

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
MÁSTER EN INFORMÁTICA AVANZADA E  
INDUSTRIAL

“Diseño de controladores fraccionales basados  
en la teoría robusta de realimentación  
cuantitativa”

Curso 2015/2016

**Alumno/a:**  
Justo Hernández Romera

**Director/es:**  
José Carlos Moreno Úbeda  
José Luis Guzmán Sánchez



Escuela Superior de Ingeniería

Máster en Informática Avanzada e Industrial



**Diseño de controladores fraccionales basados en la  
teoría robusta de realimentación cuantitativa.**

Alumno:

Justo Hernández Romera

Directores:

José Carlos Moreno Úbeda

José Luis Guzmán Sánchez

Septiembre 2016



## ÍNDICE

<b>I.</b>	<b>Introducción</b>	9
I-A.	Antecedentes y motivación . . . . .	10
I-B.	Objetivos . . . . .	10
I-C.	Estructura del documento . . . . .	10
I-D.	Planificación temporal . . . . .	11
<b>II.</b>	<b>Materiales y métodos</b>	11
II-A.	Cálculo fraccional . . . . .	11
II-B.	Métodos de aproximación . . . . .	12
II-B1.	Método general CFE . . . . .	12
II-B2.	Método de Oustaloup . . . . .	12
II-C.	Controladores fraccionales . . . . .	12
II-C1.	Controlador $PI^\lambda D^\mu$ . . . . .	12
II-C2.	Controlador de estructura CRONE . . . . .	13
II-D.	QFT - Quantitative Feedback Theory . . . . .	14
<b>III.</b>	<b>Diseño e implementación</b>	16
III-A.	Sistema de primer orden con retardo . . . . .	16
III-B.	Sistema basado en una planta real . . . . .	21
III-C.	Resultados . . . . .	22
III-C1.	Controlador para el sistema de primer orden con retardo . . . . .	22
III-C2.	Controlador para el sistema basado en una planta real . . . . .	24
<b>IV.</b>	<b>Conclusiones</b>	27
IV-A.	Líneas futuras de trabajo . . . . .	27
	<b>Referencias</b>	27



## ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Relación fraccional para un PID. . . . .	13
2.	Esquema de control con 2 grados de libertad. . . . .	14
3.	Variación conjunta de $\tau$ y $k$ . . . . .	14
4.	Entorno de diseño del controlador mediante el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	15
5.	Entorno de diseño del prefiltro mediante el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	15
6.	Respuesta a escalón con los 4 vértices del conjunto de incertidumbre. . . . .	16
7.	Diagrama de Bode para la planta nominal $P_{1,0}$ . . . . .	16
8.	Diagrama de Nichols para la planta nominal $P_{1,0}$ en el conjunto de frecuencias $\Omega$ . . . . .	17
9.	Diagrama de Nichols para la planta nominal $P_{1,0}$ en la frecuencia $\omega_4$ con incertidumbre en sus parámetros. . . . .	17
10.	Definición de la especificación de estabilidad en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	17
11.	Definición de la especificación de ruido del sensor en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	18
12.	Definición de la especificación de rechazo de perturbaciones a la salida de la planta en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	18
13.	Definición de las fronteras para la especificación de estabilidad en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	18
14.	Definición de las fronteras para la especificación de rechazo de perturbaciones a la salida de la planta en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	18
15.	Definición de las fronteras para la especificación de ruido del sensor en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	18
16.	Definición de la intersección del conjunto de fronteras en el <i>toolbox</i> QFTCT. . . . .	19
17.	Entorno de diseño de controladores de orden entero a través del <i>toolbox</i> FOMCON. . . . .	20
18.	Plantillas de incertidumbre sobre el diagrama de Nichols para la planta $P_2$ . . . . .	21
19.	Fronteras para las especificaciones de la planta $P_2$ . . . . .	21
20.	Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en $L_{01}$ . . . . .	22
21.	Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en $L_{01}$ mediante FOMCON para el controlador fraccional. . . . .	23
22.	Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en $L_{01}$ mediante FOMCON para el controlador de órdenes enteros. . . . .	23
23.	Diagrama de Nichols para la comparación en bucle abierto con el controlador fraccional (rojo) y entero restringido a partir del fraccional (negro), para la planta $P_1$ . . . . .	24
24.	Respuesta escalón para el sistema en lazo abierto sin controlador, en lazo cerrado con controlador fraccional y controlador fraccional restringido a órdenes enteros. . . . .	24
25.	Diagrama de Bode para el bucle abierto con ambos controladores; fraccional y fraccional restringido a potencias enteras en sus operadores. . . . .	25
26.	Diagrama de Nichols para la comparación en bucle abierto con el controlador fraccional (rojo) y entero restringido a partir del fraccional (negro) para la planta $P_2$ . . . . .	26
27.	Respuesta a escalón del sistema con el controlador de partida, el fraccional y su versión restringida a órdenes enteros para la planta $P_2$ . . . . .	26

28.	Control del pH en un valor de 8 con perturbaciones de radiación (controlador fraccional restringido a órdenes enteros). . . . .	26
29.	Control del pH en un valor de 8 con perturbaciones de radiación (controlador fraccional). . . . .	27

ÍNDICE DE TABLAS

I.	Inecuaciones cuadráticas para cada especificación [1]. . . . .	16
II.	Incertidumbre de parámetros para $P_1$ . . . . .	16
III.	Valores de especificaciones para $P_1$ . . . . .	20
IV.	Puntos de operación para la planta $P_2$ . . . . .	21
V.	Valores de incertidumbre para $P_2$ . . . . .	21
VI.	Resultados en simulación para $P_1$ . . . . .	24
VII.	Resultados de simulación para la planta $P_2$ con los distintos controladores. . . . .	25

## NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidades
$S$	Función de transferencia de la sensibilidad	—
$L$	Función de de transferencia del lazo abierto	—
$P$	Función de transferencia de la planta	—
$G$	Función de transferencia del controlador	—
$K_p$	Valor de la etapa proporcional de un PID en forma paralela	—
$K_i$	Valor de la etapa integral de un PID en forma paralela	—
$K_d$	Valor de la etapa derivativa de un PID en forma paralela	—
$T$	Función referente al rechazo del ruido del sensor	—
$C$	Elemento desigualdad de restricción no lineal	—
$C_{eq}$	Elemento igualdad de restricción no lineal	—
$LB$	Límites inferiores para el conjunto solución de $f_{mincon}$	—
$UB$	Límites superiores para el conjunto solución de $f_{mincon}$	—
<i>Letras griegas</i>		
$\omega$	Frecuencia	$rad/s$
$\Gamma$	Función Gamma de Euler	—
$\lambda$	Valor fraccional de la potencia del operador integral en un PID	—
$\mu$	Valor fraccional de la potencia del operador derivativo en un PID	—
$\omega_{cg}$	Frecuencia de corte de ganancia	$rad/s$
$\Omega$	Conjunto de frecuencias de interés	$rad/s$
$\omega_s$	Frecuencia para la especificación de ruido del sensor	$rad/s$
$\omega_t$	Frecuencia para la especificación de perturbaciones a la salida de la planta	$rad/s$

## SIGLAS Y ACRÓNIMOS

**CFE:** Del inglés *Continued Fraction Expansion*, en referencia a un método de aproximación de elementos fraccionales.

**CRONE:** Del francés *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, en referencia a un sistema de control fraccional.

**FOMCON:** Del inglés *Fractional-Order Modeling and Control*, un *toolbox* utilizado durante el trabajo para el cómputo de sistemas fraccionales.

**MIMO:** Del inglés *Multiple Inputs - Multiple Outputs*, en referencia a un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas.

**PID:** Controlador de tres etapas; proporcional, integral y derivativa.

**QFT:** Del inglés *Quantitative Feedback Theory*, que se traduce como teoría robusta de realimentación cuantitativa.

**SISO:** Del inglés *Single Input Single Output*. Un sistema de una entrada y una salida.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el siguiente proyecto: DPI2014-55932-C2-1-R del Ministerio de Ciencia e Innovación y fondos FEDER.





# Diseño de controladores fraccionales basados en la teoría robusta de realimentación cuantitativa

Justo Hernández Romera

**Resumen**—Este trabajo fin de máster consiste en el diseño de controladores fraccionales basados en la teoría robusta de realimentación cuantitativa, más comúnmente nombrado en la bibliografía como QFT (*Quantitative Feedback Theory*). Este tipo de controladores tienen un comportamiento distinto a los controladores convencionales debido a su contexto matemático, por lo que pueden presentar ciertas ventajas tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo a la hora de cumplir con una serie de especificaciones.

**Palabras clave**—Controladores Fraccionales, *Quantitative Feedback Theory*.

**Abstract**—This final project consists in the design of fractional controllers based on the *Quantitative Feedback Theory*, also called QFT. This type of controllers has a different behavior than the conventional ones because of their mathematical context. Therefore they can present some advantages either in the frequency domain than in the time domain while in order to satisfy a series of specifications.

**Keywords**—Fractional Controllers, *Quantitative Feedback Theory*.

## I. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccional ha sido objeto de estudio y discusión durante siglos [2]. Presenta ventajas y herramientas para la identificación y modelado de sistemas, así como para el diseño y cálculo de controladores. La complejidad de los sistemas fraccionales hacen que el uso de herramientas *software* sea prácticamente necesario. Debido a su contexto matemático (que se explicará consecuentemente en el capítulo referido a la revisión bibliográfica) será una de las aplicaciones que puedan utilizarse en conjunto con QFT, ofreciendo un mayor rango de diseño y por tanto de optimización de todo el conjunto del sistema.

El diseño de controladores es de igual forma objeto de estudio permanente dentro del campo de la ingeniería de control y la automatización. La mayoría de los algoritmos de diseño de controladores hacen uso de un modelo de planta que define el comportamiento del

sistema a controlar, y de una serie de especificaciones de necesario cumplimiento una vez el sistema se encuentra en bucle cerrado. Dicha planta, que pretende modelar el comportamiento de un sistema real, normalmente no se ajusta de forma exacta y precisa, es decir, tiene errores de modelado. Los algoritmos de diseño de controladores que usan una planta, por tanto, suponen que dicha planta corresponde al comportamiento real y total del sistema. Ésto conduce a que el controlador que ha sido diseñado en base al modelo imperfecto de la planta tenga que enfrentarse a un sistema diferente para el que había sido diseñado debido a las fluctuaciones que pueden aparecer en la dinámica del sistema real. A la diferencia de comportamiento entre la planta, en cualquiera de sus posibles situaciones, y el modelo se puede referir como el error de modelado, y el margen que incluye todas estas variaciones como la incertidumbre.

Las incertidumbres del modelo respecto a la planta real pueden clasificarse en dos conjuntos; el primero incluiría la posible variación en los parámetros del modelo actual que define la planta (por ejemplo la ganancia y la constante de tiempo en un sistema de primer orden), y un segundo conjunto que incluye las dinámicas no modeladas (por ejemplo, diferencias en el orden de coeficientes entre el modelo y el sistema real). Para anular este tipo de errores surgidos de las incertidumbres a la hora de controlar un sistema se hace uso de la realimentación (*feedback*). Aunque en un sistema clásico de control, donde el actuador es gobernado por unos parámetros calculados en base al modelo de la planta, no es capaz de anular los efectos de la imperfección del modelo sobre el control dinámico cuando ésta es demasiado grande.

Sin embargo, existen otros métodos de diseño de controladores que sí tienen en cuenta la incertidumbre del modelo de la planta dentro del algoritmo de diseño. Esta rama en el diseño de controladores se conoce normalmente en la bibliografía como técnicas de control robustas. Por ejemplo, según unas especificaciones, la modulación de los parámetros de un controlador implementado en un sistema realimentado implica una variación en la ganancia. Un incremento del valor de

la ganancia llevaría a una atenuación en la respuesta a la salida del bloque de la planta. Este mismo incremento tendría efectos sobre la frecuencia de corte y el ancho de banda, aumentándolos. Debido estas posibilidades y sus opuestas matemáticas interesa encontrar un punto adecuado al compromiso que se quiera adoptar frente a cada uno de los efectos. Este compromiso, en la teoría de control robusta, pretende tener en cuenta toda la incertidumbre en el diseño y la síntesis del controlador.

