

Trabajo Fin de Máster
Universidad De Almería

**INFLUENCIA DE LOS NUEVOS
MÉTODOS DE ENSEÑANZA EN EL
APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

ÁNGEL MIGUEL RUBIO GARCÍA
DIRECTORA: MARÍA ISABEL RAMÍREZ ÁLVAREZ
SEPTIEMBRE 2015

*Defiende tu derecho a
pensar, porque incluso
pensar de manera errónea
es mejor que no pensar*

Hypatia

1. PRESENTACIÓN	4
2. JUSTIFICACIÓN	5
3. INTRODUCCIÓN	6
4. APRENDIZAJE COOPERATIVO	8
4.1 <i>¿QUÉ ES Y QUÉ PRETENDEMOS CON EL APRENDIZAJE COOPERATIVO?</i>	9
4.2 <i>ELEMENTOS BÁSICOS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO</i>	10
4.3 <i>CLAVES DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO</i>	11
4.4 <i>VIRTUDES DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO</i>	11
4.5 <i>COMO TRABAJAR COOPERATIVAMENTE EN MATEMÁTICAS</i>	15
4.5.1 FORMACIÓN DE LOS GRUPOS	15
4.5.2 PAPEL DEL PROFESOR	16
4.6 <i>EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO</i>	17
4.6.1 EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO	17
4.6.2 EVALUACIÓN DEL TRABAJO EN GRUPO Y DE LAS HABILIDADES SOCIALES	18
4.6.3 CALIFICACIONES	18
5. LAS TICS APLICADAS A LA EDUCACIÓN	20
5.1 <i>¿POR QUÉ UTILIZAR TIC EN EDUCACIÓN?</i>	21
5.2 <i>INFLUENCIA DE LAS TICS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE</i>	21
5.2.1 INFLUENCIA DE LAS TIC EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	22
5.3 <i>PAPEL DEL PROFESOR ANTE EL USO DE LAS TICS</i>	23
5.4 <i>LA PLATAFORMA MOODLE Y EL BLOG DEL PROFESOR</i>	23
5.4.1 LA PLATAFORMA EDUCATIVA MOODLE	23
5.4.2 EL BLOG COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA	24
6. LOS PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS	27
6.1 <i>DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS</i>	27
6.2 <i>FORMAS DE APLICAR EL ABP</i>	28
6.3 <i>VENTAJAS DEL ABP</i>	28
6.4 <i>DISEÑO Y USO DE PROBLEMAS EN EL ABP</i>	29
6.5 <i>EVALUACIÓN DEL ABP</i>	30
7. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO	31
8. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	35
8.1 <i>OBJETIVOS DEL TRABAJO</i>	35
8.2 <i>SUJETOS DE ESTUDIO</i>	35
8.3 <i>METODOLOGÍA</i>	36

9. PROGRAMACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	39
9.1 UBICACIÓN DE LA UNIDAD EN EL CURRÍCULO	39
9.2 OBJETIVOS	39
9.2.1 OBJETIVOS GENERALES DE LAS MATEMÁTICAS II	39
9.2.2 OBJETIVOS DIDÁCTICOS	40
9.2.3 CONTENIDOS	41
9.2.4 METODOLOGÍA	43
9.2.4.1 Principios metodológicos:	43
9.2.4.2 Agrupamientos	44
9.2.4.3 Desarrollo y temporalización de los contenidos de la unidad	44
9.2.4.4 Evaluación de la unidad	55
9.2.4.5 Recogida de datos	59
10. CONCLUSIONES	68
11. BIBLIOGRAFÍA	71
12. ANEXOS	75

1. PRESENTACIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como finalidad dar solución a los problemas que me he ido encontrando a lo largo de mi etapa profesional: la falta de motivación, el abandono y los malos resultados que mis alumnos presentan hacia la asignatura de matemáticas, influyendo en la poca preparación con la que llegan a estudios superiores o se incorporan al mundo laboral. Este TFM se basa en el estudio de un nuevo modelo de proceso de enseñanza/aprendizaje que se aleja del tradicional y tiene por objetivo aumentar el gusto por las matemáticas, eliminar miedos y conseguir una mejor capacitación de los estudiantes. Su eje vertebrador es el aprendizaje cooperativo, relacionándolo con la adquisición de conocimientos a partir de situaciones reales (Aprendizaje Basado en Problemas donde nuestros alumnos puedan comprobar la utilidad de las matemáticas), el uso de las TIC'S en el aula y la introducción de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

Para poder llevarlo a cabo se van a seleccionar dos grupos de 2º de Bachillerato, modalidad Ciencia y Tecnología, para los que se ha diseñado una Unidad Didáctica en el bloque de Análisis llamada "Aplicaciones de las Derivadas". A uno de ellos se le aplicará la metodología descrita en este trabajo y el otro seguirá una tradicional, individual y no competitiva necesariamente.

El estudio será puesto en práctica en el curso siguiente, con el fin de observar los resultados que se obtienen, sacar las conclusiones pertinentes y rediseñarlo, si así fuese necesario, para continuar mejorando el proceso de enseñanza/aprendizaje día a día.

Este Trabajo Fin de Máster ha sido posible gracias al apoyo y ayuda de personas a las que quiero dar mi agradecimiento, pues he aprendido mucho de ellas. En primer lugar, he de dar las gracias a todos y cada uno de mis profesores de este máster que, sin duda alguna, me han hecho crecer intelectualmente y, aún más, me han mostrado la infinita cantidad de cosas que puedo aprender todavía. Agradezco su interés y ayuda, así como sus sabios consejos. Especialmente a mi tutora María Isabel Ramírez Álvarez, quien me ha introducido en este nuevo modelo de educación, el cual desconocía, pero que me ha atrapado y dado una nueva visión de enseñanza de las matemáticas, mucho más mejorada e interesante de la que tenía. Y al coordinador del Máster, Luis Oyonarte, por el apoyo ofrecido.

Asimismo me gustaría dar las gracias a mi mujer por el soporte prestado en la realización de este trabajo durante todo este tiempo, por confiar siempre en mí y por estar a mi lado.

2. JUSTIFICACIÓN

¿Por qué mis alumnos no aprenden como yo quisiera? ¿Por qué no prestan interés? ¿Por qué no les gustan las matemáticas?

Son seguramente algunas de las preguntas que nos hacemos muchos profesores al final de cada clase. Año tras año y día tras día, nos encontramos en las aulas con el problema de la constante desmotivación y fracaso que presentan nuestros estudiantes hacia la enseñanza y en concreto con el aprendizaje de las matemáticas. Lo cual influye de forma significativa en la falta de preparación con la que acceden a estudios superiores o se incorporan al mundo laboral, presentando grandes déficits desde el punto de vista de los contenidos matemáticos.

Este fracaso en la materia de Matemáticas junto al alto grado de abandono y falta de atractivo resulta cada vez más preocupante.

Según el último informe **PISA de 2012** los resultados en matemáticas fueron los siguientes:

- ✚ La puntuación que alcanza España en matemáticas es de 484 puntos, significativamente inferior al promedio de la OCDE de 494 puntos. En el listado ordenado de los 34 países miembros de la OCDE, ordenados por su puntuación en matemáticas, España ocupa el puesto 25.
- ✚ Por otra parte, apenas el 8% de alumnos españoles alcanza los niveles altos (5 y 6) de rendimiento en matemáticas, lo que supone 5 puntos menos que el promedio de la OCDE. Este resultado indica una proporción baja de alumnos excelentes. En el extremo opuesto, el 24% de los alumnos se encuentra en el nivel bajo de rendimiento en matemáticas (nivel 1) o no lo alcanza, lo que indica que uno de cada cuatro alumnos españoles no posee un dominio básico de la competencia matemática.

En gran parte es debido al bajo nivel de conocimientos previos, a los métodos de estudio utilizados por el alumnado, a métodos de enseñanza tradicionales que no los involucran y a la dificultad de conectar los conceptos abstractos aprendidos en dicha materia con el mundo real.

Estos problemas crecientes hacen necesario un cambio significativo en la metodología tradicional, donde el alumno deje de ser un sujeto pasivo y tome las riendas de su propio aprendizaje, de manera que puedan concebir las matemáticas como una herramienta útil para resolver sus problemas cotidianos.

Por todo esto, hace ya algunos años me propuse la siguiente pregunta: ¿Para solucionar estos problemas es necesario un nuevo enfoque del proceso de enseñanza/aprendizaje?

3. INTRODUCCIÓN

Se trata de recuperar, por un lado la esencia original de las matemáticas, como una ciencia dedicada a la resolución de los problemas de la sociedad y, por otro lado, ese estímulo perdido en el alumnado. Todo lo referido hasta aquí, me lleva a plantear como solución aplicar una metodología centrada en:

- ✚ **Aprendizaje basado en problemas**, donde puedan comprobar de primera mano la relación entre matemáticas, conocimiento y mundo que nos rodea. Los alumnos se enfrentan a situaciones cotidianas que son incapaces de resolver por su falta de conocimientos matemáticos. Cuando son problemas reales, con aplicaciones reales, se ven en la necesidad de conocer las herramientas necesarias para encontrar una solución y, en ese transcurso, es donde se produce el aprendizaje de las matemáticas, despertando su interés y motivación.
- ✚ Además, el temor al fracaso junto con su falta de conocimientos, es la principal causa por la que los alumnos se quedan bloqueados. Para resolver este problema, parece lógico hacer una propuesta de trabajo en grupo. Por eso me planteo aplicar el **aprendizaje cooperativo**.
- ✚ Por otro lado, la aparición de lo que en su momento se llamaron “**Nuevas Tecnologías**” en las últimas décadas del siglo XX ha sido la causa de la llamada Revolución Digital, revolución que, a diferencia de otras anteriores, ha conseguido que los cambios y las transformaciones derivados de lo que hoy se llaman Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC), se hayan producido muy rápidamente en todos los ámbitos de la sociedad, incluida la educación. Si nos planteamos cuál ha sido el efecto de las Nuevas Tecnologías en la educación llegamos a una reflexión más profunda que nos dice que hay un gran retraso que supone no sólo invertir en equipamiento y en formación sino en un cambio de actitud o de mentalidad. Incorporar las TIC a la educación es una necesidad para que los jóvenes puedan desenvolverse sin problemas dentro de la sociedad.

Aprovechando que el centro en el que me encuentro, dispone de un aula de informática con un ordenador por cada alumno, es conveniente mezclar el trabajo cooperativo con las nuevas tecnologías para así favorecer su aprendizaje autónomo apoyándome en el trabajo con la plataforma Moodle y en mi blog personal www.angelmiguelrubio.wordpress.com. Asimismo usaremos dos programas informáticos, Wiris y Geogebra, que nos van a ayudar a adquirir los contenidos de una manera más sencilla, mostrando a los estudiantes algunas de las herramientas que tenemos para facilitarnos los desarrollos y cálculos matemáticos.

- ✚ El conocimiento de la **historia de las matemáticas** será usada en los procesos de aprendizaje porque puede ilustrar y ayudar a comprender la

construcción del conocimiento científico. El alumnado debe tener conciencia de que las matemáticas constituyen una disciplina viva, que ha evolucionado y lo continúa haciendo.

