



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

MASTER DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

TRABAJO FIN DE MASTER

EMPLEO DEL APRENDIZAJE POR
DESCUBRIMIENTO EN LA ENSEÑANZA DE
LA GEOMETRÍA EN EL BACHILLERATO
CIENTÍFICO-TÉCNICO

Alumno: Juan Antonio Latorre Azor

Especialidad: Matemáticas

Tutora: María Isabel Ramírez Álvarez

Convocatoria: Junio 2015



ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN	3
I.1. Origen y motivación	3
I.2. Objetivo General.....	5
II. FUNDAMENTACIÓN.....	6
II.1. Aprendizaje Basado en el Descubrimiento	6
II.2. Competencia Matemática	12
II.3. La motivación del alumnado	14
II.4. La Geometría en Bachillerato	15
III. UNIDAD DIDÁCTICA	19
III.1. Planificación de la Unidad	19
III.2. Actividad	33
III.3. Evaluación de la Unidad	38
IV. CONCLUSIONES.....	44
V. BIBLIOGRAFÍA.....	45
ANEXO I.- EJEMPLOS DE CLASE Y TAREAS PARA CASA.....	47
ANEXO II.- PRUEBA ESCRITA.....	51



I. INTRODUCCIÓN

I.1. Origen y motivación

A pesar de que las matemáticas han ocupado siempre un lugar importante en las propuestas curriculares de todos los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachiller, y su importancia nunca ha sido cuestionada, existen diferentes alternativas sobre el enfoque que se les debe dar, como se deben explicar y sobre el papel que juegan en el desarrollo “global” de los alumnos. Tal vez por mi formación de ingeniero, tal vez por las competencias adquiridas en el master, he elegido un diseño de dar un tema (Geometría) sobre una serie de consideraciones que giran básicamente en torno a los dos puntos siguientes: el proceso de construcción del conocimiento matemático y las aportaciones de las matemáticas en el marco definido del Bachillerato tecnológico.

Etimológicamente, la palabra geometría significa “medida de la tierra”, y tiene todo el sentido, puesto que esta disciplina tiene como origen el intento del ser humano de definir y delimitar su espacio para poder destinar cada fracción del mismo a diferentes usos, especialmente en el ámbito agrícola. También le permite definir objetos y herramientas (como la rueda) que necesitará en su quehacer diario. Por tanto, parece claro que la geometría ha ocupado un papel importante en la vida del ser humano desde que se produce la Revolución Neolítica y se hace agricultor. Posteriormente, a lo largo de la historia, la geometría ha sido útil en el desarrollo de técnicas que fueran útiles para cubrir las nuevas necesidades que le iban surgiendo a las diferentes sociedades, como pueden ser la ingeniería civil y militar o la arquitectura. Un ejemplo claro lo constituye la aplicación del arco a la construcción de puentes, de tal forma que la construcción trabaje fundamentalmente a compresión, que es como mejor trabajan los materiales pétreos que se utilizaban en dichas construcciones.

Esta amplia importancia y aplicabilidad de la geometría motiva que su estudio aparezca tanto en el currículo de matemáticas como en el de otras asignaturas, como pueden ser física, dibujo técnico y artístico o incluso historia

del arte (aunque en este trabajo nos limitaremos a las materias propias del bachillerato científico tecnológico).

Por otra parte, en la enseñanza de la geometría se pueden presentar problemas de comprensión de los conceptos por parte de los alumnos. Estos problemas de comprensión están motivados por una metodología basada en el abuso de la presentación de los conceptos empleando representaciones típicas, sin que se muestren mediante otras representaciones alternativas. A esto se une al enunciado de una definición sin que se resalten las propiedades, y sin tener en cuenta que la representación visual de un concepto tiene un efecto más marcado en el estudiante que una definición verbal. También contribuye una falta de experimentación sobre diferentes representaciones del concepto que permitan profundizar en las propiedades del mismo. Un ejemplo lo constituye la representación que se suele dar de un cuadrado apoyado en un lado. Esto provoca que los estudiantes asocien esa imagen con el concepto de cuadrado, de forma que, si se les presenta una imagen de un cuadrado apoyado en un vértice, no reconozcan el polígono que ven como un cuadrado. Es posible que sepan la definición de cuadrado, pero la representación les confunde y no saben aplicar correctamente las propiedades del cuadrado, e identifican dicha representación con un rombo [L. Blanco, 2001].

Este hecho me motiva a planificar la implementación de una metodología que trate de paliar este hecho y que contribuya a un aprendizaje significativo. Además de esto, buscaré que, en la medida de lo posible, los alumnos aprecien la interdisciplinariedad de la geometría. En este sentido mi formación universitaria en el ámbito de la ingeniería civil me ha proporcionado una visión más global sobre la interdisciplinariedad de la geometría, al estudiar un amplio abanico de disciplinas en las que la geometría ocupaba un lugar importante. Dicha visión me puede resultar útil a la hora de acometer el diseño de tareas dirigidas a conseguir las metas propuestas.



I.2. Objetivo General

El objetivo general que planteamos es planificar una unidad didáctica sobre **geometría en 1º de bachillerato** en la que se incluyan actividades destinadas a favorecer un aprendizaje significativo por parte de los alumnos de los contenidos propios de esta materia. También se pretende conseguir que el alumnado entienda la interdisciplinariedad de esta rama de las matemáticas, de forma que asimilen la naturaleza básica de dichos conceptos, independientemente del sistema de representación utilizado en cada caso, o de sus diferentes aplicaciones a la resolución de problemas en cada disciplina científica y/o técnica. Creo que si se logra este tipo de aprendizaje entre nuestros estudiantes, se observará de inmediato un cambio conceptual, acompañado de una actitud positiva hacia el aprendizaje de la Ciencia.

II.FUNDAMENTACIÓN

II.1. Aprendizaje Basado en el Descubrimiento

A. ¿QUÉ ES EL APRENDIZAJE BASADO EN EL DESCUBRIMIENTO?

Este tipo de aprendizaje consiste en que el alumno vaya descubriendo por sí mismo los contenidos a desarrollar, de forma que tenga un papel protagonista en su propio aprendizaje. El profesor adquiere un papel secundario, sirviendo solamente de guía para que el alumno no se desvíe demasiado de los objetivos que el profesor ha planeado o no se quede bloqueado en el proceso.

Según A. Baro (2011), el máximo exponente de este sistema de aprendizaje es Jerome Bruner, quien está de acuerdo con Vigotsky en la importancia que tiene la realización de actividades en el proceso educativo. Sin embargo, Bruner añade que es de especial importancia para que se produzca un aprendizaje significativo de una determinada materia que el alumno descubra la información por sí mismo. De esta forma se señala que:

En este tipo de aprendizaje el alumno tiene una gran participación. El docente no expone los contenidos de un modo acabado; su actividad se dirige a darles a conocer una meta que ha de ser alcanzada y además de servir como mediador y guía para que los alumnos sean los que recorran el camino y alcancen los objetivos propuestos (A. Baro, 2011).

B. CARACTERÍSTICAS

Como se ha indicado en el apartado anterior, este sistema de aprendizaje se fundamenta en que el alumno descubra por sí mismo la información. Bruner señaló tres tipos de descubrimiento (A. Baro, 2011):

- ✓ Descubrimiento por **inducción**. El alumno parte de conocimientos concretos a partir de los cuales llega a conocimientos más generales.
- ✓ Descubrimiento por **deducción**. Es el proceso inverso, a partir de conocimientos generales, el alumno deduce casos concretos.

- ✓ Descubrimiento por **transducción**. El alumno compara dos elementos concretos y advierte sus similitudes.

Para que se pueda llevar a cabo un aprendizaje por descubrimiento se deben cumplir las siguientes condiciones (A. Baro, 2011):

- ✓ **Restricción en el ámbito de la búsqueda**, de forma que se pueda buscar el objetivo planteado de una forma más directa.
- ✓ **Atractivo y especificidad de los medios y objetivos**, de forma que el alumno esté más motivado por esta forma de aprendizaje.
- ✓ **Posesión de una base de conocimientos previos** por parte del alumno suficiente para poder acometer la tarea.
- ✓ **Habitación al uso de herramientas de búsqueda** por parte del alumnado, que les permita afrontar las tareas a realizar.