### I-A. Antecedentes y motivación

En 1832 y pese a que Leibniz ya acuñase el concepto de *derivada fraccional* en 1695 [3] [4], Joseph Liouville estableció las bases para el cálculo fraccional [5] que permite su definición mediante transformadas integrales de Fourier y Mellin. Sus ideas serán aplicadas en este trabajo en pos del diseño de un controlador robusto. Respecto a los controladores, uno de los desarrollos más importantes en lo que a la teoría del control respecta, es la idea del controlador proporcional, integral y derivativo. Basado en un bucle realimentado [6] a partir del cual con el error entre la referencia del sistema y su salida actual, es capaz de calcular cierta señal de control que lleve, si el controlador está propiamente diseñado, al sistema a un valor dentro del margen que otorgan las especificaciones. Esta idea, que a la hora de implementar resulta de relativa simplicidad estructural, ha sido y sigue siendo objeto de trabajos e investigaciones. Dando como fruto una cantidad inmensa de algoritmos y métodos de diseño de controladores [7]. Tal y como se ha tratado en el inicio del texto, los algoritmos convencionales de diseño de controladores hacen uso únicamente de un modelo que viene a representar el comportamiento real de la planta. Teniendo el consecuente error de modelado implícito en su esperada respuesta teórica tras una implementación debido a la inexactitud del modelo. Esta forma de diseño fue tratada por Isaac M. Horowitz [8] (pocos años después de que Bode publicase su libro acerca de los fundamentos de la realimentación [6] y el diseño en el dominio frecuencial), que obtuvo la comprobación de que la función de sensibilidad (1), donde  $L$  representa la función de transferencia en lazo abierto y  $S$  la sensibilidad, es insensible, valga la paradoja gramática, al ruido y el ancho de banda.

$$S = (1 + L)^{-1} \quad (1)$$

A partir de entonces será la función de bucle cerrado (2), donde  $P$  representa la planta y  $G$  el controlador, la que sea utilizada en el diseño de controladores.

$$L = PG \quad (2)$$

Posteriormente, en el año 1972, se desarrollan las ideas propias de la teoría robusta de realimentación cuantitativa [9]. Esta teoría permite la inclusión de toda la incertidumbre conocida de la planta en el algoritmo de diseño del controlador. De forma que pasa de ser un diseño cualitativo a uno cuantitativo.

### I-B. Objetivos

El objetivo esencial de este trabajo será elaborar un algoritmo de diseño de controladores fraccionales basados en la teoría robusta de realimentación cuantitativa. De forma que pueda tenerse en cuenta en la etapa de diseño toda la incertidumbre que puede llegar a abarcar el modelo de una planta real. Ésto permitirá prever el comportamiento del sistema en cierto modo y poder alcanzar una solución de compromiso entre la respuesta del sistema y sus especificaciones, y en última instancia perpetuar el control del sistema independientemente del comportamiento del mismo.

Se elabora el siguiente listado de apartados de desarrollo para este trabajo:

- Designación de la incertidumbre de una planta simple y elaboración de un algoritmo que permita el diseño de un controlador fraccional para la planta implementada en el *software* de *MATLAB*<sup>1</sup>.
- Aplicar lo elaborado sobre el modelo diferencial de un sistema real. Concretamente un fotobiorreactor industrial (Estación Experimental de Cajamar: Las Palmerillas).

El cumplimiento de estos objetivos permitirá por tanto, a partir la identificación de la incertidumbre de una planta de cualquier tipo, cuantificar dicha incertidumbre sobre una serie de especificaciones, analizar sobre su posible cumplimiento y finalmente diseñar su correspondiente controlador calculado en base a las mismas.

### I-C. Estructura del documento

Este trabajo está dividido en 4 apartados. El primero abarca la introducción junto con los antecedentes referidos a la temática del trabajo. En el mismo apartado

<sup>1</sup>*Software* utilizado para la simulación y cómputo durante la elaboración de este texto, se especificará más sobre las necesidades de material en su correspondiente apartado. Más información en la dirección web de la compañía desarrolladora *MathWorks*; [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).

se especificará también la estructura del documento así como la planificación temporal llevada a cabo para su conclusión. El segundo capítulo incluirá los materiales utilizados y los métodos de los que se ha hecho uso durante la elaboración del mismo. A continuación, en el tercer apartado se expondrá todo lo realizado en base al apartado anterior en forma de diseño e implementación del propio sistema. El último apartado explicará las conclusiones obtenidas a partir de los resultados del apartado anterior y de las líneas de trabajo futuras que se abren a la finalización de este mismo trabajo.

#### I-D. Planificación temporal

La planificación de este trabajo fin de máster ha sido realizada de forma uniforme ya que las necesidades de material físico han sido reducidas. La mayor parte del trabajo ha consistido en tareas de simulación por computador y optimización. Se inicio la recopilación de material bibliográfico el día 26 de Enero de 2016, prosiguiendo con un estudio y análisis de los métodos utilizados para el desarrollo del trabajo, ocupando este proceso alrededor de las 100 horas. Esta última etapa ocuparía la mayor parte del tiempo, siendo finalizada en el mes de Junio de 2016. A partir de entonces se empezó el diseño y la implementación del sistema hasta la obtención final de resultados, que ocurriría en el mes de Agosto del mismo año ocupando entorno a las 70 horas. La redacción del texto llevaría desde la última semana de Agosto hasta la segunda de Septiembre tomando unas 16 horas. Sumando un total de 186 horas.

## II. MATERIALES Y MÉTODOS

El desarrollo de este trabajo ha sido realizado íntegramente con la herramienta de cómputo *MATLAB*. El programa ha sido complementado con el siguiente listado de *software* relacionados con *MATLAB* a excepción de la herramienta SISO-QFTIT [10]:

- Simulink, un entorno gráfico de diseño, modelado y análisis de sistemas dinámicos.
- FOMCON [11] (“Fractional-order Modeling and Control”), *toolbox* desarrollado por la *Tallinn University of Technology* de Estonia, que permite el cómputo de ordenes no enteros en el dominio de Laplace.
- The QFT Control Toolbox (QFTCT) [12], *toolbox* desarrollado por la *Case Western Reserve University* de E.E.U.U., que permite mediante un entorno gráfico el desarrollo de un compensador según los principios del QFT.

- SISO-QFTIT, *Una herramienta software interactiva para el diseño de controladores robustos usando la metodología QFT*, desarrollado por el departamento de Informática y Automática de la UNED. Una aplicación que permite aplicar los fundamentos del QFT de forma que facilite su comprensión.

Tras la disposición del *software* utilizados conviene realizar una revisión bibliográfica de la teoría referente a este trabajo.

#### II-A. Cálculo fraccional

El contexto matemático del cálculo fraccional es una generalización de las operaciones derivativas e integradoras al operador  ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$  de orden no entero. Donde se toma la posibilidad de utilizar exponentes reales o complejos en lugar de los comúnmente utilizados para la variable compleja  $s$ . La derivada fraccional, identificada por la ecuación (3), en un punto es una propiedad local sólo cuando  $a$  es un valor entero.

$$D^a \quad (3)$$

En el caso de un valor real o complejo no se puede determinar con exactitud que el valor de la derivada en un punto dependa únicamente de valores cercanos de la función alrededor del mismo punto [13]. Por lo que es necesaria una definición. Como ejemplo, una definición de la diferintegral (el orden puede tomar cualquier valor real) es la de Riemann-Liouville de la ecuación (4) [14].

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (4)$$

Desde  $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ , donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma de Euler [15]. También se puede contar con la definición de Grünwald-Letnikov según la ecuación (5), que resulta de utilidad en la evaluación numérica de derivadas fraccionales.

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (5)$$

Y para integrar este contexto en el cálculo y diseño de controladores es necesaria la transformación de Laplace, ecuación (6), para una derivada de orden  $\alpha$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  de una señal  $f(t)$ , y asumiendo una condición inicial nula.

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (6)$$

De esta forma, una ecuación diferencial de orden integral como la ecuación (7), donde  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , se puede expresar como una función de transferencia de orden fraccional según la forma de la ecuación (8).

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) \quad (7)$$

$$H(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (8)$$

A partir de aquí, para poder realizar la computación adecuada con el material disponible, es necesario obtener aproximaciones de órdenes enteros [16], ya que con órdenes fraccionales en el dominio de Laplace resulta tortuoso cuando no imposible sin las herramientas adecuadas. El cálculo real de sistemas fraccionales se realiza con aproximaciones que, en función de la herramienta, pueden resultar en aproximaciones útiles en un caso particular o no debido al error significativo que presentan sobre el elemento inicial y exacto. Estas operaciones están en continua dependencia del poder de computación y los órdenes de aproximación.

## II-B. Métodos de aproximación

Existen varios métodos de aproximación de modelos continuos [16]:

*II-B1. Método general CFE:* Para aproximar operadores integro-diferenciales fraccionales se puede hacer uso de técnicas de interpolación y expansión continua de fracciones. Una aproximación racional de la función  $G(s) = s^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  en el dominio de Laplace se puede obtener como la ecuación (9) para aproximaciones en altas frecuencias ( $\omega T \gg 1$ ), y la ecuación (10) para aproximaciones en baja frecuencia ( $\omega \ll 1$ ).

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + sT)^\alpha} \quad (9)$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \quad (10)$$

*II-B2. Método de Oustaloup:* Corresponde al grupo de aproximaciones por identificación y ajuste de curvas. Se basa en la aproximación de una función de la forma de la ecuación (11) por una función racional (12) utilizando un conjunto de fórmulas [16].

$$H(s) = s^\mu, \mu \in \mathbb{R}^+ \quad (11)$$

$$\hat{H}(s) = C_o \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k^i}} \quad (12)$$

Para la realización de los objetivos de este trabajo se hará uso de forma interna en *MATLAB* de la aproximación por el método de Oustaloup, ya que la forma del controlador diseñado con QFT hará uso de coeficientes fraccionales tanto positivos como negativos para el elemento  $s$ .

Sin embargo, la aproximación de sistemas de orden fraccional no puede realizarse en todas las situaciones con total garantía. Un sistema no lineal de orden fraccional puede llegar a ser modelado de forma que el propio modelo presente comportamientos caóticos. Es decir, un mismo modelo que se prueba con condiciones iniciales cercanas en cada repetición puede llegar a tener salidas completamente distintas y sin relación alguna. Esto se debe a la extrema sensibilidad de ciertos sistemas a las condiciones iniciales [17] [18]. En este texto se trabajará con modelos lo más simplificados posibles, para evitar cualquier tipo de comportamiento inesperado o dependiente de las condiciones iniciales.

## II-C. Controladores fraccionales

Una vez se conoce el comportamiento de los coeficientes fraccionales, es posible aplicar esta característica matemática a las diferentes estructuras de controladores que existen. A continuación se mencionarán las estructuras de controladores fraccionales más conocidas para la posterior elección de aquellas que se vayan a implementar en este trabajo.

*II-C1. Controlador  $PI^\lambda D^\mu$ :* Es la estructura de controlador fraccional más extendida. Este hecho es una justificación adicional para la elección de este tipo de estructuras. El controlador PID puede encontrarse en la bibliografía [19] con la expresión de la ecuación (13).

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (13)$$

Cuya estructura de controlador fraccional [20] pasa a tener la forma de la ecuación (14).

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (14)$$

El orden de los elementos integrador y derivador pasa a tener valores fraccionales, no necesariamente enteros como ocurre en la ecuación (13). De esta forma se deduce la necesidad de aplicar el método de Oustaloup para realizar la aproximación. Los coeficientes fraccionales que aparecen están ligados únicamente al elemento  $s$  de la ecuación. El controlador convencional PID, es de hecho, un caso particular de controlador fraccional. Dándose cuando tanto  $\mu$  como  $\lambda$  tengan valores de unidad.

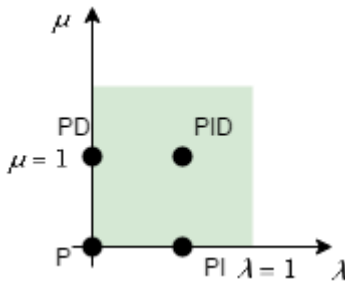


Figura 1. Relación fraccional para un PID.

Esta misma estructura de controlador PID también puede delimitarse por bandas de frecuencia, teniendo su diseño en este propio dominio. Puede encontrarse con la forma de la ecuación (15) [21].

$$G(S) = C_0 \left(1 + \frac{\omega_I}{s}\right) \left(\frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2}\right)^{N_D} \frac{1}{1 + s/\omega_F} \quad (15)$$

Donde el último elemento corresponde a la etapa de filtrado (necesario para un sistema propio de estas características) y  $N_D$  permite la reducción de ganancia a altas frecuencias.

**II-C2. Controlador de estructura CRONE:** Otro tipo de estructuras de control fraccional son las llamadas *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, más conocidas como CRONE [22]. Esta idea se ha venido desarrollando desde la década de los 80 por el grupo de investigación de CRONE, en la Universidad de Burdeos. A diferencia de las estructuras antes mencionadas, una estructura CRONE (generación 2a y 3a) corresponde al conjunto de operadores que identifican tanto a la planta como al controlador en sí, de forma que en la etapa de

diseño se esté pretendiendo el comportamiento del lazo abierto, es decir, configurar su comportamiento según las necesidades en lugar de diseñar el controlador de forma directa. Es una metodología de diseño en el dominio de la frecuencia de la que han surgido tres generaciones conforme a los procesos de investigación llevados a cabo.