La metodología debe tener las siguientes características:

- ✚ **Cooperativa**, que impulse tanto la autonomía como la cooperación en el alumnado, promoviendo la implicación activa del estudiante en el proceso de aprendizaje y capitalizando la capacidad que tienen los grupos para incrementar el nivel de aprendizaje mediante la interacción entre compañeros.
- ✚ **Motivadora**, despertando su interés por el aprendizaje de los temas tratados y promoviendo actitudes más positivas hacia la materia de estudio.
- ✚ **Efectiva**, desarrollado a partir de la acción y la participación de los alumnos, que aprenden con más facilidad si el objetivo les interesa. Que el alumno pueda incorporarse a la vida adulta, integrándose en una sociedad tan compleja, se consigue gracias a una formación matemática que otorga una comprensión de la materia, descubriendo su utilidad y aplicaciones.
- ✚ **Autosuficiente**, promoviendo el aprendizaje independiente y auto dirigido y el desarrollo de la capacidad para razonar de forma crítica.

El objetivo principal de este trabajo radica en la necesidad de fomentar la motivación en el alumnado por el aprendizaje de las matemáticas, para conseguir que superen sus dificultades ante la materia, adquiriendo los nuevos conocimientos y consiguiendo que su preparación para los estudios superiores sea lo más satisfactoria posible con ayuda de las herramientas mencionadas anteriormente.

4. APRENDIZAJE COOPERATIVO

“*Quien enseña, aprende*”. Séneca (55 a.C.-39 d.C.)

Las matemáticas ocupan un importante lugar dentro de los aprendizajes escolares y son una preocupación en cualquier política educativa, siendo una de las materias en las que se ha hecho más necesario investigar en la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Según las orientaciones del “National Council of Teachers of Mathematics”, se aconseja que en vez de ser el profesor quien hable, sean los propios estudiantes quienes expresen y razonen los contenidos matemáticos.

Los resultados de las distintas investigaciones concluyen que es conveniente utilizar métodos cooperativos en la enseñanza de las matemáticas.

¿Por qué son necesarios nuevos enfoques para el aprendizaje?

- ✚ Para dar respuestas a los cambios que ha sufrido la sociedad en los últimos años.
- ✚ Porque los resultados que obtenemos no son los deseados.
- ✚ Para mejorar las habilidades sociales y preparar para la vida.
- ✚ Para obtener resultados académicos iguales o superiores a la metodología tradicional.
- ✚ Porque genera el “aprender a aprender”.
- ✚ Porque “cuando todos aportamos y trabajamos juntos el fruto es mejor y hay mayor satisfacción en nuestra labor docente.

Paloma Gavilán (2004) nos describe en su libro, “*Trabajo cooperativo en matemáticas*”, que la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas requiere una metodología que impulse tanto la autonomía como la cooperación en el alumnado. Numerosos trabajos de investigación sobre aprendizaje cooperativo muestran la bondad de esta metodología para los estudiantes, tanto para su desarrollo personal como académico, social e intelectual. Este método es una forma de atender a la diversidad dentro del aula permitiendo que el alumno trabaje según sus capacidades, pero además, es una vía de educación en valores al permitir que practique y adquiera habilidades sociales que perdurarán en su personalidad más allá de los límites académicos y del recinto escolar, al trabajar temas tales como la doble responsabilidad que asumen, el respeto hacia los demás miembros de su grupo y la importancia de implicarse para resolver los conflictos socio-cognitivos que necesariamente se le van a presentar.

Si analizamos con atención el currículum escolar –Isabel Solé (1997)- veremos que el trabajo en equipo no es sólo un recurso metodológico para enseñar y aprender los contenidos de las distintas áreas, sino también algo que los alumnos deben aprender, como un contenido más, y que, por lo tanto, debe enseñarse de una forma tan sistematizada, al menos, como se enseñan los demás contenidos. Estoy totalmente de

acuerdo con la afirmación que, sobre este aspecto, hacen Johnson y Johnson (1997): “*La capacidad de todos los alumnos de aprender a trabajar cooperativamente con los demás es la piedra clave para construir y mantener matrimonios, familias, carreras y amistades estables. Ser capaz de realizar habilidades técnicas como leer, hablar, escuchar, escribir, calcular y resolver problemas es algo valioso pero poco útil si la persona no puede aplicar estas habilidades en una interacción cooperativa con las otras personas en el trabajo, en la familia y en los entornos comunitarios. La manera más lógica de enfatizar el uso del conocimiento y las habilidades de los alumnos dentro de un marco cooperativo, tal como deberán hacer cuando sean miembros adultos de la sociedad, es dedicar mucho tiempo al aprendizaje de estas habilidades en relaciones cooperativas con los demás*”.

4.1 ¿QUÉ ES Y QUÉ PRETENDEMOS CON EL APRENDIZAJE COOPERATIVO?

Es una forma de trabajo basado en la construcción colectiva del conocimiento y el desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo (Montoya y otros, 2007).

Según Velázquez Callado, 2004, “*el aprendizaje cooperativo no es una actividad, sino una metodología educativa que se basa en el trabajo en pequeños grupos, generalmente heterogéneos, en que los alumnos trabajan juntos para mejorar su propio aprendizaje y el de los demás*”.

Slavin (1987), sugiere que: “*el aprendizaje cooperativo se da cuando los métodos educacionales permiten a los estudiantes trabajar y aprender en grupos pequeños y heterogéneos en cuanto a habilidades y conocimientos. Bajo condiciones ideales el aprendizaje cooperativo resulta ser una estrategia de enseñanza altamente estructurada que se aprovecha del hecho de que muchos estudiantes aprenden mejor cuando interactúan con sus semejantes.*”

“*Para desarrollar un aprendizaje cooperativo auténtico es necesario un cambio en la manera de entender la docencia, ya que la labor del profesor no es dar respuestas en función de su posición de poder, sino ayudar en los procesos de toma de decisiones dejando la última palabra al grupo. De esta manera el alumnado se responsabiliza de revisar mutuamente lo aprendido y ayudarse para resolver las dudas y problemas que surjan. Este método de trabajo también beneficia al profesor, ya que puede dedicar más tiempo a explicar nuevas informaciones a otros grupos*” (Ovejero, 1990).

Con el trabajo cooperativo pretendemos:

- ✚ Incrementar el nivel de aprendizaje mediante la interacción.
- ✚ Facilitar diferentes estilos de aprendizaje.
- ✚ Conseguir mayor retención de la información.

- ✚ Fomentar la verbalización de pensamientos e ideas.
- ✚ Fomentar el desarrollo de habilidades, valores y actitudes.
- ✚ Dar retroalimentación a tiempo.
- ✚ Aumentar la motivación.
- ✚ Enseñarles a pensar.

4.2 ELEMENTOS BÁSICOS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO

Según Johnson y colaboradores, citado en Ovejero (1990) y Echeita (1997), los elementos básicos del aprendizaje cooperativo son:

- ✚ **Interdependencia positiva.** Es el núcleo del aprendizaje cooperativo y está asegurada cuando todos los miembros del grupo son conscientes de que no pueden alcanzar el éxito a menos que los alcancen también sus compañeros.
- ✚ **Responsabilidad individual y grupal.** Los integrantes de un grupo cooperativo tienen que asumir una doble responsabilidad, de grupo e individual, excluyendo la posibilidad de que trabajar en grupo signifique que los integrantes diluyan la responsabilidad de su propio aprendizaje. Se debe evaluar el dominio de cada estudiante para que sepa cómo va su progreso y el del resto de sus compañeros, para que todos puedan alcanzar los objetivos.
- ✚ **Interacción positiva cara a cara.** En esta interacción, el hecho de dar y recibir ayuda desempeña un papel fundamental. Los alumnos pueden preguntar sin reparos y el número de personas que les pueden responder se multiplica, aumentando las oportunidades de esclarecer sus dudas. Este intercambio se da cuando los estudiantes se explican oralmente cómo resolver un problema. Mediante la interacción se promueven las habilidades sociales necesarias para la colaboración, tales como liderazgo, habilidades de comunicación y habilidades de negociación.
- ✚ **Habilidades interpersonales y de grupo.** Es necesario enseñar al alumno determinadas habilidades sociales. Hay que cultivar y potenciar su autoestima, autonomía y autoconfianza. Los estudiantes deben poseer y utilizar sus capacidades de decisión para generar confianza, comunicar y gestionar los conflictos que surjan, aprendiendo a resolver sus propios problemas y a criticar sin herir. Se promueve que el liderazgo se rote en la medida de lo posible.
- ✚ **Revisión del proceso del grupo.** Al finalizar la tarea, cada miembro del grupo analiza su propio desempeño y el de su grupo. Según Domingo (2010) los alumnos podrían plantearse las siguientes cuestiones. Las dos primeras van destinadas a todo el grupo y las dos restantes sirven para que los alumnos reflexionen de manera individual sobre el desarrollo de sus aportaciones.
 - *¿Qué ha hecho cada uno que sea de utilidad al grupo?*
 - *¿Qué podría hacer cada componente para que el grupo funcione aún mejor mañana?*

- *¿Qué he aprendido hoy?*
- *¿Qué me ha quedado poco claro o creo que no he entendido?*

4.3 CLAVES DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO

Las claves del aprendizaje cooperativo son las siguientes:

- ✚ Tamaño de los grupos. Los grupos de aprendizaje cooperativo necesitan ser suficientemente pequeños para que cada uno se comprometa en conversaciones mutuas mientras están realizando las metas grupales, por tanto, ha de oscilar entre dos y seis miembros (Johnson y Johnson, Holubec, 1984).
- ✚ Formación de los grupos. Conviene que sean heterogéneos con el fin de mejorar la calidad del razonamiento (Velázquez Callado, 2004).
- ✚ Distribución en el aula. En las reuniones durante las sesiones el alumnado de un mismo grupo debería de estar lo suficientemente cerca unos de otros como para comunicarse eficazmente, además esta disposición ayuda a que el profesor tenga un fácil acceso a cada grupo (Velázquez Callado, 2004).
- ✚ Intervenciones del profesor. El profesor ha de proporcionar asistencia en las tareas y supervisar los grupos, con el fin de mejorar el aprendizaje.
- ✚ Objetivos de cada lección. Cada lección debe incluir dos tipos de objetivos: académicos y sociales. Un grupo alcanzará la meta deseada sólo si todos sus componentes la han alcanzado. (Velázquez Callado, 2004).
- ✚ Evaluación del aprendizaje y revisión del funcionamiento de los grupos. Cada grupo debe ser evaluado de acuerdo con los criterios previamente establecidos, dados a conocer y aceptados por el alumnado. Además ha de ser capaz de reflexionar y evaluar su aprendizaje y el funcionamiento para determinar qué acciones del grupo resultaron útiles y cuáles no y, en consecuencia, tomar decisiones. Se debe proporcionar tiempo suficiente para que realicen su autoevaluación y coevaluación grupal al final de cada actividad cooperativa (Johnson y Johnson, 1982).

4.4 VIRTUDES DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO

El Aprendizaje Cooperativo es probablemente el paradigma educativo mejor documentado y sobre el que más se ha investigado. Es por ello que se conocen perfectamente sus múltiples virtudes, y pueden citarse, para cada una de ellas, diversos trabajos de investigación que la sustentan. En esta sección se describen las más destacadas (Javier Bará y Joan Domingo, Universitat Politècnica de Catalunya).

✚ **Promueve la implicación activa del estudiante en el proceso de aprendizaje.**

A pesar de la evidencia científica de que la atención de los estudiantes decae muy rápidamente pasados 15-20 minutos desde el inicio de una clase expositiva, esta estrategia docente continúa siendo la más utilizada, de manera que el estudiante queda relegado al papel de mero espectador pasivo. Las técnicas de aprendizaje cooperativo permiten que todos los estudiantes se impliquen más con la materia de estudio y con sus compañeros.