Por otra parte, A. Barrón (1993, p. 3-5) establece y desarrolla los siguientes principios del aprendizaje por descubrimiento:

- ✓ *El ser humano está dotado de potencialidad natural para descubrir conocimiento.*
- ✓ *El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa.*
- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas.*
- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso de resolución significativa de problemas.*
- ✓ *El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas.*
- ✓ *Para que la actividad resolutoria pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y creativa.*
- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores.*
- ✓ *Al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la mediación sociocultural.*

- ✓ *El grado de descubrimiento es inversamente proporcional al grado de predeterminación del proceso resolutivo.*
- ✓ *El aprendizaje por descubrimiento puede ser pedagógicamente promovido.*

C. VENTAJAS

La principal ventaja de este método de aprendizaje es que el alumnado consigue obtener un **aprendizaje significativo**. En este sentido, J. Reibelo (1998) señala que se pueden extraer cuatro hipótesis del pensamiento de Bruner, las cuales son:

- ✓ Se produce un incremento de la **potencia intelectual**, ya que el alumno aprende a resolver problemas a partir de una información dada.
- ✓ La **motivación** del alumno pasa de estar impuesta desde fuera a surgir de él mismo, de forma que el aprendizaje se vuelve significativo.
- ✓ Con el aprendizaje por descubrimiento se pueden afrontar problemas que requieran **mayor creatividad** a la hora de buscar soluciones, y se conoce mejor la naturaleza de los conceptos.
- ✓ El aprendizaje por descubrimiento favorece que el aprendizaje quede mejor **retenido y afianzado** por la mente del alumno al haber creado su propia estructura cognitiva.

D. CÓMO SE PUEDE IMPLEMENTAR EN EL AULA

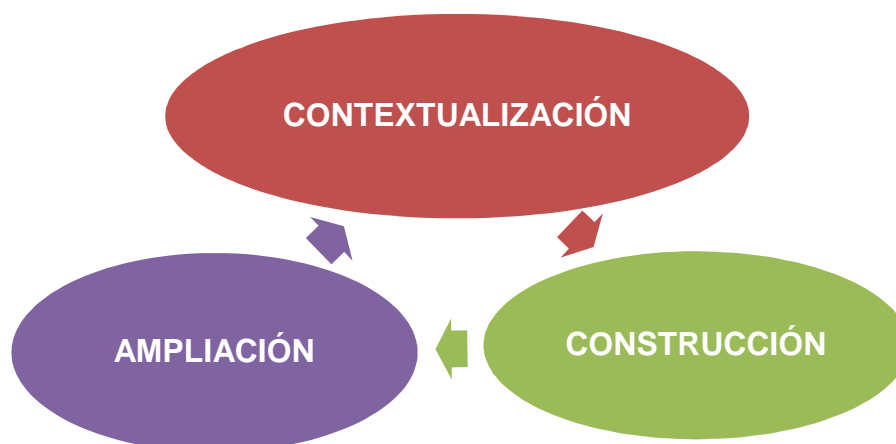
Con la finalidad de poder aplicar este método en el aula, J. del Río (1991) elabora dos metodologías para aplicar el aprendizaje por descubrimiento.

La **primera metodología** consta de tres fases, que son **Contextualización, Construcción y Ampliación**. En la primera fase el profesor investiga sobre el punto de partida del alumnado en cuanto a lo que piensan los alumnos en relación al tema a tratar (ideas preconcebidas, intuiciones, etc), así como el nivel que poseen en cuanto a los procedimientos

que servirán de base a los nuevos procedimientos que deberán poner en práctica. Posteriormente el profesor propone una o varias actividades que permitan aflorar las ideas preconcebidas que tienen los alumnos y que se pueda generar debate, tanto intrapersonal como interpersonal. Estas actividades deben tener un nivel tal que supongan un desafío que pueda generar motivación, pero sin excederse para que todos puedan ir alcanzando resultados parciales que les motive a continuar la tarea. Después de la fase de debate, cada alumno puede establecer hipótesis y proponer sus vías de resolución del problema.

En la segunda fase los alumnos pasan a comprobar si las vías de resolución conducen verdaderamente a la resolución correcta del problema o deben desecharlas. En este sentido, puede resultar bastante útil que el profesor les proponga actividades a los alumnos que les permitan adquirir información adicional a la facilitada en el enunciado del problema, de forma que esta información adicional ayude a comprobar la veracidad de sus hipótesis y la viabilidad o no de las vías de solución. Al final de esta fase el alumno debería haber adquirido los conocimientos (tanto conceptuales como procedimentales) que se habían propuesto como objetivo.

En la tercera fase el profesor propone nuevas actividades en las que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos, realizando variaciones sobre las primeras actividades propuestas. A través de estas nuevas actividades es posible que el alumno adquiera nuevos conocimiento, de forma que se repite de forma cíclica el proceso.



Se realizan una serie de recomendaciones a la hora de poner en práctica esta metodología. La primera es que el nivel de formalidad a la hora de comprobar las hipótesis se debe adaptar al nivel de los alumnos. También se recomienda que en niveles iniciales la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto o procedimiento se concluya en la misma sesión para evitar tensión y/o ansiedad en el alumno. Más adelante se podrá desarrollar un mismo conocimiento en varias sesiones. La segunda recomendación es el uso de un material variado en la presentación de los diferentes problemas, de forma que aumente la motivación del alumno al presentarle los diferentes problemas de diferentes formas. Por último, el autor reconoce que no se puede aplicar fácilmente este procedimiento a todos los contenidos. Dicho procedimiento también se puede combinar con una metodología expositiva, y el profesor será el que decida cómo tratar cada unidad.

La **segunda metodología** es muy similar a la primera, con algunas diferencias. La primera es que en la segunda fase el profesor no les facilita la información adicional de una forma tan directa (mediante la proposición de actividades diseñadas específicamente para tal fin). De esta forma el proceso les resulta más complicado a los alumnos. Por este motivo puede resultar adecuado entregar una guía a los alumnos.

La segunda diferencia se produce en la tercera fase, en la que las actividades de ampliación propuesta no estarán basadas en la resolución de problemas mediante algoritmos, sino en otro tipo de acciones como pueden ser demostraciones o descubrimiento de propiedades.

E. CÓMO SE EVALÚA

Es bien sabido que la evaluación debe servir como herramienta que contribuya a que se produzca un **aprendizaje significativo** y una mejora en la **enseñanza**, sin que ello suponga una merma en su utilidad como medida del aprendizaje (M. Sánchez, 1994).

Para conseguir esto, es necesario que la evaluación cumpla una serie de condiciones:



- ✓ El estudiante debe percibirla como una forma de conocer los **logros** obtenidos y las **dificultades** encontradas durante su aprendizaje.
- ✓ La evaluación debe abarcar los tres **tipos de conocimientos** que hay (conceptual, procedimental y actitudinal).
- ✓ En cuanto a la forma de obtener y comunicar los resultados, debe realizarse en base a **criterios no arbitrarios** y a indicadores del avance logrado. También es necesario prever las posibles dificultades para que las actividades propuestas contribuyan a superarlas.
- ✓ Partiendo de la base de que lo que se pretende no es saber quién sabe hacer las cosas y quién no, sino que la mayor cantidad posible de alumnos lo consiga, es necesario integrar la evaluación en el propio **proceso de aprendizaje** para que los resultados de la evaluación nos den información sobre lo que hay que modificar en el futuro.
- ✓ No se debe evaluar solamente al alumno, sino que también hay que **evaluar otros aspectos** como la actuación del profesor, el ambiente de trabajo donde se desarrollan las clases o el material utilizado.

II.2. Competencia Matemática

Si bien este trabajo está centrado en el estudio de la geometría en bachillerato, considero interesante mencionar de qué forma se puede relacionar la competencia matemática, descrita en el Real Decreto 1631/2006 que establece las enseñanzas mínimas de la ESO, con el enfoque didáctico que se propone en este documento. En este Real Decreto se indica lo siguiente en relación con la competencia matemática:

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Asimismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.), que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella. En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible.

Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

Si analizamos este texto, podemos observar claramente que en el tercer párrafo del mismo se indica que cuando un alumno adquiere la competencia

matemática, es capaz de utilizar una serie de contenidos matemáticos básicos para realizar razonamientos u obtener información que le permita resolver problemas en una amplia variedad de situaciones, así como valorar y juzgar los razonamientos y/o informaciones que se han obtenido. Pero resulta que estas son las bases del aprendizaje por descubrimiento. Por lo tanto, se puede concluir que el aprendizaje por descubrimiento contribuye en gran medida a que los alumnos adquieran la competencia matemática. Es más, se podría decir que cuando los alumnos son capaces de seguir correctamente un aprendizaje por descubrimiento han adquirido dicha competencia.

II.3. La motivación del alumnado

Tal y como hemos comprobado, la motivación del alumno ocupa una **posición primordial** dentro de este tipo de aprendizaje. Este tipo de aprendizaje pretende que el alumno esté motivado en lo que está haciendo para que el aprendizaje significativo se pueda producir. En este sentido, Amy Trauth-Nare y Gayle Buck (2011) proponen realizar una investigación sobre los intereses y los conocimientos previos de los alumnos de forma previa a la implantación de un Aprendizaje Basado en Problemas o un Aprendizaje por Proyectos.

Por otra parte, si se consigue un aprendizaje significativo, el alumno estará más motivado a seguir aprendiendo, cerrando de esta forma el círculo virtuoso.

II.4. La Geometría en Bachillerato

Matemáticas

Dentro del currículo del bachillerato científico tecnológico establecido por el Real Decreto 1467/2007 nos encontramos con dos asignaturas, **Matemáticas I** y **Matemáticas II**, encuadradas en cada curso de bachillerato. Dentro de los contenidos de cada una de ellas se incluye un bloque específico de geometría, los cuales se detallan a continuación:

MATEMÁTICAS I	MATEMÁTICAS II
<ul style="list-style-type: none">✓ <i>Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.</i>✓ <i>Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.</i>✓ <i>Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.</i>✓ <i>Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.</i>	<ul style="list-style-type: none">✓ <i>Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.</i>✓ <i>Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.</i>

Además de estos bloques orientados específicamente a la geometría, en el resto de bloques de contenidos se incluyen conceptos geométricos, como pueden ser la resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones en la asignatura Matemáticas I, o la interpretación geométrica de la derivada en la asignatura Matemáticas II.

Dibujo Técnico

Al igual que en el caso de las matemáticas, el Real Decreto 1467/2007 establece dos asignaturas, **Dibujo Técnico I** y **Dibujo Técnico II**, una para cada curso.

Por otra parte, el dibujo técnico es una disciplina que surge con la finalidad de representar de forma gráfica la realidad, con lo cual la vinculación con la geometría es total. Esto hace que el grueso de los contenidos de las asignaturas Dibujo Técnico I y Dibujo Técnico II sean geométricos, clasificándose en los bloques de trazado geométrico y sistemas de representación. A continuación se detallan dichos bloques de contenidos:

DIBUJO TÉCNICO I	DIBUJO TÉCNICO II
<p><u>Trazados geométricos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Trazados fundamentales. ✓ Trazado de polígonos regulares. ✓ Proporcionalidad y semejanza. Escalas. ✓ Transformaciones geométricas. ✓ Trazado de tangencias. Definición y trazado de óvalos, ovoides y volutas, espirales y hélices. <p><u>Sistemas de representación</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Fundamentos y finalidad de los distintos sistemas de representación: características diferenciales. ✓ El sistema diédrico. Representación del punto, recta y plano: sus relaciones y transformaciones más usuales. 	<p><u>Trazados geométricos</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Trazados en el plano: ángulos en la circunferencia, arco capaz. ✓ Proporcionalidad y semejanza: escalas normalizadas, triángulo universal de escalas y de escalas transversales. ✓ Polígonos: construcción de triángulos, aplicación del arco capaz. Construcción de polígonos regulares a partir del lado. ✓ Potencia. ✓ Transformaciones geométricas: la homología, la afinidad y la inversión. ✓ Tangencias: aplicación de los conceptos de potencia e inversión.

DIBUJO TÉCNICO I

- ✓ Los sistemas axonométricos: isometría y perspectiva caballera. Representación de sólidos.

DIBUJO TÉCNICO II

- ✓ Curvas cónicas y técnicas.
Sistemas de representación:
 - ✓ Sistema diédrico: abatimientos, giros y cambios de plano. Verdaderas magnitudes e intersecciones. Representación de formas poliédricas y de revolución. Representación de poliedros regulares. Obtención de intersecciones con rectas y planos. Obtención de desarrollos.
 - ✓ Sistema axonométrico ortogonal y oblicuo: fundamentos, proyecciones, coeficientes de reducción. Obtención de intersecciones y verdaderas magnitudes. Representación de figuras poliédricas y de revolución.
 - ✓ Sistema cónico: fundamentos y elementos del sistema. Perspectiva central y oblicua. Representación del punto, recta y plano. Obtención de intersecciones. Análisis de la elección del punto de vista en la perspectiva cónica.

Existe un bloque más de contenidos en el currículo de ambas asignaturas, el cual está centrado en la normalización, que es un sistema de

convenciones que se utilizan a la hora de representar gráficamente la realidad. En este bloque se tratan aspectos como la forma de acotar o de preparar el cajetín de un plano, por lo tanto no se tratan fundamentalmente conceptos geométricos.

Física

En cuanto a la física, el Real Decreto 1467/2007 establece en 1º de bachillerato la asignatura **Física y Química** y en 2º, la asignatura **Física**.

En estas asignaturas se presenta el concepto de vector y sus propiedades, con el fin de aplicarlo a magnitudes que necesitan ser representadas con un vector, ya que no basta con definir su valor, sino que hay que indicar en qué dirección y sentido se aplican. Esto adquiere mayor relevancia en los bloques de contenidos relativos al estudio del movimiento y de las fuerzas (cinemática, estática, dinámica, gravitación y electromagnetismo).

Además de esto, en prácticamente todos los bloques de contenidos se utilizan conceptos geométricos, entre los que destacan por su amplio uso los propios de la trigonometría, tanto en el estudio de magnitudes vectoriales (para relacionar el valor de la magnitud y los valores de las componentes del vector que la define), como en el estudio de bloques como el de la óptica o las ondas.

III. UNIDAD DIDÁCTICA

III.1. Planificación de la Unidad

A. CONTEXTUALIZACIÓN

Descripción de la unidad

La unidad didáctica que se planifica se titula **“Geometría afín del plano, lugares geométricos, circunferencia y tangencias”**. En la misma se describirán las ecuaciones que definen la recta en el plano, junto con el estudio de posiciones relativas entre rectas, ángulos y distancias. También se definirá el concepto de lugar geométrico y se tratarán algunos de ellos. Igualmente se describirán las ecuaciones de la circunferencia y el estudio conjunto de circunferencias y rectas, en particular de la tangencia entre rectas y circunferencias.

Como conexión con otras disciplinas también se verán algunos conceptos relativos a la cinemática durante el desarrollo de la actividad que se ha planteado desarrollar mediante aprendizaje por descubrimiento. Por otra parte, en dicha actividad se admitirán por parte de los alumnos tanto procedimientos algebraicos como los propios del dibujo técnico aplicados a expresiones algebraicas.

Los contenidos de esta unidad didáctica están recogidos en el Real Decreto 1467/2007, principalmente como parte del currículo de la asignatura **Matemáticas I**, de 1º de bachillerato. Algunos de los contenidos forman parte del currículo de las asignaturas Física y Química y Dibujo Técnico I, también de 1º de bachillerato, para que los alumnos puedan visualizar la interdisciplinariedad de la geometría.

Condicionantes

Esta unidad didáctica será tratada durante el segundo trimestre. De esta forma, es previsible que los alumnos que cursen Dibujo Técnico I ya hayan tratado los contenidos relativos a la geometría plana de rectas y circunferencias y podrán utilizar procedimientos propios del dibujo técnico, lo cual resultará indudablemente enriquecedor en la búsqueda de procedimientos y en la

apreciación de la interdisciplinariedad. También se desarrollará con posterioridad a haber tratado los contenidos relativos a la trigonometría y al estudio de vectores en el plano, puesto que estos contenidos serán utilizados de forma habitual durante el desarrollo de la unidad.

