretende animar a la chicas a participar en las competiciones matemáticas.

El objetivo final es el de romper el concepto erróneo de que las ciencias y, en concreto, las matemáticas son un ámbito masculino y evitar que se pierda talento debido a los roles tradicionales que nos marca la sociedad.

(Artículo completo en la página 17)

Resumen

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

Editorial

Almería acaba de ser proclamada *Capital española de la gastronomía* 2019 por su rica y variada gastronomía que combina los productos de la tierra y de la mar, por su cocina tradicional, sus tapas, así como por la innovación en el sector hostelero.

Durante todo el año se realizarán distintas actividades relacionadas con el evento, tratando de conseguir una repercusión positiva en el turismo de nuestra ciudad y provincia.

Desde el Boletín queremos unirnos a este reto introduciendo en los números correspondientes al año 2019 algunos artículos, experiencias docentes, problemas propuestos. . . que unan gastronomía y matemáticas.

Este tipo de colaboraciones será etiquetado con un logo especial que nos permitirá, hacia final de 2019, votar la publicación más interesante y premiar al autor o autores.

Como siempre, os animamos a que nos enviéis vuestros artículos a las diferentes secciones y, ya sabéis, si están relacionadas con la gastronomía podéis conseguir un premio.

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

Jornada sobre el Boletín

El comité editorial del Boletín organizó el 11 de octubre una jornada para planificar el trabajo correspondiente al curso académico 2018–19 en el que se publicarán los tres números del Volumen XII. Esta jornada se enmarca en la actividad del Grupo de Innovación Docente *Boletín Matemático de la UAL*.

Los asistentes a la reunión, profesores y estudiantes, tuvieron la oportunidad de compartir y aportar sus ideas sobre la divulgación matemática y su enfoque a través del Boletín.

Santi García Cremades en un momento de la actividad

El colofón a la jornada fue la conferencia *No somos perfectos* impartida por el profesor Santi García Cremades de la *Universidad Miguel Hernández* de Elche y conductor del programa *Raíz de 5* de Radio 5.

De una forma amena y entretenida el ponente abordó cuestiones matemáticas que resultaron de interés para el público que llenó la sala, entre ellos estudiantes del Grado en Matemáticas.

IV Concurso IndalMat

El 5 de octubre se celebró en la *Universidad de Almería* el *IV Concurso IndalMat* de resolución de problemas de matemáticas para estudiantes de 4.º de ESO, y de 1.º y 2.º de Bachillerato.

Participaron más de 400 estudiantes de una treintena de institutos de la provincia. La jornada culminó con la conferencia *Problemas mágicos de las matemáticas*, impartida por Pedro Alegría Ezquerra, profesor de la UPV/EHU.

Pedro Alegría en la charla

Se otorgaron tres premios principales en cada una de las categorías y un diploma a cada uno de los calificados en los puestos cuarto al décimo. Javier López Miras del *IES Nicolás Salmerón*, Alberto Márquez Salido de la *Compañía de María* y Javier Cano Castro del *IES Mar Mediterráneo*, han sido, por ese orden, los más destacados de 2.º de Bachillerato. En 1.º de Bachillerato han resultado ganadores Ana Barrionuevo Díaz del *IES Celia Viñas*, María Araceli Pérez López del *Colegio Altaduna* y Shao Jie Hu Chen del *IES Alyanub*. En cuanto a 4.º de ESO, los ganadores fueron Pedro Daureo Bretones y Juan José Martín Berlanga del *Colegio Saladares* y José David Montoya Conde del *IES Aguadulce*.

I Encuentro Internacional de NeoTrie VR

Este encuentro tuvo lugar los días 1 y 2 de octubre en la *Universidad de Almería* reuniendo a 50 participantes de Alemania, España, Francia, Polonia y Turquía.

Foto de familia

NeoTrie VR es un software que facilita el aprendizaje de conceptos matemáticos, en especial geométricos, a través de la realidad virtual y ha sido desarrollado por José Luis Rodríguez Blancas y Diego Cangas Moldes, profesor y estudiante, respectivamente, de la UAL.

Noche Europea de los Investigadores

El viernes 28 de septiembre tuvo lugar en Almería capital *La Noche Europea de los Investigadores*, organizada por el Vicerrectorado de Investigación, Desarrollo e Innovación, a través de la OTRI de la Universidad y enmarcada en un proyecto europeo de divulgación científica promovido por la Comisión Europea, dentro de las *Acciones Marie Skłodowska-Curie* del programa *Horizonte 2020*.

El stand de Acércate al mundo de las matemáticas

Como en años anteriores ha sido todo un éxito de participación con miles de almerienses disfrutando de las actividades preparadas por los investigadores. Las dedicadas a las matemáticas fueron:

 ISSN 1988-5318

- Acércate al mundo de las matemáticas.
- Virtual Dor: Una puerta a la Salud y a la Educación Virtual.
- Ingenio matemático.
- Cocina y matemáticas.

Congreso homenaje al profesor Amin Kaidi

Con motivo de la jubilación del catedrático de Análisis Matemático Amin Kaidi Lhachmi de la *Universidad de Almería*, se celebró un encuentro científico en su honor los días 13 y 14 de septiembre, donde se dieron cita investigadores que trabajan en las ramas de álgebra y análisis funcional.

Foto de familia del encuentro

Las charlas incluyeron temas como C*-álgebras, álgebras y estructuras de Jordan y problemas sobre preservers.

Desde el Boletín queremos agradecer a nuestro compañero Amin su trabajo durante estos años tanto en la Licenciatura de Matemáticas como posteriormente en el Grado.

XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Con el lema *Matemáticas en tierra de cine* se celebró este congreso del 4 al 6 de julio, organizado por la *SAEM Thales* en colaboración con la Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería*.

Un momento del acto inaugural

El congreso fue todo un éxito y los asistentes pudieron asistir a tres conferencias plenarias, ocho ponencias, talleres, comunicaciones, zoco, pósteres, etc. y a la vez interactuar en las actividades programadas a tal efecto como, por ejemplo, *Parejas de cine*.

Este Boletín también estuvo presente con una presentación a los asistentes titulada *Una experiencia de divulgación a través del boletín matemático de la UAL*.

Dado el lema del congreso, la cena de gala tuvo lugar en el parque temático *Oasys MiniHollywood* en Tabernas.

Jornada Métodos Categóricos y Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología

Del 28 al 30 de junio se celebró en la Universidad de Almería la novena edición de las *Jornadas Interdisciplinares en Métodos Categóricos y Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología* de la Red Española de Topología.

Foto de familia del encuentro

Estas jornadas se celebran anualmente con el fin de propiciar la relación e interacción entre los distintos grupos de investigación, fomentando que todos los asistentes tomen parte activa en las discusiones y en especial los jóvenes investigadores.

Deep hierarchical probabilistic models

Este curso, impartido por el investigador Helge Langseth de la *Norwegian University of Science and Technology* (Noruega) y profesor visitante en Carnegie Mellon (Estados Unidos), se celebró entre los días 1 y 5 de octubre en las instalaciones del Departamento de Matemáticas.

Helge Langseth

Helge Langseth es una de las mayores autoridades mundiales en modelos jerárquicos y ha participado en proyectos europeos de alto nivel, algunos de ellos en colaboración con investigadores del departamento.

En el curso se hizo un recorrido por los aspectos relacionados con el Big Data en los que estos modelos son de gran utilidad.

Bringing Young Mathematicians Together (BYMAT)

El pasado mes de mayo el *Instituto de Ciencias Matemáticas* (ICMAT) acogió el primer congreso BYMAT

ISSN 1988-5318

que pretende aglutinar a los jóvenes investigadores en matemáticas a nivel mundial. Los organizadores esperan que tenga una frecuencia anual.

Actividades de la SAEM Thales

Como es habitual, incluimos las actividades que esta sociedad organiza en la provincia de Almería.

- El 12 de mayo, con motivo de la celebración del *Día Escolar de las Matemáticas*, organizó la *Feria de la ciencia en la calle...*, en la plaza del *Museo de Almería*.
- El 1 de junio en el mismo museo tuvo lugar el acto de entrega de premios de los diferentes concursos convocados durante el curso 2017–18.
- El 9 de junio tuvieron lugar, en cada una de las provincias de Andalucía, las pruebas de selección de estudiantes andaluces para participar en el *Proyecto ESTALMAT*, un programa para la detección y estímulo del talento precoz en Matemáticas. En esta edición participaron estudiantes nacidos en los años 2004, 2005 y 2006.

Noticias matemáticas

Manifiesto a favor de la divulgación de las matemáticas

El congreso *Tecnología en la Divulgación Matemática*, organizado por el *Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones* de la *Universidad de Zaragoza* y celebrado en esta ciudad los días 10 y 11 de mayo, sirvió de lanzadera para fundar la asociación *DiMa*.

Durante estos dos días tuvieron lugar diferentes charlas a cargo de divulgadores de toda España y donde el Boletín estuvo representado con la titulada *Una experiencia de divulgación a través del Boletín*.

Matemáticos firmantes del manifiesto

Sirvieron estos dos días para elaborar un manifiesto que pusiera en valor la importancia de la divulgación de las matemáticas y se establecieran las líneas que se consideran prioritarias para potenciarlas.

A partir de ese momento se constituyó la asociación *DiMa* (más detalles en la reseña de la web de *DiMa* en este mismo Boletín) y se acordó un manifiesto que ha sido ampliamente divulgado por los medios de comunicación nacionales y las redes sociales.

Semana de la Ciencia 2018

Como todos los años, el Vicerrectorado de Investigación, Desarrollo e Innovación, a tavés de la OTRI, está organizando la *Semana de la Ciencia* 2018 en la *Universidad de Almería*, que este año se celebrará del 5 al 9 de noviembre.

La *Semana de la Ciencia* es el mayor evento de comunicación social de la ciencia y la tecnología de nuestro país, que pretende acercar el conocimiento científico y tecnológico a la sociedad, difundiendo los resultados de la investigación entre la población.

Vídeo promocional del Grado en Matemáticas

El pasado 21 de mayo tuvo lugar en el *Museo de Almería* la presentación en sociedad de los vídeos promocionales de las titulaciones de la Facultad de Ciencias Experimentales [1] de la *Universidad de Almería*. El vídeo corto relativo al Grado en Matemáticas se puede ver en la dirección *www.youtube.com/watch?v=3Pkm-So77Qk*.

Convenio RSME y Universidad Abdelmalek Essaâdi de Tetuán

El 12 de septiembre se firmó en la *Universidad de Almería* el convenio de colaboración entre la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME) y la universidad marroquí *Abdelmalek Essaâdi*.

Acto de firma del convenio

[1] *www.youtube.com/watch?v=8_fuuc5Y7Nk*.

ISSN 1988-5318

El acto fue presidido por el rector de la UAL, Carmelo Rodríguez, y los firmantes del convenio fueron Francisco Marcellán, presidente de la RSME, y Moufadal Ben Yakoub en representación del presidente de *la Universidad Abdelmalek Essaâdi*. La UAL, a través del delegado de la RSME, será la que supervisará el funcionamiento del convenio.

Katherine (Coleman) Johnson cumple 100 años

Katherine Johnson

La matemática norteamericana Katherine (Coleman) Johnson cumplió 100 años el pasado 26 de agosto.

Su vida es el motivo de la película *Cifras Ocultas* (Hidden Figures, 2016).

Trabajó para la NASA hasta su jubilación en 1986 después de 33 años en esta agencia espacial. Una corta biografía, en inglés, se puede encontrar en el portal *MacTutor History of Mathematics* o en el portal *Mujeres con Ciencia*, en español.

Olimpiadas científicas

En el mes de mayo los presidentes de la *Real Sociedad Española de Física* (RSEF), José Adolfo de Azcárraga, la *Real Sociedad Española de Química* (RSEQ), Antonio M. Echavarren y la *Real Sociedad Matemática Española* (RSME), Francisco Marcellán, firmaron una tribuna titulada *Olimpiadas científicas y el menosprecio de la ciencia* donde se pone de manifiesto el poco interés que los gobiernos han prestado a las Olimpiadas científicas y su escasa financiación.