✚ **Capitaliza la capacidad que tienen los grupos para incrementar el nivel de aprendizaje mediante la interacción entre compañeros.**

La investigación muestra que los alumnos pueden tener más éxito que el propio profesor para hacer entender ciertos conceptos a sus compañeros. La razón fundamental de este hecho es que los compañeros están más cerca entre sí por lo que respecta a su desarrollo cognitivo y a la experiencia en la materia de estudio. Se ha comprobado también que no sólo el compañero que aprende se beneficia de la experiencia, sino que el que explica consigue una mayor comprensión de la materia. Además, el uso de grupos aumenta la probabilidad de que los estudiantes se reúnan fuera de clase para continuar estudiando juntos.

✚ **Reduce los niveles de abandono de los estudios.**

La aplicación de técnicas de aprendizaje cooperativo tiene como resultado una mayor persistencia de los alumnos en el esfuerzo necesario para completar sus estudios. Las razones son:

- a) Se facilita la integración social, que puede satisfacer la fuerte necesidad de afiliación que tienen muchos estudiantes. Se manifiesta también un mayor nivel de satisfacción con las actividades de clase.
- b) La interdependencia positiva incrementa el compromiso de los estudiantes con sus compañeros.

✚ **Permite conseguir los objetivos de la enseñanza y de la educación general.**

El aprendizaje cooperativo tiene diferentes elementos en sintonía con los objetivos de una educación general:

- a) La formación de grupos heterogéneos, permite que los alumnos estén expuestos a una diversidad de experiencias y perspectivas. La asignación de diferentes roles a los miembros del grupo, facilita que la tarea se aborde desde distintos puntos de vista.
- b) La mayor responsabilidad del estudiante en el proceso de aprendizaje, que le permite trabajar con un grado superior de independencia respecto a la figura que representa la autoridad.

✚ **Promueve el aprendizaje independiente y autodirigido.**

La capacidad para aprender de forma autónoma durante toda la vida es uno de los requisitos que con más insistencia se señalan como esenciales para tener éxito en la sociedad del siglo XXI. El aprendizaje cooperativo

permite que los estudiantes trabajen de forma independiente y que asuman responsabilidades en su propio proceso de aprendizaje.

✚ **Promueve el desarrollo de la capacidad para razonar de forma crítica**

Hay diferentes elementos en el aprendizaje cooperativo que son consistentes con los requisitos para desarrollar la capacidad para el razonamiento crítico:

- a) Enfrentarse con un problema desde una perspectiva crítica y adoptar alternativas diferentes representa siempre un riesgo emocional importante. El soporte que ofrece un grupo de compañeros hace que sea más fácil de asumir.
- b) El desarrollo de una perspectiva crítica requiere la experimentación de situaciones en las que los estudiantes puedan independizarse del profesor.
- c) El hecho de que en el aprendizaje cooperativo se use un cierto tiempo para la reflexión sobre la calidad de la interacción entre los miembros del grupo hace que los estudiantes tengan que adoptar una perspectiva crítica sobre su proceso de aprendizaje.

✚ **Facilita el desarrollo de la habilidad para escribir con claridad.**

El trabajo en grupo ofrece a los estudiantes la oportunidad de escribir para una audiencia que habla su mismo lenguaje, siendo este el primer paso para el desarrollo de una escritura más académica.

✚ **Facilita el desarrollo de la capacidad de comunicación oral.**

El miedo a hablar en público, que muchos estudiantes manifiestan, puede dificultar el desarrollo de su capacidad de expresión oral. El trabajo cooperativo en grupos pequeños puede ofrecer un escenario más confortable y amigable para dar los primeros pasos.

✚ **Incrementa la satisfacción de los estudiantes con la experiencia de aprendizaje y promueve actitudes más positivas hacia la materia de estudio.**

Este hecho se ha demostrado sobre la base de encuestas de satisfacción de los estudiantes. Además, se ha visto que cuando hacen un curso en el que se promueve la interacción entre compañeros aumenta la probabilidad de que elijan asignaturas optativas de la misma materia.

✚ **Permite acomodar los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes de hoy día.**

La investigación ha demostrado que ciertos colectivos de estudiantes tienen un rendimiento académico mayor cuando se utiliza el aprendizaje cooperativo. Estos colectivos de estudiantes son:

- a) Miembros de un grupo racial o étnico comunitario.
- b) Estudiantes adultos.
- c) Mujeres u hombres cuando constituyen un grupo minoritario.
- d) Estudiantes extranjeros.

La investigación también muestra que los estudiantes prefieren el trabajo en grupos heterogéneos con una cierta diversidad cultural.

✚ **Facilita un mayor rendimiento académico en las áreas de matemáticas, ciencia y tecnología.**

De acuerdo con la investigación, los niveles de fracaso académico en los estudios de matemáticas, ciencia y tecnología son especialmente altos en colectivos de estudiantes minoritarios en estas áreas ya que perciben este tipo de estudios como competitivos, impersonales e individualistas. La investigación indica también que el rendimiento mejora en un contexto más cooperativo.

✚ **Permite la preparación de los estudiantes como ciudadanos.**

El aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a perseguir objetivos comunes, y estimula a que se preocupen más por los demás. Además, permite desarrollar habilidades de carácter cívico, como son: dialogar, adoptar múltiples perspectivas de las cosas, juzgar y actuar de forma colectiva en asuntos de interés común.

✚ **Permite desarrollar la capacidad de liderazgo.**

Algunas de las características del aprendizaje cooperativo están en sintonía con el concepto moderno de liderazgo, que enfatiza la cooperación, el liderazgo de equipos y el reconocimiento de múltiples perspectivas.

✚ **Prepara a los estudiantes para el mundo del trabajo actual.**

Una buena parte de las compañías actuales más exitosas se basan en la utilización de equipos humanos que se autogestionan. No obstante, estas compañías indican que han de dedicar un tiempo importante de entrenamiento en el trabajo porque los titulados que contratan presentan carencias en su capacidad para trabajar en grupo. El aprendizaje cooperativo representa una pedagogía consistente con este contexto laboral que encontrarán los estudiantes al titularse.

Una vez tratadas las virtudes del aprendizaje cooperativo, conviene también conocer las **dificultades** que tenemos que afrontar y que suelen centrarse en las resistencias que genera su aplicación (Barba Martín, 2010), estas son:

- ✚ los obstáculos entre el alumnado y profesorado por su novedad.
- ✚ la falta de compañerismo y socialización.
- ✚ la lentitud en los aprendizajes.
- ✚ la implicación de una carga de trabajo diferente mucho más concentrado y de responsabilidad por parte del alumnado y tiempo de planificación y organización por parte del profesorado.
- ✚ la formación y conocimiento previo tanto por parte del discente como del alumnado. Pese a las dificultades, como se muestran en múltiples estudios (Ovejero, 1990; Velázquez Callado, 2004), a partir de un periodo prolongado de trabajo, se comienza a notar mejoría.

4.5 COMO TRABAJAR COOPERATIVAMENTE EN MATEMÁTICAS

4.5.1 FORMACIÓN DE LOS GRUPOS

Para conseguir auténticos grupos cooperativos hay que respetar dos requisitos: el tamaño del grupo y su duración en el tiempo (Gavilán P.; 2004).

El trabajo en grupo debe durar lo suficiente en el tiempo para que los alumnos maduren y todos sus componentes puedan sacar beneficio.

El tamaño del grupo dependerá del tipo de actividad que se vaya a realizar, no conviniendo que sean muy numerosos porque eleva la complejidad de su funcionamiento, facilitando que la responsabilidad individual se diluya y que unos se beneficien del trabajo de otros, generando una sensación de malestar que provoca tensiones y enfrentamientos difíciles de resolver. Para empezar conviene formar grupos pequeños donde se vaya adquiriendo la experiencia de trabajar cooperativamente, siendo de tres a cinco estudiantes un buen número.

La formación de los grupos dependerá igualmente de las tareas a realizar. Para empezar conviene formar grupos heterogéneos, donde estén representados los distintos niveles de la clase. Esta elección produce una mejora en el rendimiento tanto de los alumnos menos aventajados, como de los más hábiles.

De acuerdo con Pere Pujolàs Maset (2003) podemos distinguir los distintos tipos de agrupamientos:

✚ **Los equipos de base** son permanentes y siempre de composición heterogénea. Lo ideal es que, una vez consolidados, se puedan mantener durante todo el ciclo formativo. El número de componentes de cada equipo de base está relacionado con su experiencia a la hora de trabajar de forma cooperativa y generalmente están formados por 3 o 4 alumnos.

Otra característica imprescindible es que la composición de los equipos sea heterogénea, porque la diversidad de los miembros de un mismo equipo es vista como una fuente de nuevos conocimientos y un estímulo para el aprendizaje. Sólo de forma esporádica, y para una finalidad muy concreta, puede ser interesante agrupar a los alumnos de forma más homogénea. Para asegurar la necesaria heterogeneidad lo más habitual es que sea el profesor el que distribuya a los alumnos en los diferentes equipos de base, teniendo en cuenta, por supuesto, sus preferencias y sus posibles incompatibilidades.

Una manera habitual de proceder para formar los equipos de base es la siguiente: se distribuyen los alumnos del grupo clase en tres columnas. En la columna de un extremo se coloca una cuarta parte de los alumnos, procurando colocar en ella los alumnos más capaces en todos sentidos (no sólo los que tengan un rendimiento más alto, sino también los más motivados, los más capaces de ilusionar y animar a los demás, de “estirar” al equipo...). En la columna del otro extremo se coloca la cuarta parte de alumnos más

“necesitados” de ayuda. En la columna del centro se colocan las dos cuartas partes restantes (la otra mitad del grupo clase). Cada equipo se forma con un alumno de la primera columna, dos de la columna del centro, y uno de la tercera columna, procurando, además, que se dé un equilibrio en las demás variables: género, étnia, etc.

✚ **Los grupos esporádicos** se forman durante una clase y, como mucho, duran lo que dura la sesión, pero también pueden ser menos tiempo (desde cinco minutos para resolver alguna cuestión o algún problema, hasta un tiempo más largo para llevar a cabo alguna pequeña actividad).

La cantidad de miembros de un equipo esporádico puede variar mucho (desde un mínimo de 2 o 3 alumnos, hasta un máximo de 6 o 8) y su composición puede ser tanto homogénea como heterogénea (en cuanto a las características, rendimiento y capacidad de sus miembros).

✚ **Equipos de expertos**, los equipos de base podrían redistribuirse de vez en cuando en equipos de expertos, en los cuales un miembro de cada equipo se “especializaría” en un conocimiento o habilidad hasta hacerse “experto” en ello, para que más tarde transmitiera sus conocimientos dentro del equipo de base.

Se podrían organizar de vez en cuando algunas sesiones en las que los estudiantes se agruparan en equipos de expertos, en los que uno de ellos “dirigiera” a los demás en ese ejercicio. En este caso, lo ideal sería que todos los alumnos pudieran actuar como “expertos” en un equipo u otro.

4.5.2 PAPEL DEL PROFESOR

Diferentes autores, entre ellos Gavilán, P. (2004), asumen que el papel del profesor debe ser de supervisor, moderador y controlador del funcionamiento y trabajo de los grupos, creando un contexto social realmente cooperativo. Debe exponer en que consiste la tarea, los objetivos, observar lo más posible y solo intervenir cuando sea necesario, ciñéndose a:

- ✚ Aclarar algún concepto a nivel general de toda la clase.
- ✚ A un grupo concreto, cuando así lo requieran sus miembros.
- ✚ A un miembro de un grupo cuando la situación así lo demande.

Entre las actuaciones deseables del profesor podemos destacar las siguientes (Davidson, 1990):

- ✚ Provocar discusiones matemáticas en los grupos.
- ✚ Detectar cuando no avanzan e intervenir sólo en los casos necesarios.
- ✚ Observar las dificultades en las interacciones de los componentes del grupo y buscar modos creativos de resolverlas.
- ✚ Confiar en sus capacidades.