En otro orden de cosas, para poder desarrollar de forma provechosa esta unidad didáctica será necesario que la clase no sea demasiado numerosa, de entre 15 y 20 estudiantes. También será necesario que el alumnado de esta clase tenga en general un carácter participativo. De esta forma la metodología implementada será más eficiente.

B. OBJETIVOS

Objetivos generales

El Real Decreto 1476/2007 establece como objetivos para las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II (1º y 2º de Bachillerato, respectivamente) el desarrollo de las siguientes capacidades:

- 1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.*
- 2. Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.*
- 3. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.*

4. *Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.*
5. *Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.*
6. *Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.*
7. *Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.*
8. *Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.*

Como se puede comprobar, la metodología basada en el aprendizaje por descubrimiento contribuye a la consecución de varios de estos objetivos.

Objetivos específicos

A través del desarrollo de esta unidad didáctica se pretenden lograr los siguientes **objetivos específicos**:

- ✓ Relacionar la expresión algebraica de una recta con el ente geométrico que representa.
- ✓ Relacionar las diferentes formas de representar algebraicamente una recta.
- ✓ Obtener las diferentes expresiones algebraicas de la recta a partir de una serie de condiciones.

- ✓ Saber relacionar puntos y rectas en el plano a partir de sus expresiones algebraicas, determinando posiciones relativas, intersecciones, ángulos y distancias. Aplicar esto a la resolución de problemas geométricos.
- ✓ Comprender la noción de lugar geométrico. Conocer y saber utilizar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo en la resolución de problemas geométricos.
- ✓ Relacionar la expresión algebraica de una circunferencia con el ente geométrico que representa.
- ✓ Relacionar las diferentes formas de representar algebraicamente una circunferencia.
- ✓ Obtener las diferentes expresiones algebraicas de la circunferencia a partir de una serie de condiciones.
- ✓ Saber relacionar puntos, rectas y circunferencias en el plano a partir de sus expresiones algebraicas, determinando posiciones relativas, intersecciones y tangencias. Aplicar esto a la resolución de problemas geométricos.
- ✓ Fomentar la búsqueda autónoma de conceptos y procedimientos para la resolución de problemas relacionados con puntos, rectas, circunferencias y otros lugares geométricos; con vistas a conseguir un aprendizaje significativo.
- ✓ Entender la interdisciplinariedad de la geometría a través de la solución de problemas, así como su utilidad práctica en situaciones reales de la técnica.

C. CONTENIDOS

Conceptuales

- ✓ Ecuaciones de la recta en el plano y propiedades.
- ✓ Posición relativa entre dos rectas en el plano.
- ✓ Perpendicularidad entre rectas en el plano.
- ✓ Distancia entre dos puntos en el plano.
- ✓ Distancia entre punto y recta en el plano.
- ✓ Distancia entre dos rectas paralelas en el plano.
- ✓ Ángulo entre dos rectas.
- ✓ Lugar geométrico. Mediatriz y bisectriz.
- ✓ Ecuaciones de la circunferencia y propiedades.
- ✓ Potencia de un punto respecto a una circunferencia.
- ✓ Recta tangente a circunferencia. Propiedades.
- ✓ Circunferencias tangentes. Propiedades.
- ✓ Vector velocidad y relación con la tangencia.
- ✓ Aceleración normal y relación con el radio de la circunferencia y la fuerza centrífuga.

Procedimentales

- ✓ Obtener la ecuación de una recta en el plano a partir de condiciones como puntos contenidos, la pendiente, el vector director o una dirección perpendicular.
- ✓ Obtener un tipo de ecuación de la recta en el plano a partir de otro.
- ✓ Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano y su eventual intersección.
- ✓ Determinar el ángulo entre dos rectas.
- ✓ Determinar distancia entre dos puntos, entre punto y recta y entre dos rectas en el plano. Trasladar distancias sobre una recta.
- ✓ Determinar las ecuaciones de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.
- ✓ Obtener la ecuación de una circunferencia en el plano a partir de condiciones como puntos contenidos, el centro o el radio.

- ✓ Obtener un tipo de ecuación de la circunferencia en el plano a partir de otro.
- ✓ Determinación de la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto de la circunferencia.
- ✓ Determinación de la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior.
- ✓ Determinación de circunferencia tangente a otra que pasa por un punto de la dada.
- ✓ Determinación de magnitudes cinemáticas y dinámicas relacionadas con la geometría.
- ✓ Utilización de estos procedimientos en la resolución de problemas geométricos prácticos.

Actitudinales

- ✓ Disposición a la revisión y mejora de los procedimientos adquiridos en estadios anteriores del proceso de aprendizaje.
- ✓ Observación de las normas sistemáticas y de precisión que regulan los procedimientos que se utilizan en esta unidad.
- ✓ Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados, valorándose muy positivamente la búsqueda de diferentes vías para resolver el mismo problema. Todo ello a través de la investigación y/o del planteamiento de conjeturas y su validación.
- ✓ Valoración de la utilidad de la resolución de problemas geométricos a través de procedimientos algebraicos, buscando relaciones con la realidad.
- ✓ Valoración de la interdisciplinariedad de la geometría y de su utilidad práctica

D. DISTRIBUCIÓN TEMPORAL Y METODOLOGÍA

Metodología

La metodología que se ha planeado aplicar está basada en dos pilares básicos, que serán la **clase magistral participativa** combinada con el **aprendizaje por descubrimiento**.

Mediante la **clase magistral participativa** el profesor buscará que los estudiantes tengan un papel activo, fomentando que reflexionen y establezcan relaciones razonadas sobre los conceptos tratados. También se promoverá que ellos mismos deduzcan algunos de los resultados. De esta forma el aprendizaje se afianzará más. Para ello también se recurrirá constantemente a contenidos del curso presente y de cursos anteriores que los alumnos ya conocen, lo cual también facilitará que los asimilen mejor.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica el profesor propondrá ejercicios en los que los alumnos tendrán que investigar y/o plantear y validar conjeturas sobre algunos de los contenidos incluidos en la misma, partiendo de los contenidos que se tratarán en clase y los que los alumnos hayan aprendido con anterioridad (ya sea en el curso presente o en anteriores). De esta forma se irá aplicando el **aprendizaje por descubrimiento**. Posteriormente se volverá a utilizar este método en la resolución de una actividad práctica en grupos de 3 alumnos basada en un problema real del ámbito de la ingeniería civil.

En dicha actividad se planteará en primer lugar una investigación sobre una serie de conceptos y procedimientos, para lo cual se utilizará la **técnica del puzzle**. Ésta consiste en que los miembros de cada grupo se repartirán los conceptos y procedimientos para su investigación. Una vez que cada uno ha investigado su parte, se realizarán lo que se denomina reunión de expertos, en la que los alumnos de los diferentes grupos que tengan encargada la investigación sobre los mismos contenidos se reunirán para poner en común sus resultados y, entre todos validar y/o desestimar las aportaciones de cada uno, llegando a un mismo resultado. A continuación cada alumno se reunirá con su grupo de trabajo y expondrán los resultados obtenidos. Finalmente se

aplicarán los contenidos investigados en la primera parte de la actividad para la resolución del caso práctico que compone la segunda parte de la misma.

Descripción y distribución temporal de las sesiones

SESIÓN 1	
10 min	Explicación ecuación vectorial de la recta.
5 min	Paso ecuación vectorial a ecuaciones paramétricas.
5 min	Paso de las ecuaciones paramétricas a ecuación continua.
5 min	Paso de la ecuación continua a ecuación general.
5 min	Explicación ecuación segmentaria de la recta.
20 min	Se propone un ejemplo para que los alumnos lo realicen en clase. Se saca un alumno a la pizarra y entre todos lo resuelven. Se trata de obtener las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos de dos formas, obteniendo la ecuación vectorial e ir transformándola hasta llegar a la general por un lado, y, por el otro, determinar la ecuación punto pendiente (que ya estudiaron en cursos anteriores) y llegar también hasta la ecuación general. Se comprobará que coinciden ambos resultados. Se propone para casa que investiguen sobre la relación entre la pendiente de una recta y el ángulo que forma con los ejes de coordenadas.