Esta tribuna puede leerse en el periódico *El Mundo*.

Medalla Fields 2018

La *Unión Matemática Internacional* otorgó la *Medalla Fields* a los matemáticos Caucher Birkar (Irán, Reino Unido), Alessio Figalli (Italia), Peter Scholze (Alemania) y Akshay Venkatesh (Australia).

Esta distinción se otorga cada cuatro años a matemáticos menores de 40 años durante el *Congreso Internacional de Matemáticas* que en esta ocasión tuvo lugar en Río de Janeiro entre el 1 y el 9 de agosto.

Red Estratégica en Matemáticas

La *Red Estratégica en Matemáticas* se encuentra dentro de las *Redes de excelencia* correspondientes al programa estatal de fomento de la investigación científica y técnica de excelencia.

Se concedió en junio de 2017 por un período de dos años, si bien ha tenido una mayor difusión a partir de este año.

Su objetivo es fomentar la investigación en Matemáticas. Más información en *institucionales.us.es/remimus*.

Premios Vicent Caselles 2018 de la RSME y Fundación BBVA

Estos premios son otorgados desde 2015 de forma conjunta por la *Real Sociedad Matemática Española* y la *Fundación BBVA* [2] a investigadores menores de 30 años que hayan realizado aportes relevantes a las matemáticas.

Los ganadores de 2018 han sido David Beltran Portalés, Álvaro del Pino, David Gómez Castro, David González Álvaro, Vanesa Guerrero y Carolina Vallejo Rodríguez.

Programa de radio: Raíz de 5 (RTVE)

Es un programa semanal de Matemáticas en *Radio 5* que se emite todos los sábados a las 12:37 y está presentado por el matemático Santi García Cremades. Se accede a los programas en *www.rtve.es/alacarta/audios/raiz-de-5*.

VIII Escuela Internacional de Verano de Matemáticas

La *SAEM Thales* y la *Universidad de Sevilla*, en colaboración con la *Fundación Euler* y la *Universidad Estatal de San Petersburgo*, han publicado el primer anuncio de la *Octava Escuela Internacional de Verano de Matemáticas* [3] destinada a estudiantes de 14 a 17 años que sientan especial interés por las matemáticas.

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: Antonio Fernández y Mercedes Siles, de la Universidad de Málaga; Consuelo Martínez de la Universidad de Oviedo; Osamu Hatori y Takeshi Miura, de la Universidad de Niigata (Japón); Jesús Laliena, de la Universidad de La Rioja; Antonio Peralta, de la Universidad de Granada; Manuel González, de la Universidad de Cantabria; Moisés Villegas, de la Universidad de Cádiz; Moufadal Ben Yakoub, de la Universidad Abdelmalek Essaâdi (Marruecos), Sergio López-Permouth, de la Universidad de Ohio (Estados Unidos); Michel Dubois-Violette de la Universidad, de Paris-Orsay (Francia); Helge Langseth, de la NTNU (Noruega) y Francisco Marcellán, de la Universidad Carlos III de Madrid.

[2] *www.fbbva.es/premios/premios-investigacion-matematica-vicent-caselles-2018*.
[3] *thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/Preanuncio-VIII-EIVM-2019.pdf*.

 ISSN 1988-5318

Preguntas frecuentes

¿Qué es el *Reglamento de evaluación del aprendizaje del alumnado* en la Universidad de Almería?

Los Estatutos de la *Universidad* de Almería establecen que: *«El Consejo de Gobierno, oído el Consejo de Estudiantes, establecerá las normas relativas a los sistemas básicos generales de evaluación de los estudiantes que estarán acordes con las medidas que la Universidad de Almería deberá promover para la plena integración y reconocimiento de su actividad en el espacio europeo de educación superior.»*

Estas normas se encuentran recogidas en el *Reglamento de evaluación del aprendizaje del alumnado en la Universidad de Almería*, que puede consultarse en la sección *Normativa y Documentos* de la página web del Grado en Matemáticas.

En él se regulan los diferentes métodos de evaluación: exámenes orales o escritos, presentación de trabajos, asistencias y participación en clase, etc. También se detallan los derechos y deberes de los estudiantes referentes a la evaluación, el sistema de calificación y los procedimientos de revisión y reclamación de dichas calificaciones.

¿Cómo puedo solicitar un cambio de grupo de clase?

El artículo 28 de la Resolución de la Universidad de Almería sobre matrícula oficial en estudios de Grado y Máster para el curso académico 2018–2019, regula el cambio de grupo en estudios de Grado y Máster.

Puede solicitarse una permuta de plazas entre dos estudiantes y también un cambio de grupo por motivos excepcionales, que deben justificarse documentalmente: incompatibilidad horaria con el puesto de trabajo, razones de salud, diversidad funcional, conciliación con la vida familiar, atención de personas dependientes, víctima de violencia de género, deportista universitario de alto nivel u otras causas justificadas.

Toda la información relativa a este procedimiento (plazos, formularios, entrega de solicitudes y normativa aplicable) se encuentra en la web *Mi Secretaría*.

EXPERIENCIA DOCENTE

Montando nuestro negocio de comida a domicilio

Una propuesta para el trabajo por competencias en el IES Turaniana

Alejandro J. Amate Romera
IES Nicolás Salmerón (Almería)
Miguel Ángel Fernández Oller
IES Turaniana (Roquetas de Mar, Almería)

«. . . el objetivo de la educación matemática debe ser preparar ciudadanos educados y no una pobre imitación de una calculadora de 30€».

(K. Devlin, cit. Alsina, 2004)

1. Significado e implicaciones de un aprendizaje por competencias

¿Y esto para qué sirve, profe?. . . sin duda es un interrogante que todos los que impartimos clase de Matemáticas hemos escuchado en más de una ocasión de nuestros estudiantes.

Responder a este interrogante (¿para qué. . . ?) es precisamente lo que pretenden las siete competencias clave que se contemplan en el diseño y desarrollo del *currículum actual* para Secundaria.

Los decretos vigentes que determinan el currículum definen la competencia como una combinación de conocimientos, capacidades, destrezas y actitudes adecuadas al contexto, que favorece la autonomía y la integración del alumnado en su propio aprendizaje y, con ello, su motivación por aprender.

Se dice fácil pero, evidentemente, un aprendizaje por competencias implica numerosas e importantes decisiones, tanto metodológicas como de evaluación en nuestro quehacer cotidiano en el aula.

Plantear un aprendizaje por competencias significa dar un enfoque determinado a los contenidos, orientándolos permanentemente hacia un «saber hacer».

Trabajar por competencias supone crear en clase una situación de aprendizaje propicia para que el alumnado utilice los contenidos que establece el currículum para entender y/o transformar y/o resolver problemas en situaciones cotidianas. Se trata, por tanto, de un aprendizaje funcional, un aprendizaje en acción siendo el contexto un ingrediente fundamental del mismo. Dicho de otro modo, no hay competencia sin contexto.

El desarrollo de las competencias implica un aprendizaje que va mucho más allá de lo rutinario o puramente memorístico. En la sociedad del s. XXI, ese «saber» declarativo se llama *Google* o *Wikipedia* sugiriéndonos, por tanto, un cambio de paradigma hacia un aprendizaje que

 ISSN 1988-5318

requiera la utilización y aplicación de lo aprendido, el establecimiento de relaciones, así como una reflexión continua sobre el mismo proceso que nos conduce (o no) al aprendizaje.

Los actuales decretos educativos destacan la necesidad de promover una educación orientada a lograr que los estudiantes se conviertan en personas capaces de integrarse en el mundo actual y, también, después de haber adquirido las competencias clave en su etapa escolar obligatoria, ser capaces de continuar aprendiendo a lo largo de toda su vida.

Metodológicamente, un trabajo destinado a desarrollar las competencias en nuestro alumnado implica un planteamiento que considere al estudiante en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, adoptando el docente el papel de guía en ese proceso. Requiere un aprendizaje activo por parte del alumnado, que esté continuamente «haciendo» algo con los contenidos aprendidos así como reflexionando y evaluando su propio proceso de aprendizaje obteniendo conclusiones que le permitan regular y optimizar su propio aprendizaje, tal como se recomienda en el Anexo II de la Orden ECD/65/2015 (en BOE de 29/1/15) y en las recomendaciones metodológicas de la propia Orden de desarrollo del currículum en Andalucía (Orden 14/7/16).

Todo ello es muy conveniente plantearlo desde un enfoque cooperativo que requiera de una interacción, acuerdos y decisiones por parte del alumnado, reforzando así sus habilidades para trabajar en equipo y su sentido de la responsabilidad, aspectos fundamentales en la realidad actual.

Respecto a la evaluación, el trabajo por competencias supone poner el foco en los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables (definidos en Orden 14/7/16 y en R. D. 1105/14).

Dichos criterios, que están relacionados a su vez con las competencias clave, se contemplan en las normativas vigentes como los referentes del aprendizaje para nuestro alumnado. Es, por tanto, con el trabajo sobre estos criterios y con la evaluación de los mismos el modo en que se plantea una actividad en el aula encaminada al desarrollo de competencias.

Todo lo dicho implica partir de una ponderación de los criterios de evaluación superando el «antiguo» debate sobre otorgar un peso a los instrumentos de evaluación (ese que nos llevaba a ver si le dábamos al examen un 60 % o un 80 %).

No es este un debate que tenga sentido desde este enfoque. Insistimos en que lo que determinará una calificación final, tanto de la materia como del nivel competencial, será la ponderación que se establezca de los criterios de evaluación, siendo los instrumentos (examen, tareas, proyectos, diario de clase,. . .) medios por los cuales obtener evidencias de los criterios establecidos para cada nivel.

2. Trabajo por tareas: una forma de trabajar las competencias en clase de Matemáticas

Competencia es, según lo abordado anteriormente, sinónimo de «saber hacer» y «saber ser», y la mejor manera de transmitir ese saber es precisamente haciendo.

Tal como se deduce de las recomendaciones metodológicas sugeridas en las distintas normativas curriculares para Andalucía (Decreto 111/2016, art. 7 y Orden 14/7/16, estrategias metodológicas), las tareas son uno de los instrumentos vehiculares más adecuados para plantear unas situaciones de aprendizaje encaminadas al desarrollo de competencias en nuestro alumnado, ya que mediante las mismas se presentan de forma relacionada los contenidos dotándolos de un contexto lo que favorece la motivación, funcionalidad y transversalidad de los aprendizajes.

Definimos una tarea como la acción o conjunto de acciones orientados a la resolución de una situación-problema, dentro de un contexto definido, mediante la combinación de todos los saberes disponibles que permitirán la elaboración de un producto relevante.

Es muy importante para un trabajo por tareas definir claramente un producto final que resulte tangible, claro y relevante. . . como por ejemplo: tríptico explicando el recibo de la luz, planificación de un viaje de estudios o salida cultural, proyecto de un negocio, vídeo sobre algún tema, juego para practicar ciertos conceptos, elaboración de una web, una obra de teatro. . . Sin producto final, no hay tarea. La correcta definición del mismo ayuda notablemente a definir las actividades y ejercicios que se plantearán orientadas a lograr la tarea final.

Las actividades son, por tanto, las acciones que planteamos para satisfacer una tarea compleja. Los pasos en que definimos la tarea, por decirlo de un modo fácil. Es importante que las actividades impliquen diversos verbos (reflexionar, analizar, recordar, exponer. . .) ya que de ese modo trabajaremos distintos procesos cognitivos y contribuiremos al desarrollo de competencias clave.

Finalmente, las actividades podemos dividirlas a su vez en ejercicios, que son acciones mucho más rutinarias y menos complejas pero imprescindibles para sistematizar y consolidar ciertos procesos y algoritmos básicos. En los ejercicios no adquiere tanta importancia el contexto, aunque hay que advertir que siempre van encaminados para aplicarlos en un contexto definido por actividades y tarea.

Según lo comentado, tareas, actividades y ejercicios son la parte central, lo que llamamos transposición didáctica, de una *Unidad Didáctica Integrada* (UDI) que ha de ser complementada por otros dos grandes apartados: la concreción curricular y la evaluación de lo aprendido.