- ✚ Enfatizar la legitimidad de estar en desacuerdo y la obligación de argumentar para defender las propias ideas.
- ✚ No permitir que ningún estudiante domine la discusión de modo que excluya o limite seriamente las contribuciones de los demás.

4.6 EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO

Como aparece en el ya mencionado libro de Paloma Gavilán, el aprendizaje debe ser evaluado de acuerdo con los criterios previamente establecidos, dados a conocer y aceptados por el alumnado. La evaluación se hará del rendimiento académico y del trabajo en grupo. Es necesario justificar que la nota se va a ver afectada por el trabajo de los componentes de cada grupo base. Esta es la manera de asegurar la responsabilidad individual y grupal que han adquirido.

4.6.1 EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO

Citando otra vez a Gavilán P. (2004), la apuesta por una puesta en práctica del aprendizaje cooperativo conlleva una serie de reflexiones previas a la evaluación académica del alumnado, como son:

- ✚ Especificar los objetivos académicos pretendidos y diseñar la tarea para conseguirlos.
- ✚ Determinar claramente cuáles son los criterios de evaluación.
- ✚ Comunicar de manera explícita al alumnado tanto los objetivos como las tareas y los criterios evaluativos.
- ✚ Hacer un seguimiento del trabajo académico de los estudiantes en sus grupos cooperativos.

Para recoger datos del alumnado que permitan la posterior elaboración de un juicio lo más ajustado posible de su actuación y competencia vamos a utilizar las siguientes opciones:

- ✚ **Observación sistemática de los estudiantes mientras trabajan.** Requiere tomar notas o hacer uso de guías de observación elaboradas para este fin (Johnson, Johnson y Holubec 1993). Es una de las formas de averiguar el nivel de conocimientos al ver como resuelven la tarea y detectar sus dudas y lagunas.
- ✚ **Formulación de preguntas en clase.** Nos permite determinar el nivel de conocimientos y comprensión de las tareas. Por ejemplo, cuando un grupo ha terminado un ejercicio, el profesor elige al azar un miembro del grupo y le pide que explique la cuestión. Continúa con los demás miembros hasta finalizar todas las actividades propuestas. Si todos responden correctamente, el grupo obtiene una puntuación extra.
- ✚ **Revisar las tareas.** Al inicio de la clase los estudiantes de cada grupo ponen sobre la mesa la tarea y, mediante una hoja de respuestas entregada por el

profesor, comparan y puntúan los resultados, revisándose el trabajo unos a otros. El objetivo es asegurar que todos los miembros del equipo traen sus tareas hechas y han entendido la resolución.

- ✚ **Prueba individual.** Después de cada lección los alumnos pasan por una prueba individualmente que se prepara en grupo para asegurar que todos los participantes han comprendido la materia. Una vez realizado el examen individualmente, éste vuelve a ser resuelto en el grupo, tratando de llegar a soluciones comunes.
- ✚ **Autoevaluación y coevaluación.** El compromiso que cada persona adquiere consigo misma y con sus compañeros lleva inevitablemente a valorar la calidad y nivel del propio aprendizaje y de las personas del equipo.

4.6.2 EVALUACIÓN DEL TRABAJO EN GRUPO Y DE LAS HABILIDADES SOCIALES

Es necesario especificar detalladamente al alumnado cuáles son los comportamientos deseables en el trabajo en equipo y que van a ser posteriormente valorados como un objetivo más. Puntualidad, realización diaria de las tareas de casa, control de las conductas verbales y no verbales, ofrecimiento y petición de ayuda cuando es necesario y disponer del material necesario para trabajar en clase pueden ser algunas de ellas (Gavilán P. 2004).

Las fuentes de información habituales que permiten recoger datos sobre el trabajo de los grupos son las siguientes:

- ✚ **Observación.** La observación atenta por parte del profesor, anotando como son las interacciones entre los miembros de cada grupo es la principal fuente de información.
- ✚ **Autoevaluación y coevaluación.** Cada persona reflexiona sobre su comportamiento así como el de los demás componentes de su grupo. Esto nos ayudará a ver qué actuaciones ayudan al trabajo del equipo y cuáles entorpecen y conviene evitar en el futuro.
- ✚ **Puesta en común.** Antes de dar por terminada la lección, se dedica un tiempo a analizar en común el funcionamiento de cada grupo. En esta puesta en común es cuando, como fruto de las anotaciones del profesor, de las observaciones hechas por sus miembros, se informa del funcionamiento del grupo y se proponen nuevos logros para la siguiente lección.

4.6.3 CALIFICACIONES

Según la investigación desarrollada sobre los sistemas de puntuación en el aprendizaje cooperativo, los que producen mejores resultados son aquellos que dan igualdad de oportunidades a todos los participantes, valorando no sólo el rendimiento académico sino también el esfuerzo realizado, de manera que todos los estudiantes

dispongan de las mismas oportunidades para contribuir con su actuación a la puntuación del grupo. Por otro lado, para el buen funcionamiento es importante establecer una interdependencia en las calificaciones, de modo que se asegure, en cualquier sistema de puntuación elegido, que las actuaciones de cada componente van a afectar a la nota del resto de sus compañeros.

Se pueden arbitrar distintos métodos para establecer un sistema de puntuaciones que satisfaga estos requisitos:

✚ **Todos los componentes del grupo reciben la misma calificación.**

- Se puede optar por dar a cada componente del grupo la nota media de las puntuaciones individuales.
- Si se quiere que cada estudiante sienta que aporta algo a la nota del conjunto, se puede dar la calificación obtenida al sumar todas las puntuaciones individuales.
- Cuando cada grupo elabora un único producto final, en el que todos los miembros participan por igual, cada miembro del equipo recibirá la misma nota.
- Si cada estudiante elabora un trabajo, se selecciona uno al azar y cuya nota determinará la de todo el grupo. Cada trabajo debe haber sido leído y corregido por los demás miembros del equipo.
- Calificar al grupo con la puntuación más baja de sus miembros, pretendiendo que se ayude a los alumnos menos aventajados.

✚ **No todos los miembros de un mismo grupo tengan la misma calificación.**

- Dar a cada estudiante su puntuación individual más la media de su grupo.
- Dar a cada estudiante su puntuación individual más otros puntos extra previamente acordados, en el caso de que todos los miembros del grupo alcancen los mínimos previstos.

✚ **Suma de calificaciones.** Sumar a la calificación la que proviene del comportamiento y el desarrollo de las habilidades sociales dentro de cada equipo.

5. LAS TICS APLICADAS A LA EDUCACIÓN

“La Unión Europea y la UNESCO se han propuesto mejorar la calidad y la eficacia de los sistemas de educación y de formación, lo que implica garantizar el acceso de todos a las tecnologías de la información y la comunicación” (BOE, 2006, pp. 17160).

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la ciencia y la cultura; UNESCO; en su documento: Estándares de Competencias en Tecnologías de Información y Comunicación para docentes, reflexiona que para poder vivir, aprender y trabajar con éxito en una sociedad cada día más compleja, rica en información y basada en el conocimiento, los estudiantes deben utilizar la tecnología digital con eficacia.

Según el Real Decreto 1467/2007 de 2 de Noviembre y la Orden de 5 de Agosto de 2008, el Bachillerato tiene como misión la consecución, entre otros, de los siguientes objetivos:

Objetivos de etapa:

- g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.*
- i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.*
- k) Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.*

Objetivos de área:

- 2. Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.*

En el contexto de los cambios que la sociedad demanda a la escuela, cabe mencionar que debe habilitar al alumno para el trabajo en equipo y debe prepararlo para el uso efectivo, consciente y crítico de las nuevas tecnologías (González y García, 2007).

Existe un uso considerable de tecnología por parte del alumnado, lo cual nos obliga a plantearnos la necesidad de conceder mayor atención a los intereses del educando, integrando en el aula medios físicos como el ordenador, la pizarra digital o las tablets, que nos permiten utilizar los medios virtuales adaptados a distintas necesidades educativas (software como Hojas de Cálculo, GeoGebra, Wiris, etc).

Cuban L. (2001) afirma que los enfoques tradicionales en la enseñanza, como dependencia en los libros de texto, instrucción masiva, conferencias y pruebas de respuesta múltiple, están obsoletas en la era de la información.

5.1 ¿POR QUÉ UTILIZAR TIC EN EDUCACIÓN?

En la actualidad existe una confluencia de cambios en los ámbitos económico, científico y tecnológico, que están modelando el rumbo de la educación. La creciente presencia de dichos cambios sociales respecto al uso de las tecnologías, está dando lugar a que éstas formen parte de la vida cotidiana, académica y laboral de los ciudadanos. Por lo que, desde el ámbito educativo, se debe tener en consideración que los niños que se forman hoy, tendrán que competir en un mercado laboral y desarrollar su vida dentro de ese contexto futuro. Todo esto supone la necesidad de ofertar y diseñar un proceso de enseñanza aprendizaje que desarrolle las competencias respecto al uso de las TIC que son y serán demandadas por su entorno cotidiano, académico y profesional.

Varios investigadores han comprobado que la combinación de la inteligencia artificial, las ciencias cognitivas y el desarrollo de la tecnología pueden generar, y ya lo están haciendo, un cambio radical en los procesos de enseñanza-aprendizaje y en la solución de problemas. Existen numerosas publicaciones, las cuales avalan que el aprendizaje, mediado con software educativo, favorece significativamente el logro académico de los alumnos: (Vaquero, A. (1998) *Las TIC para la enseñanza, la formación y el aprendizaje*. Novática; Mena, B, Marcos, M. y Mena, J.J. (1996). *Didáctica y nuevas tecnologías en educación*. Madrid: Escuela Española.).

Por otro lado, los contenidos son más fáciles de comprender porque el alumnado puede experimentar y aprender mediante manipulación directa e individual con representaciones concretas del contenido a estudiar, lo que potencia su capacidad para aprender; puede corregir de forma inmediata los errores en los que incurre, avanzando con autonomía a un ritmo adaptado a sus necesidades.

5.2 INFLUENCIA DE LAS TICS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Según José Elias Arrieta (2013) en su trabajo “Las TIC y las matemáticas”, algunos de los aspectos que se ven más directamente influenciados en el proceso de enseñanza-aprendizaje usando TIC son: la interactividad, la motivación, la autonomía, la cooperación y la comprensión de los contenidos por parte del alumnado.

La interactividad es un elemento destacable, ya que permite al estudiante ejercer una relación directa con los contenidos que está trabajando y manipularlos con mayor independencia, creando trabajos propios y únicos. Por otro lado, el docente puede beneficiarse de esta interactividad en sus explicaciones utilizando un software, por ejemplo, Geogebra en la pizarra digital (Sulbarán Piñeiro & Rojón González, 2006).

Así mismo, la motivación en el alumnado se incrementa, precisamente, porque, gracias a las TIC, la materia a trabajar resulta más interesante, grata y entretenida; además, el alumnado tiene la posibilidad de investigar y aprender jugando (Zugowitki, 2012).

Todo esto tiene como consecuencia un papel más activo del estudiante respecto al trabajo, aumentando sus posibilidades de convertir la información que han recibido en conocimiento y, en consecuencia, consiguiendo aprendizajes significativos. Así, la capacidad para construir su propio conocimiento aumenta gracias a las TIC.

El trabajo cooperativo también se ve influido por el uso de las TIC, ya que se propicia la realización conjunta de experiencias, trabajos, etc. no sólo entre los estudiantes sino entre los docentes.