SESIÓN 2	
5 min	Se saca a un alumno para que resuelva la tarea encargada el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas.
5 min	Estudio del paralelismo de dos rectas a través de sus pendientes.



SESIÓN 2

- | | |
|--------|---|
| 10 min | Estudio de la perpendicularidad de dos rectas a través de sus pendientes. Para ello se utilizará el resultado de la tarea encargada el día anterior. |
| 5 min | Recordatorio sobre la intersección de dos rectas a partir del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de ambas. |
| 25 min | Se les da a los alumnos 5 minutos para que piensen cómo se puede estudiar el paralelismo y la perpendicularidad de dos rectas a través de los vectores directores. Pasado este tiempo se ponen en común sus conclusiones durante otros 5 minutos. A partir de entonces el profesor les va planteando si las diferentes vías de solución son válidas o no, hasta que entre todos lleguen a una solución viable. Finalmente se plantean para casa algunos ejercicios sobre paralelismo, perpendicularidad, intersecciones y posiciones relativas de rectas. |

SESIÓN 3

- | | |
|--------|---|
| 15 min | Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan los ejercicios encargados el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas. |
| 10 min | Se definen la distancia entre dos puntos, la distancia entre un punto y una recta y la distancia entre dos rectas paralelas en el plano. |
| 10 min | Se define el ángulo entre dos rectas y se ve su relación con el ángulo formado por sus vectores directores. |

SESIÓN 3

15 min Se propone un ejemplo para que los alumnos lo realicen en clase. Se saca un alumno a la pizarra y entre todos lo resuelven. Se trata de determinar la ecuación de la recta que forma un ángulo dado con otra y que pase por un punto. Se propone para casa que los alumnos investiguen sobre cómo determinar la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas cartesianas, para lo cual se les sugiere que les será útil utilizar el teorema de Pitágoras. También se les sugiere que apliquen esto al cálculo de la distancia entre punto y recta y entre dos rectas paralelas. Igualmente se les propone que investiguen sobre cómo determinar el ángulo entre dos rectas a partir de sus pendientes, utilizando el resultado que obtuvieron para relacionar la pendiente de una recta y el ángulo que forma con los ejes de coordenadas.

SESIÓN 4

15 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan la tarea encargada el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas.

10 min Se define el concepto de lugar geométrico. También se definen dos lugares geométricos importantes como son la mediatriz y la bisectriz.

SESIÓN 4

25 min Se les da a los alumnos 5 minutos para que piensen cómo se puede determinar las ecuaciones de la mediatriz y la bisectriz a partir de sus definiciones. Pasado este tiempo se ponen en común sus conclusiones durante otros 5 minutos. A partir de entonces el profesor les va planteando si las ideas que han tenido se corresponden con lo que se busca o no. Finalmente se plantean para casa algunos ejercicios sobre distancias, ángulos, mediatriz y bisectriz.

SESIÓN 5

20 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan los ejercicios encargados el día anterior.

5 min Se define el concepto de circunferencia como lugar geométrico.

25 min Se les da a los alumnos 5 minutos para que piensen cómo se puede determinar la ecuación de una circunferencia a partir de su definición como lugar geométrico. Pasado este tiempo se ponen en común sus conclusiones durante otros 5 minutos. A partir de entonces el profesor les va planteando si las ideas que han tenido se corresponden con lo que se busca o no. Finalmente se plantean para casa algunos ejercicios sobre la determinación de la ecuación de una circunferencia. Algunos de ellos consistirán en la determinación de la circunferencia que pasa por tres puntos, por lo que se les indicará que investiguen sobre el procedimiento a seguir. También se pedirá que, a partir de la ecuación genérica obtenida a partir de la definición como lugar geométrico determinen la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, y que relacionen los parámetros A, B y C con las coordenadas del centro y con el radio.



SESIÓN 6

20 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan la tarea encargada el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas.

10 min Se describen las diferentes posiciones relativas que puede haber entre una recta y una circunferencia, incluyendo la tangencia.

20 min Se les da a los alumnos 5 minutos para que piensen cómo se puede determinar la posición relativa y la intersección entre una recta y una circunferencia, teniendo en cuenta para ello cómo se determina la intersección de dos rectas. Pasado este tiempo se ponen en común sus conclusiones durante otros 5 minutos. A partir de entonces el profesor les va planteando si los procedimientos propuestos conducen o no a la solución buscada. Finalmente se plantean para casa algunos ejercicios sobre posición relativa e intersecciones entre recta y circunferencia. También se les plantea que investiguen sobre la posición relativa entre circunferencias y sobre procedimientos que permitan determinar dicha posición relativa y una eventual intersección, teniendo en cuenta lo visto para el caso de posición relativa e intersección entre una recta y una circunferencia.

SESIÓN 7

25 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan la tarea encargada el día anterior.

SESIÓN 7

20 min Se describe la relación entre la recta tangente en un punto de una circunferencia y el radio que pasa por ese punto. Posteriormente se les indica a los alumnos que, teniendo en cuenta esto, propongan un procedimiento para determinar la recta tangente a una circunferencia que pasa por el punto. A continuación se describirá la relación entre los radios de dos circunferencias tangentes que pasan por el punto de tangencia y se les indica que propongan un procedimiento para determinar una circunferencia tangente a otra por un punto contenido en ella.

5 min Se define el concepto de potencia de un punto con respecto a una circunferencia. Se plantean ejercicios para casa sobre determinación de recta y circunferencia tangentes a otra circunferencia por un punto de esta última, así como intersección de dos circunferencias. También se les plantea que investiguen sobre procedimientos para determinar las rectas tangentes a una circunferencia que pasen por un punto exterior, para lo cual pueden utilizar el concepto de potencia.

SESIÓN 8

20 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan la tarea encargada el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas.

15 min Se propone un ejemplo para que los alumnos lo realicen en clase. Se saca un alumno a la pizarra y entre todos lo resuelven. Se trata de obtener las ecuaciones de las rectas que pasen por un punto determinado y que sean tangentes a una circunferencia dada, basándose en los procedimientos que han investigado.

SESIÓN 8

15 min Se definen el eje radical de dos circunferencias y el centro radical de tres circunferencias. Se plantea que investiguen procedimientos para determinar las ecuaciones del eje radical y las coordenadas del centro radical.

SESIÓN 9

20 min Se sacan a diferentes alumnos para que resuelvan la tarea encargada el día anterior. Entre todos se comprobarán las conclusiones expuestas para validarlas o modificarlas.

30 min Se les presenta la actividad de trazado en planta de una carretera y que la harán en grupos de tres. Se les explica que deben, en primer lugar, investigar sobre una lista de conceptos que se les dará y que se utilizará la técnica del puzzle para dicha investigación. También se les explicará en qué consiste la técnica del puzzle y que se desarrollará en la siguiente sesión. Posteriormente deberán acometer realizar los diferentes apartados de la actividad, para lo cual contarán con las dos siguientes sesiones para que puedan plantear dudas. Después tendrán una semana para terminarla en casa. Para subir nota podrán realizar una maqueta de la carretera en una tabla de madera.

SESIÓN 10

15 min Se realizan las reuniones de expertos de la técnica del puzzle.

35 min Se realizan las reuniones de grupo de la técnica del puzzle y se comienza la actividad. En cualquier momento podrán consultar las dudas que les surjan.

SESIÓN 11

50 min Se continúa con la realización de la actividad. También se atenderán las dudas que tengan. Los grupos que no hayan acabado la actividad tendrán una semana para entregarla. Los que quieran subir nota podrán entregar la maqueta también a la semana siguiente.

III.2. Actividad

Como colofón a la unidad didáctica planificada, se ha previsto desarrollar una actividad en la que se pongan en práctica los contenidos tratados, así como otros contenidos sobre los que ellos deberán de investigar. Dicha actividad consistirá en el **diseño del trazado en planta de un tramo de carretera**. Se realizará en grupos de tres estudiantes y constará de dos partes. El desarrollo de la misma se realizará conforme a lo expuesto en el apartado anterior.