- La primera generación de estructura CRONE se basa en un controlador de fase constante alrededor de la frecuencia de corte de ganancia propia de las especificaciones del problema. Tiene la forma de la ecuación (16), con  $n_I, n_F \in \mathbb{N}$ , y  $\omega_I, \omega_F \in \mathbb{R}$ .

$$G_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_I}{s} + 1\right)^{n_I} \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h}\right)^n \frac{1}{(1 + s/\omega_F)^{n_F}} \quad (16)$$

- Posteriormente, una segunda generación surge a partir de los problemas de esfuerzo de control, dándose la imposibilidad en ciertas situaciones de que la especificación sitúe la frecuencia de corte de ganancia en un rango de frecuencia donde la fase de la planta sea constante. A partir de esta generación el diseño se lleva a cabo en el conjunto del bucle abierto, teniendo la forma de la ecuación (17). Para el cálculo del controlador habrá que dividir dicho bucle entre la planta nominal, tal y como se indica en la ecuación (18). Donde el elemento  $K$  se introduce a partir de una naturaleza distinta al original  $C_0$ .

$$\beta_0(s) = K \left(\frac{\omega_I}{s} + 1\right)^{n_I} \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h}\right)^n \left(1 + \frac{s}{\omega_h}\right)^{-n_h} \quad (17)$$

$$G_F(s) = \frac{\beta_0(s)}{P_0(s)} \quad (18)$$

- La tercera generación de estructura CRONE se constituye con la posibilidad de usar no sólo órdenes fraccionales sino también complejos. Teniendo la forma simplificada de la ecuación (19), con  $n = a + jb \in C_j$  y  $s = \gamma + j\omega \in C_j$ . Que posteriormente se deriva en el controlador realizando la misma operación que para la segunda generación, dividir entre la planta nominal (ecuación (18)).

$$\beta(s) = Re_{/i} \left(\frac{\omega_{cg}}{s}\right)^n \quad (19)$$

Para poder comprender y posteriormente desarrollar un controlador de forma robusta es necesario el estudio

y análisis tanto de las bases de QFT, como de los diferentes métodos, algoritmos y estructuras existentes para su diseño. Las bases mencionadas en el capítulo anterior [8] tendrán su posterior desarrollo [9] [23] [24]. Es de relevancia la mención de la aportación de Horowitz al esquema de control clásico, quedando un sistema de dos grados de libertad [25].

Todos los controladores listados en este apartado se tendrán en cuenta a la hora de escoger el más apropiado para un problema determinado. Una vez conocidas las opciones de controladores fraccionales con los que se contará se explica a continuación la metodología QFT.

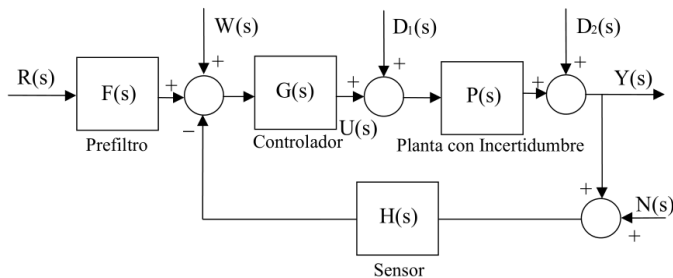


Figura 2. Esquema de control con 2 grados de libertad.

#### II-D. QFT - Quantitative Feedback Theory

La aplicación QFT para el diseño de controladores, también fraccionales [26], puede establecerse mediante 6 etapas [9] que se listan a continuación:

1. Modelado de la planta incluyendo su incertidumbre.
2. Definición de especificaciones.
3. Cálculo de fronteras.
4. Diseño del controlador.
5. Diseño del prefiltro.
6. Validación del diseño.

Para presentar la metodología de QFT se aplicará cada uno de los elementos sobre una planta determinada que servirá a su vez de ejemplo y ensayo frente a la aplicación final sobre una planta real (véase el capítulo *Metodología*). Esta planta será una de primer orden con retardo, con incertidumbre tanto en la ganancia como en la constante de tiempo del sistema.

La primera etapa en el desarrollo del controlador por QFT corresponderá al cálculo de las plantillas de la planta,  $P$ . El modelo que se utilice para representarla, en este caso la ecuación (20), tendrá una serie de parámetros susceptibles de variación dinámica (ecuación (21)) según las condiciones a las que esté siendo sometida la planta.

$$P(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-t_r s} \quad (20)$$

$$k = k_{min} \rightarrow k_{max}, \tau = \tau_{min} \rightarrow \tau_{max}, t_r = t_{r0} \quad (21)$$

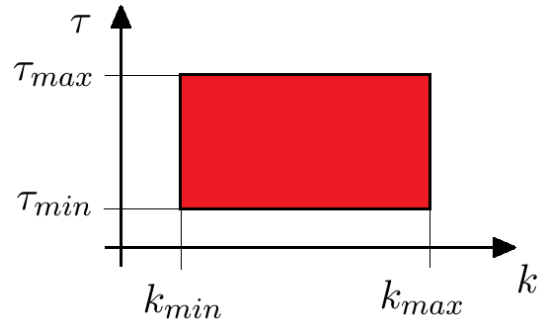


Figura 3. Variación conjunta de  $\tau$  y  $k$ .

El análisis de cada combinación de estas variaciones será el propósito del cálculo de las plantillas. Cada conjunto de variaciones obtiene distinta respuesta según la frecuencia, por lo que cada plantilla será única para cierta frecuencia teniendo luego un conjunto de plantillas para casos particulares de frecuencias de interés. De modo que para el cálculo de plantillas se precise un conjunto de estas frecuencias de interés,  $\Omega$ , y de una ventana de variación en los distintos parámetros. Las plantillas se pueden visualizar de forma gráfica en un diagrama de Nichols que enfrente la fase con la ganancia del sistema. Posteriormente, para un conjunto de parámetros fijo independiente de la frecuencia de interés se obtendrá la planta nominal  $P_0(j\omega)$  para todo el grupo  $\Omega$ .

Los límites superior e inferior de los valores de las frecuencias en el conjunto  $\Omega$  se pueden determinar observando gráficamente si la variación entre una plantilla y la inmediatamente posterior es muy marcada, o por el contrario, tiende a valores de variación pequeños.

Una vez se dispone de las plantillas se procede con el cálculo de las fronteras. Igualmente expresadas sobre un diagrama de Nichols, las fronteras corresponden a los valores mínimos que puede tomar el controlador en magnitud (tomándose la forma polar,  $G = g/\phi$ ) a lo largo de un ciclo completo en la fase para que se cumplan una serie de especificaciones a una determinada frecuencia (dentro de la familia de frecuencias de interés). Las especificaciones con las que se podrá trabajar son las siguientes [1]:

- Especificación de seguimiento, según la forma de la ecuación (22). Siendo  $L(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega)$  la función del lazo abierto y  $F(j\omega)$  la del prefiltro.

$$\alpha(\omega) \leq \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} F(j\omega) \right|_{dB} \leq \beta(\omega) \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (22)$$

- Especificación de estabilidad, según la ecuación (23).

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq \lambda \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (23)$$

- Rechazo al ruido del sensor, según la ecuación (24).

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq \delta_n(\omega) \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (24)$$

- Rechazo a perturbaciones a la salida de la planta, según la ecuación (25).

$$\left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq \delta_{po}(\omega) \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (25)$$

- Rechazo a perturbaciones a la entrada de la planta, según la ecuación (43).

$$\left| \frac{P(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq \delta_{pi}(\omega) \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (26)$$

- Esfuerzo de control, según la ecuación (27).

$$\left| \frac{G(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq \delta_{ce}(\omega) \rightarrow \forall \omega > 0 \quad (27)$$

Donde  $L_0(j\omega)$  será la función del lazo abierto que use la planta nominal perteneciente a la familia de la incertidumbre. A partir de estas especificaciones se pueden elaborar una serie de inecuaciones cuadráticas donde se podrá calcular el valor del controlador de acuerdo con la especificaciones para cada valor de la fase [27] [1]. La forma genérica que tomarán las inecuaciones será la de la ecuación (28). Para cada caso particular se puede consultar la tabla I.

$$A(P_i, P_k, \delta)g^2 + B(P_i, P_k, G, \delta)g + C(P_i, P_k, \delta) \geq 0 \quad (28)$$

Sobre el diagrama de Nichols representativo de las fronteras se procede a continuación con el *loopshaping*. Que consiste en la añadidura de polos y ceros a un controlador, de valor inicial 1 [9], de tal forma que la función nominal de lazo abierto ( $L_0 = P_0G$ ) quede lo más ajustada posible a las fronteras garantizando así el cumplimiento de las especificaciones en lazo cerrado. Esta etapa suele realizarse de forma gráfica y manual,

por lo que la intuición del ingeniero tiene un gran peso en el diseño.

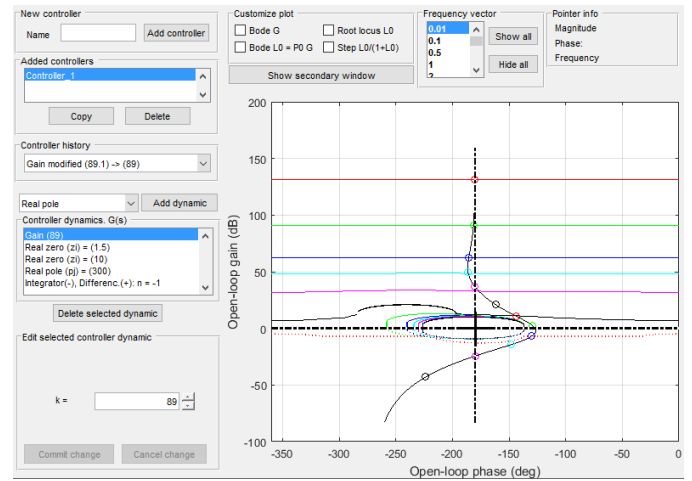


Figura 4. Entorno de diseño del controlador mediante el *toolbox* QFTCT.

El siguiente paso en el diseño del esquema de control por QFT es la síntesis del pre-filtro. Este elemento es necesario en aquellos problemas donde existe una especificación de seguimiento, es decir, la referencia del sistema varía con el paso del tiempo. En esta etapa, dándose una especificación como en la ecuación (22), el controlador,  $G(j\omega)$ , hará posible la reducción en términos de incertidumbre del área comprendida entre su límite superior y el límite inferior de un diagrama de Bode.

De forma que el pre-filtro tendrá posteriormente la función de llevar esta franja dentro de los límites impuestos por el conjunto de ecuaciones de la especificación de seguimiento (ecuación (22)).

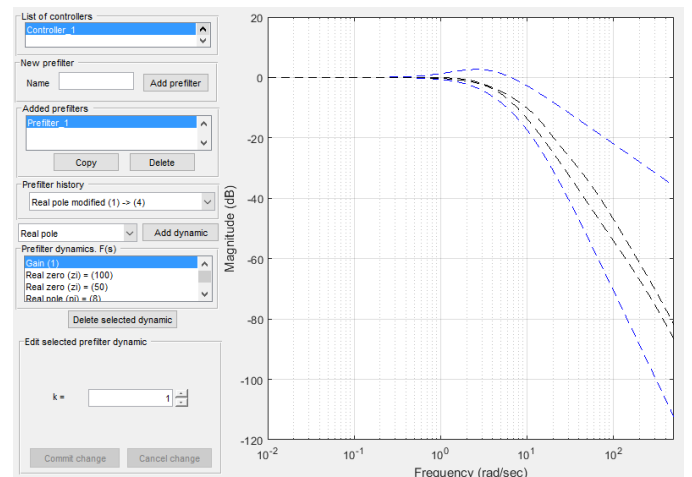


Figura 5. Entorno de diseño del prefiltro mediante el *toolbox* QFTCT.

Finalmente, en la etapa de validación de diseño se



Especificación	$A(P, \delta)$	$B(P, G)$	$C(P, \delta)$
Seguimiento	$p_i^2 p_k^2 (1 - 1/\delta_i^2(\omega))$	$2p_i p_k (p_k \cos(\theta_i + \phi) - (p_i/\delta_i^2(\omega)) \cos(\phi + \theta_k))$	$p_k^2 - p_i^2/\delta_i^2(\omega)$
Estabilidad	$p_i^2 (1 - 1/\lambda^2)$	$2p_i \cos(\theta_i + \phi)$	1
Ruido del sensor	$p_i^2 (1 - 1/\delta_n^2(\omega))$	$2p_i \cos(\theta_i + \phi)$	1
Perturbaciones en la salida	$p_i^2$	$2p_i \cos(\theta_i + \phi)$	$1 - 1/\delta_{p_o}^2(\omega)$
Perturbaciones en la entrada	$p_i^2$	$2p_i \cos(\theta_i + \phi)$	$1 - 1/\delta_{p_i}^2(\omega)$
Esfuerzo de control	$p_i^2 - 1/\delta_{ce}^2(\omega)$	$2p_i \cos(\theta_i + \phi)$	1

Tabla I

INECUACIONES CUADRÁTICAS PARA CADA ESPECIFICACIÓN [1].

realizan las comparativas apropiadas entre el conjunto de especificaciones y la respuesta (usualmente simulada) del sistema. En el caso de que se cumplan todas ellas dentro de los márgenes especificados se podrá decir que el diseño del sistema de control está validado.

### III. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

En este apartado se llevará a cabo el diseño y la implementación de un sistema de control fraccional basado en QFT a partir de las metodologías y teorías analizadas previamente. Inicialmente se aplicará sobre un sistema de primer orden con retardo y posteriormente con un modelo basado en un sistema real.

#### III-A. Sistema de primer orden con retardo

El sistema de primer orden con retardo utilizado en primer lugar para comprobar la metodología será el que representa la ecuación (29).

$$P_1(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-t_r s} \quad (29)$$

Se asumen un tiempo de retardo con un valor de 1 segundo y una ganancia con incertidumbre, al igual que la constante de tiempo, definida por la tabla II.

Parámetro	Mínimo	Máximo
$k$	0.55	0.75
$\tau$	62	82

Tabla II

INCERTIDUMBRE DE PARÁMETROS PARA  $P_1$ .