5.2.1 INFLUENCIA DE LAS TIC EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En el caso concreto de las matemáticas, las TIC tienen un importante papel que se manifiesta de varias formas. Gracias a ellas se genera una rica interacción del estudiante con el conocimiento mediante escenas matemáticas interactivas y dinámicas que potencian su creatividad, siendo un potente laboratorio en el que los abstractos conceptos matemáticos cobran vida.

El aprendizaje de las matemáticas conlleva procesos complejos que requieren de una gran diversidad de metodologías para lograr la máxima eficacia posible. La utilización de imágenes, gráficas, hojas de cálculo, etc. en calculadoras y ordenadores permite avanzar con suma rapidez y, lo más importante, comprender y retener la información necesaria. Asimismo, las TIC abren la posibilidad de crear nuevos ambientes de aprendizaje y, por tanto, de desarrollar nuevas metodologías que permitan aprovechar al máximo los recursos de los que disponemos. (Elias Arrieta, J.; 2013).

El uso de éstas en el proceso de enseñanza de las matemáticas tiene notables influencias positivas en el aprendizaje del alumnado que debemos considerar:

- ✚ Las TIC posibilitan que los estudiantes interaccionen con las matemáticas, lo que facilita su comprensión y mejoran su aprendizaje.
- ✚ La observación de conceptos matemáticos a través de una imagen que puede ser manipulada ayuda en su comprensión.
- ✚ Mejora la capacidad del alumnado en tareas como organizar y analizar datos, así como en la realización de cálculos de forma eficaz.
- ✚ Aumentan la capacidad del alumnado para tomar decisiones y comenzar a resolver problemas, permitiendo que los estudiantes interaccionen entre ellos mismos y su profesor/a, aportando su opinión o punto de vista sobre el objeto visualizado, es decir, posibilita también desarrollar el pensamiento crítico.

El uso de las TIC, además de lo anteriormente reseñado, es muy importante porque permite al educando relacionarse con un medio que es familiar y cercano a su entorno, consiguiéndose así un importante efecto motivador. Deben de utilizarse principalmente para estimular las capacidades intelectuales, explicación de

determinados conceptos matemáticos, para desarrollar gráficas, imágenes, datos y poder diferenciar y comparar cada caso concreto.

5.3 PAPEL DEL PROFESOR ANTE EL USO DE LAS TICS

La tecnología permite a los docentes ser más eficaces en la realización de las actividades en el aula, siempre que se dé un uso adecuado a las herramientas tecnológicas que se dispongan (Posada Prieto, 2010).

Las TIC en esta parte del proceso, van a requerir que el docente tenga adquiridas una serie de competencias profesionales, no solamente en el uso de la herramienta que corresponda a cada momento, sino más importante aún, en la metodología que va a utilizar y que será la que haga que el proceso alcance los objetivos que se haya planteado inicialmente. Para ello son esenciales varios requisitos previos con el fin de que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea lo más exitoso posible.

- ✚ En primer lugar, el manejo de las TIC debe ser una **tarea prioritaria** para el docente que pretenda cumplir con lo exigido en el Decreto, ya que difícilmente se puede enseñar a los estudiantes a desenvolverse con medios tecnológicos si el propio educador es desconocedor del funcionamiento de éstos. (Plan Avanza, 2007).
- ✚ En segundo lugar, el docente debe poseer en el aula los **medios físicos y virtuales** para enseñar usando las TIC. Con frecuencia, debe ejercer el papel de técnico que pueda solucionar problemas derivados del uso de dichos medios. Asimismo, a la hora de gestionar una clase en la que se vayan a emplear las TIC de forma significativa debe tener en cuenta el número de estudiantes que hay en el aula y la cantidad de ordenadores que hay por estudiante. Estos factores condicionan la organización del aula, cuya gestión depende de si hay una pizarra digital, si hay ordenadores para cada estudiante o para cada grupo pequeños, y si las TIC se usan en la propia aula o en la sala de informática. Otro aspecto que también influye es el conocimiento sobre el uso de los medios tecnológicos que dispone el alumnado. Si éste posee un nivel bajo, medio o alto en cuanto al uso de dichas tecnologías, variará fundamentalmente la actuación del profesor en la gestión de la clase (Plan Avanza, 2007).

5.4 LA PLATAFORMA MOODLE Y EL BLOG DEL PROFESOR

5.4.1 LA PLATAFORMA EDUCATIVA MOODLE

El Sistema Educativo debe responder, y al mismo tiempo anticiparse, a los acontecimientos, dotando al alumnado de las competencias tecnológicas y digitales necesarias. La pedagogía digital debe orientarse hacia la adquisición y el desarrollo de

las habilidades del aprendizaje autónomo, de comunicación, de investigación, de análisis y de síntesis.

La plataforma Moodle es un sistema de gestión de la enseñanza que nos permite crear cursos on-line a través de Internet, pudiéndose utilizar para diseñar y gestionar asignaturas. El sistema se sustenta en la teoría constructivista (colaboración, actividades, reflexión crítica, etc.) en pedagogía, por la que se afirma que el conocimiento se construye en la mente del estudiante en lugar de ser transmitido sin cambios a partir de libros o enseñanzas. Esta herramienta, adaptada a las características de una asignatura, se convierte en un instrumento idóneo para la planificación y seguimiento de actividades acordes con la metodología docente que se deriva del Espacio Europeo de Educación Superior.

La plataforma es adecuada tanto para las clases totalmente en línea o a distancia, así como para complementar el aprendizaje presencial. Permite la gestión de la asignatura, y son muchas sus utilidades, desde colgar los más diversos contenidos multimedia (apuntes, videos, imágenes,...) hasta poder evaluar las diferentes tareas de nuestros alumnos o realizar exámenes on-line. Resulta esencial para crear unidades didácticas y fomentar el autoaprendizaje y el aprendizaje cooperativo.

Cada participante del curso puede convertirse en profesor además de alumno, pudiendo proporcionar conocimientos exhaustivos sobre un tema en concreto o ayudar a otros compañeros con sus dudas. Además de favorecer la participación e implicación de las familias.

Para comunicarnos con nuestros alumnos, dispone de varias opciones siendo la más utilizada la de los foros, por medio de los cuales podemos gestionar las tutorías de manera individual o grupal. Facilita el aprendizaje cooperativo a través de estos foros en los que los propios alumnos dan respuesta a las preguntas y dudas generales planteadas por otros.

Por último, para la evaluación disponemos de múltiples opciones, enviando tareas que estén en relación a las capacidades o competencias que tengan que acreditar los alumnos. También es factible preparar cuestionarios específicos por temas autoevaluables y con feed-back inmediato al alumno de sus resultado.

En resumen, la plataforma Moodle resulta muy útil ofreciendo un servicio automatizado y personalizado a sus necesidades e intereses, permitiendo el ritmo individual y los diferentes ritmos de aprendizaje.

5.4.2 EL BLOG COMO HERRAMIENTA EDUCATIVA

Los edublogs son blogs que tienen un fin específico de carácter educativo, cuyo principal objetivo es apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Lara, 2005).

Por este motivo, los edublogs presentan un interesante potencial como herramienta para la enseñanza puesto que tienen un manejo muy sencillo, bajo coste y amplían los límites espacio-temporales del aula presencial ordinaria (González, García y Gonzalo, 2011).

Las características propias de los blogs hacen de esta herramienta un instrumento de gran valor para su uso educativo dentro de un modelo constructivista donde el profesor actúa como un mediador, facilitando los instrumentos necesarios para que sea el estudiante quien construya su propio conocimiento, Lara (2005).

La bibliografía especializada recoge trabajos que muestran las virtudes del uso pedagógico del blog en la enseñanza para fomentar el aprendizaje cooperativo, la motivación para leer y escribir, la autoestima de sus usuarios, el intercambio de ideas, el trabajo en equipo, la capacidad de síntesis, la expresión escrita, la creatividad, la comunicación o la iniciativa. Además, los blogs propician la interactividad entre los alumnos y les ayudan a explorar material adicional y complementario para la asignatura y permiten prolongar las actividades formativas desarrolladas por los estudiantes más allá de las aulas, ampliando las oportunidades de aprendizaje a la vida cotidiana, de tal manera que pueda germinar en un aprendizaje para toda la vida (Drexler, Dawson & Ferdig, 2007; Amorós-Poveda, 2007; Cuesta, P. y Gómez, A.M. (2008)).

Stephen Downes, en su blog “*Half and Hour*”, escribió una entrada con fecha del 13 de abril del 2009, donde comenta el uso de los blogs en la educación, siendo los puntos más relevantes los siguientes:

- ✚ Los blogs educativos se usan para crear comunidades de aprendizaje.
- ✚ Para dar a los estudiantes una voz y propiedad de su propio aprendizajes.
- ✚ Dar una audiencia real y potencial, en todo el mundo, del trabajo hecho por ellos.
- ✚ Les permite llevar a cabo investigaciones colectivas.
- ✚ Aprenden una variedad de “habilidades”, además de la materia objeto del blog.

Los beneficios que aporta el uso de los blogs en la educación han sido reportados por Núñez (2006) donde podemos resaltar:

- ✚ Se fomenta la cooperación y colaboración entre los estudiantes ya que pueden trabajar juntos en el desarrollo de proyectos.
- ✚ Su estructura y naturaleza fomenta el aprendizaje activo y promueve el que los estudiantes se conviertan en expertos en los temas de la clase.
- ✚ La estructura cronológica y el calendario de los blogs facilitan que los estudiantes entreguen sus tareas a tiempo.
- ✚ Proporcionan un excelente medio para comunicar altas y claras expectativas a los estudiantes de una forma continua.
- ✚ El uso de los blogs facilita la incorporación de una diversidad de estilos de aprendizaje. Ofrece la oportunidad a los estudiantes que no les gusta hablar en clase, por ejemplo, de expresarse mediante la escritura.
- ✚ Los blogs fomentan una comunicación más efectiva entre los estudiantes y el profesor.

- ✚ Permite a padres de familia y tutores revisar y evaluar el avance de sus hijos en la escuela.

En el desarrollo de este trabajo hemos utilizado el blog relacionado con las matemáticas www.angelmiguelrubio.wordpress.com, donde están presentes todos los contenidos de la materia, así como material para ampliar lo tratado durante el curso. Además hay gran cantidad de recursos digitales tales como tutoriales, actividades TIC, aplicaciones e historia de los contenidos, para que nuestros alumnos puedan o bien profundizar, o bien reforzar los conceptos trabajados durante el curso.

6. LOS PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

6.1 DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS

Comencemos este punto dando algunas definiciones:

- ✚ Barrows y Tamblyn (1980): *aquel aprendizaje que resulta de un proceso de trabajo dirigido hacia la comprensión o resolución de un problema, siendo el problema el punto de partida del proceso de aprendizaje.*
- ✚ Savery (2006): *El ABP es un enfoque instructivo (y curricular) centrado en el alumno que permite al alumno realizar investigación, integrar teoría y práctica y aplicar conocimientos y habilidades para alcanzar una solución viable a un problema determinado.*

Las investigaciones muestran que los estudiantes que aprenden en entornos tradicionales de la enseñanza de las matemáticas están preocupados por los ejercicios, reglas y ecuaciones que deben ser aprendidos, herramientas que son de uso limitado en situaciones desconocidas, como proyectos y ensayos (Sandoval, 1998).

Es por ello que el ejercicio mental realizado activamente por el alumno durante el desarrollo del ABP para resolver problemas matemáticos reales, estimula el razonamiento lógico y propicia el saber pensar y desenvolverse en su mundo futuro.