A continuación se muestra el enunciado de la actividad:

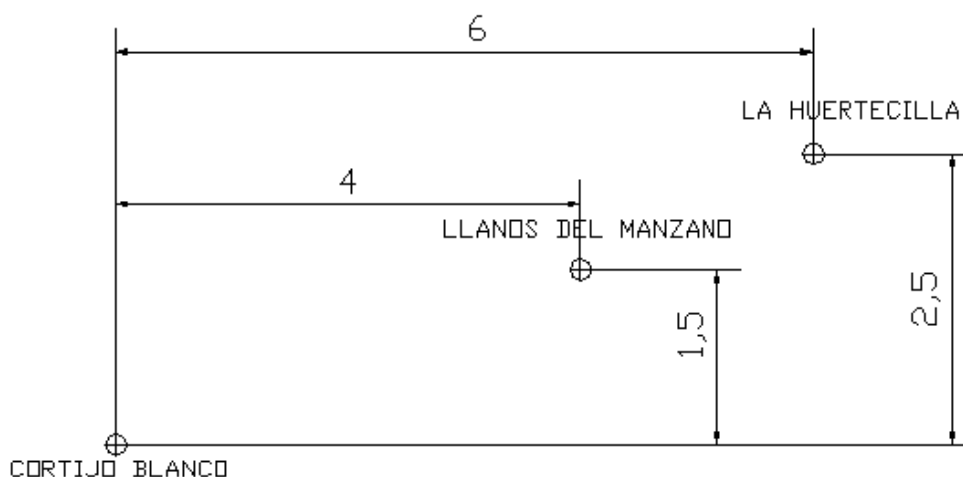
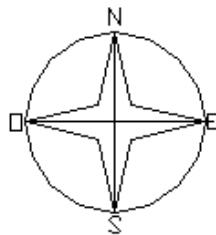
Se ha planificado la construcción de una carretera que unirá tres pedanías de un pueblo, llamadas Cortijo Blanco, Llanos del Manzano y La Huertecilla. La posición relativa entre estas tres pedanías se puede ver en el esquema incluido, en el que las distancias están expresadas en km.

El eje de la carretera proyectada se define en planta de la siguiente forma:

Desde Cortijo Blanco partirá una alineación recta de 2 km de longitud que tendrá un acimut Az_1 tal que la tangente de dicho acimut será de $3/2$. En el punto medio de esta alineación se ha proyectado ubicar una gasolinera.

Al terminar esta primera alineación recta se situarán dos curvas consecutivas en forma de S. Dichas curvas serán alineaciones circulares de 500 m de radio. Los centros de estas circunferencias estarán situados en la misma línea Este-Oeste.

Después de estas dos curvas consecutivas hay una segunda alineación recta que pasa por Llanos del Manzano. A continuación hay una tercera alineación circular de radio 500 m que enlaza la alineación recta de Llanos del Manzano con otra alineación recta que parte de La Huertecilla. Esta última alineación recta tendrá un acimut Az_2 tal que su tangente será de 4.



1ª parte de la actividad:

Investigar y poner en común mediante la técnica del puzzle los siguientes conceptos y procedimientos. Dividir la tarea como se indica:

Alumno	Conceptos y procedimientos
Alumno 1	<p><i>Acimut de una dirección.</i></p> <p><i>Alineación recta, alineación circular y curva de transición en el trazado en planta de una carretera.</i></p> <p><i>Relación entre tangencia y alineaciones en el trazado en planta de una carretera.</i></p>
Alumno 2	<p><i>Búsqueda de las coordenadas del segundo extremo de un segmento dadas las coordenadas del primer extremo, la longitud del segmento y la ecuación de la recta que contiene a dicho segmento.</i></p> <p><i>Determinación de las coordenadas del punto medio de un segmento.</i></p> <p><i>Determinación de la ecuación de una circunferencia tangente a dos rectas, conociendo su radio y las ecuaciones de dichas rectas.</i></p>
Alumno 3	<p><i>Definición y propiedades del vector velocidad. Relación con la tangencia.</i></p> <p><i>Definición de aceleración normal. Relación con la velocidad y el radio de curvatura.</i></p> <p><i>Definición de fuerza centrífuga. Relación con la aceleración normal y la masa del cuerpo en movimiento.</i></p>

2ª parte de la actividad:

- ✓ Definir un sistema de referencia para la realización del resto de tareas de esta segunda parte (establecer un origen y unos ejes de coordenadas cartesianas).
- ✓ Dibujar un croquis aproximado del eje de la carretera sobre papel milimetrado para que sirva de guía.
- ✓ Expresar las coordenadas de cada pedanía según el sistema de referencia definido.
- ✓ Expresar las ecuaciones de cada una de las alineaciones (tanto rectas como circulares) que componen el eje de la carretera, según el sistema de referencia definido.
- ✓ Expresar las coordenadas de los puntos de paso de una alineación a otra, según el sistema de referencia definido.
- ✓ Expresar las coordenadas del punto donde se ubicará la gasolinera, según el sistema de referencia definido.
- ✓ Expresar la longitud de cada una de las alineaciones.
- ✓ Si consideramos un vehículo con una masa total de 1.200 kg que se desplaza desde Cortijo Blanco a Llanos del Manzano a una velocidad de 60 km/h, determinar después de haber recorrido 800 m dentro de la primera alineación curva:
 - El vector velocidad.
 - La aceleración normal.
 - La fuerza centrífuga.
- ✓ Dibujar un segundo croquis definitivo y a escala del eje de la carretera en papel milimetrado, indicando en el mismo el sistema de referencia elegido, la ubicación de cada pedanía, las alineaciones, los puntos de paso de una alineación a otra, la ubicación de la gasolinera, el centro de cada alineación circular y el punto de la primera alineación circular en el que se ha determinado el vector velocidad, junto con dicho vector.

3ª parte de la actividad (opcional)

Realizar una maqueta de la carretera sobre una tabla de marquetería a escala 1:10.000. Pintar la línea del eje con pintura negra con un ancho de aproximadamente 2 cm. Indicar en esta maqueta la ubicación de cada pedanía, las alineaciones, los puntos de paso de una alineación a otra, la ubicación de la gasolinera y el centro de cada alineación circular. El resto de la decoración es libre.

NOTAS:

- ✓ *Considerar la superficie terrestre como si fuera plana.*
- ✓ *Considerar que el entronque entre las diferentes alineaciones se realiza directamente mediante tangencias, prescindiendo de las curvas de transición.*
- ✓ *Tanto en las coordenadas de los puntos como en las ecuaciones de las alineaciones se debe indicar la unidad de longitud en la que están expresadas.*
- ✓ *Lo mismo es aplicable para el vector velocidad, la aceleración normal y la fuerza centrífuga.*
- ✓ *Un buen croquis inicial puede resultar muy útil para clarificar lo que hay que hacer en la segunda parte de la tarea. Prestad atención en su ejecución para evitar confusiones.*

III.3. Evaluación de la Unidad

Definición

La evaluación consistirá fundamentalmente en determinar si el alumnado ha alcanzado los objetivos determinados, así como la idoneidad de la planificación realizada para conseguir este fin.

Además de esto, la evaluación debe colaborar a que se produzca un aprendizaje significativo y a la mejora de la enseñanza.

Criterios de evaluación

Dentro del Real Decreto 1467/2007 se definen los criterios de evaluación correspondientes a la asignatura Matemáticas II, de los cuales los siguientes son aplicables al bloque de Geometría:

- ✓ *Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.*
- ✓ *Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.*

En esta unidad en particular se valorará el grado de participación del alumno en las actividades realizadas en clase y su participación, así como las tareas de casa, ya sean ejercicios ordinarios o investigaciones. Igualmente se valorará el desarrollo de la actividad práctica y la prueba final escrita. En concreto, se atenderá el grado de desarrollo de los siguientes aspectos del proceso de aprendizaje:

- Mantener una actitud activa, participativa y reflexiva en las sesiones magistrales, estableciendo relaciones razonadas sobre los conceptos

propios de la unidad didáctica y conceptos tratados en otras unidades anteriores.