La concreción curricular se constituye con la selección de los criterios de evaluación y contenidos asociados que serán trabajados en la UDI, mientras que para la evaluación de lo aprendido tendremos que establecer, a través de rúbricas de evaluación, diferentes niveles de logro para cada uno de los criterios seleccionados así como determinar los instrumentos de evaluación más adecuados para cuantificar la consecución de cada uno de los criterios establecidos.

ISSN 1988-5318

Las tareas son una forma de trabajar el currículum, de ahí que sea imprescindible programar una serie de criterios a modo de intenciones que se persiguen con su desarrollo y que posteriormente han de ser evaluados. Sin estos apartados, la tarea quedaría relegada a la categoría de una «actividad entretenida», sin ser este nuestro objetivo.

3. «Proyecto de negocio de comida a domicilio»: UDI para Matemáticas en 1.º de ESO

Una vez ubicado y justificado el trabajo por tareas en la ESO, pasamos a ejemplificar todo lo dicho con el diseño de una UDI original en cuya elaboración colaboramos varios miembros del Departamento de Matemáticas del *IES Turaniana* durante el curso 2017-18. Se puede acceder a un detallado desarrollo de la misma, así como a todos los materiales y recursos necesarios [4].

4. Nuestra evaluación del desarrollo de la UDI. Propuestas de mejora

Nuestra evaluación global de la implementación de la UDI ha sido muy positiva. Tras su análisis hemos advertido una serie de mejoras y conclusiones que iremos comentado en este artículo mientras realizamos un breve recorrido por la UDI, cuyo desarrollo puede verse en su totalidad en el link anterior.

La temporalización inicial de la UDI era de 3 semanas, pero su aplicación se fue alargando hasta duplicar el tiempo inicialmente previsto. En la primera parte de la UDI el alumnado de 2.º de Bachillerato en la asignatura de Economía grabó un vídeo explicando qué es un estudio de mercado.

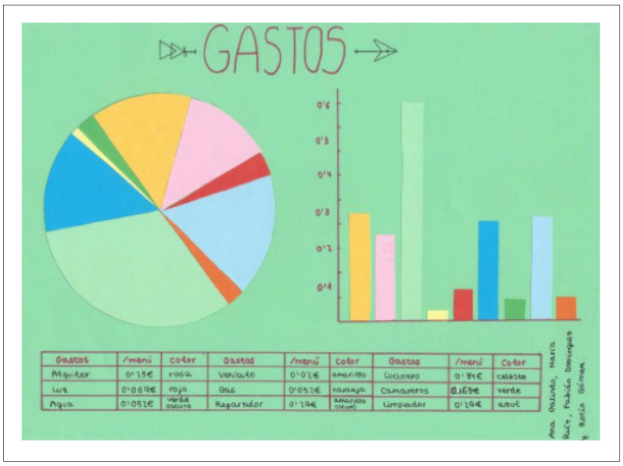
La visualización de este vídeo y la realización de un cuestionario sobre el mismo fue la actividad motivacional inicial para el alumnado de 1.º de ESO.

Destacamos positivamente que al alumnado le motivó el hecho de que las protagonistas del video explicativo fueran compañeras de su propio centro. El alumnado tuvo que darse de alta en la plataforma online *Edpuzzle* para poder acceder al cuestionario y a los vídeos. Inicialmente estaba previsto que los vídeos los visualizasen en casa, pero debido a la falta de medios de una parte del alumnado, en algunos grupos se proyectaron en clase.

En la siguiente actividad el alumnado tuvo que realizar una encuesta con el objetivo de recopilar datos necesarios para montar su negocio. Los datos de la encuesta debían implementarlos en una hoja de cálculo colaborativa que habilitamos.

Destacamos positivamente que hubo estudiantes que no habían trabajado durante el curso y realizaron la encuesta a un amplio grupo de personas. Así pues, el alumnado aprendió a utilizar una hoja de cálculo y también a crearse una cuenta en *Gmail* para poder acceder al documento.

Posteriormente se realizó una infografía con los resultados de la encuesta y, en las siguientes sesiones, tuvieron que decidir el tipo de negocio que querían montar, calcularon los gastos fijos, sueldos, materia prima, coste del menú. . .



Por último, el alumnado realizó un informe final del negocio, el cual tuvieron que presentar al resto de grupos, así como una evaluación final del desarrollo de la UDI. Cabe destacar que también durante el proceso de la UDI, cada grupo llevó a cabo una evaluación diaria plasmada en un diario de aprendizaje.

Como propuestas de mejora, destacaríamos que conviene que la UDI sea trabajada con grupos heterogéneos de alumnado. Cuando nosotros la desarrollamos, teníamos al alumnado de Matemáticas de 1.º de ESO agrupado en Grupos Flexibles en función de su nivel curricular.

En el Grupo Flexible 1 (de mayor nivel curricular) la UDI se desarrolló con gran fluidez, pero en los Grupos Flexibles 3 y 4 el profesorado tuvo que ayudar mucho al alumnado y, aun así, algunos apartados de la UDI se quedaron sin cumplimentar.

Pensamos que en los grupos faltó alumnado que ejerciese el papel de líder y tuviese un nivel curricular mayor para poder organizar al resto del grupo. Otra propuesta de mejora es realizar alguna UDI más sencilla y de menor extensión previamente, para que el alumnado se familia-

[4] *iesturaniana.org/wp_2/wp-content/uploads/2018/09/UDI-completa-con-recursos.pdf*.

ISSN 1988-5318

rice con esta forma de trabajar. En nuestro caso, fue un hándicap desarrollar esta UDI sin haber realizado otras anteriores con nuestro alumnado.

Pudimos advertir de manera clara que la metodología basada en dinámicas cooperativas es un contenido en sí mismo que conviene considerar y practicar previamente en situaciones más simples. Nos parece muy buena idea que la práctica de estas dinámicas se realice en varias asignaturas (incluida la tutoría) ya que este bagaje se nota de manera importante en la «vida de grupo». Y, finalmente, también nos sirvió la experiencia para adquirir conciencia de nuestras propias carencias formativas en este tema (aprendizaje cooperativo), hecho que orientará nuestro itinerario formativo posterior.

Haciendo clic *aquí* podéis acceder a una selección de los productos finales que diseñó el alumnado en relación a esta UDI.

Ahora sólo queda que la pongáis en práctica y, entre todos, sigamos realizando mejoras en la misma. ■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Mathematik auf Deutsch?

Ja, es ist möglich

Manuel Jesús Torres Navarro
IES El Argar (Almería)

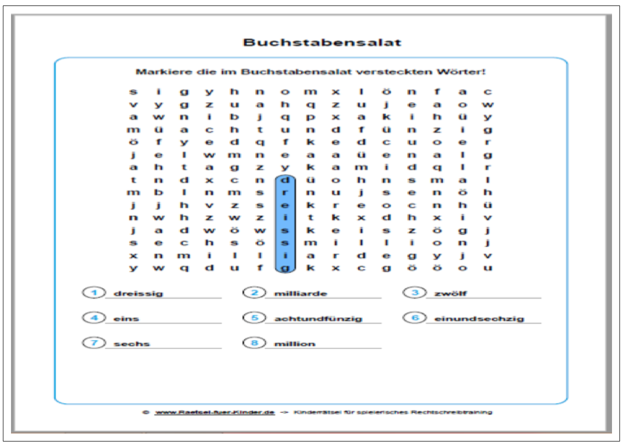
Die El Argar Schule gehört zum Netzwerk der *Pasch-Schule-Zentren*.

Die El Argar Schule

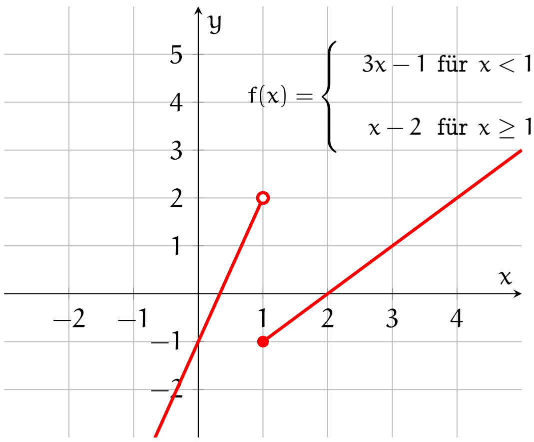
Es gibt nicht viele Schulen, die sich rühmen können, zu sein, und in Almeria gibt es ein zweisprachiges Zentrum auf Deutsch mit Fächern wie Mathematik und Geographie und Geschichte, die in dieser Sprache studiert/erlernt werden können.

Von Anfang war das Goethe-Institut bei uns. Für diejenigen, die es nicht wissen, ist der Goethe wie unser Cervantes, aber im deutschen Stil. Viele der Kurse, die wir anbieten, und die Stipendien, die wir unseren Studenten anbieten, gehören Ihnen.

Unsere Schüler arbeiten ab dem ersten Schuljahr Deutsch, mit Übungen zum Grundwortschatz wie eine einfache Buchstabensuppe, ab den ersten Unterrichtsstunden. Versuche es zu lösen!



In den höheren Klassen, als dritte Klasse, werden sie gebeten, gemeinsame Aktivitäten in Spanisch und Mathematik zu erklären, etwa die Beschreibung der Merkmale einer Funktion.



- Die Definitionsmenge ist $(-\infty, \infty)$.
- Der Wertebereich ist $(-\infty, \infty)$.
- Die Funktion ist streng steigend in die Intervalle $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$.
- Die Funtktion hat keine Symmetrie.
- Achsenabschnitte: $X: 1/3,\ 2;\ Y: -1$.
- Die Funktion hat keine Periode.
- Die Funktion hat hebbare Unstetigkeit in der Punkt $X = 1$.
- Die Funktion ist stetig in die Intervalle $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$.
- Die Funktion hat keine Asymptote.
- Die Funktion hat keine Krümmung.

Und im vierten Jahr arbeiten wir mit digitalen Werkzeugen wie dem, in dem man sehen kann.

Es ist nur ein Beispiel dafür, was im deutschen Mathematikunterricht alltäglich ist und wie ich gerne sage: „Erst Mathe und dann, wenn du kannst, auf Deutsch“. ■

ISSN 1988-5318

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS (TRADUCCIÓN)

¿Matemáticas en alemán?

Sí, es posible

Manuel Jesús Torres Navarro
IES El Argar (Almería)

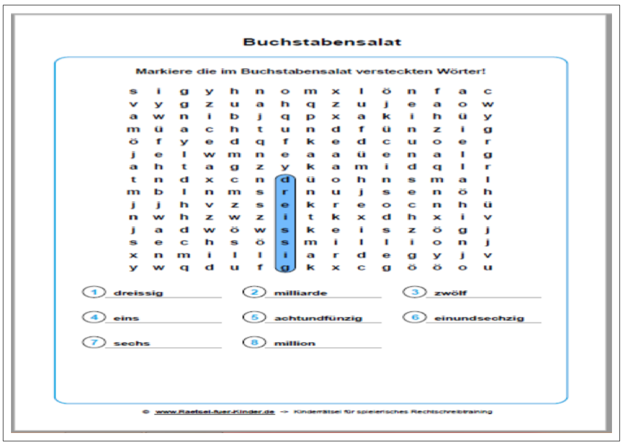
El colegio de educación secundaria El Argar pertenece a la red de centros *Pasch-schule*.

IES El Argar

No hay muchos centros educativos que puedan presumir de serlo y en Almería existe un centro bilingüe en alemán, con asignaturas como Matemáticas y Geografía e Historia, que pueden estudiarse/aprenderse en ese idioma.

Desde el principio el instituto Goethe ha estado con nosotros. Para quienes no lo sepan, el Goethe es como nuestro Cervantes, pero al estilo alemán. Muchos de los cursos que realizamos y de las becas que ofertamos a nuestros estudiantes son suyas.

Nuestros alumnos y alumnas trabajan el alemán desde el primer curso de secundaria, con ejercicios para aprender vocabulario básico como una simple sopa de letras, desde los primeros días de clase. ¡Prueba a resolverla!