Podemos describir las siguientes **características del ABP**:

- ✚ Es un método de trabajo activo donde los alumnos participan constantemente en la adquisición de su conocimiento.
- ✚ El método se orienta a la solución de problemas que son seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos.
- ✚ El aprendizaje se centra en el alumno y no en el profesor o en los contenidos.
- ✚ Es un método que estimula el trabajo colaborativo trabajando en grupos pequeños.
- ✚ Los cursos con este modelo de trabajo se abren a diferentes disciplinas del conocimiento.
- ✚ El docente se convierte en un facilitador o tutor del aprendizaje. Al trabajar con el ABP la actividad gira en torno a la discusión de un problema y el aprendizaje surge de la experiencia de trabajar sobre ese problema, es un método que estimula el autoaprendizaje y permite la práctica del estudiante

al enfrentarlo a situaciones reales y a identificar sus deficiencias de conocimiento.

6.2 FORMAS DE APLICAR EL ABP

De acuerdo con los criterios de Barrows (1986), Johnstone y Biggs (1998):

- ✚ Utilizar problemas sencillos para ilustrar aspectos específicos durante el desarrollo de una clase.
- ✚ Leer previamente a la clase un problema algo más difícil, pero bien estructurado y que contiene toda la información necesaria para su resolución y utilizar este problema como base para el desarrollo de la clase.
- ✚ Analizar, previamente a la clase, un problema más complejo que contiene toda la información necesaria para su resolución y llevar a cabo una discusión sobre el mismo, primero en pequeños grupos y luego mediante una puesta en común en gran grupo.
- ✚ Proporcionar a los alumnos un problema complejo, estructurado pero al que le falta información que va aportando el profesor conforme va siendo necesaria. Los alumnos trabajan en pequeños grupos y se disminuye el porcentaje de clase magistral.
- ✚ Se proporciona a los alumnos un problema algo más complejo que requiere información adicional que deben obtener los propios alumnos. Se trabaja igualmente en grupos bajo la supervisión del profesor.
- ✚ Igual que el anterior pero con una etapa adicional de reevaluación de la solución del problema para analizar la posibilidad de haber utilizado otra información y reflexionar sobre el conocimiento y las habilidades adquiridas durante la resolución del problema.

6.3 VENTAJAS DEL ABP

Son numerosos los estudios que podemos encontrar sobre la aplicación del ABP en los diversos niveles de la educación, y todos ellos remarcan las importantes ventajas que se obtienen al llevar a la práctica esta metodología. Las más representativas son:

- ✚ Mayor motivación y actitud hacia el aprendizaje y hacia los contenidos propios de las matemáticas, porque al estar los alumnos más involucrados en su aprendizaje sienten que interactúan con la realidad (CAM, 2005).
- ✚ Aprendizaje más significativo, con mayor retención de la información (CAM, 2005).
- ✚ Promueve la observación, el análisis de la información, la elaboración de conjeturas, la puesta en práctica de estrategias, la evaluación y la retroalimentación (CAM, 2005).

- ✚ Desarrollo de habilidades de pensamiento al estimular un pensamiento lógico, crítico y reflexivo (CAM, 2005).
- ✚ Integración de un modelo de trabajo que guía el aprendizaje de los contenidos de forma similar a la que el alumnado utilizará en situaciones futuras (CAM, 2005; García y otros, 2006).
- ✚ Incremento de autodirección, puesto que los alumnos asumen la responsabilidad de su aprendizaje y seleccionan los recursos y estrategias que ellos consideran pertinentes, debiendo darse cuenta de sus propias necesidades de aprendizaje (Caiseda y Dávila, 2006).
- ✚ Desarrollo de habilidades interpersonales y grupales, favoreciendo el intercambio de ideas, estrategias y argumentaciones (Hernández y Lacuesta, 2007).
- ✚ Activación del conocimiento previo (CAM, 2005).
- ✚ Integración de diferentes disciplinas (García y otros, 2006; Hernández y Lacuesta, 2007).
- ✚ Mejora en la expresión oral y escrita (Hernández y Lacuesta, 2007).

En la situación del trabajo del grupo ante el problema, el mismo diseño debe estimular que los alumnos utilicen el conocimiento previamente adquirido, en este proceso los alumnos aprenden a aprender, por lo tanto desarrollan la capacidad de aplicar el pensamiento sistémico para resolver las nuevas situaciones que se le presentarán a lo largo de su vida.

6.4 DISEÑO Y USO DE PROBLEMAS EN EL ABP

El eje del trabajo en el ABP está en el planteamiento del problema. Los alumnos se sentirán involucrados y con mayor compromiso en la medida en que identifican en el problema un reto y una posibilidad de aprendizaje significativo.

Características de los problemas en el ABP (Duch, 1999):

- ✚ El diseño del problema debe, comprometer el interés de los alumnos y motivarlos a examinar de manera profunda los conceptos y objetivos que se quieren aprender. El problema debe estar en relación con los objetivos del curso y con problemas o situaciones de la vida diaria para que los alumnos encuentren mayor sentido en el trabajo que realizan.
- ✚ Los problemas deben llevar a los alumnos a tomar decisiones o hacer juicios basados en hechos, información lógica y fundamentada. Los problemas o las situaciones deben requerir que los estudiantes definan qué suposiciones son necesarias y por qué, qué información es relevante y qué pasos o procedimientos son necesarios con el propósito de resolverlos.

- ✚ La cooperación de todos los integrantes del grupo de trabajo es necesaria para poder abordar el problema de manera eficiente.
 - ✚ Las preguntas de inicio del problema deben tener alguna de las siguientes características, de tal modo que todos los alumnos se interesen y entren a la discusión del tema:
 - Preguntas abiertas, es decir, que no se limiten a una respuesta concreta.
 - Ligadas a un aprendizaje previo, es decir, dentro de un marco de conocimientos específicos.
 - Temas de controversia que despierten diversas opiniones.
- De este modo se mantiene a los estudiantes trabajando como un grupo, sacando las ideas y el conocimiento de todos los integrantes.
- ✚ El contenido de los objetivos del curso debe ser incorporado en el diseño de los problemas, conectando el conocimiento anterior a nuevos conceptos y ligando nuevos conocimientos a conceptos de otros cursos o disciplinas.

Los problemas deben estar diseñados para motivar la búsqueda independiente de la información a través de todos los medios disponibles para el alumno y además generar discusión en el grupo.

6.5 *EVALUACIÓN DEL ABP*

Si cambiamos la metodología de enseñanza aprendizaje, debemos plantearnos modificar también la evaluación de lo aprendido. Buscamos un alumno que sea capaz de adquirir, mediante un aprendizaje colaborativo y autónomo, los conocimientos previstos.

Por ello, para evaluar los aprendizajes adquiridos mediante el ABP podemos hacer uso de los siguientes métodos:

- ✚ Efectuar un examen que no implique la reproducción automática de los contenidos estudiados, sino que el alumno deba organizar coherentemente sus conocimientos.
- ✚ Hacer una autoevaluación para que cada alumno, que ha sido dueño de su propio aprendizaje, evalúe sus aprendizajes conseguidos, el tiempo invertido, el proceso seguido, qué preguntas le han supuesto mayor y menor dificultad, etc.
- ✚ Realizar una coevaluación. Como los alumnos han trabajado en grupos colaborativamente, conocer la opinión de los compañeros puede resultar interesante.
- ✚ Observación sistemática del profesor en el aula.

7. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO

“Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.” E.T. Bell (1985).

¿POR QUÉ UTILIZAR LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS?

La revista SUMA de Febrero de 2004 comienza con el siguiente párrafo:

“Con argumentos apoyados en numerosos textos de ilustres matemáticos, pedagogos, historiadores y profesores, se reclama una función didáctica para la Historia de las Matemáticas como instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de su aprendizaje. La Historia es fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de la Matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la Cultura.”

Las Matemáticas constituyen una de las grandes manifestaciones del Pensamiento con un desarrollo milenario relacionado estrechamente con los grandes hitos del conocimiento y de la cultura. Conocida es la implicación de la Matemática con las Ciencias de la Naturaleza, la Tecnología y el Arte; pero sus vínculos con la Filosofía, la Educación, el Lenguaje, la Literatura, la Belleza, la Religión, la Mística, la Política, etc., hacen de ella una manifestación de la racionalidad humana que, navegando a lo largo de la Historia en todos los confines del Pensamiento, vertebra la Cultura, desde las más remotas civilizaciones hasta la inexorable informatización del mundo actual. La permanente interacción del desarrollo matemático con cualquier actividad humana hacen de esta ciencia uno de los grandes logros culturales de la humanidad.

La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la relación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en qué aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban. En suma, conocer, en sentido kantiano, el tránsito de las intuiciones a las ideas y de éstas a los conceptos. (Revista SUMA de Febrero de 2004).

Para Nolla (2001, p.1): *Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y*

acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la Historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporcionan los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado.

A pesar de que gran parte del profesorado asume de forma teórica estos planteamientos, en la práctica la Matemática llega a los alumnos como un producto dogmático, cerrado y acabado.

Podemos encontrar dos razones fundamentales por las cuales debemos integrar la historia en la enseñanza de las matemáticas:

- ✚ La historia provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y que nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías (Barbin et al., 2000).
- ✚ Zapico (s.f.) establece que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden “contextualizarla y humanizarla”. Es decir, la matemática se muestra como producto de la actividad humana, generada a partir de diferentes necesidades a través de muchos siglos de civilización.

Los mismos autores afirman que cada una de estas razones se dan en una secuencia: primero la historia de la matemática puede cambiar la percepción y comprensión del docente acerca de esta disciplina; en segundo lugar, el docente influenciará la forma en que se enseña la matemática y por lo tanto, al final, se afecta la forma en que el estudiante percibe y entiende matemáticas.

Chávez y Salazar (2003), en un estudio realizado con estudiantes de secundaria de Costa Rica, obtienen las siguientes conclusiones acerca de lo que puede aportar el integrar el estudio de la historia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

En cuanto a la enseñanza, la Historia de la Matemática:

- ✚ Promueve un cambio de actitud hacia la matemática.
- ✚ Ayuda para explicar y superar obstáculos epistemológicos.
- ✚ Incentiva la reflexión y una actitud crítica del estudiante.
- ✚ Funciona como integrador de la matemática con otras disciplinas.
- ✚ Debe estar presente en la formación de educadores de la matemática.
- ✚ Fomenta el interés y la motivación de los alumnos hacia la matemática.

En cuanto a los procesos de aprendizaje permite:

- ✚ La contextualización histórica de un concepto o tema.
- ✚ La correlación entre el estudio de un concepto y su evolución histórica.
- ✚ La recreación de problemas matemáticos históricos.
- ✚ La utilización de material concreto y de recursos visuales.
- ✚ El despliegue de material anecdótico y biográfico de personajes matemáticos.
- ✚ Asignar trabajos extra-clase (exposiciones, diseño de representaciones).
- ✚ Introducir expresiones literarias históricas referidas a la matemática (versos, diálogos, metáforas, proverbios y analogías).

Irma Rosa Almidón López en un artículo para la Comunidad de Educadores para la Cultura Científica en Diciembre de 2013, nos explica como la incorporación de elementos de la Historia de la Matemática a los procesos de enseñanza aprendizaje, permite visualizar el íntimo e innegable vínculo que existe entre esta disciplina científica y la dinámica socio-cultural humana. De esta incorporación se pueden obtener algunos beneficios educativos como:

- ✚ Promueve un cambio de actitud y de creencias hacia la Matemática convirtiéndola esencialmente en una actividad, no desligándose de su condicionamiento social e histórico.
- ✚ Ayuda a explicar y superar obstáculos epistemológicos, frente a algún concepto matemático que es especialmente difícil de comprender para el estudiante porque ayuda a menudo a explicar esas incomprensiones.
- ✚ Incentiva la reflexión y una actitud crítica en el estudiante, la Historia de la Matemática puede representar un valioso recurso en la construcción de necesarias estrategias para formar estudiantes reflexivos y críticos (que preguntan el qué, el cómo, el donde y el por qué), pues nos permite evitar darle a la matemática una imagen de producto terminado, exento a la crítica y al cuestionamiento.
- ✚ La Historia de la Matemática puede ayudar al estudiante a conectar la Matemática con otros aspectos de la vida del hombre, como la Religión, la Literatura, la Filosofía, el arte, y otras ciencias.
- ✚ Aumenta el interés y la motivación de los alumnos hacia la Matemática. Así mismo, al considerar el papel que ésta ha jugado en la evolución de la Ciencia, la Tecnología y la civilización en general, ayuda a que el alumno desarrolle su aprecio por la Matemática y disfrute de su aprendizaje.