- Expresar y relacionar las diferentes ecuaciones que definen algebraicamente una recta en el plano.
- Entender el concepto de lugar geométrico. Expresar y relacionar las diferentes ecuaciones que definen algebraicamente algunos ejemplos de lugares geométricos en el plano.
- Expresar y relacionar las diferentes ecuaciones que definen algebraicamente una circunferencia en el plano.
- Resolver actividades sobre posición relativa, intersección, ángulos y distancias entre puntos, rectas y circunferencias en el plano de forma algebraica.
- Resolver actividades sobre tangencias entre recta y circunferencia, así como entre circunferencias en el plano de forma algebraica.
- Establecer relaciones entre los contenidos propios de la unidad didáctica y contenidos tratados en otras unidades y cursos, con el fin de poder resolver problemas de aplicación real.
- Entender que el marco algebraico y el marco gráfico son dos entornos de trabajo y dos sistemas de representación diferentes para tratar la geometría, pero que están íntimamente relacionados al tratar los mismos conceptos fundamentales y que se pueden complementar mutuamente.
- Entender la interdisciplinariedad de la geometría al ser aplicable a múltiples disciplinas como pueden ser la física o las diferentes ramas de la técnica
- Manifestar un compromiso de responsabilidad y participación activa en la actividad práctica en grupo.

Instrumentos de evaluación

- ✓ **Participación.** Se tendrá en cuenta la participación de los estudiantes en los distintos debates, puesta en común de ideas y la asistencia a clase.
- ✓ Realización de **tareas de investigación** individuales y resolución de **ejercicios.**
- ✓ El desarrollo de la **actividad práctica** en las que se valorará: La participación de forma activa en el diseño del trabajo grupal; la resolución de conflictos que puedan surgir en el equipo; el clima de trabajo del equipo; y el producto final.
- ✓ **Prueba escrita** de contenidos teóricos-prácticos trabajados en la asignatura.

Para evaluar la participación de los alumnos en las actividades de gran grupo y la revisión en clase de la tarea encargada para casa, el profesor utilizará el siguiente cuadro a modo de *check list*:

ASPECTO EVALUADO	VALORACIÓN				
Interés demostrado	1	2	3	4	5
Participación activa	1	2	3	4	5
Actitud respetuosa	1	2	3	4	5
Aportaciones válidas a la resolución de las actividades o a la investigación	1	2	3	4	5

Se valorará cada aspecto de acuerdo a la siguiente codificación:

Nula/Casi nula	Insuficiente	Aceptable	Buena	Muy Buena
1	2	3	4	5

El profesor rellenará el *check list* de forma diaria para cada alumno. Posteriormente obtendrá la calificación media.

En cuanto a la actividad práctica y la prueba escrita individual, se valorará tanto el procedimiento como los resultados parciales y el final.

Para la evaluación de la actividad práctica también se tendrá en cuenta un informe que realizará cada miembro del grupo evaluando a sus compañeros por separado, el cual será confidencial. Consistirá en rellenar un un *check list* como el que sigue:

ASPECTO EVALUADO	VALORACIÓN				
Grado de compromiso en la actividad	1	2	3	4	5
Respeto a los compañeros e implicación en la resolución de conflictos	1	2	3	4	5
Utilidad de las aportaciones realizadas al trabajo	1	2	3	4	5

Se valorará cada aspecto de acuerdo a la siguiente codificación:

Nula/Casi nula	Insuficiente	Aceptable	Buena	Muy Buena
1	2	3	4	5

Criterios de calificación

Para obtener la calificación de la unidad se ponderará cada parte de la siguiente forma:

- ✓ **Participación y realización de ejercicios y tareas diarios: 35 %** de la calificación final. Para determinar esta calificación el profesor irá rellenando el check list diariamente, obteniendo una media diaria que estará entre 1 y 5. En el cálculo de esta media diaria las aportaciones a la resolución de actividades tendrá un peso del 40 %, mientras que el resto de aspectos considerados supondrán un 20 % cada uno. Al final se hará una media global de las calificaciones diarias y se multiplicará por 2 para que la calificación sea sobre 10 puntos.

- ✓ **Actividad práctica: 35 %** de la calificación final. La primera parte de la tarea (investigación mediante la técnica del puzzle) supondrá un 30 % de la calificación total de la actividad, mientras que la segunda parte representará el 70 % restante. En la segunda parte de la actividad se valorará el procedimiento seguido con un 65 % y los resultados con un 35 %. De esta forma se obtendrá la calificación de grupo. La calificación de cada individuo será modulada en función del informe de evaluación realizado por sus compañeros. Se determinará la media de los dos informes, obteniendo una puntuación entre 1 y 5. Con esa puntuación se calculará un coeficiente de la siguiente forma:

$$\text{Coeficiente} = \frac{3 + \frac{\text{Puntuación} - 3}{4}}{3}$$

La calificación individual de cada alumno se obtendrá multiplicando el coeficiente por la calificación de su grupo. En cualquier caso, la calificación individual nunca será inferior a 1 ni superior a 10.

- ✓ **Prueba escrita: 30 %** de la calificación final. Cada ejercicio de la prueba tendrá el mismo peso. En la calificación de cada ejercicio se valorará el procedimiento seguido con un 65 % y los resultados con un 35 %. En general se les dará libertad para que sigan el procedimiento que deseen, siempre que el mismo sea válido para obtener el resultado buscado. La calificación de esta prueba estará situada entre 1 y 10 puntos.

Los alumnos también tendrán la oportunidad de mejorar su calificación final si su grupo realiza la tercera parte de la actividad práctica, o sea, la maqueta. La calificación de la maqueta se realizará sobre 0,5 puntos para la calificación de grupo. Esta calificación de grupo también se modulará para cada alumno utilizando el coeficiente mencionado anteriormente, aunque en esta ocasión sí se permitirá que la calificación de un alumno sea superior a 0,5 puntos. Esta calificación individual se sumará directamente a la calificación global.



Evaluación de la planificación realizada

Durante el desarrollo de la unidad el profesor irá valorando el nivel de participación general de la clase y los logros conseguidos por los alumnos de forma autónoma. Si la valoración general es positiva se continuará con la planificación realizada. En caso contrario, el profesor estimará posibles causas e introducirá modificaciones en la planificación.

Al final de la unidad el profesor estudiará si los alumnos han cumplido con los objetivos propuestos. Si no se han conseguido los objetivos mínimos por parte de una mayoría de los alumnos, el profesor investigará las posibles causas analizando en detalle el desarrollo de las sesiones y las pruebas, con el fin de detectar las deficiencias de la planificación que han podido motivar estos resultados y las tendrá en cuenta para futuras planificaciones.

IV. CONCLUSIONES

En el último siglo se ha desarrollado una corriente de pensamiento entre los investigadores en materia educativa que tiende a ensalzar las bondades en el empleo de metodologías didácticas alternativas a la tradicional basada en clases magistrales expositivas. En alguna de la bibliografía que he consultado se describen investigaciones concretas en las que se pone de manifiesto las limitaciones que presenta esta metodología tradicional que, en ocasiones, induce a los alumnos a no asimilar correctamente los contenidos tratados. Por este motivo considero que la implementación de una metodología en la que se incluyan procedimientos didácticos alternativos puede corregir las deficiencias inherentes a la metodología tradicional.

En este sentido, es de esperar que el empleo de actividades diseñadas en base al aprendizaje por descubrimiento puedan conducir a un aprendizaje significativo. Además, tal y como se ha podido comprobar, el aprendizaje basado en competencias que marca la legislación vigente (especialmente en lo referente a la competencia matemática) va en la línea marcada por el aprendizaje por descubrimiento. Por este motivo, pienso que la unidad didáctica incluida en este trabajo será de utilidad para subsanar los problemas detectados al aplicar solamente clases magistrales expositivas. En cualquier caso, el empleo de clases magistrales en las que se fomente la participación del alumno también tiene su utilidad como punto de partida para fomentar el descubrimiento por parte de los alumnos. Por este motivo la unidad didáctica diseñada también incluye esta metodología.

Por otra parte, al utilizar actividades prácticas y que incluyen conceptos propios de otras materias, pero relacionados de alguna forma con la geometría, es de esperar que se consiga que los alumnos aprecien la interdisciplinariedad de la misma. Esto contribuirá además a un mejor entendimiento de la materia.