Buchstabensalat

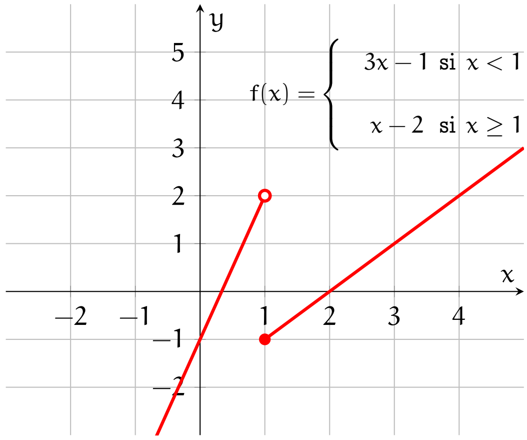
Markiere die im Buchstabensalat versteckten Wörter!

s	i	g	y	h	n	o	m	x	l	ö	n	f	a	c
v	y	g	z	u	a	h	q	z	u	j	e	a	o	w
a	w	n	i	b	j	q	p	x	a	k	i	h	ü	y
m	ü	a	c	h	t	u	n	d	f	ü	n	z	i	g
ö	f	y	e	d	q	f	k	e	d	c	u	o	e	r
j	e	l	w	m	n	e	a	a	ü	e	n	a	l	g
a	h	t	a	g	z	y	k	a	m	i	d	q	l	r
t	n	d	x	c	n	d	ü	o	h	n	s	m	a	l
m	b	l	n	m	s	r	n	u	j	s	e	n	ö	h
j	j	h	v	z	s	e	k	r	e	o	c	n	h	ü
n	w	h	z	w	z	i	t	k	x	d	h	x	i	v
j	a	d	w	ö	w	s	k	e	i	s	z	ö	g	j
s	e	c	h	s	ö	s	m	i	l	l	i	o	n	j
x	n	m	i	l	l	i	a	r	d	e	g	y	j	v
y	w	q	d	u	f	g	k	x	c	g	ö	ö	o	u

1 dreissig
2 milliarde
3 zwölf
4 eins
5 achtundfünzig
6 einundsechzig
7 sechs
8 million

© www.Raetsel-fuer-Kinder.de --> Kinderrätsel für spielerisches Rechtschreibtraining

En los cursos superiores, como tercero, se les pide que expliquen actividades habituales en español y en matemáticas, como por ejemplo, describir las características de una función.



- Su dominio es $(-\infty, \infty)$.
- El rango es $(-\infty, \infty)$.
- La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.
- La función no tiene simetría.
- Cortes: $X : 1/3,\ 2;\ Y : -1$.
- La función no tiene periodo.
- La función tiene una discontinuidad evitable en $X = 1$.
- La función es continua en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.
- La función no tiene asíntotas.
- La función no tiene curvatura.

Y en cuarto, trabajos con herramientas digitales como la que puede verse en *YouTube*.

Es sólo una muestra de lo que día a día se trabaja en las clases de matemáticas en alemán y como me gusta decir, «primero matemáticas y después, si se puede, en alemán». ■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Un chico guarda sus ahorros en una hucha. En ella, para empezar tiene x€. Durante la semana gasta la mitad de lo que tiene y, por otra parte, sus padres empiezan a darle una paga semanal fija de y€, una vez que saben que ha empezado a gastar de la hucha. Y así ocurre todas las semanas, es decir, gasta la mitad de lo que tenía la semana anterior y recibe la paga de sus padres. ¿Cuánto dinero tiene al cabo de n semanas?, ¿bajo qué condiciones consigue ahorrar dinero?
Si ahorra, ¿cuánto ahorra al cabo de n semanas?, ¿hay algún tope de dinero que pueda ahorrar?

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** una estupenda ***cámara digital deportiva tipo Go*** y un regalo relacionado con las matemáticas.
¡La solución más elegante u original tiene premio!
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es ***antes del 14 de enero***.
Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.
Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

Resultado del concurso del número anterior

Carlos Mendes

De entre las numerosas soluciones recibidas, el jurado ha decidido otorgar el premio a Carlos Mendes Góngora, estudiante de 1.º de Bachillerato del *IES Nicolás Salmerón* (Almería).

El ganador ha enviado una solución detallada muy extensa por lo que se ha decidido publicar un resumen.

Problema propuesto en el número anterior

Todos los sábados, a primera hora, se pone en marcha la peña ciclista «frenos de aire», formada por 40 deportistas. Al cabo de dos horas suelen parar en el cortijo de Sebastián, un amable agricultor, entusiasta de la aritmética, que les ofrece una naranja a cada uno.
Claro que no siempre acuden los 40. De hecho, todo lo que sabe Sebastián es que no pueden superar este número.
Antes de la llegada de los ciclistas Sebastián distribuye 40 naranjas (aunque después le sobren algunas) en 6 cestos tapados (de modo que no son visibles las naranjas contenidas en cada uno). Una vez que conoce el número exacto de visitantes les indica los cestos que tienen que retirar. Jamás se equivoca, el número total de naranjas en los cestos señalados coincide con el número de ciclistas.
¿Puedes explicar de algún modo razonable la habilidad aritmética de Sebastián?
En otras palabras, ¿podrías encontrar un modo de distribuir las naranjas en los 6 cestos que funcione en el sentido indicado?

Solución del problema propuesto:

A simple vista y probando un poco podemos conseguir varias configuraciones de 40 naranjas en 6 cestos que nos permiten obtener cualquier número menor o igual que 40 a partir de la suma de varios cestos.

Llamemos a, b, c, d, e y f a la cantidad de naranjas de cada uno de los cestos, por tanto

$$a + b + c + d + e + f = 40,$$

además, supondremos que $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$. Por ejemplo, dos configuraciones válidas serían: ($a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 9$, $f = 16$) y ($a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 10$, $f = 15$). Estas dos soluciones se diferencian en las cantidades e y f, al variarlas obtendremos nuevas soluciones.

Vamos a ver qué cantidades pueden tener los cestos:

- Si no llegan ciclistas, no se necesitará ningún cesto.
- Si llega 1 ciclista, se necesita un cesto con 1 naranja, por tanto $a = 1$.
- Si llegan 2 ciclistas, tendrá que ser $b = 1$ o $b = 2$.
- Para poder crear cualquier número entre 0 y 40, debe haber una propiedad, a la que llamaremos «principio de continuidad» con las siguientes restricciones:
  - $a \geq b - 1$.
  - $a + b \geq c - 1$.
  - $a + b + c \geq d - 1$.
  - $a + b + c + d \geq e - 1$.
  - $a + b + c + d + e \geq f - 1$.

 ISSN 1988-5318

Si, por ejemplo, no se cumple la tercera condición, es decir, $a+b+c \not\geq d-1$, entonces no habrá forma de obtener la cantidad $d-1$.

Vamos a mirar los valores que puede tomar f:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=40 \\ a+b+c+d+e \geq f-1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema $f \leq 20,5$ y, por tanto, $f \leq 20$. Usando las otras restricciones del «principio de continuidad» se llega a que $f \geq 13$.

Razonando de esta forma, se obtienen las siguientes condiciones:

- $a = 1$.
- $b = 1$ o $b = 2$.
- $c = 2$ o $c = 3$ o $c = 4$.
- $4 \leq d \leq 8$.
- $7 \leq e \leq 13$.
- $13 \leq f \leq 20$.

Algunas de estas combinaciones no son válidas. Por ejemplo, supongamos que $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = 5$, entonces, el máximo valor de e es 11 por el «principio de continuidad» $a+b+c+d \geq e-1$. Puesto que $10+e+f = 40$, se tiene que $30 \leq 11+f$, de donde $f \geq 19$ y, por tanto, $f = 19$ o $f = 20$, por lo que e solo puede ser 10 u 11. De ahí tenemos las soluciones ($a = 1$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 11$, $f = 19$) y ($a = 1$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 10$, $f = 20$).

Nota de los editores: Para no alargarnos demasiado omitiremos parte de la solución que envió Carlos y en la que demostró cada uno de los resultados posibles del problema.

Finalmente se obtienen las 60 soluciones válidas que aparecen en la siguiente tabla.

Cestos					
1	2	3	4	5	6
1	1	3	5	10	20
1	1	3	5	11	19
1	1	3	6	9	20
1	1	3	6	10	19
1	1	3	6	11	18
1	1	3	6	12	17
1	2	2	5	10	20
1	2	2	5	11	19
1	2	2	6	9	20
1	2	2	6	10	19
1	2	2	6	11	18
1	2	2	6	12	17

Continúa. . .

Cestos					
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	10	20
1	2	3	4	11	19
1	2	3	5	9	20
1	2	3	5	10	19
1	2	3	5	11	18
1	2	3	5	12	17
1	2	3	6	8	20
1	2	3	6	9	19
1	2	3	6	10	18
1	2	3	6	11	17
1	2	3	6	12	16
1	2	3	6	13	15
1	2	3	7	7	20
1	2	3	7	8	19
1	2	3	7	9	18
1	2	3	7	10	17
1	2	3	7	11	16
1	2	3	7	12	15
1	2	3	7	13	14
1	2	4	4	9	20
1	2	4	4	10	19
1	2	4	4	11	18
1	2	4	4	12	17
1	2	4	5	8	20
1	2	4	5	9	19
1	2	4	5	10	18
1	2	4	5	11	17
1	2	4	5	12	16
1	2	4	5	13	15
1	2	4	6	7	20
1	2	4	6	8	19
1	2	4	6	9	18
1	2	4	6	10	17
1	2	4	6	11	16
1	2	4	6	12	15
1	2	4	6	13	14
1	2	4	7	7	19
1	2	4	7	8	18
1	2	4	7	9	17
1	2	4	7	10	16
1	2	4	7	11	15
1	2	4	7	12	14
1	2	4	7	13	13
1	2	4	8	8	17
1	2	4	8	9	16
1	2	4	8	10	15
1	2	4	8	11	14
1	2	4	8	12	13

ISSN 1988-5318

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Mandelbrot y la geometría fractal

David Crespo Casteleiro
IES Ciudad de Dalías (Dalías, Almería)

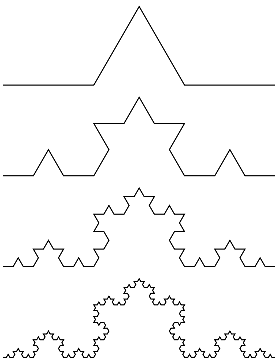
Si el s. XIX puso en tela de juicio el *V postulado de Euclides* que había sido hegemónico desde la publicación de sus *Elementos* (c.a. 300 a. C.) el cambio de siglo supuso otro vuelco para la disciplina con la introducción de la geometría fractal de la mano de Benoît Mandelbrot (1924–2010).


Benoît Mandelbrot en 2007

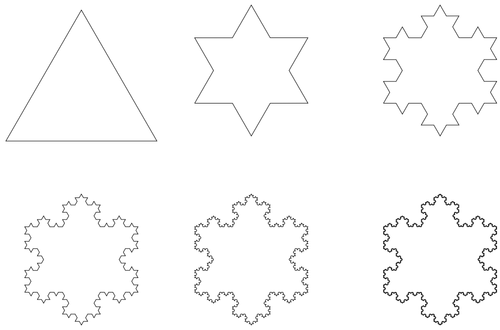
Bajo este paraguas se agruparon una nutrida colección de viejos y extraños objetos a los que Poincaré denominó galería de monstruos, y que Mandelbrot bautizó con el término fractal (del latín *fractus*, que significa roto o fragmentado).

La geometría de Euclides no explicaba con acierto una pluralidad de morfologías presentes en la naturaleza y que Mandelbrot atisbó como leitmotiv en el primer capítulo de [1]: *«¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo frío? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo.»*

Los fractales, a pesar de estar generalmente regidos por unas sencillas pautas de formación que se repiten indefinidamente, esconden propiedades que escapan a nuestra intuición.