Gráficamente, en la figura 6 se representa este margen para la ganancia y para la constante de tiempo.

A partir de este margen de incertidumbre, el primer paso para el cálculo del controlador fraccional por QFT es el cómputo de las plantillas para la planta  $P_1$ . Para ello es necesaria la determinación del conjunto de frecuencias de interés. Esto puede hacerse mediante ingenio humano a través de la observación de un diagrama de Bode

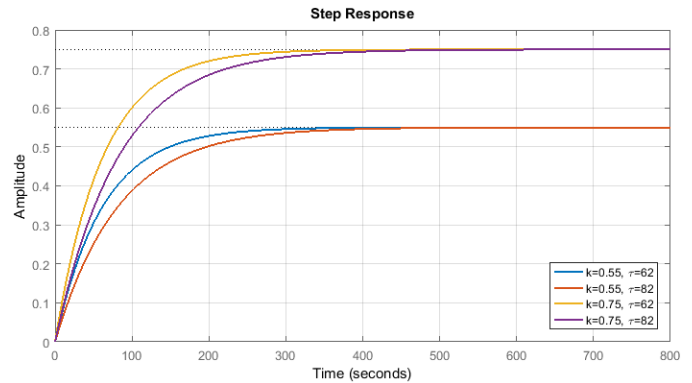
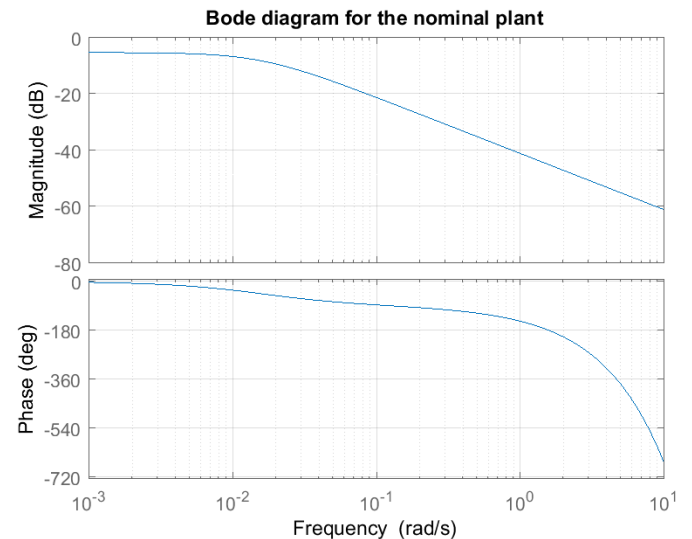


Figura 6. Respuesta a escalón con los 4 vértices del conjunto de incertidumbre.

del sistema o bien mediante la compresión y análisis de las especificaciones. En este caso se realizará la determinación del conjunto de frecuencias de interés en base al diagrama de Bode representado en la figura (7).

Figura 7. Diagrama de Bode para la planta nominal  $P_{1,0}$ .

A partir del diagrama de Bode se puede decidir el conjunto de frecuencias de interés, que en este caso se establece como el vector  $\Omega = [0,01 \ 0,05 \ 0,1 \ 0,5 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10] \text{rad/s}$ . Utilizando este

conjunto de frecuencias de interés se ha elaborado el algoritmo 1 para el cómputo en *MATLAB* de las plantillas o *templates*.

---

**Algorithm 1** Archivo A\_templates.m
 

---

- 1:  $k, \tau$  y  $\Omega \leftarrow$  definición del sist. y frec. de interés
  - 2:  $H_0 \leftarrow$  definición de planta nominal
  - 3: **for**  $\omega_i \rightarrow \Omega$  **do**
  - 4:     **for**  $k_i \rightarrow [k_{min}, k_{max}]$  **do**
  - 5:         **for**  $\tau_i \rightarrow [\tau_{min}, \tau_{max}]$  **do**
  - 6:             magnitud y fase  $\leftarrow$  Bode
  - 7: **for**  $\omega_i \rightarrow \Omega$  **do**
  - 8:     representación de contornos para  $k_i$  y  $\tau_i$
- 

El algoritmo ejecutado da una salida para este caso particular como la de la figura 8.

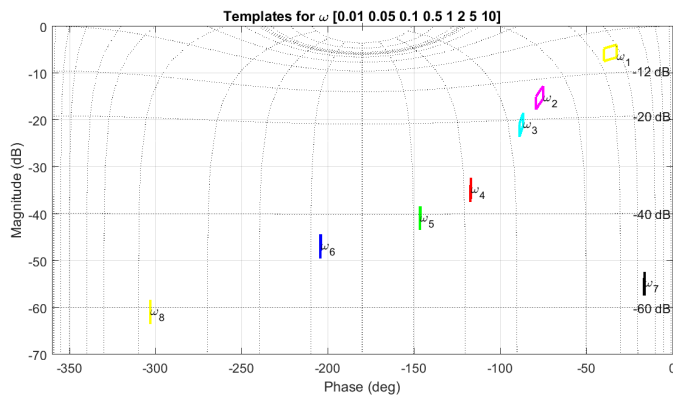


Figura 8. Diagrama de Nichols para la planta nominal  $P_{1,0}$  en el conjunto de frecuencias  $\Omega$ .

Cada una de las gráficas de la figura 8 representa los valores en magnitud y fase de los contornos de la plantilla a una frecuencia  $\omega_i$  para todo el rango de incertidumbre. Así mismo, en la figura 8 se observa que a partir de la tercera frecuencia ya es poco visible. Esto podría hacer que el conjunto de frecuencias de interés se limitase hasta esta misma frecuencia. Una captura aumentada se expone en la figura 9 para comprobación de que todas las gráficas se comportan del mismo modo, es decir, representan únicamente el contorno de la plantilla.

Posteriormente, se definen las especificaciones para este sistema,  $79,2^\circ$  de margen de fase, una frecuencia de corte de ganancia de  $0,1 \text{ rad/s}$  y especificaciones de rechazo a perturbaciones a la salida y ruido del sensor dadas por las ecuaciones (30) y (31) [28].

$$|T(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \forall \omega \geq \omega_t = 10\text{rad/s} \quad (30)$$

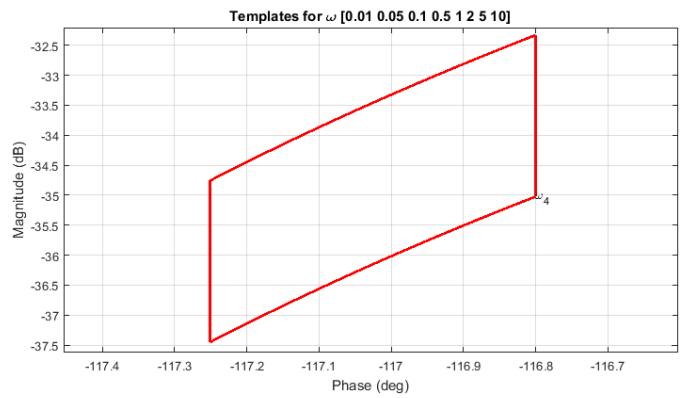


Figura 9. Diagrama de Nichols para la planta nominal  $P_{1,0}$  en la frecuencia  $\omega_4$  con incertidumbre en sus parámetros.

$$|S(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \forall \omega \leq \omega_s = 0,01\text{rad/s} \quad (31)$$

Para el cálculo de las fronteras se hará uso del *toolbox* de QFT de la *Case Western Reserve University*. De forma que las especificaciones queden introducidas en su apartado correspondiente según la figura 10 para la especificación de estabilidad, la figura 11 para la especificación de ruido del sensor y la figura 12 para la especificación de rechazo a perturbaciones a la salida de la planta.

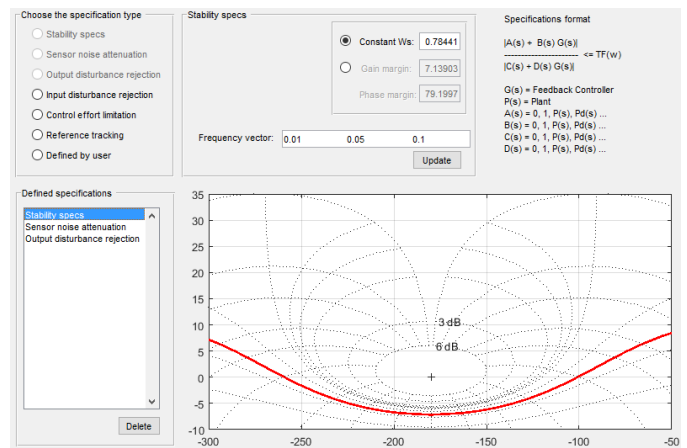


Figura 10. Definición de la especificación de estabilidad en el *toolbox* QFTCT.

Una vez introducidas las especificaciones, en el siguiente apartado de la herramienta se muestran las fronteras o contornos para cada una de las especificaciones. En la figura 13 se muestran las fronteras para la especificación de estabilidad, las de rechazo a perturbaciones en la salida de la planta en la figura 14 y las fronteras de la especificación de rechazo a perturbaciones del ruido del sensor en la figura 15.

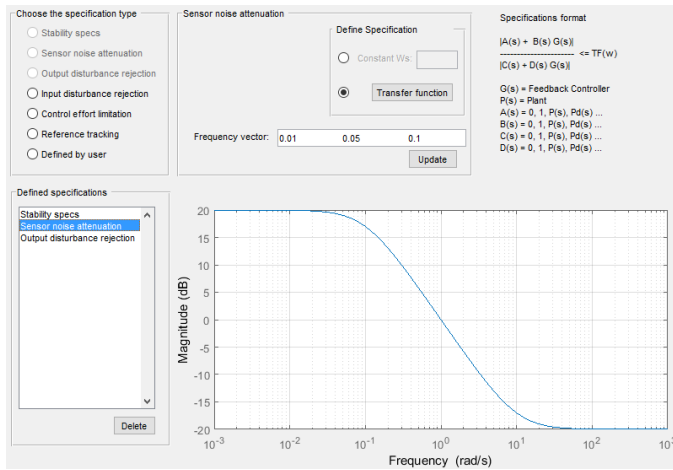


Figura 11. Definición de la especificación de ruido del sensor en el *toolbox* QFTCT.

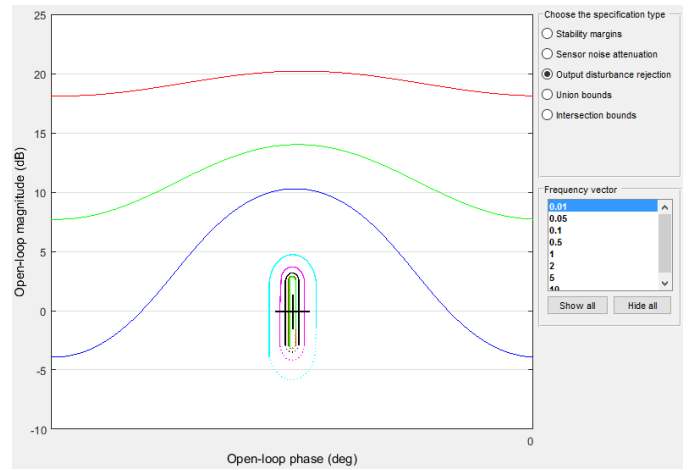


Figura 14. Definición de las fronteras para la especificación de rechazo de perturbaciones a la salida de la planta en el *toolbox* QFTCT.

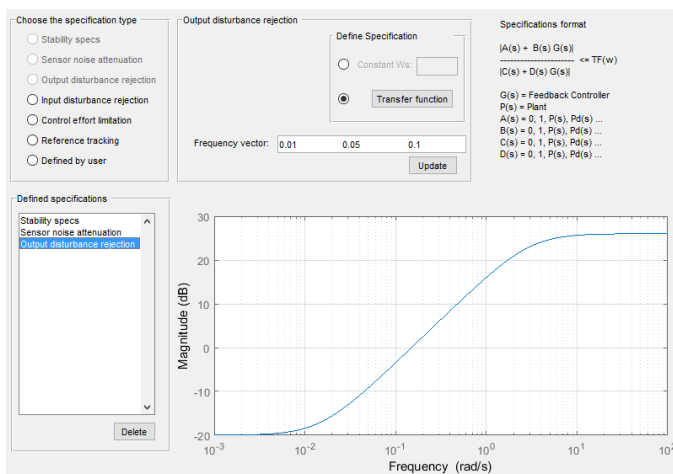


Figura 12. Definición de la especificación de rechazo de perturbaciones a la salida de la planta en el *toolbox* QFTCT.

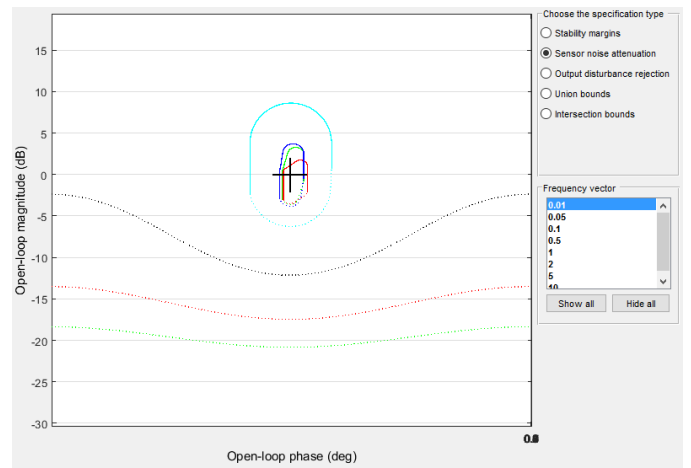


Figura 15. Definición de las fronteras para la especificación de ruido del sensor en el *toolbox* QFTCT.