V. BIBLIOGRAFÍA

Alonso Sánchez, M. et al. (1994). *La evaluación en la enseñanza de la física como instrumento de aprendizaje* (tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.

Baro Cáliz, A. (Marzo 2011). Metodologías Activas y Aprendizaje por Descubrimiento [55]. *Innovación y Experiencias Educativas*, 40, [Revista Digital].

Disponible en http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_40/ALEJANDRA_BARRON_1.pdf [17/05/2015].

Barrón Ruiz, A. (1993). Aprendizaje por Descubrimiento: Principios y acciones inadecuadas. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 11 (1), 3-11.

Blanco, L. (2001). Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Centre for Innovation in Mathematics Teaching. University of Exeter. Disponible en <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lberrgeo.pdf> [30/05/2015].

Del Río Sánchez, J. (1991). *Aprendizaje de las Matemáticas por Descubrimiento. Estudio Comparado de dos Metodologías*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.



Reibelo Martín, J. D. (1998). Método de Enseñanza. Aprendizaje para la Enseñanza por Descubrimiento (I). *Aula Abierta*, 71, 123-147.

Trauth-Nare, A., Buck, G. (2011). Assessment for Learning. *The Science Teacher*, 78 (1), 34-39.

ANEXO I.- EJEMPLOS DE CLASE Y TAREAS PARA CASA

SESIÓN 1

- ✓ **Ejemplo de clase.** Determinar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(4,2) de dos formas, partiendo de la ecuación vectorial y partiendo de la ecuación punto-pendiente.
- ✓ **Tarea para casa.** Determinar la relación existente entre la pendiente de una recta y los ángulos que forma dicha recta con los ejes de coordenadas.

SESIÓN 2

- ✓ **Tarea para casa 1.** Determina la ecuación general de las rectas paralela y perpendicular a la recta dada y pasa por el punto indicado, en cada caso:

- $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 \end{cases} \quad A(2,3)$
- $s \equiv y - 3 = 2(x + 1) \quad B(4,1)$
- $t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{2y-6}{2} \quad C(1,2)$
- $u \equiv 2x + 5y = 1 \quad D(0,2)$

- ✓ **Tarea para casa 2.** Estudia la posición relativa de cada par de rectas. Cuando sea posible, calcula la intersección.

- $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \frac{2-x}{3} = \frac{2y-6}{4}$
- $t \equiv x + y = 2 \quad u \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda - 2 \end{cases}$
- $v \equiv y = 2x \quad w \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

SESIÓN 3

- ✓ **Ejemplo de clase.** Determina las rectas que forman 60° con la recta dada y pasan por el punto indicado (hay dos soluciones):

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} \quad A(0,1)$$

- ✓ **Tarea para casa 1.** Determina un procedimiento para calcular la distancia entre dos puntos en el plano a partir de las coordenadas de dichos puntos. Te puede resultar útil recurrir al teorema de Pitágoras. Basándote en el procedimiento anterior, determina un procedimiento para calcular la distancia entre un punto y una recta en el plano, y otro procedimiento para calcular la distancia entre dos rectas paralelas en el plano.
- ✓ **Tarea para casa 2.** Determina un procedimiento para determinar el ángulo entre dos rectas a partir de sus pendientes, basándote en el resultado de la tarea del día anterior.

SESIÓN 4

- ✓ **Tarea para casa 1.** Dados los puntos A(2,1) y B(4,5), determina:
 - La ecuación general de la mediatriz del segmento definido por ambos puntos.
 - La distancia de la mediatriz al origen de coordenadas.
 - El ángulo que forma la mediatriz con la siguiente recta, calculado a partir de las pendientes y de los vectores directores. Comparar ambos resultados:

$$r \equiv 2x + 3y = 1$$

- ✓ **Tarea para casa 2.** Dadas las siguientes rectas, determina:
 - La ecuación general de la bisectriz.
 - La distancia de la bisectriz al origen de coordenadas.
 - El ángulo que forman las dos rectas dadas y el que forma la bisectriz con cada una de ellas, por el procedimiento que prefieras. ¿Qué conclusión puedes sacar?

$$r \equiv x + 2y = 2 \qquad s \equiv y = 3x + 2$$

- ✓ **Tarea para casa 3.** Determina la distancia entre cada pareja de rectas paralelas:

$$\circ \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{2x-4}{4} = \frac{1-y}{3}$$

$$\circ \quad t \equiv 2x + 3y = 1 \qquad v \equiv 4x + 6y = 5$$

SESIÓN 5

- ✓ **Tarea para casa 1.** Determina la ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro el punto (1,2). Convierte esta ecuación a la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Basándote en el resultado anterior, determina la relación entre los términos A, B y C con la coordenadas del centro y con el valor de radio (esto último para una circunferencia genérica de centro (x_0, y_0) y radio R).
- ✓ **Tarea para casa 2.** Determina la ecuación de la circunferencia de centro el punto (2,3) que contiene al punto (4,2). Investiga o deduce el procedimiento a seguir y explícalo.
- ✓ **Tarea para casa 3.** Determina la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos (1,2), (0,3) y (2,5). Investiga o deduce el procedimiento a seguir y explícalo.

SESIÓN 6

- ✓ **Tarea para casa 1.** Determina la posición relativa y la intersección (si la hay) entre cada pareja de recta y circunferencia:

○ $r \equiv 2x + y = 2$

$C_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

○ $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$

$C_2 \equiv (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$

○ $t \equiv y = \frac{4}{3}x$

$C_3 \equiv \left(x - \frac{31}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 = 16$

- ✓ **Tarea para casa 2.** Deduce o investiga un procedimiento para determinar la posición relativa entre dos circunferencias y, en caso de que la haya, la intersección entre ambas. Aplícalo para determinar la posición relativa entre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y las siguientes circunferencias, así como una eventual intersección:

○ $C_1 = (x - 1)^2 + y^2 = 9$

○ $C_2 = (x - 1)^2 + y^2 = 4$

○ $C_3 = (x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

○ $C_4 = (x - 4)^2 + y^2 = 4$

○ $C_5 = (x - 5)^2 + y^2 = 4$

SESIÓN 7

- ✓ **Tarea para casa.** Deduce o investiga un procedimiento para determinar las ecuaciones de las rectas que sean tangentes a una circunferencia dada y que pasen por un punto exterior a dicha circunferencia. Te puede ser útil el concepto de potencia de un punto respecto de una circunferencia. ¿Encuentras alguna relación entre la recta que une el punto exterior con el centro de la circunferencia y las rectas tangentes?

SESIÓN 8

- ✓ **Ejemplo de clase.** Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia cuya ecuación se indica a continuación que pasan por el punto dado:

$$C \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad A(6,7)$$

Determina también la bisectriz de ambas rectas tangentes.

- ✓ **Tarea para casa.** Deduce o investiga algún procedimiento para determinar la ecuación del eje radical de dos circunferencias y las coordenadas del centro radical de tres circunferencias.

ANEXO II.- PRUEBA ESCRITA

- 1) Determina las ecuaciones generales de las rectas que forman un ángulo de 45° con el eje de abscisas (eje x) y que son tangentes a la circunferencia de radio 2 que pasa por el punto $A(1,3)$ y cuyo centro tiene la menor coordenada y posible.
- 2) Determina la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(2,1)$ y $B(4,3)$.
- 3) Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3)$, $B(5,2)$ y $C(3,1)$, determina:
 - a. La longitud de los tres lados.
 - b. La amplitud de los tres ángulos.
 - c. El área del triángulo.
 - d. Las coordenadas del ortocentro (punto donde se cortan las alturas del triángulo).
- 4) Un campo de fútbol tiene unas dimensiones de 100×60 m. Sabiendo que el vértice del mismo de menor coordenada y es el origen de coordenadas, y que la recta que contiene la línea de banda (el lado de 100 m de longitud) que pasa por el origen tiene como vector director uno de componentes $(1,2)$. Determina:
 - a. Las coordenadas de los cuatro vértices del campo.
 - b. Las coordenadas del centro del campo y la ecuación del círculo central (de radio 9,15 m).