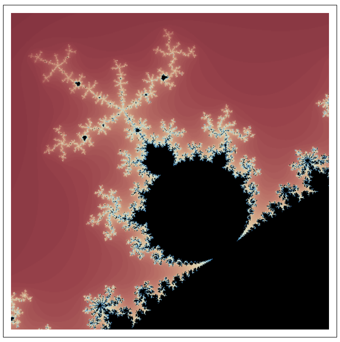

Curva de Koch

Un ejemplo lo constituye la *curva de Koch*, cuya construcción se realiza partiendo de un segmento de longitud dada, donde se elimina el tercio central y se sustituye por otros dos de su misma longitud formando entre sí y con la parte que hemos quitado, ángulos de 60°. Esta curva es continua en cualquier punto, pero no admite recta tangente en ninguno de ellos. Al unir tres de estas curvas, obtenemos la llamada isla, o copo, de Koch, cuyas propiedades siguen siendo inusuales: tiene área finita siendo su perímetro infinito.


Copo de Koch

Este fractal aunque tosco y mejorado con posterioridad, sirvió a Mandelbrot para modelizar costas naturales en su conocido artículo de 1967, con un título al más puro estilo socrático: *¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?* En él se plantea que las longitudes de las costas son infinitas y para medir su grado de irregularidad rescató la *dimensión de Hausdorff-Besicovitch*, valor que se expresa en términos de un número real, no necesariamente entero.

En la actualidad, los fractales tienen muy buena acogida en diferentes campos que transgreden del ámbito de las Matemáticas más puras, explicando en Biología el empaquetamiento del ADN, en Economía la fluctuación de los precios o ayudando a la industria del celuloide a reproducir paisajes evitando las tomas de exteriores.


Conjunto de Mandelbrot

Es acorde a un revolucionario tener una vida azarosa, y buen ejemplo de esta afirmación fue la existencia de Mandelbrot. Tuvo una formación inicial alejada de convencionalismos que se decantaba por la observación de mapas o el juego del ajedrez (lo que le supuso no aprender todas las tablas de multiplicar o tener dificultades con el alfabeto incluso para buscar en un listín telefónico); escapó del gueto judío de su Varsovia natal para emigrar a una Francia posteriormente ocupada, en la que pudo sobrevivir bajo identidad falsa tras la invasión nazi, ejerciendo diversos oficios como el de cuidador de caballos; publicó una tesis sobre la distribución de la frecuencia de las palabras (sobre la que su tío, el también matemático Szolem, consideraba tonterías que sólo podían interesarle a él); declinó un puesto en la universidad francesa para ingresar en el gigante e incipiente IBM donde pudo, gracias a los ordenadores más avanzados del momento, desentrañar la forma del llamado conjunto de Mandelbrot (fruto de los trabajos de Julia y Fatou relegados desde principios del s. XX) hasta ostentar, en el cénit de su existencia, la Cátedra Sterling de ciencias matemáticas en Yale.

ISSN 1988-5318

Los conceptos expuestos por su ávida mente lo convirtieron en un personaje mediático más allá de las fronteras de los campus universitarios, concediendo entrevistas y realizando charlas divulgativas hasta el final de su vida. Ciertos tintes narcisistas se ven plasmados en las sucesivas revisiones de sus obras, siendo un palmario ejemplo el prólogo de [2] donde afirma que: *«para evitar malentendidos impertinentes, no pocos se y nosotros, discretos pero ambiguos, han sido sustituidos por yo.»*

Pero aunque la fama pueda alimentar hasta límites insospechados nuestro ego, *«el padre de los fractales fue un arquitecto que supo construir una soberbia catedral, usando viejas piedras abandonadas en una cantera, permitiendo que objetos inconexos e informes dieran paso a bellas estructuras, donde todos los cultos están permitidos»* [3].

Referencias

[1] Mandelbrot, B. (2009) *La geometría fractal de la naturaleza.* Tusquets, Barcelona.

[2] Mandelbrot, B. (1988) *Los objetos fractales. Forma azar y dimensión.* Tusquets, Barcelona.

[3] Crespo, D. (2018) *Mandelbrot. En busca de la geometría de la naturaleza.* RBA, Barcelona.

■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Matemáticas y literatura

Antonio Sánchez Martín
IES Los Ángeles (Almería)

«La matemática es un lenguaje, pero no solo eso. También es herramienta y método, aunque eso tampoco es todo.»

Jorge Wagensberg

En realidad casi nunca las hemos conocido así; la versión más habitual trocaba las conjunciones: matemáticas o literatura, según una colección de prejuicios tan vulgar como persistente. Aunque esto tampoco ha sido siempre así: lo delatan los incesantes intentos de devolver a la palabra, a las formas, la integración perdida. No es que se tratara de un mundo mítico, confuso, indiferenciado y primitivo (que vendría después de todo a confirmar la ficción progresista); es que no se había producido aún la escisión irreparable entre distintos saberes. La interpretación del universo era tan artística como geométrica, o tal vez lo fuera por eso, y aunque buena parte de esta interpretación podía derivar en el magicismo y en la fe inquebrantable —luego refugiada en la poesía— de una red de correspondencias en el saber, favoreció la investigación científica (y matemática) y lo más decisivo: mantuvo la idea de una unicidad de la actividad humana y el convencimiento de que el saber articulaba al hombre en la propia naturaleza, lejos ya de ser parte de la inmensa alegoría medieval.

Es posible, incluso, que no se percibieran como entidades autónomas la literatura, la pintura, la matemática, la biología... sino como incesante rumor de un discurso capaz de integrar todos estos saberes. Un rumor muy parecido al que Fray Luis encontró en la música de Francisco Salinas, cuyo vuelo místico no supone menoscabo a la potencia del «veré distinto y junto» de otra oda.

Luego, la representación se convertirá en mera apariencia de un contenido de la que está desnaturalizada y al que se ve obligada a guardar fidelidad, y simultáneamente el hombre se repliega a objeto mismo de representación. La reintegración se convirtió en el Romanticismo, con honrosas excepciones (Goethe, Novalis...) en una tarea metafísica condenada al fracaso. El positivismo más grosero urdió el relato prometeico de la ciencia liberándose de la oscuridad, la superstición y la imaginación, aunque ya le habían escrito el genial relato de la desconfianza hacia este nuevo Prometeo.

Pero antes que recurrir al relato, que a fin de cuentas crea una trama —no pocas veces tramposa— para relacionar pasado y presente y urde un final verosímil con ella, me parece más oportuno volver al verso de Fray Luis: «ver distinto y junto» (y añade: «lo que es y ha sido») y como ya va siendo hora de hablar algo de matemáticas, materia de la que me confieso ignorante y amputado, me parece que si alguna ciencia está en el centro de la tensión entre formalismo y empirismo es precisamente esta. La dialéctica, porque lo es, ya que cada una supone la existencia de la otra, entre ciencia empírica y ciencia formal resulta lúdicamente análoga a la tensión entre poesía pura y poesía utilitaria, social, realista, o como se llame en variedad sospechosa de denominaciones. Siempre he oído hablar de la belleza y de la elegancia de un teorema o de una fórmula de sistema y creo haber entendido que tal cosa estriba en su simplicidad y en su poder sugestivo, o deductivo; axiomas que derivan en teoremas —y hasta aquí en conocimiento científico— y teoremas que pueden derivar en modelos portátiles, tal vez —dicho sea con la prudencia del ignorante— en algoritmos, que calculan la experiencia con indudables y muy sospechosos componentes ideológicos, políticos y económicos.

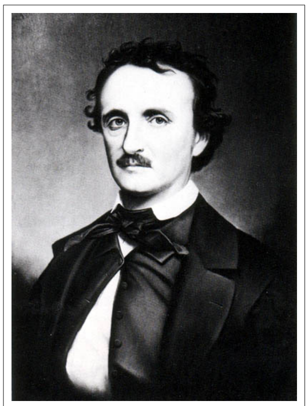
Aunque en la práctica estos componentes por regla general son inseparables (también de la poesía), conviene no perder de vista las diferencias, el momento de verdad, entre la producción del conocimiento científico y la utilización de modelos de dominio, de la misma forma que la cháchara de sacamuelas de algunos poetas no debe usarse contra la poesía, que para eso ya están ellos.

 ISSN 1988-5318

Voy a poner un par de ejemplos para ilustrar la analogía. El primero es el *grupo OuLiPo*, creado por Raymond Queneau (1903–1976) y un matemático, François Le Lionnais (1901–1984). La recuperación de la impronta formal (y matemática) no es nueva a la altura de 1960, tras los diversos experimentalismos de entreguerras, pero lo significativo es que en este entorno estructuralista la creación se someta a las restricciones formales, propias de un problema matemático, y al azar.


Raymond Queneau

Así, los *Ejercicios de estilo* de Queneau, donde una situación única es producida 99 veces a través de distintas variaciones; en otras ocasiones se tratará de escribir algo a condición de usar o no determinada vocal, o que las palabras comiencen y acaben por la misma vocal, etc. Aunque sus autores consideran que este es un juego muy serio, pues se obliga a los contenidos, que redujeron las formas a medios de transporte, a expresarse con la arbitrariedad de los significantes, rompiendo así la ilusión de su necesidad (después de todo, en literatura siempre han existido estas restricciones o trabas: un soneto debía tener catorce versos endecasílabos, distribuidos en cuartetos y tercetos, etc., con las variaciones oportunas) extrañamente estas cosas irritan profundamente a los partidarios de la poesía realista.


Edgar Allan Poe

Edgar Allan Poe (1809–1849), mi segundo ejemplo, puede exponer la dialéctica a la que antes me refería: es el creador del muy analítico Dupin pero su vida y sus obras están marcadas por turbulencias románticas que sugieren lo contrario. Su consideración en Europa (lugar donde realmente es apreciado) empezó con Baudelaire, quien probablemente vio en el escritor maldito a un semejante. Sin embargo, Stéphane Mallarmé, consideró a Poe el emblema del poeta puro, capaz de «donner un sens plus pur aux mots de la tribu».

Escribió Poe, en Filosofía de la composición, acerca de su conocido poema *El Cuervo* que su composición *«avanzó hacia su terminación, paso a paso, con la misma exactitud y la lógica rigurosa de un problema matemático»* (With the precision and rigid consequence of a mathematical problem). Añadió que la extensión de un poema *«debe hallarse en relación matemática con el mérito del mismo»*, es decir con su valor poético real (the degree of the true poetical effect).

La Filosofía no es un recetario —poética— para escribir poemas, pues el poema ya estaba escrito, pero el lector del mismo puede ver cómo sobre un tema en progresión creciente, la insondable melancolía de un hombre que acaba de perder a su joven esposa (¿se imaginan la cantidad de metáforas con las que poetas de cualquier sentimentalidad nos obsequiarían? Poe lo hace) se despliega la dialéctica de variaciones musicales entre la constante del estribillo y de la medida de los versos que incluyen rimas, rimas internas, aliteraciones... Y es esta dialéctica la que en realidad transmite el tema, sin que en ningún momento se excluya el azar, pues en la espuma del poema se pueden encontrar algunos versos emblemáticos, como el que muestra el vuelo del cuervo hasta posarse en el busto de Pallas, verso gestado en el azaroso encuentro de la semántica (Atenea, la diosa de la sabiduría, preside la habitación del erudito personaje) y la sonoridad de las vocales.

Otro de esos versos se derrama por la mejor poesía posterior: *"Here I opened wide the door;/Darkness there, and nothing more"*. Porque en el fondo se trataba de esto, de la nada y el poder irreversible de la muerte: hay que leer completamente el soneto de Mallarmé: *«Son siècle épouvante de n´avoir connu/que la mort triomphait dans cette voix étrange!»*

Porque de eso, de esa interrogación de lo real, sin el patetismo confesional que Poe achaca a los «trascendentalistas», se tratará en la poesía y el arte y eso solo puede sublimarse en un lenguaje estilizado, principio y fin en sí mismo. La música —las trabas y constricciones— serán otras en adelante (el ritmo y el verso libre), pero fantaseando como vengo haciendo con la trabazón de variaciones sobre un tema en la poesía (y la música) y la de variables y constantes; con la explosión de estos versos que regresan con el poder deductivo de un teorema, se pueden establecer las analogías con ese lenguaje matemático fuertemente formalizado, completo en sí mismo, para el que sin embargo, como parece sugerir la cita de Wagensberg, siempre queda algo por decir. ■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Un modelo de la dinámica de poblaciones

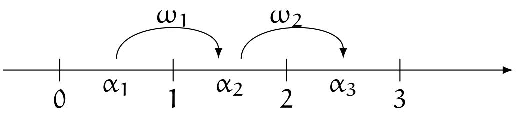
Zoltán Varga
Universidad Szent István (Hungría)
Doctor Honoris Causa por la Universidad de Almería

Es una observación conocida que en la naturaleza ciertas poblaciones de animales muestran oscilación periódica, otras mantienen las proporciones entre las distintas clases de edad. Como veremos, se puede plantear un modelo matemático para describir el desarrollo de la composición de edades de una población, que no solo explica los fenómenos mencionados, sino también permite varias aplicaciones

 ISSN 1988-5318

desde la explotación óptima de poblaciones de animales hasta el análisis demográfico de poblaciones humanas.