Fauvel (1991), nos da once puntos u **orientaciones para trabajar la historia** de las matemáticas con los alumnos:

- ✚ Mencionar anécdotas matemáticas del pasado.
- ✚ Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos.

- ✚ Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución a dado lugar a los distintos conceptos que aparecen en clase.
- ✚ Impartir lecciones de Historia de la Matemática.
- ✚ Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.
- ✚ Fomentar la creación de posters, exposiciones u otros proyectos con un tema histórico.
- ✚ Realizar proyectos entorno a una actividad matemática local del pasado.
- ✚ Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
- ✚ Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje
- ✚ Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
- ✚ Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.

8. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

8.1 OBJETIVOS DEL TRABAJO

Con este TFM voy a abordar una línea de investigación basada en mejorar la motivación del alumnado y lograr una mayor adquisición de los contenidos matemáticos, centrada en el empleo del aprendizaje cooperativo y relacionándolo con el aprendizaje basado en problemas, con el uso de las TIC en educación y la introducción de la historia en el aprendizaje de las matemáticas. Quiero conseguir los siguientes objetivos:

✚ Objetivo general

- ✚ Analizar la influencia del aprendizaje cooperativo, relacionado con el aprendizaje basado en problemas, el uso de las TIC y la historia de las matemáticas, en el rendimiento y resultados académicos, así como en la motivación de los estudiantes de 2º de Bachillerato de CCNN y Tecnología.

✚ Objetivos específicos

- ✚ Buscar una alternativa de trabajo distinta a la tradicional, diseñando una unidad didáctica para el aprendizaje de contenidos de análisis del curso de 2º de Bachillerato, centrada en el aprendizaje cooperativo y relacionado con el ABP, TIC y la Historia de las Matemáticas.
- ✚ Elaborar instrumentos para recoger datos y procedimientos que nos permitan evaluar la influencia de esta nueva forma de aprendizaje en los siguientes aspectos:
 - La mejora de la motivación de los estudiantes.
 - El aumento del rendimiento académico del alumnado.
- ✚ Realizar una implementación de esta metodología en el aula.
- ✚ Llevar a cabo una observación de los resultados y una valoración de la metodología, para su mejora en años posteriores.

8.2 SUJETOS DE ESTUDIO

La población considerada para realizar la investigación la constituyen estudiantes de 2º curso de Bachillerato matriculados en la materia de matemáticas en la modalidad de Ciencia y Tecnología. De los dos grupos que tenemos en el centro cogeremos de forma aleatoria el grupo al que se le aplicará la metodología en estudio, sin que haya diferencias significativas entre ellos, tanto de ámbito económico, social o de capacidades intelectuales. Al otro se le aplicará una metodología individual y no necesariamente competitiva.

La investigación utilizará diversas estrategias de recogida de información, durante los meses previos y posteriores a la puesta en práctica de esta investigación, en el año académico 2015-2016. A ello hay que añadir la recogida de documentos durante el periodo de investigación, además de la ayuda y las aportaciones por parte del resto de compañeros.

En este sentido, mi investigación pretende comparar los resultados obtenidos por los dos grupos y llegar a la conclusión del grado de influencia existente entre el nuevo modelo de enseñanza con el aumento del rendimiento escolar y la motivación, consiguiendo una mejor preparación de nuestros estudiantes y una mayor aceptación hacia la asignatura de matemáticas.

8.3 METODOLOGÍA

Una vez establecidos los objetivos que perseguimos con este trabajo, los sujetos a los que va dirigida y la fundamentación necesaria para llevarlo a la práctica, continuamos exponiendo la metodología del mismo, basada en un modelo de investigación-acción.

El término "investigación-acción" proviene del autor Kurt Lewis y fue utilizado por primera vez en 1944. Hace referencia a una amplia gama de estrategias realizadas para mejorar el sistema educativo y social. Es una herramienta que permite al docente llevar a cabo el proceso de mejora continua, en la que se integran la reflexión y el trabajo intelectual en el análisis de las experiencias que se realizan, como un elemento esencial de lo que constituye la propia actividad educativa.

La investigación – acción se revela como uno de los modelos de investigación más adecuados para fomentar la calidad de la enseñanza e impulsar la figura del profesional investigador, reflexivo y en continua formación permanente (Rincón, 1997).

La práctica de la investigación-acción ha demostrado que por medio de ella se aprende a reflexionar, a observar, a tomar notas, a formularse preguntas, a inferir y a proponerse metas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Durante la experiencia se experimentan problemas en el aula y se buscan formas de resolverlos; se documentan los modos de enseñar y de aprender, se investigan los procesos pedagógicos mediante la observación, la descripción y la interpretación. Las decisiones se toman reflexivamente y se proponen cambios y mejoras.

Kemmis y McTaggart (1988) han descrito con amplitud las **características** de la investigación-acción. Como rasgos más destacados reseñamos los siguientes:

- ✚ Es participativa. Las personas trabajan con la intención de mejorar sus propias prácticas.
- ✚ La investigación sigue una espiral introspectiva: una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión.
- ✚ Es colaborativa, se realiza en grupo por las personas implicadas.
- ✚ Crea comunidades autocríticas de personas que participan y colaboran en todas las fases del proceso de investigación.

- ✚ Es un proceso sistemático de aprendizaje, orientado a la acción críticamente informada y comprometida.
- ✚ Induce a teorizar sobre la práctica.
- ✚ Somete a prueba las prácticas, las ideas y las suposiciones.
- ✚ Implica registrar, recopilar, analizar nuestros propios juicios, reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre; exige llevar un diario personal en el que se registran nuestras reflexiones.
- ✚ Es un proceso político porque implica cambios que afectan a las personas.
- ✚ Realiza análisis críticos de las situaciones.
- ✚ Procede progresivamente a cambios más amplios.
- ✚ Empieza con pequeños ciclos de planificación, acción, observación y reflexión, avanzando hacia problemas de más envergadura. La inician pequeños grupos de colaboradores, expandiéndose gradualmente a un número mayor de personas.

La investigación-acción es conocida por ser un modelo de ciclos sucesivos con las siguientes fases (Kemmis; 1992):

- ✚ **La Observación** (diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial). El proceso de investigación-acción comienza, en sentido estricto, con la identificación de un área problemática o necesidades básicas que se quieren resolver.
- ✚ **La Planificación** (desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo). En el plan de acción se estudiarán y establecerán prioridades en las necesidades, y se tomarán opciones entre las posibles alternativas.
- ✚ **La Acción** (fase en la que reside la novedad). Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto en que tiene lugar
- ✚ **Reflexión** en torno a los efectos como base para una nueva planificación. Será preciso un análisis crítico sobre los procesos, problemas y restricciones que se han manifestado y sobre los efectos, lo que ayudará a valorar la acción desde lo previsto y deseable y a sugerir un nuevo plan.

Ventajas de la investigación-acción:

- ✚ El quehacer científico consiste no solo en la comprensión de los aspectos de la realidad existente, sino también en la identificación de las fuerzas sociales y las relaciones que están detrás de la experiencia humana.
- ✚ El criterio de verdad no se desprende de un procedimiento técnico, sino de discusiones cuidadosas sobre informaciones y experiencias específicas.
- ✚ Permite la generación de nuevos conocimientos al investigador y a los grupos involucrados.
- ✚ Permite la movilización y el reforzamiento de las organizaciones de base.

- ✚ Permite, también, el mejor empleo de los recursos disponibles en base al análisis crítico de las necesidades y las opciones de cambio.
- ✚ Los resultados se prueban en la realidad.

9. PROGRAMACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

«La unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso» (Escamilla, 1992).

9.1 UBICACIÓN DE LA UNIDAD EN EL CURRÍCULO

Este tema se ubica dentro de los Contenidos del Currículo de Andalucía según el Real Decreto 1467/2007 de 2 de Noviembre así como el Decreto 416/2008 de 22 de Julio y Orden 05-08-2008, por el que se establece las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía, en el segundo curso de Bachillerato, modalidad Ciencias y Tecnología, en el bloque de contenidos Análisis, bajo los epígrafes:

- *“Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto.*
- *Función derivada. Calculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización”.*

La unidad se engloba dentro de la 1º Evaluación como Unidad 4. Aplicaciones de las Derivadas. Tendrá una duración aproximada de 20 sesiones, pudiendo variar en función de las necesidades, y se llevará a cabo durante tres semanas, desde el 17 de Noviembre al 18 de Diciembre.

9.2 OBJETIVOS

9.2.1 OBJETIVOS GENERALES DE LAS MATEMÁTICAS II

En conformidad con el Decreto 416/2008, de 22 de Julio, que nos deriva al Real Decreto 1467/2007 de 2 Noviembre por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía, esta materia ha de contribuir a que los alumnos y alumnas desarrollen las siguientes capacidades:

- ✚ Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.
- ✚ Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.
- ✚ Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.
- ✚ Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.
- ✚ Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.
- ✚ Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.
- ✚ Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.
- ✚ Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando representaciones matemáticas.

9.2.2 OBJETIVOS DIDÁCTICOS

- ✚ Caracterizar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
- ✚ Averiguar los extremos relativos y absolutos de una función en un intervalo cerrado.
- ✚ Conocer la condición suficiente para determinar la monotonía de una función derivable en un intervalo abierto.

- ✚ Conocer la condición suficiente para que una función derivable tenga un extremo relativo en $x = a$.
- ✚ Determinar la concavidad y la convexidad de una función en un intervalo abierto.
- ✚ Concretar los intervalos de concavidad y de convexidad de una función.
- ✚ Encontrar los puntos de inflexión de una función.
- ✚ Conocer los teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy sobre derivadas.
- ✚ Utilizar la regla de L'Hôpital para resolver ciertas indeterminaciones.
- ✚ Aplicar el cálculo de extremos absolutos y/o relativos en intervalos abiertos y/o cerrados para resolver problemas de optimización.
- ✚ Determinar las principales características de una función a partir de su expresión analítica y del estudio de sus derivadas primera y segunda.
- ✚ Construir la gráfica de una función polinómica, racional, irracional, trigonométrica y de otras funciones trascendentes sencillas.

9.2.3 CONTENIDOS

Los contenidos a tratar serán los siguientes:

- ✚ Relación entre monotonía y derivabilidad de una función.
- ✚ Monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión de una función derivable.
- ✚ Teoremas de Rolle, del valor medio de Lagrange y de Cauchy.
- ✚ Regla de L'Hôpital.
- ✚ Optimización de funciones.
- ✚ Representación gráfica de funciones.

Y serán divididos en conceptos, procedimientos y actitudes de la siguiente manera:

Conceptos

- ✚ Función creciente y función decreciente en un intervalo abierto.
- ✚ Extremos relativos y absolutos de una función.
- ✚ Puntos críticos de una función.
- ✚ Condiciones necesarias y suficientes para determinar la monotonía de una función y sus extremos locales.
- ✚ Teoremas de Rolle, del valor medio de Lagrange y de Cauchy.
- ✚ Concavidad y convexidad de una función en un intervalo abierto.
- ✚ Condiciones necesarias y suficientes para determinar la curvatura de una función derivable en un intervalo abierto.
- ✚ Condición necesaria y suficiente para determinar los puntos de inflexión.
- ✚ Criterio de la derivada segunda para establecer los extremos relativos.