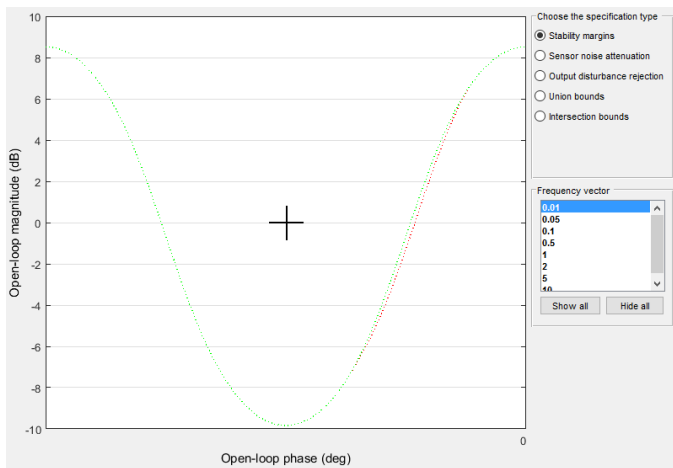


Figura 13. Definición de las fronteras para la especificación de estabilidad en el *toolbox* QFTCT.

Las líneas continuas representan los límites inferiores

a esas frecuencias para la respuesta en lazo abierto del sistema junto con el controlador. Mientras que las líneas discontinuas representan los límites superiores en ganancia a cada una de las frecuencias que el lazo abierto no debe superar.

Como puede darse el caso de que unas especificaciones se solapen entre ellas, el conjunto de fronteras será aquel resultado de la intersección de las fronteras obtenidas para las distintas especificaciones. En este caso se muestra dicho conjunto intersección en la figura 16.

El siguiente paso es el cálculo del controlador. En la metodología QFT original, este cálculo se hace de forma intuitiva y gráfica sobre el diagrama de Nichols, añadiendo polos, ceros y otros elementos al controlador (de valor inicial unitario) hasta que se acopla adecuadamente a las especificaciones. Como se puede deducir,

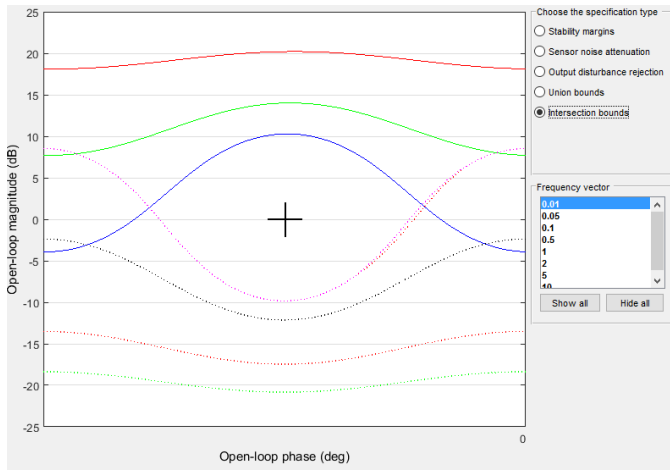


Figura 16. Definición de la intersección del conjunto de fronteras en el *toolbox* QFTCT.

este método dependía en gran parte de la genialidad del ingeniero, por lo que se propone ahora un método de diseño y optimización ajeno a las ideas creativas de un humano. Este método tendrá inclusiones matemáticas en forma de cálculo fraccional, como se ha explicado en apartados anteriores, para poder añadir grados de libertad en la optimización y diseño del controlador.

La estructura escogida es la de un controlador PID en forma paralela con operadores  $s$  fraccionales, (ecuación (14)). En esta estructura se tendrán 5 grados de libertad; las tres ganancias de cada una de las etapas del controlador y las dos potencias fraccionales de los operadores integrador y derivativo. El método antes mencionado para evitar la dependencia intelectual del diseño del controlador por parte de un ente vivo constará de un *script* que permita la introducción de las especificaciones, del tipo de controlador PID fraccional deseado y del diseño y método de optimización automático del mismo.

Dentro del propio *software* de *MATLAB* se cuenta con herramientas de optimización que permiten hacer uso de cierta cantidad de algoritmos de optimización. Dadas las características de las especificaciones es necesario un algoritmo que permita establecer restricciones no lineales y límites en la solución. Por ello, el algoritmo escogido será el *fmincon*. Este algoritmo computa el mínimo restringido de una función,  $F(X)$ , de varias variables. Puede estar sujeto a restricciones como las de la ecuación (32).

$$\begin{cases} AX \leq B, A_{eq}X = B_{eq} & \text{Restr. lineales} \\ C(X) \leq 0, C_{eq}(X) = 0 & \text{Restr. no lineales} \\ LB \leq X \leq UB & \text{Fronteras} \end{cases} \quad (32)$$

Dadas las estructuras con las que el algoritmo puede trabajar es necesario adaptar las especificaciones actuales a las mismas. Contamos con las especificaciones de estabilidad, rechazo al ruido del sensor y rechazo a perturbaciones en la salida del sistema, según las ecuaciones (33), (34) y (35) respectivamente.

$$\begin{cases} |G_c(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})| = 0dB \\ -\pi + \varphi_m = \arg(G_c(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})) \end{cases} \quad (33)$$

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq -20dB \rightarrow \forall \omega \geq 10rad/s \quad (34)$$

$$\left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \leq -20dB \rightarrow \forall \omega \leq 0,01rad/s \quad (35)$$

La especificación de estabilidad se debe expresar como una restricción de igualdad que pasaría a tener la forma de la ecuación (36). Se distingue entre especificaciones igualdad y desigualdad para aquellas referentes a la planta nominal y el resto de la incertidumbre respectivamente.

$$\begin{cases} C_{eq1} = |G_c(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})| \\ C_{eq2} = -\pi + \varphi_m - \arg(G_c(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})) \end{cases} \quad (36)$$

Y las especificaciones de rechazo a perturbaciones la forma de las ecuaciones (37) y (38).

$$C_1 = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} + 20dB \rightarrow \omega = 10rad/s \quad (37)$$

$$C_2 = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} + 20dB \rightarrow \omega = 0,01rad/s \quad (38)$$

Tras las restricciones, se ha escogido que la función de optimización objetivo sea el esfuerzo de control, para obtener así controladores que requieran el mínimo esfuerzo. Esta especificación tendrá la forma de la ecuación (39) para utilizar con el comando *fmincon*.

$$f(x) = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|_{dB} \quad (39)$$

Una vez definida la función a minimizar y sus restricciones, hay que conocer tanto las limitaciones que habrá

que imponerle a la solución como el punto de partida para el algoritmo. Las limitaciones para las ganancias proporcional, integral y derivativa tendrán unos márgenes lo suficientemente amplios como para no interferir en la búsqueda del mínimo de la función. Mientras que los valores fraccionales de las potencias del operador integral y derivativo sí tendrán que tener unos límites definidos por la ecuación (40).

$$0 < \lambda, \mu \leq 1 \quad (40)$$

No se permite que las potencias tengan valores nulos ya que en el caso de que el controlador óptimo necesite de una estructura sin parte integral o derivativa será capaz de obtenerla simplemente mediante la anulación del valor de la ganancia correspondiente.

El punto de partida que utilizará el algoritmo *fmincon* será aquel de un PID de órdenes enteros precalculado gráficamente con una herramienta interactiva en *MATLAB*. Para la planta nominal, en el *toolbox* de *FOMCON* se puede encontrar un apartado para el diseño de PID de órdenes enteros dentro de la ventana abierta mediante el comando *fomcon* en el entorno de *MATLAB*. El entorno para el diseño de controladores de orden entero, figura 17, permite seleccionar entre 5 tipos distintos de métodos de ajuste de controlador; Ziegler-Nichols, AMIGO, Chien-Hrones-Reswick para seguimiento, Chien-Hrones-Reswick para regulación y Cohen-Coon [29]. El método seleccionado para esta implementación ha sido el método AMIGO [30].

El punto de partida sirve únicamente para iniciar el algoritmo arbitrariamente en un punto factible del conjunto de posibles soluciones. Para este caso particular dicho punto de partida será el de la ecuación (41).

$$G_0(s) = 51,0909 + \frac{7,35709}{s} + 25,4224s \quad (41)$$

Donde  $x_0 = [51,0909, 7,35709, 1, 25,4224, 1]$  será un parámetro de entrada a la hora de llamar al algoritmo *fmincon*. Los valores unitarios corresponden al valor entero de la potencia para los operadores integral y derivativo.

El proceso de optimización y obtención final del controlador para las especificaciones dadas se hará respecto al algoritmo 2. Este mismo algoritmo se utilizará, una vez obtenido el controlador fraccional, para optimizar un controlador con una restricción de órdenes enteros en las potencias de los operadores integral y derivativo con fines comparativos para el apartado de resultados.

Figura 17. Entorno de diseño de controladores de orden entero a través del *toolbox* *FOMCON*.

#### Algorithm 2 Archivo *C\_controllers.m*

- 1: PID (AMIGO)  $\leftarrow$  definición del controlador inicial
- 2:  $H_0 \leftarrow$  definición de planta nominal
- 3:  $PM, \omega_{cg}, A, B, \omega_s, \omega_t \leftarrow$  definición de especificaciones
- 4:  $x_0, l_b, u_b \leftarrow$  definición de p. inicial y fronteras
- 5:  $x \leftarrow$  ejecución del algoritmo *fmincon*

Donde  $A, B, \omega_s$  y  $\omega_t$  corresponden a los valores de ganancia y frecuencia para las especificaciones de rechazo a perturbaciones por ruido del sensor y a la salida de la planta, véase la tabla III.

Parámetro	Valor	Unidades
$A$	-20	dB
$B$	-20	dB
$\omega_s$	0.01	rad/s
$\omega_t$	10	rad/s
$PM$	79.2	°
$\omega_{cg}$	0.1	rad/s

Tabla III

VALORES DE ESPECIFICACIONES PARA  $P_1$ .

Tras la obtención de los parámetros del controlador fraccional óptimo, el mismo archivo que lo computa ejecuta la representación gráfica de los resultados y comparativas obtenidos. Se analizarán en el pertinente apartado.

III-B. Sistema basado en una planta real

Para este apartado se hará uso de un bloque diferencial en *MATLAB* que modela de forma bastante precisa el comportamiento de una planta de cultivo de biomasa [31] [32] [33]. Aplicar la metodología desarrollada y comprobada en el apartado del sistema de primer orden con retardo precisa de un modelo lineal con el que trabajar, que represente el comportamiento de la planta de forma sencilla, y contar con todo el rango de incertidumbre.

El sistema de cultivo de biomasa es un sistema MIMO (*Multiple Inputs - Multiple Outputs*), pero en este caso se hará únicamente el esquema de control aplicado sobre una etapa de la planta. La etapa objeto es aquella cuya señal es la inyección de  $CO_2$  en la planta, este será el actuador, frente a una salida en pH del cultivo, la salida. Aparte, también se contará con una perturbación durante todo el proceso, la radiación incidente, que tendrá ciclos diarios.

Se han realizado distintos ensayos, sobre todos los puntos de operación conocidos (tabla IV para los parámetros de entrada del bloque de simulación) y el rango posible del actuador, obteniendo el rango de incertidumbre de la tabla V. El sistema se representará en forma de función de transferencia de primer orden sin retardo de la ecuación (42)(con sus respectivos valores nominales).

Parámetro	Mínimo	Máximo
Caudal de aire (L/min)	140	200
Velocidad del agua (m/s)	0.9	1
Caudal de agua (L/min)	29.15	-
Caudal de medio (L/día)	0.34	-
Temperatura(s) (°C)	35	-

Tabla IV

PUNTOS DE OPERACIÓN PARA LA PLANTA  $P_2$ .

$$P_2(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \rightarrow P_{20}(s) = \frac{-2,01}{175s + 1} \quad (42)$$

Se ha decidido esta forma en base a estudios previos sobre el comportamiento del sistema ([31], [32] y [33]) que establecen un comportamiento de dicha dinámica como simplificación lineal de la planta.

Parámetro	Mínimo	Máximo
$k$	-3.936	-0.081
$\tau$	50	300

Tabla V

VALORES DE INCERTIDUMBRE PARA  $P_2$ .

Conocida la forma lineal del sistema y su incertidumbre se puede computar utilizando el mismo algoritmo que

en el apartado anterior las plantillas para todo el conjunto de frecuencias de interés. Este conjunto también será el mismo que para el modelo anterior. En la figura 18 se puede comprobar que dicho conjunto sigue siendo oportuno para proseguir con la metodología.