Por sencillez supongamos que los individuos de una población pueden vivir 3 años, sea $x_i(0)$ el número inicial de individuos de edad entre $i-1$ e i, formando la i-ésima clase de edad $(i = 1, 2, 3)$.



Así el estado inicial de la población viene caracterizado por el vector $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$.

Si un individuo de clase $i = 1, 2, 3$, en un año produce α_i nuevos individuos, y sobrevive de la clase i a la clase $i+1$ con probabilidad ω_i $(i = 1, 2)$, entonces en el año siguiente el estado de la población va a ser

$$x(1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1(0) + \alpha_2 x_2(0) + \alpha_3 x_3(0) \\ \omega_1 x_1(0) \\ \omega_2 x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Ahora nos conviene introducir una matriz 3×3 que es la tabla de números reales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el producto de A por un vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Entonces con la matriz de la población

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$x(1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1(0) + \alpha_2 x_2(0) + \alpha_3 x_3(0) \\ \omega_1 x_1(0) \\ \omega_2 x_2(0) \end{pmatrix},$$

es decir, $x(1) = \mathbf{L}x(0)$.

Ahora si los parámetros de la población α_i y ω_i permanecen constantes, tenemos

$$x(2) = \mathbf{L}x(1), x(3) = \mathbf{L}x(2), \ldots, x(t+1) = \mathbf{L}x(t),$$

con $t = 1, 2, 3, \ldots$

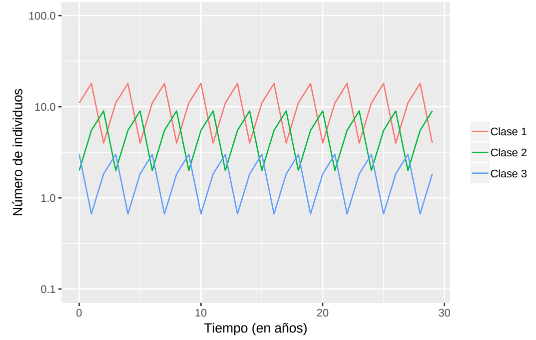
Esta última recursión (modelo dinámico) se llama *modelo de Leslie*, que fácilmente se generaliza al caso de n clases de edad.

Ejemplo 1. Población con dinámica periódica

Consideremos una población con parámetros ilustrativos $\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, multiplicando cualquier $x(0)$ tres veces por $\mathbf{L}_1$ obtenemos que $x(3) = x(0)$.

Repitiendo la multiplicación, llegamos a la conclusión de que la población cada tres años regresa a su estado inicial. En la Figura 1, representando la población en escala logarítmica, se ve la periodicidad para un estado inicial $x(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Figura 1: Número de individuos por clase de edad, en función del tiempo. Comportamiento periódico



Colonias de ciertos escarabajos cada tres años muestran una abundancia muy alta.

Ejemplo 2. Población tendente a un desarrollo proporcional

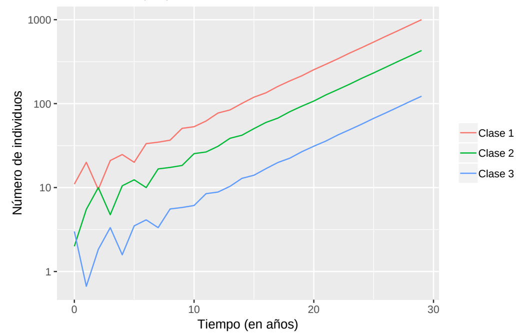
Ahora vamos a ver un ejemplo cuando la población a largo plazo no cambia las proporciones entre las clases de edad.

Con la matriz $\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ y el estado inicial $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculemos el desarrollo del estado $x(t)$ según el modelo de Leslie, y representémoslo en escala logarítmica: $\ln x_i(t)$. En la Figura 2 se ve que las gráficas correspondientes para t grande pueden ser aproximadas con rectas paralelas: $\ln x_i(t) = at + b_i$ con $(i = 1, 2, 3)$, de donde $x_i(t) = \exp\{at + b_i\}$, y así

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} = \frac{\exp\{at + b_i\}}{\exp\{at + b_j\}} = \exp\{b_i - b_j\}.$$

Esto significa que para t suficientemente grande, las proporciones entre las clases de edades, o sea la distribución de edades ya no cambia con el tiempo.

Figura 2: Desarrollo de una población hacia un crecimiento proporcional



 ISSN 1988-5318

Notas bibliográficas

- El primer modelo matricial para poblaciones oscilatorias fue planteado en [1], para la generalización a n clases y un tratamiento analítico del comportamiento del modelo, ver [2] y [3].
- Los cálculos con el modelo de Leslie explican los comportamientos típicos de poblaciones naturales. Observemos que la única diferencia entre los dos ejemplos es que en el Ejemplo 2 la segunda clase también es fértil.
- En [4] el lector interesado puede encontrar el tratamiento matemático exacto del fenómeno ilustrado en el Ejemplo 2, incluso las condiciones biológicas del fenómeno.
- El modelo de Leslie tiene aplicaciones en varios campos. Por ejemplo en [5], dicho modelo se usa para optimizar la pesca sostenible en un lago, mientras en [6] el modelo se aplica para el análisis demográfico de la sostenibilidad de ciertos sistemas de pensiones.

Referencias

[1] Bernadelli, H. (1941) Population waves. J. Burma Res. Soc. 31, No 1, 1-18.

[2] Leslie, P. H. (1945) On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika 33, No 3, 183-212.

[3] Leslie, P. H. (1948) Some further notes on the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 35, No 3-4, 213-245.

[4] Caswell, H. (2001) Matrix population models. Sinauer Ass.. Inc. Publisher Souderland, Massachusetts.

[5] Nagy, G., Romagnoli, S., Varga, Z., Venzi, L. (2004) Le condizioni di ottimalità per la determinazione delle catture di pesce. Linea ecologica 36, No. 1, 47-53.

[6] Angrisani, M., Attias, A., Bianchi, S., Varga, Z. (2004) Demographic dynamics for the pay-as-you-go pension system. Pure Mathematics and Applications 15 (4), 357-374.

■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

La Olimpiada Matemática Europea Femenina

Elisa Lorenzo García
Université de Rennes 1.
Presidenta de la Comisión de Mujeres y Matemáticas de la RSME y miembro del Advisory Board de la EGMO

La EGMO (European Girls Mathematical Olympiad) es una olimpiada que ha sido creada para desaparecer y cuanto antes posible mejor. Es una olimpiada creada para animar a las chicas a participar en competiciones matemáticas, y esperemos que pronto, las chicas no necesiten este empujón suplementario.

Logotipo de la EGMO

La IMO (International Mathematical Olympiad) lleva celebrándose desde 1959 (*www.imo-official.org*), y el porcentaje de chicas participantes [5] ha sido siempre muy bajo: en torno al 10 %. Pero no hace falta irse tan lejos para ver esto, en la propia OME (Olimpiada Matemática Española), este año solo había 4 participantes chicas de un total de 77. Y de las 6 medallas de oro que se reparten cada año, la última chica ganadora, Berta García, fue en 2015 y la anterior, yo misma, en 2005.

¿Por qué pasa esto?, ¿por qué no encontramos más chicas en las olimpiadas de matemáticas? Bueno, si supiésemos responder a esto podríamos resolver el problema más fácilmente. Pero es una cuestión muy delicada y con muchos factores.

Desde mi punto de vista y experiencia, diría que el problema es cómo nuestra sociedad educa a las niñas/chicas/mujeres. No nos enseñan a competir, y menos contra un hombre, nos enseñan a colaborar, a ayudar, y todas estas cosas están muy bien, pero competir también. La ambición es buena, creer en uno mismo es bueno.

Existe un estudio [6] en el que a varios grupos de estudiantes se les pide resolver una misma serie de ejercicios diciéndoles que es para evaluar el método docente o que se les evalúa a ellos y se pretende comparar a unos con otros. Los chicos obtienen las mismas puntuaciones en los dos casos y las chicas lo hacen considerablemente peor en el segundo.

Otro factor importante: las matemáticas no son para las chicas, o eso parece que nos dice la sociedad y nosotras nos lo creemos, mejor la literatura o el arte [7].

[5] *www.egmo2018.org/blog/some-statistics-for-girls-at-imo-2017*.
[6] *www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/24547757muestro*.
[7] *gsite.univ-provence.fr/gsite/Local/lpc/dir/huguet/JEP-2007.pdf*.

ISSN 1988-5318

En este estudio, varios grupos de estudiantes resuelven un mismo ejercicio cuando se les dice que es un ejercicio de geometría o de dibujo. Cuando a los estudiantes se les decía que era de geometría las chicas lo hacían un 25 % peor que cuando se les decía que era de dibujo y los chicos lo hacían entonces ligeramente mejor.

Todo esto hace que las chicas no quieran competir en las olimpiadas. Y esto tiene que cambiar. No sólo porque ellas se estén perdiendo una experiencia increíble que te abre un montón de puertas, sino porque si queremos a los mejores cerebros investigando en matemáticas, ¿por qué sólo buscarlos en una mitad de la población? Y bueno, como factor colateral, porque así las chicas que sí participan en olimpiadas dejarán de sentirse un bicho raro e incómodas en un ambiente demasiado masculinizado (lo mismo que te encuentras si acabas haciendo investigación en matemáticas).

La primera EGMO tuvo lugar en Cambridge en 2012 concebida por Geoff Smith (presidente del IMO board). En 2019 se celebrará en Kiev (Ucrania) la octava edición de esta competición (*www.egmo.org*).

España solo lleva participando desde 2016 y nuestros resultados van también mejorando. Como en la IMO, la prueba consta de 6 problemas, divididos en dos sesiones de 4 h y 30 min y cada uno es valorado sobre 7.

Se entregan medallas de oro a un 1/12 de las participantes, de plata a 1/6 y de bronce a 1/4. El nivel es alto. No es una IMO, pero casi. Este último año participaron 36 países europeos y 16 no europeos que participaron de forma no oficial, y cada año el número de países no deja de crecer.

Equipo español tras la entrega de premios de la EGMO 2018. De izda. a dcha., la guía (Elisabeth Buj Reitze), Miriam Lorenzo Laguno, Sara Sendarrubias Arias-Camisón, Daniel Lasaosa Medarme (Tutor), Silvia Casacuberta Puig, Marta Fuentes Zamoro y Elisa Lorenzo García (Líder)

Entre los 16 países europeos que llevan participando desde la primera edición, vemos ya un claro aumento de la participación femenina en la IMO en los últimos años: 48 participaciones femeninas en los años 2006–2011 frente a 72 en los años 2012–2018.

Si comparamos con los 8 países europeos que participan en la IMO y no han participado en ninguna EGMO, vemos que el número de chicas se ha mantenido casi constante: 33 participaciones en el periodo 2006–2011, frente a 34 en el periodo 2012–2018. Así que podemos decir (aunque como matemáticos sabemos que estos datos no son suficientes para inferir estadísticamente) que sí, que la EGMO funciona. ■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

Hay quinto malo

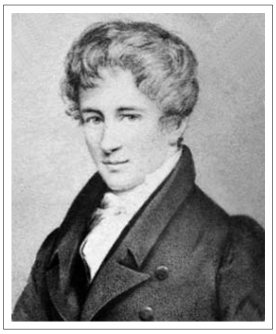
Juan Ramón García Rozas
Universidad de Almería

La idea original del artículo era llamarlo *Hay quínticas malas*, pero como no quería atenerme estrictamente a la temática relacionada con polinomios, he pensado que también merecía la pena glosar algunos defectos del número 5 en otros ámbitos matemáticos.

Girolamo Cardano

Cuando tratamos de obtener las raíces (reales o complejas) de un polinomio de grado dos con coeficientes reales, observamos que la fórmula que conduce a dichas raíces consta de las siguientes operaciones sobre los coeficientes del polinomio: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas.

Siendo más osados, para polinomios de grado tres y cuatro sucede algo similar: con suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces de hasta orden cuatro es posible obtener una fórmula de las raíces del polinomio (fórmulas de Cardano y Ferrari). No olvidemos que también se admiten las raíces cuadradas y cuartas de números negativos, que para algo se inventaron los números complejos.



Niels Henrik Abel

Así que hasta grado cuatro todo es más o menos normal, se resuelven las ecuaciones mediante operaciones similares (o las inversas) a las que se usaron para construir esos polinomios. Sin embargo se produce la sorpresa cuando llegamos al grado 5, puesto que en 1824 Abel demostró que no todo polinomio de quinto grado podía ser resoluble por radicales, es decir, mediante el procedimiento comentando para grados inferiores. Sirva de ejemplo de polinomio no resoluble el siguiente: $p(x) = x^5 - 6x + 3$.

En otro ambiente distinto (aunque como Galois mos-

 ISSN 1988-5318

tró, completamente conectado con el problema anterior), nos encontramos con los grupos de permutaciones S_n. Se definen como el conjunto de todas las permutaciones que se pueden realizar a un conjunto de n elementos.

Sin entrar en muchos detalles técnicos que excederían de los objetivos de este artículo, mencionaré que, para $n \leq 4$, se sabe que S_n es lo que se conoce como grupo resoluble, sin embargo S_n para $n \geq 5$ no es resoluble.

Como bien os podréis imaginar, lo de llamar resoluble al grupo S_n debe ser porque corresponde, en cierto sentido, con las raíces de un polinomio resoluble por radicales. Ahí lo dejo.

Seguimos con los quintos malos en otro mundo matemático distinto: los retículos.

Un retículo es un conjunto que tiene definida una relación de orden $\leq$, esto es, una manera de jerarquizar los elementos del conjunto. Existe un elemento que está por encima de todos (el 1 del retículo) y otro que está por debajo de todos (el 0 del retículo). Además, cada par de elementos tiene un supremo y un ínfimo.

En lenguaje matemático esto último quiere decir que dados a y b en el retículo, existen s y t tales que $a, b \leq s$, $t \leq a, b$, s es el más pequeño que cumple que está por encima de a y b, y t es el más grande cumpliendo que está por debajo de a y b.

Los conjuntos ordenados, y en particular los retículos, se suelen representar gráficamente mediante lo que se conoce como diagrama de Hasse. Su diseño es muy intuitivo y lo que esencialmente se hace para representarlos es escribir una línea ascendente entre dos elementos a y b si a está por debajo de b.

Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$, con el orden usual, son retículos. Además, cualquier sucesión finita ordenada de elementos es un retículo finito.

También un diagrama de Hasse en forma de rombo es un retículo. De los cuatro conjuntos ordenados que aparecen en la Figura 1, (A) y (C) son retículos, sin embargo (B) y (D) no: ¿por qué?

Se pueden definir dos operaciones en un retículo que son precisamente tomar supremo e ínfimo de cada par de elementos, se suele denotar $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Con estas dos operaciones surge el concepto de retículo distributivo: se trata de un retículo que verifica que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para toda terna de elementos a, b y c en el retículo (la fórmula dual, es decir, la que se obtiene cambiando $\vee$ por $\wedge$ en la anterior, sería entonces también válida por el conocido *principio de Dualidad*).

¿Dónde tiene el número 5 cabida en todo esto? Pues resulta que todos los retículos finitos con menos de cinco elementos son distributivos.

Con cinco elementos tenemos dos retículos que no son distributivos: se trata de los conocidos como *retículo pentágono* y *retículo diamante*.

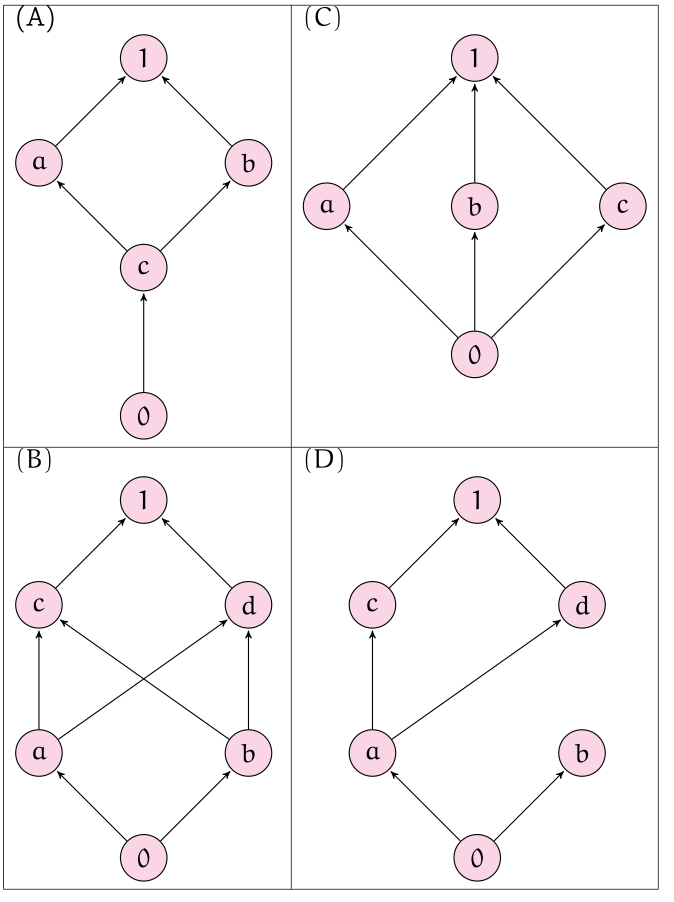


Figura 1

El gráfico que representa el orden de estos dos retículos tiene la forma de esas figuras, concretamente el diamante tiene como diagrama de Hasse el (C) anterior. Además, para detectar si un retículo es distributivo es suficiente con ver si no posee un subretículo del tipo pentágono y diamante descrito anteriormente.

Por último, pero no menos importante, os comento otra situación en donde a partir de 5 se complican las cosas. Se trata de los grafos planos.

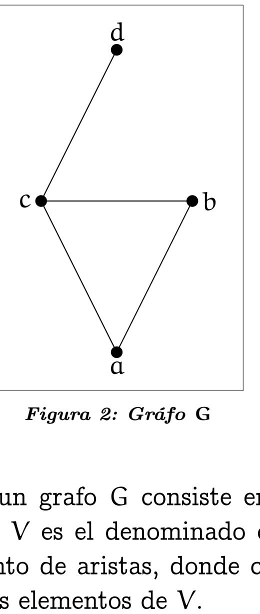


Figura 2: Gráfo G

Recuerdo que un grafo G consiste en dos conjuntos, $G = (V, E)$, donde V es el denominado conjunto de vértices y E el conjunto de aristas, donde cada arista es un subconjunto de dos elementos de V.

ISSN 1988-5318

La manera de comprender mejor un grafo es mediante una representación en el plano, asociando un punto a cada vértice y un segmento entre dos vértices para cada arista.

Por ejemplo, el grafo $G = (V, A)$ definido mediante

$$V = \{a, b, c, d\} \quad A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$$

tiene como representación gráfica la Figura 2.

Un grafo es plano si puede dibujarse en el plano sin cortes o solapamientos entre sus aristas. Estos grafos son muy importantes: por ejemplo, cuando se diseña un chip las conexiones se realizan mediante surcos en una placa y no interesa que esos surcos se crucen ya que dejarían de ser independientes.

Los grafos de hasta cuatro vértices son siempre planos. Sin embargo con cinco vértices ya aparece el primer grafo que no es plano, y que consiste en el conocido como grafo completo de cinco vértices K_5 (completo se refiere a que tiene todas las aristas posibles que puede contener). Esto es una consecuencia sencilla del conocido *teorema de Kuratowski* (1930), que afirma que un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo contractible a K_5 y al grafo $K_{3,3}$, los cuales se muestran en la Figura 3:

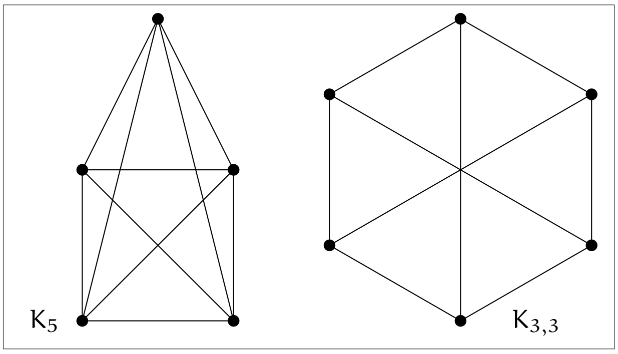


Figura 3: ***Grafos*** K_5 ***y*** $K_{3,3}$

(Recuerdo que una contracción elemental en un grafo consiste en la eliminación de una arista, identificando los dos vértices de esta y convirtiéndolos en uno solamente, de manera que el resto de aristas que eran incidentes con uno de esos dos vértices ahora se encuentran unidos al nuevo vértice. De esta forma un grafo es contractible a otro grafo si el segundo puede obtenerse del primero mediante una sucesión finita de contracciones elementales).

Os animo a que sigáis investigando objetos matemáticos en los que el 5 sea el número a partir del cual se complican las estructuras o simplemente se malogran. ■

Citas Matemáticas

«Aprender matemáticas nos convierte en ciudadanos más libres, más difíciles de manipular. Las matemáticas son un instrumento poderoso para ejercer la ciudadanía de una forma crítica. Para ejercer la libertad como ciudadanos necesitamos las matemáticas.»

Foto: Álvaro Marques Hijazo

Eduardo Sáenz de Cabezón (1972), matemático, divulgador científico y miembro fundador del grupo *Big Van Ciencia*.

«Se recordará a Arquímedes aún cuando Esquilo haya sido olvidado, pues los lenguajes perecen mientras que las ideas matemáticas no mueren nunca.»

Godfrey Harold Hardy (1877-1947), matemático inglés.

Acertijos

Un clásico

Se encuentran dos amigos en plena calle después de muchos años. Juan no tiene descendencia y se interesa por la situación de Pedro. Tres hijos, responde éste, y en lugar de mencionar sus edades aprovecha la ocasión para proponer un acertijo a su amigo Juan, en recuerdo de una antigua y común afición:

El producto de sus edades, señala Pedro, es igual a 36.

Tras pensarlo brevemente, contesta Juan que dicha información es insuficiente para resolver la adivinanza. Está bien, dice Pedro, la suma de sus edades coincide con el número de este portal, en el que felizmente nos hemos vuelto a encontrar. Sintiéndose muy cerca de la solución, Juan comprueba el número, reflexiona nuevamente y comunica a Pedro que le faltan datos. Te diré algo más, responde Pedro, el mayor de mis hijos toca el piano extraordinariamente bien.

¿Podrá Juan resolver el acertijo con este nuevo «dato»?

— *(En el próximo número aparecerá la solución.)*

ISSN 1988-5318

Solución al acertijo del número anterior

Es realmente fácil multiplicar un número de dos cifras por 10101. Basta repetir tres veces el número en cuestión. Así, por ejemplo, $29 \cdot 10\,101 = 292\,929$. La explicación es muy simple:

$$29 \cdot 10\,101 = 29(10\,000 + 100 + 1) = 292\,929.$$

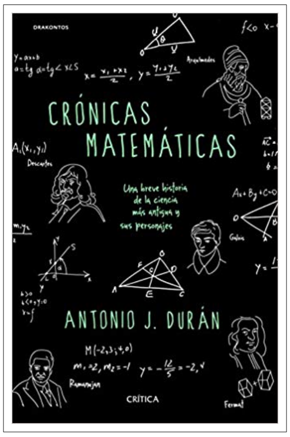
El razonamiento es idéntico si se sustituye el número 29 por cualquier otro número de dos cifras ab.