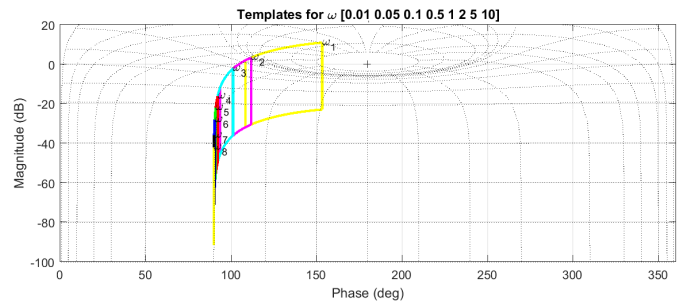


Figura 18. Plantillas de incertidumbre sobre el diagrama de Nichols para la planta  $P_2$ .

A continuación, se define el conjunto de especificaciones para este problema. Que será igual que para el problema anterior, 79,2° de margen de fase, una frecuencia de corte de ganancia de 0,1rad/s y rechazo a perturbaciones a la salida de la planta y ruido del sensor (ecuaciones (30) y (31)). De este modo las comparativas al final del texto podrán ser ampliadas en ambos casos.

Las fronteras, pese a ser las mismas especificaciones que en el apartado anterior, no serán las mismas, ya que las plantillas han cambiado. La intersección resultante en este caso queda representada en la figura 19.

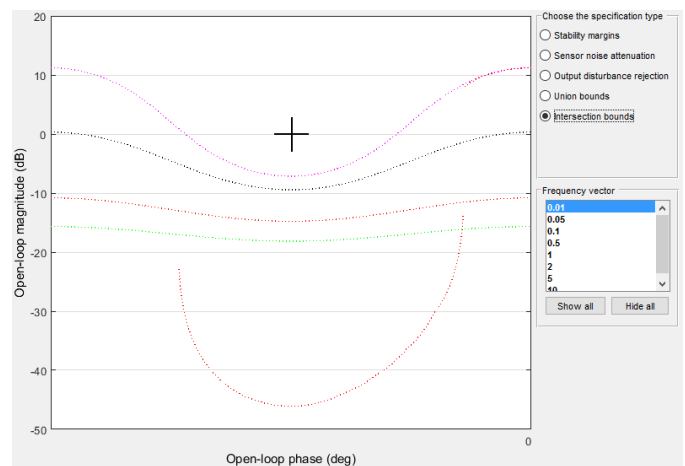


Figura 19. Fronteras para las especificaciones de la planta  $P_2$ .

El cómputo de los parámetros óptimos del controlador se hará en función de la estructura deseada (lo permite el algoritmo, igual que para el apartado anterior). Se escogerá un controlador en forma paralela, aunque para este problema no se exigirá el cómputo de un controlador que contenga las tres etapas, pudiéndose obtener; P, PI,

PID o PD. Las entradas del algoritmo son las mismas que para el caso anterior, aparte de la variación en la definición de la planta nominal, por lo que es de recibo remitirse a las ecuaciones (36), (37) y (38). La función a minimizar también será la definición del esfuerzo de control, ecuación (39). Los límites de la solución por el contrario sí habrán de ser modificados, ya que se trata de un sistema de primer orden con ganancia negativa. Se incluyen valores positivos y negativos en el conjunto de posibles soluciones para evitar que esto suponga una condición de parada del algoritmo.

El punto de partida, al no tener tiempo de retardo la planta nominal, se ha obtenido mediante la aplicación interna de *MATLAB* para el ajuste de controladores PID en el dominio de la frecuencia. Aquí sí fue posible incluir al menos dos especificaciones, frecuencia de corte de ganancia y ancho de banda, aunque no tengan relación directa con los parámetros finales, ya que el ancho de banda es un valor que no se tiene en cuenta en el proceso de optimización.

Dadas todas las entradas, se ejecuta el algoritmo mediante el *script* pertinente obteniéndose los parámetros finales para los controladores; fraccional (controlador de orden fraccional) y restringido a órdenes enteros (controlador de la forma PID tradicional). Dándose por finalizada la etapa de diseño y optimización, en el apartado de resultados se validará el diseño y se realizará un análisis sobre su comportamiento en bucle cerrado con el sistema.

### III-C. Resultados

En este apartado se analizarán los resultados obtenidos a partir de los parámetros óptimos computados por los *scripts* en *MATLAB*.

*III-C1. Controlador para el sistema de primer orden con retardo:* Para poder validar los resultados es necesario compararlos con las especificaciones iniciales. La primera de ellas, el margen de fase, se puede comprobar mediante un diagrama de Bode como el de la figura 20, donde se representa la gráfica de Bode conjunta tanto del controlador fraccional obtenido en bucle abierto con la planta, como de un controlador restringido a órdenes enteros para poder realizar la comparación. Los parámetros finales para este problema han resultado los de las ecuaciones (43) y (44).

$$G_1(s) = 11,0679 + \frac{3,9954}{s^{0,6198}} + 14,0377s^{0,0061} \quad (43)$$

$$G_1'(s) = 11,0679 + \frac{0,3307}{s} + 4,9922s \quad (44)$$

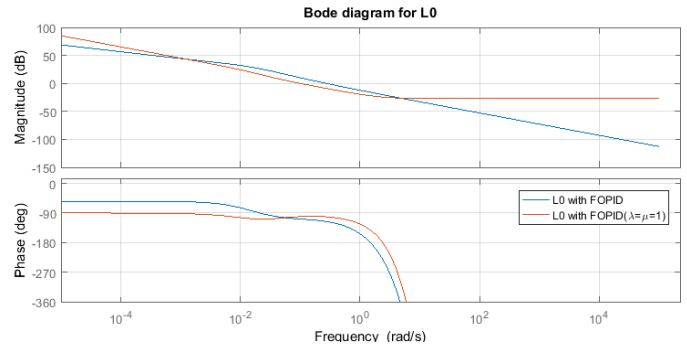


Figura 20. Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en  $L_{01}$ .

Tanto para el controlador fraccional como para el de órdenes enteros se obtiene un margen de fase de  $64,1367^\circ$ . Esto no quiere decir que la especificación no se esté cumpliendo realmente. Si uno se remite a los resultados del proceso de optimización, se puede comprobar que tanto en el controlador entero como en el fraccional dicha especificación se cumple (ambas con el mismo resultado), ecuaciones (45) y (36).

$$C_{eq2} = -6,4171 \cdot 10^{-14} \quad (45)$$

Esto quiere decir, que en la etapa de simulación ocurre algo. Esto tiene que ver directamente con los métodos de aproximación de los que se ha hablado en el apartado de *Materiales y métodos*. El método de aproximación que usa *MATLAB* es el de Oustaloup, y su precisión depende del orden de aproximación, que normalmente se sitúa entre 5 y 10 (el controlador restringido a órdenes enteros está expresado dentro del entorno del programa como una variable de tipo fraccional, de ahí que también presente un error de simulación, véase corrección en las figuras 21 y 22). Este desfase en simulación entre los  $79,2^\circ$  de margen requeridos y los  $64,13^\circ$  obtenidos presenta por tanto una justificación. Para sortear este obstáculo a la hora de simular el comportamiento de los sistemas es posible especificar un margen de fase más agresivo, de forma que incluya el margen de error que presenta el programa en la simulación. Por ejemplo, un ensayo realizado con una especificación de margen de fase de  $100^\circ$  obtiene en simulación un margen de fase de  $91,74^\circ$ . Otra solución es realizar el cálculo del diagrama de Bode en el entorno de trabajo del *toolbox FOMCON*. Donde se puede comprobar que sí se cumple la especificación adecuadamente, véase figura 21 con una frecuencia de corte de ganancia de aproximadamente

0,1rad/s y un margen de fase de 92° para el lazo abierto con el controlador de orden fraccional y un margen de fase de 79° para el lazo abierto con el controlador de órdenes enteros (figura 22).

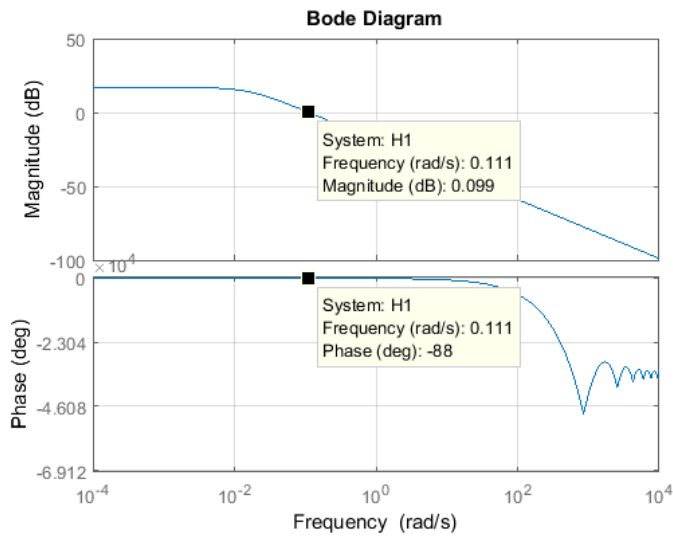


Figura 21. Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en  $L_{01}$  mediante FOMCON para el controlador fraccional.

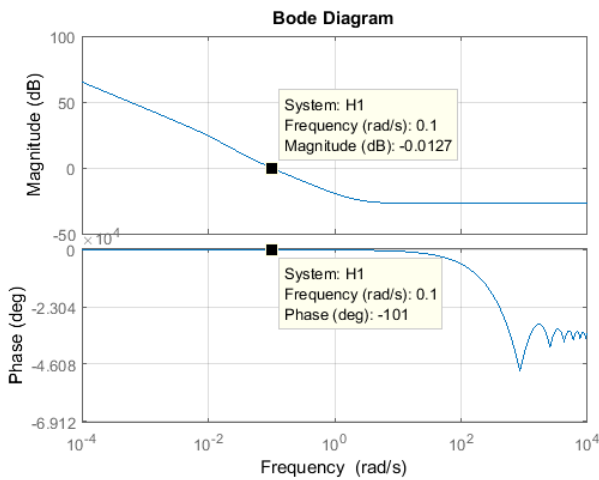


Figura 22. Diagrama de Bode para comprobación del margen de fase en  $L_{01}$  mediante FOMCON para el controlador de órdenes enteros.

El margen de fase se comprueba por tanto que se cumple adecuadamente, y además para el controlador fraccional se obtiene un mayor margen que para el lazo abierto computado con el controlador de orden entero (con este último se pierden incluso 0,2° de la especificación de 79,2°). Con la especificación de la frecuencia de corte de ganancia ocurre exactamente lo mismo, se cumple la especificación en el proceso de optimización pero sin embargo en la simulación se obtienen valores no adecuadamente aproximados. Para realizar la validación

hay que remitirse a las mismas figuras 21 y 22 realizadas en el entorno de FOMCON.

Para las especificaciones de rechazo a perturbaciones a la salida de la planta y por ruido del sensor se puede comprobar su cumplimiento tras la finalización del proceso de optimización, observando los resultados para cada una de ellas con la aplicación del controlador sobre la planta nominal. Ecuaciones (46) y (47). Un ejercicio de comprobación adicional necesario sería la aplicación del controlador en bucle abierto sobre todos los valores de incertidumbre, comprobando de manera definitiva que las especificaciones se cumplen de forma robusta.

$$|T(j\omega_t)| = -36,2476dB \leq -20dB, \omega_t = 10rad/s \quad (46)$$

$$|S(j\omega_s)| = -28,3698dB \leq -20dB, \omega_s = 0,01rad/s \quad (47)$$

Ambos resultados equivalen tanto para el proceso de optimización del controlador fraccional como para el de órdenes restringidos a enteros, se obtienen resultados idénticos en magnitud para estas dos especificaciones.

Aparte, todo el conjunto de especificaciones se puede comprobar también en el diagrama de Nichols superpuesto sobre las fronteras para cada una de las frecuencias de interés que se obtuvieron en el apartado segundo en la aplicación de la metodología QFT, figura 23. Se obtuvo la línea roja, que es la gráfica para el bucle abierto con el controlador fraccional de parámetros optimizados para las especificaciones. Y posteriormente, la línea negra representando el bucle abierto del sistema con el controlador restringido a órdenes enteros. Se comprueba mediante este diagrama (figura 23) que un controlador fraccional permite el ajuste del sistema en bucle abierto más estrechamente respecto a las fronteras y al origen del diagrama de Nichols que un controlador de órdenes enteros. A cada frecuencia de interés se marca la gráfica del bucle abierto de ambos controladores con un marcador del mismo color que la frontera, de este modo se puede comprobar que se cumplen las especificaciones. Para las fronteras de líneas continuas se tienen límites inferiores, pudiendo encontrar las marcas en los bucles abiertos siempre por encima de dichas líneas. Por otro lado, las fronteras de líneas discontinuas se presentan como límites superiores, de modo que las marcas pertinentes en cada uno de los bucles abiertos se encuentran siempre en áreas inferiores a dichas líneas.