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Crónicas matemáticas.

Una breve historia de la ciencia más antigua y sus personajes.

Antonio J. Durán.



Ficha Técnica
Editorial: Crítica.
479 páginas.
ISBN: 978-84-17067-75-5.
Año: 2018.

Estos últimos meses han sido prolijos en la publicación de obras de divulgación científica. Este hecho es un indicador del interés que suscita el tema científico y, más concretamente, la divulgación matemática.

De lo publicado en este año —y que he podido leer—, el libro que ocupa esta reseña es, en mi opinión, la obra más brillante de todas; una auténtica delicia que debería formar parte de la biblioteca de cualquier buen aficionado a las matemáticas.

Antonio Durán no es un desconocido en el ámbito de la divulgación matemática. Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla, es autor de numerosos trabajos de divulgación —algunos ya reseñados en este Boletín—, todos ellos de una enorme calidad.

A obras tan recomendables como *Pasión, piojos, dioses... y matemáticas* o *El ojo de Shiva, el sueño de Mahoma, Simbad... y matemáticas* se une esta que, tal y como reconoce el autor, sintetiza un amplio periodo dedicado a esta labor.

El subtítulo del libro representa un magnífico indicador de lo que nos podemos encontrar en su interior: *«Una breve historia de la ciencia más antigua y sus personajes»*. Sin embargo, no se trata de una historia de las matemáticas al uso.

En el transcurso de las más de 450 páginas que forman parte de esta obra viajaremos en el tiempo a través del conocimiento matemático, perfectamente enmarcado en su contexto histórico.

Habitualmente las teorías matemáticas se nos presentan de forma fría y distante —somos «hijos» de Bourbaki, y eso todavía se nota—, pero detrás de cada teorema hay una persona y unas circunstancias. Esto es para mí lo que hace este libro diferente —y apasionante—, indaga en el «alma» de las matemáticas a través de sus personajes.

La obra se divide en tres partes: *Qué son las matemáticas y para qué sirven*, *Del siglo* XVII *a las cavernas* y *Del siglo* XVIII *a nuestros días (o casi)*. En cada una de ellas se desgranan los hechos matemáticos más relevantes.

En cuanto al nivel de libro, yo lo recomendaría para aficionados con algunos conocimientos matemáticos pues, sobre todo en la última parte, se abordan temas complejos, aunque perfectamente comprensibles ya que no se profundiza de forma técnica en ninguno de ellos.

En resumen, una obra excelente totalmente recomendable para cualquier aficionado a la ciencia y que hará disfrutar sobremanera a los seguidores de la divulgación matemática.

Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Páginas web de interés

DiMa is coming!!!

El 10 de mayo de 2018 empezábamos un nuevo camino, lleno de ilusión y nuevos proyectos. Un año y medio atrás nos habíamos reunido en el ICMAT (Madrid) para hablar de la posibilidad de organizar una red de divulgación nacional de las matemáticas.

Parecía que, en estos últimos años, las instituciones y, lo más importante, la sociedad y los medios de comunicación empezaban a reconocer el esfuerzo individual en torno a la divulgación de la ciencia. Los inicios fueron complicados para las matemáticas y ahí están los referentes que siguen hoy formando parte de l@s grandes divulgador@s científic@s de nuestro país.

En estos últimos años se han sumado nuevos formatos

 ISSN 1988-5318

que han ayudado a que se incorpore gente joven a la labor de *«divulgare»*, término latino que significa *«poner al alcance de la gente común»*. El gran esfuerzo que han hecho los museos debe también ser señalado aquí. Pero no solo eso, hay muchas actividades divulgativas de las matemáticas que quedan en un entorno local, en nuestras facultades, en nuestros colegios, en nuestras calles... Son todas ellas, las más visibles y las invisibles, las que consiguen crear un sustrato sólido que ayuda a que la ciudadanía abra los ojos y los oídos al conocimiento matemático.

Página web de DiMa

Todos y todas llegamos a la reunión, en enero de 2017 en el ICMAT, con muchas dudas sobre la viabilidad de constituir una red de divulgación. Sabíamos que las estructuras científicas no favorecían este tipo de diseño colaborativo, sin embargo, flotaba un sentimiento que nos hacía pensar que debíamos ponerlo en marcha. Dificultades, todas las pensables... pero la reunión terminó con la ilusión y el vértigo de tirar para delante con este nuevo proyecto.

Quedamos organizados en comisiones que tratarían de diseñar actividades tales como una escuela de formación de divulgadores y divulgadoras, jornadas de encuentros, página web... El nombre de la red apareció casi sin que nos diéramos cuenta. Barajamos otros nombres pero como si el proyecto tuviera vida propia, terminamos llamándolo *DiMa*.

Y por fin, en mayo de 2018, pusimos en marcha las primeras jornadas *DiMa* (*iuma.unizar.es/es/dima*) que se celebraron en *Etopia*, organizadas por el *Instituto Universitario de Matemáticas* (IUMA) de Zaragoza.

Fueron dos días de compartir experiencias, descubrir nuevas iniciativas, comprender que aquellas ilusiones que habíamos puesto sobre la mesa esos días en el ICMAT empezaban a consolidarse. Al finalizar la mesa redonda dimos por constituida la red *DiMa*.

Fue un momento emocionante. Durante la discusión de esta mesa redonda Sergio Belmonte propuso que de esta primera reunión saliera un manifiesto al que se pudieran sumar quienes quisieran aportar su granito de arena al reconocimiento de la divulgación de las matemáticas en nuestro país. Y así surgió nuestro primer trabajo colaborativo.

El manifiesto se hizo público simultáneamente por todos los miembros de *DiMa* el lunes 4 de junio de 2018. Con anterioridad habíamos abierto un página en twitter *twitter.com/Dimatematicas* y otra en facebook *www.facebook.com/Dimatematicas*.

Conseguimos que en plena especulación por quienes serían los nuevos ministros del gobierno de Pedro Sánchez se colara en algunos medios de comunicación y en las redes sociales la información del nacimiento de *DiMa*, una red de divulgación de las Matemáticas.

El manifiesto ya ha sido firmado por más de 200 personas y por 25 instituciones y asociaciones. Para aquellos que quieran sumarse al mismo solo tienen que incluir sus datos en *dima.icmat.es/manifiesto*.

Este manifiesto (que también ha sido traducido al inglés, catalán, gallego y eusquera) está en la web *DiMa* (*dima.icmat.es*) que acabamos de poner en marcha. Esta web nace con la idea de convertirse en un referente de las actividades de divulgación matemática que se realizan en nuestro país. Así que atentos a la web porque seguro que descubrirás alguna nueva actividad que despertará tu interés.

Reseña de Edith Padrón Hernández
Universidad de La Laguna

ACTIVIDAD

Ideas felices

Siham El Abyad
Pedro Fernández Palenzuela
Marina García Montoya
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Es difícil definir el concepto *«ideas felices»* únicamente con su nombre, pues no es lo que parece. Efectivamente, una parte, la de las ideas, es correcta, pero, ¿que sean felices? Veremos que algunas veces sí que lo son. Se trata de una expresión de la jerga matemática que consiste en una ocurrencia aparentemente inconexa con el problema en sí mismo y su planteamiento, pero que facilita enormemete la resolución del mismo, que de otra manera podría llegar a ser irresoluble o muy complicado de obtener por otros caminos o deducciones.

Pongamos un ejemplo para que se entienda a lo que nos referimos.

Queremos demostrar que si α y β son raíces de la ecuación

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

y que si γ y δ son raíces de la ecuación

$$x^2 + qx + 1 = 0,$$

ISSN 1988-5318

entonces se cumple que

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

Vemos que no se nos presenta de manera sencilla la resolución del ejercicio pero que, sin embargo, utilizando un par de «ideas felices» se simplifica enormemente la respuesta y la podemos obtener en un par de líneas. La principal «idea feliz» que vamos a usar es tener en cuenta las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación cuadrática como las que se nos plantean.

De forma general, para una ecuación mónica de segundo grado $x^2+bx+c=0$ se cumple que, siendo u y v sus raíces,

$$u+v=-b$$
$$uv=c$$

Lo demostramos en pocas líneas.

Siendo u y v las raíces, el polinomio se descompone:

$$\begin{aligned} x^2+bx+c=(x-u)(x-v)&=x^2-vx-ux+uv\\ &=x^2+x(-u-v)+uv, \end{aligned}$$

e igualamos coeficientes y ya tenemos la relación.

En nuestro problema se traduciría como: $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=1$, $\gamma+\delta=-q$ y $\gamma\delta=1$.

Seguimos con nuestro problema. Sabiendo esto partimos de

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta),$$

y multiplicamos adecuadamente, esto es, $(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)$ y $(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)$, obteniendo

$$(\alpha\beta+\alpha\delta-\beta\gamma-\gamma\delta)(\alpha\beta+\beta\delta-\alpha\gamma-\gamma\delta).$$

Teniendo en cuenta que $\alpha\beta=1$ y $\gamma\delta=1$, nos queda $(\alpha\delta-\beta\gamma)(\beta\delta-\alpha\gamma)$. Desarrollando obtenemos $\alpha\beta\delta^2-\alpha^2\gamma\delta-\beta^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2$.

Como $\alpha\beta=1$ y $\gamma\delta=1$, se deduce que

$$\delta^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2=[(\delta+\gamma)^2-2\delta\gamma]-[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$

Sustituyendo $\alpha+\beta=-p$ y $\gamma+\delta=-q$ en la anterior expresión llegamos a que la parte derecha de la igualdad es

$$(q^2-2)-(p^2-2)=q^2-p^2$$

Por lo tanto, retomando las igualdades, queda demostrada la igualdad siguiente:

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$$

Puede parecer que dar con una «idea feliz» es prácticamente imposible o que requiere una gran imaginación (de ahí la «felicidad» que da al encontrarla).

Es cierto que una buena dosis imaginativa es de gran ayuda, pero no basta con eso. Muchas de las demostraciones más complejas que utilizan «ideas felices» se han obtenido tras un estudio largo e intenso de la materia y de las disciplinas a las que concierne y, a menudo, la ayuda o colaboración de varias personas.

Aun así, no hay que desanimarse, no es la única manera de demostrar algo. Las «ideas felices», aunque sean originales y faciliten la demostración, no son imprescindibles para la mayoría de los razonamientos. ■

ISSN 1988-5318

Responsables de las secciones

➼ Actividad Matemática en la UAL

- *Actividades organizadas*: María Gracia Sánchez-Lirola Ortega (mgsanche@ual.es).
- *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Inmaculada López García (milopez@ual.es) y María Luz Puertas González (mpuertas@ual.es).

➼ De la Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria

- *Experiencias docentes*: Elisa Berenguel López (elisaberenguel@hotmail.com), David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com), Miguel Ángel Fernández Oller (migalbox@hotmail.com), José Abel García Mas (jabelmas@hotmail.com), Nuria Pardo Vidal (penuria@gmail.com) y Miguel Pino Mejías (mpinomej@gmail.com).
- *Enseñanza bilingüe*: Jesús Pérez Castaño (jesus.perez.castano.ext@juntadeandalucia.es).

➼ Divulgación Matemática

- *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es), Florencio Castaño Iglesias (fci@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorreci@ual.es).
- *Concurso de problemas*: Alicia Juan González (ajuan@ual.es), Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).
- *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jlopez@ual.es), Francisco Luzón Martínez (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón Cerdán (asalmero@ual.es).
- *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
- *Cultura y Matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
- *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).
- *Citas matemáticas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
- *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgrozas@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).
- *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es).

➼ Territorio Estudiante: Siham El Abyad (sihamlamojonera@gmail.com), Pedro Fernández Palenzuela (pedroferpal@gmail.com), Marina García Montoya (marina-garc-97@hotmail.com), Paula Ortega Trigo (ortegatrigo612@gmail.com), Joaquín Porcel Maleno (j.porcelmaleno@gmail.com) y Álvaro Videgain Barranco (alvarovidegain4@gmail.com).

ISSN 1988-5318