Se cumplen las especificaciones, por lo que el diseño



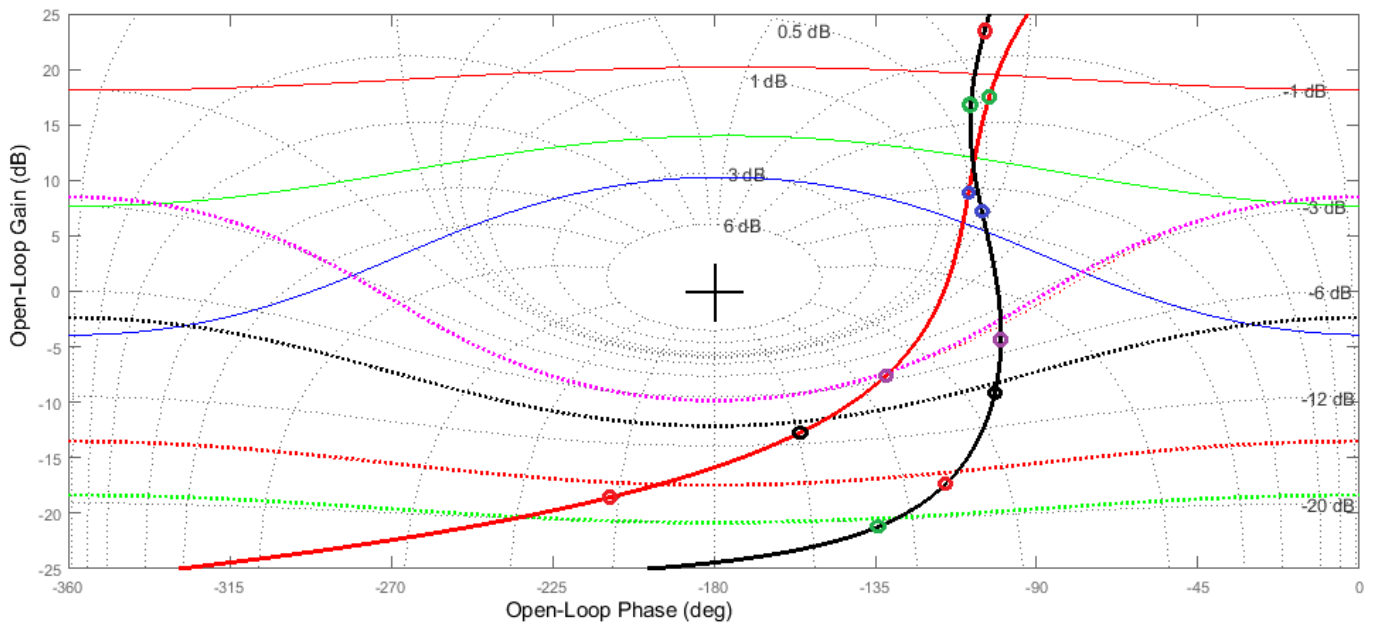


Figura 23. Diagrama de Nichols para la comparación en bucle abierto con el controlador fraccional (rojo) y entero restringido a partir del fraccional (negro), para la planta  $P_1$ .

del controlador está validado. Ahora se puede comprobar el esfuerzo de control obtenido para sus parámetros finales (ecuación (48)) y compararlo con el resultado del controlador limitado a órdenes enteros.

$$G_1(s) = 11,0679 + \frac{3,9954}{s^{0,6198}} + 14,0377s^{0,0061} \quad (48)$$

Los resultados obtenidos en términos de esfuerzo de control e índice ISE son los de la tabla VI. Que pueden entenderse en conjunto con la gráfica de la figura 24.

Sistema	Esf. de control	ISE
$PID$	22.0424dB	1.5550
$FOPID$	19.0429dB	2.5390
$PIDr.$	19.0429dB	5.1501

Tabla VI  
RESULTADOS EN SIMULACIÓN PARA  $P_1$ .

El controlador de partida, el PID, cuenta con el menor índice ISE, pero esto no puede ser objeto de comparación directa ya que no fue diseñado para las mismas especificaciones. Una vez optimizado ese PID permitiendo órdenes fraccionales se obtuvo un controlador de índice ISE ligeramente mayor pero, al ser minimizado en función del esfuerzo de control, menos exigente para la señal de control. Para observar de forma directa las bondades del control fraccional se puede ahora utilizar un mismo controlador optimizado según las mismas especificaciones y métodos pero con restricciones de

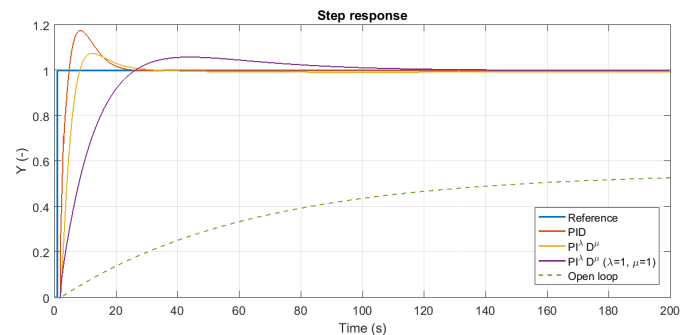


Figura 24. Respuesta escalón para el sistema en lazo abierto sin controlador, en lazo cerrado con controlador fraccional y controlador fraccional restringido a órdenes enteros.

enteros en las potencias de los operadores integral y derivativo. El mismo esfuerzo de control consigue por parte del controlador fraccional un índice ISE para una entrada en escalón unitaria de menos de la mitad del índice obtenido para el controlador limitado a órdenes enteros. Esto lleva a deducir de forma concisa, que al permitir órdenes fraccionales, obviamente se eleva el número de grados de libertad a la hora de poder diseñar el controlador, y por tanto una mayor flexibilidad para conseguir un, en definitiva, mejor control sobre el sistema de acuerdo a las especificaciones y valores de esfuerzo que al fin y al cabo suelen repercutir en el mundo real en términos económicos.

*III-C2. Controlador para el sistema basado en una planta real:* De igual modo que para los resultados del

controlador para el sistema de primer orden con retardo, es necesaria una validación de los resultados obtenidos de acuerdo a las especificaciones con las que se partía en la etapa de diseño. Los controladores obtenidos son los de las ecuaciones (49) y (50).

$$G_2(s) = -8,1536 - \frac{19,7043}{s^{0,2545}} \quad (49)$$

$$G_2'(s) = -7,5149 + \frac{5,0000}{s} + 14,4707s \quad (50)$$

El cumplimiento de la especificación de la frecuencia de corte de ganancia se realiza mediante el análisis de un diagrama de Bode para los bucles abiertos. Ambos bucles serán los del controlador fraccional y su controlador restringido a potencias enteras. La figura 25 muestra que en este caso sí se cumple con más precisión que en el apartado anterior esta especificación, aunque no de forma exacta. El margen de fase para el sistema con el controlador fraccional resulta de  $73,49^\circ$ , muy próximo al especificado, sin embargo, cuando se restringen los valores de las potencias de las etapas integral y derivativa a enteros el controlador pasa a tener un margen de fase de  $23,54^\circ$ . Esto puede deberse a que las especificaciones fuesen muy exigentes, y que aún permitiendo órdenes fraccionales al sistema y el algoritmo les costase llegar a la solución más que para el apartado del sistema de primer orden con retardo (éste tenía una constante de tiempo menor). Luego, para las especificaciones de rechazo a perturbaciones y ruido hay que remitirse a los resultados de la optimización, ecuaciones (51) y (52).

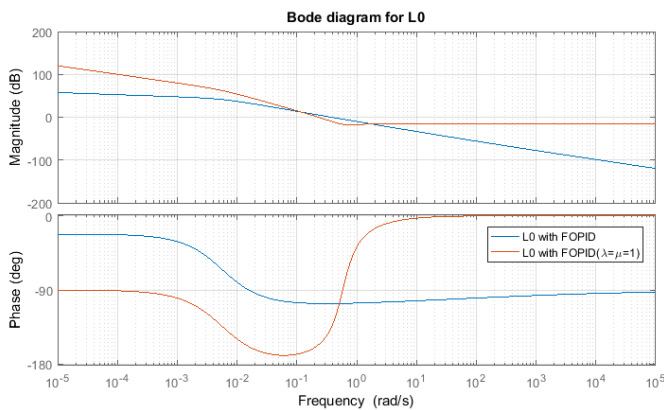


Figura 25. Diagrama de Bode para el bucle abierto con ambos controladores; fraccional y fraccional restringido a potencias enteras en sus operadores.

$$|T(j\omega_t)| = -35,9753dB \leq -20dB, \quad \omega_t = 10rad/s \quad (51)$$

$$|S(j\omega_s)| = -10,1533dB \not\leq -20dB, \quad \omega_s = 0,01rad/s \quad (52)$$

Para la especificación de rechazo al ruido del sensor se cumple holgadamente igual que pasaba en el problema con tiempos de retardo. Para la especificación de rechazo a perturbaciones a la salida de la planta, sin embargo, se obtiene casi la mitad del valor especificado. Dado que las especificaciones para este problema han sido aplicadas de forma arbitraria es posible que resultasen ser muy exigentes para la dinámica del sistema. Hay que tener en cuenta que se está exigiendo lo mismo a un sistema de ganancia negativa y con cerca del triple del valor de la constante de tiempo que para el sistema del primer apartado. Remitiéndose a la figura 26 se puede corroborar esta situación.

La línea discontinua roja de las fronteras no está por encima de las marcas de su mismo color en la gráfica de Nichols de los bucles cerrados, y de hecho, para el sistema con el controlador restringido ni siquiera se observa dentro de la gráfica.

Tras este análisis se puede concluir que el diseño no está validado. Por tanto, para poder controlar este sistema quedan dos soluciones; relajar el conjunto de especificaciones a uno factible para este algoritmo, o bien elaborar otro mediante metodologías de diseño diferentes a las aplicadas en este texto.

Aún así, se han hecho simulaciones con el modelo lineal de la planta y su modelo diferencial. Para el primero se han obtenido, pese a todo, unos resultados satisfactorios. En la figura 27 se observa un control por parte del elemento fraccional bastante rápido y sin sobresaltos extremadamente pronunciados frente al cambio de consigna.

Para esta simulación se obtuvieron los resultados de esfuerzo de control e índice de rendimiento ISE de la tabla VII.

Sistema	Esf. de control	ISE
PID	18.8169dB	4.8222
FOPID	21.0532dB	1.4436
PIDr.	20.4582dB	4.8918

Tabla VII

RESULTADOS DE SIMULACIÓN PARA LA PLANTA  $P_2$  CON LOS DISTINTOS CONTROLADORES.

El esfuerzo de control obtenido para los sistemas optimizados es similar y apenas se distancian entre sí por menos de una unidad. Sin embargo para el controlador fraccional se obtiene un índice de rendimiento

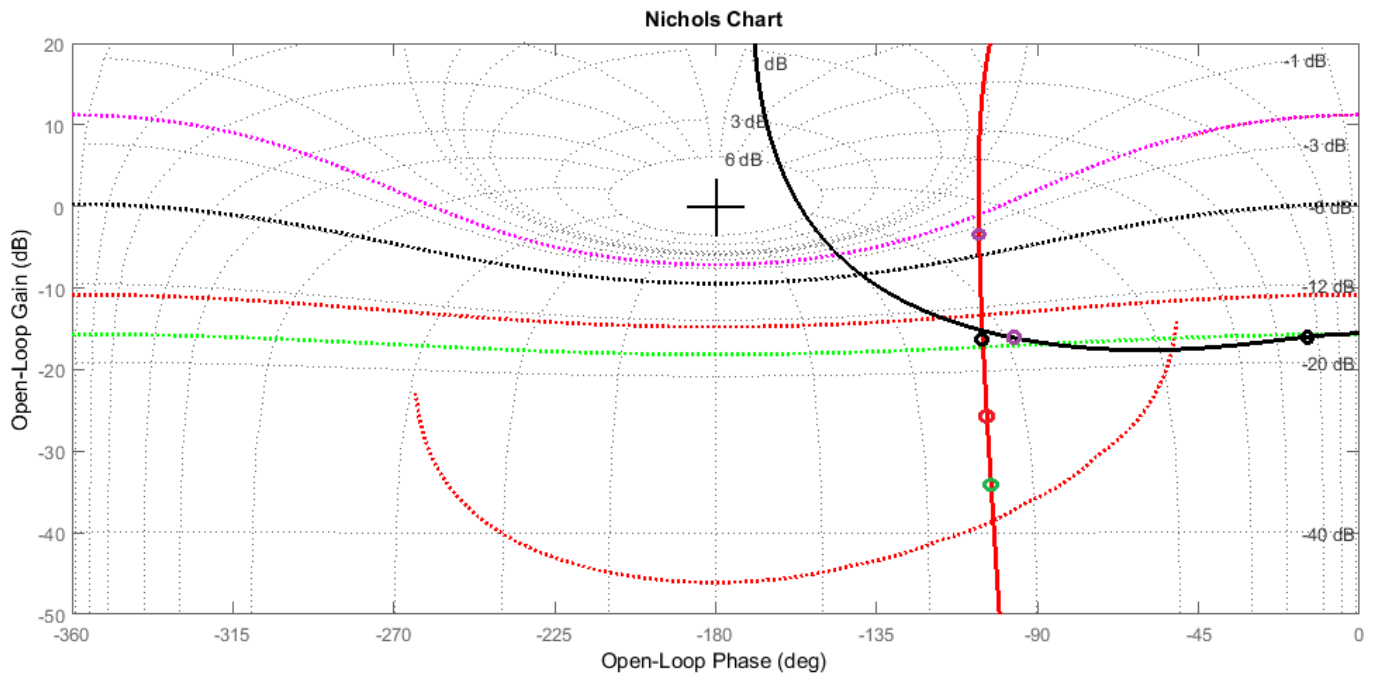


Figura 26. Diagrama de Nichols para la comparación en bucle abierto con el controlador fraccional (rojo) y entero restringido a partir del fraccional (negro) para la planta  $P_2$ .

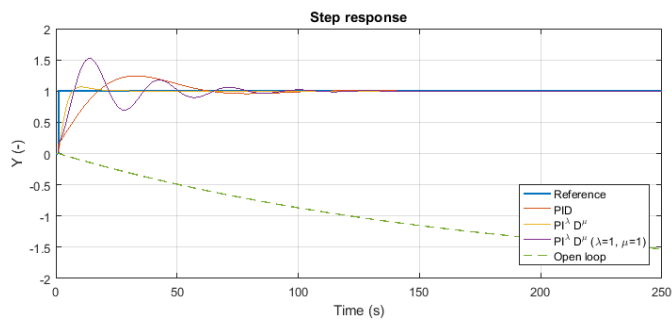


Figura 27. Respuesta a escalón del sistema con el controlador de partida, el fraccional y su versión restringida a órdenes enteros para la planta  $P_2$ .

considerablemente mejor que para su versión de órdenes enteros. Ésto puede servir de ejemplo para representar las bondades del control fraccional pese a que en este caso particular no haya sido posible cumplir con las especificaciones debido a su gran exigencia.

De igual forma se han realizado simulaciones con el modelo diferencial de la planta para observar los resultados. En la figura 28 se presentan los resultados de 17 minutos en simulación. La señal de control resulta ser abrupta y con comportamientos que pueden inducir a pensar que el efecto integral es demasiado grande. Sin embargo, si se observa el tiempo en el que las pendientes cambian a valores negativos en la salida coincide con el valor nulo del actuador, por lo que

no existen efectos de *wind-up*. Un posible motivo de estos resultados es la metodología o protocolos internos que utilice *MATLAB* para simular el comportamiento de elementos fraccionales, pese a que estos tengan valores enteros en sus órdenes. Para comparativa se presenta en la figura 29 la misma simulación llevada a cabo con el controlador completamente fraccional.

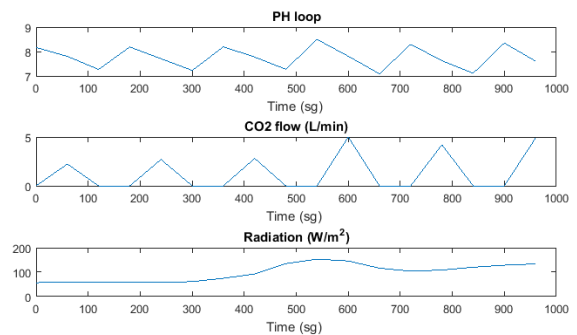


Figura 28. Control del pH en un valor de 8 con perturbaciones de radiación (controlador fraccional restringido a órdenes enteros).

En la figura 29 se observa un comportamiento que no es lógico a simple vista. A partir del instante de tiempo 300 aproximadamente se observa como la señal del actuador es máxima, resultando a una incomprensible inmutación de la señal de salida. A este comportamiento se le podría achacar también el método de trabajo de *MATLAB* con los elementos fraccionales puros. Aunque

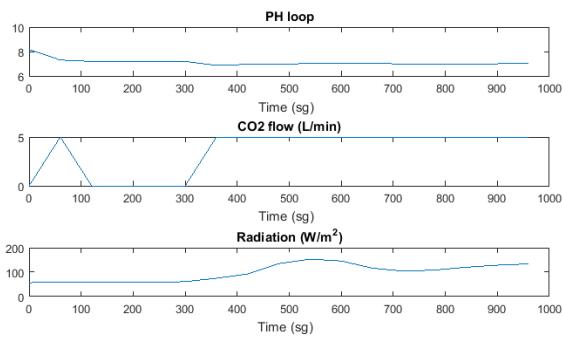


Figura 29. Control del pH en un valor de 8 con perturbaciones de radiación (controlador fraccional).

también pueda ser un error de carácter humano a la hora de elaborar los archivos correspondientes de simulación.

#### IV. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos, tanto en el modelo de primer orden con retardo como en el modelo basado en la planta real de los fotobioreactores, presentan una comparativa directa y clarificadora entre las bondades del control fraccional frente a los métodos más extendidos de diseño de controladores PID de órdenes enteros. Se comprueba en este trabajo que el hecho de incluir operadores integrales y derivativos de orden fraccional permite, aparte de añadir dos grados de libertad a la etapa de diseño, obtener unos resultados más ajustados a las necesidades impuestas por las especificaciones. Traducido a una posible implementación real, un sistema controlado con parámetros fraccionales en los elementos integral y derivativo permitiría un ahorro económico (derivado de una mejor solución respecto al esfuerzo de control analizada en el apartado de resultados).

Por contrapartida, hoy en día aún no es posible implementar controladores fraccionales en todas las industrias, debido sobretodo a las limitaciones físicas de cómputo de los aparatos. Generalmente se pueden encontrar controladores PID que acepten la configuración de cualquiera de sus parámetros de ganancia en forma paralela o de ganancia y tiempos integral y derivativo, sin embargo, la potencia u orden de los operadores integral y derivativo no es de tan directa resolución informática. Principalmente, debido a que matemáticamente una potencia fraccional no se comporta de idéntica forma a una potencia entera. Por ejemplo, la derivada de un valor constante es nula, sin embargo la derivada fraccional de un valor constante no lo es. Esto lleva a la necesidad de que, poco a poco, sea necesaria la modernización de los aparatos para permitir la implementación de estas

mejoras en términos de control, que matemáticamente ya vienen existiendo desde hace décadas.

Como conclusión final, el objetivo principal de este trabajo queda cubierto con creces, ya que se han estudiado de forma bastante profunda los comportamientos matemáticos y teóricos de sistemas fraccionales en tiempo continuo, y ello supone un gran aporte a los conocimientos de un estudiante de ingeniería de control. Pese a no haber obtenido buenos resultados en todos los ensayos, el controlador fraccional ha quedado como una clara alternativa a los métodos y estructuras convencionales que se suelen aplicar en la industria.

#### IV-A. Líneas futuras de trabajo

A partir de este texto han surgido diversas líneas de factible investigación y desarrollo futuro. La primera de ellas, que ya viene resuelta en otros trabajos, la optimización en el tiempo de cómputo de las plantillas sería una de ellas. El método implementado en este texto para el cálculo de las plantillas requiere de un tiempo de cómputo considerable y es con diferencia el *script* que más tiempo emplea en su ejecución. Incluso comparado con los archivos de simulación de modelos fraccionales y enteros.

Otra línea de trabajo que surge derivada de este texto es la optimización del algoritmo de minimización. Ya que *fmincon* no es el único algoritmo que permite la minimización de funciones con restricciones no lineales es posible que exista una combinación para casos particulares que requiera de menos tiempo de cómputo y además encuentre mejores soluciones. Un ejemplo es el algoritmo genético, también integrado en *MATLAB*, que en este caso empleaba más tiempo de cómputo a cambio de muy poca variación o casi nula en la solución final (de ahí a que no se utilizase por encima del algoritmo *fmincon*).

#### REFERENCIAS

- [1] J. C. Moreno, A. Baños, and M. Berenguel, "Improvements on the computation of boundaries in QFT," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, no. 16, pp. 575–597, 2006.
- [2] U. N. Katugampola, "A new approach to generalized fractional derivatives (communicated by Claudio R. Henríquez)," *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 6, no. 4, pp. 1–15, 2014.
- [3] G. W. Leibniz, "Letter from Hannover, Germany to G.F.A. L'Hôpital, September 30, 1695," *Leibniz Mathematische Schriften*, pp. 301–302, 1962.
- [4] —, "Letter from Hannover, Germany to Johann Bernoulli. December 28, 1695," *Leibniz Mathematische Schriften*, p. 226, 1962.

- [5] E. Neuenschwander, "The unpublished papers of Joseph Liouville in Bourdeaux," *Mathematisches Institut, Universität Zürich*, 1989.
- [6] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand Company, 1945.
- [7] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. Imperial College Press, 2006.
- [8] I. M. Horowitz, "Fundamental theory of automatic linear feedback control systems," *I.R.E. Transactions on Automatic Control*, vol. 4, pp. 5–19, December 1959.
- [9] I. M. Horowitz and M. Sidi, "Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances." *Int. J. Control*, vol. 16, no. 2, pp. 287–309, 1972.
- [10] J. M. Díaz, S. Dormido, and J. Aranda, "SISO-QFIT," *Departamento de Informática y Automática, UNED*, 2004.
- [11] A. Tepljakov, E. Petlenkov, J. Belikov, and J. Finajev, "Fractional-order controller design and digital implementation using FOMCON toolbox for MATLAB," *Proc. of the 2013 IEEE Multi-Conference on Systems and Control conference*, pp. 340–345, 2013.
- [12] M. García-Sanz, "The QFT Control Toolbox (QFTCT) for Matlab, version 10.01," *CWRU, UPNA and ESA-ESTEC*, 2016.
- [13] J. Lützen, "Joseph Liouville's contribution to the theory of integral equations," *Department of Mathematics, Odense University*, 1982.
- [14] C. A. Monje, Y. Chen, B. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, "Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications," *Springer Verlag*, 2010.
- [15] A. Tepljakov, E. Petlenkov, and J. Belikov, "A flexible MATLAB tool for optimal fractional-order PID controller design subject to specifications," *Department of Computer Control, Tallinn University of Technology*, 2012.
- [16] B. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández, and V. Feliu, "Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications," 2000.
- [17] W. M. Ahmad and J. Sprott, "Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems," *Chaos, solitons and fractals*, no. 16, pp. 339–351, 2003.
- [18] C. Li and G. Chen, "Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations," *Physica A*, no. 341, pp. 55–61, 2004.
- [19] K. Aström and T. Hägglund, *Advanced PID control*. The Instrumentation, Systems and Automation Society (ISA), 2006.
- [20] I. Podlubny, L. Dorcak, and I. Kostial, "On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers," *Proceedings of the 36th IEEE Conference*, vol. 5, pp. 4985–4990, 1998.
- [21] P. Lanusse, J. Sabatier, and A. Oustaloup, *Fractional order differentiation and robust control design*. Springer, 2015.
- [22] P. Lanusse, R. Malti, and P. Melchior, "CRONE control system design toolbox for the control engineering community: tutorial and case study," *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 371, no. 20120149, 2016.
- [23] I. M. Horowitz, "QFT - Past, present and future. Plenary address." *1st Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*, pp. 9–14, 1992.
- [24] M. García-Sanz, "QFT international symposia: past, present and future." *5th Int. Symp. on QFT and Robust Frequency Domain Methods*, 2001.
- [25] I. M. Horowitz, "Synthesis of feedback systems," *Academic Press*, 1963.
- [26] J. Cervera and A. Baños, "Automatic loop shaping in QFT using CRONE structures," *Faculty of Computer Engineering, Computer and Systems Engineering Department, University of Murcia*, 2006.
- [27] Y. Chait and O. Yaniv, "Multiple-input/single-output computer-aided, control design using the quantitative feedback theory," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, no. 3, pp. 47–54, 1993.
- [28] M. R. Faieghi and A. Nemati, *On fractional-order PID design*. Department of Electrical Engineering, Muiyaneh Branch, Islamic Azad University, Muiyaneh, Iran, 2011.
- [29] K. H. Raut and S. R. Vaishnav, "A study on performance of different PID tuning techniques," *G.H. Rasoni College of Engineering, Nagpur, India*, 2013.
- [30] K. Aström and T. Hägglund, "Revisiting the ziegler-nichols step response method for PID control," *Journal of Process Control*, no. 4, pp. 635–650, 2004.
- [31] I. Fernández, F. G. Acién, M. Berenguel, and J. L. Guzmán, "First principles model of a tubular photobioreactor for microalgal production," *American Chemical Society Publications*, no. 53, pp. 11 121–11 136, 2014.
- [32] I. Fernández, F. G. Acién, M. Berenguel, J. L. Guzmán, J. M. Fernández, and J. J. Magán, "Dynamic model of microalgal production in tubular photobioreactors," *Bioresource Technology Journal, Elsevier*, no. 126, pp. 172–181, 2012.
- [33] I. Fernández, F. G. Acién, M. Berenguel, J. L. Guzmán, G. A. Andrade, and D. Pagano, "A lumped parameter chemical-physical model for tubular photobioreactors," *Chemical Engineering Science, Elsevier*, no. 112, pp. 116–129, 2014.



Este trabajo fin de máster consiste en el diseño de controladores fraccionales basados en la teoría robusta de realimentación cuantitativa, más comúnmente nombrado en la bibliografía como QFT (Quantitative Feedback Theory). Este tipo de controladores tienen un comportamiento distinto a los controladores convencionales debido a su contexto matemático, por lo que pueden presentar ciertas ventajas tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo a la hora de cumplir con una serie de especificaciones.

Palabras clave: Controladores Fraccionales, Teoría Robusta de Realimentación cuantitativa.

This final project consists in the design of fractional controllers based on the Quantitative Feedback Theory, also called QFT. This type of controllers has a different behavior than the conventional ones because of their mathematical context. Therefore they can present some advantages either in the frequency domain than in the time domain while in order to satisfy a series of specifications.

Keywords: Fractional Controllers, Quantitative Feedback Theory.