- ✚ Características generales de una función: dominio, continuidad, signo, simetría y periodicidad.
- ✚ Asíntotas de una función.
- ✚ Relación entre la derivada primera de una función y su monotonía.
- ✚ Extremos relativos de una función.
- ✚ Relación entre la derivada segunda de una función y su curvatura.
- ✚ Puntos de inflexión de una función.

Procedimientos

- ✚ Determinación de los siguientes elementos de una función: monotonía, extremos relativos, concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
- ✚ Determinación de los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado.
- ✚ Aplicación del teorema de Rolle a la determinación del número de soluciones de una ecuación.
- ✚ Decisión sobre cuándo una función cumple las hipótesis de los teoremas de Rolle o de Lagrange, y cálculo de los puntos en los cuales se cumplen las tesis de dichos teoremas.
- ✚ Aplicación de la regla de L'Hôpital en el cálculo de límites cuando la situación lo requiera.
- ✚ Dado un problema en el que es necesario optimizar una función, delimitación de su expresión analítica a partir de los datos del enunciado en función de la variable para la cual se desea averiguar los extremos de dicha función, así como en qué intervalo es necesario averiguarlos.
- ✚ Determinación de máximos y mínimos absolutos de una función en un intervalo cerrado.
- ✚ Determinación de máximos y mínimos relativos de una función en un intervalo abierto o en un intervalo cerrado, a partir de la obtención de los puntos críticos de la función en dicho intervalo y del estudio del signo de la función derivada.
- ✚ Determinación de máximos y mínimos relativos de una función en un intervalo abierto o en un intervalo cerrado, a partir de la obtención de los puntos críticos de la función en dicho intervalo y del criterio de la derivada segunda.
- ✚ Dada la expresión analítica de una función, determinación de su dominio, simetría, periodicidad, continuidad y signo.
- ✚ Determinación de las ecuaciones de las asíntotas de una función mediante el cálculo de límites.
- ✚ Obtención de los intervalos de crecimiento de una función a partir del cálculo de su derivada primera y del estudio de su signo, así como de sus extremos relativos.

- ✚ Obtención de los intervalos de concavidad y convexidad de una función a partir del cálculo de su derivada segunda y del estudio de su signo, así como de sus puntos de inflexión.
- ✚ Elaboración de un cuadro resumen que recoja toda la información que se ha obtenido a partir de las expresiones analíticas de f , f' y f'' .
- ✚ Construcción de la gráfica de una función, f , a partir de la información obtenida de f , f' y f'' .

Actitudes

- ✚ Disposición a la revisión y mejora de los procedimientos adquiridos en estadios anteriores del proceso de aprendizaje.
- ✚ Observación de las normas sistemáticas y de precisión que regulan los procedimientos que se utilizan en esta unidad.
- ✚ Interés por los procedimientos distintos de los propios.
- ✚ Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados.
- ✚ Valoración de la importancia del cálculo diferencial en la resolución de problemas prácticos.
- ✚ Gusto por la presentación clara y ordenada de los resultados obtenidos en el proceso de la representación gráfica de funciones.
- ✚ Valoración de la utilidad de la representación gráfica de funciones.

9.2.4 METODOLOGÍA

9.2.4.1 PRINCIPIOS METODOLÓGICOS:

- ✚ Potenciar el trabajo en grupo, fomentando el aprendizaje cooperativo y colaborativo.
- ✚ Partir de conocimientos previos. Actividades iniciales que conecten los nuevos conocimientos con los anteriores.
- ✚ Trabajar problemas reales, relacionando los contenidos a tratar con las demás materias y con el mundo que nos rodea, mostrando de esta manera la utilidad de las matemáticas (ABP).
- ✚ El conocimiento de la historia de las matemáticas. El alumnado debe tener conciencia de que las matemáticas constituyen una disciplina viva, que han evolucionado y lo continúan haciendo.
- ✚ Se propondrán actividades para fomentar la lectura, como pueden ser: lectura en clase o en casa de reseñas históricas, trabajos de investigación, artículos y libros de contenido matemático.
- ✚ Potenciaremos el uso y manejo de la calculadora y las TIC's, ante su uso tan generalizado en la sociedad actual. Usaremos programas informáticos, Wiris y Geogebra, la plataforma Moodle y el blog:

“www.angelmiguelrubio.wordpress.com”.

9.2.4.2 AGRUPAMIENTOS

Utilizar un único modelo de agrupamiento, con independencia de la diversidad de características del conjunto de alumnos y de las actividades de enseñanza-aprendizaje, limita el potencial enriquecedor del proceso educativo.

Con objeto de llevar a cabo una metodología que atienda a los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos usaremos distintos tipos de agrupamientos, adaptados a cada actividad.

Así, los alumnos trabajarán:

- ✚ De forma "individual" para favorecer la reflexión y la práctica sobre los diversos contenidos de forma personalizada. Por ejemplo, cuando estemos trabajando las actividades finales.
- ✚ El agrupamiento a nivel de toda la clase es adecuado para realizar debates, puestas en común y correcciones de ejercicios o problemas, mejoras de las relaciones personales o determinar normas. Asimismo, se podrá utilizar cuando estemos trabajando las actividades iniciales.
- ✚ El grupo pequeño (de 3/4 alumnos), para trabajar las actividades de investigación, los problemas o las TIC, porque con éste se mejora el diálogo y permite desarrollar conductas de compañerismo y tolerancia, mejora el trabajo cooperativo, el intercambio de opiniones y la búsqueda de soluciones conjuntas.

La forma concreta en que se utilizarán estos agrupamientos dependerá del tipo de contenidos que estemos tratando y del alumnado del que dispongamos. Tenemos una clase con 18 alumnos, los cuales se distribuirán en dos tipos de grupos:

- ✚ Grupos base, los cuales se formarán al principio del curso y perdurarán durante todo el año. Serán heterogéneos y contarán con tres alumnos.
- ✚ Grupos esporádicos, los cuales se formarán para trabajar alguna sesión de forma esporádica. Serán homogéneos y contarán con tres alumnos.

9.2.4.3 DESARROLLO Y TEMPORALIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS DE LA UNIDAD

Para el desarrollo de esta unidad tenemos previstas 20 sesiones, pero este número podrá ser modificado en función de la evolución que se observe en las clases y el desarrollo de las mismas.

1ª SESIÓN

Se explica al alumnado la metodología de trabajo que se va a llevar a cabo a lo largo de la unidad, presentando la plataforma Moodle y el blog “www.angelmiguelrubio.wordpress.com”, mostrando los aspectos generales y de su interés que hay colgados en ellas. A continuación, se crean los grupos base (heterogéneos) y los grupos esporádicos (homogéneos). Se le explica al alumnado el sistema, los criterios e instrumentos de evaluación que se encuentran a su disposición. Asimismo recordaremos que todos los contenidos y recursos necesarios y utilizados en esta unidad estarán presentes en el blog y en la plataforma, así como material adicional para que cada alumno desarrolle al máximo sus capacidades.

El día anterior al comienzo de la unidad los alumnos tendrán que acceder a los contenidos que se presentarán en el blog y en Moodle:

- a) Reseña histórica que trata sobre la evolución del cálculo diferencial desde el siglo XVII hasta el XX. (Documento 1).
- b) Biografías de matemáticos destacados: Newton, Leibnitz. (Documento 2).
- c) Actividades iniciales para detectar conocimientos previos. (Documento 3).

Como tarea deben leer los Documentos 1 y 2 y hacer los ejercicios del Documento 3, donde irán presentes problemas reales que conecten las matemáticas con las demás materias y el mundo que nos rodea.

Iniciaremos la unidad con un debate a nivel de toda la clase de los Documentos 1 y 2 que han tenido que leer la tarde anterior. (10 minutos).

Posteriormente se pondrán en sus grupos base para corregir las actividades iniciales del Documento 3. Harán una puesta en común subsanando entre ellos las primeras dudas que les puedan surgir. (5 minutos).

Luego, los comentaremos a modo de debate en la pizarra. Los alumnos tomarán notas en su cuaderno de las conclusiones obtenidas. Nos servirá para introducir el tema y poder tener una idea de los conocimientos previos. De esta manera trabajamos uno de los puntos importantes de nuestra metodología, el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas. (15 minutos).

Asimismo, se les propondrán como trabajo de investigación para esta unidad el siguiente:

1. Cada grupo base tendrá que escoger uno de los siguientes trabajos:
 - Las matemáticas en el Renacimiento. Problemas científicos de la época. La motivación del cálculo de derivadas.
 - Aportaciones de Rolle al cálculo de derivadas.

- Método de las primeras y últimas razones de Newton.
- Comparación entre las obras de Newton y Leibnitz. La controversia entre ambos.
- L'Hopital y su regla.
- Aportaciones de Lagrange al cálculo de derivadas.
- Diferencias entre las obras de Cauchy y Bolzano.

Este trabajo debe ser entregado a través de Moodle en las sesiones 17 de la unidad. Será expuesto al resto de la clase en las sesiones 18 y 19.

Para ver la evolución de determinados conceptos a lo largo de la historia, los alumnos van a investigar los siguientes contenidos:

- a) Método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos.
- b) Método de Fermat para determinar la tangente en un punto.
- c) Método de Descartes para determinar la tangente en un punto.

Buscarán información sobre ellos, la cual les servirá para realizar la relación de “ejercicios históricos” (Documento 10) de investigación y que tendrán que entregar en la penúltima sesión de la unidad. Estos ejercicios serán realizados en los grupos base, y explicados por los alumnos al profesor.

Para terminar esta sesión comenzaremos con la exposición de los contenidos de la unidad. Éstos serán explicados por el profesor en la pizarra alternándolos con actividades de desarrollo, podrían ser los ejercicios relacionados con los contenidos de la Relación de Ejercicios (Documento 4). (20 minutos). Los alumnos estarán dispuestos en su grupo base (grupos de 3 personas).

Los contenidos a tratar serán:

- *Interpretación geométrica de la derivada.*
- *Ecuación de la recta tangente a una función en un punto.*
- *Diferencial de una función.*

Se les mandarán como tarea tres ejercicios, relacionados con los contenidos, del Documento 4. Serán realizados en casa de forma individual, pudiendo realizar un ejercicio por alumno. Aquellos grupos donde todos los componentes traigan las actividades hechas tendrán una valoración positiva que le repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad. Esta nota será un valor numérico entre 0 y 10.

2ª SESIÓN

Comenzaremos con la exposición de los contenidos por parte del profesor utilizando la pizarra para introducir los conceptos, alternándolos con ejemplos. Podrían ser los ejercicios relacionados con los contenidos de la Relación de Ejercicios (Documento 4). Los alumnos harán esta parte de la sesión sentados de forma individual. Los contenidos a introducir serán los siguientes: (20 minutos)

- *Relación entre la derivada primera de una función y su monotonía.*
- *Extremos relativos y absolutos de una función.*
- *Puntos críticos de una función.*

Una vez terminada esta parte, los alumnos pasarán a sus grupos base donde continuaremos la sesión corrigiendo las tareas del día anterior, para que puedan poner en común los resultados y resolver las dudas entre ellos. Posteriormente los ejercicios serán corregidos en la pizarra por los alumnos. (10 minutos).

Continuaremos, manteniendo el agrupamiento, haciendo actividades de desarrollo y consolidación de los contenidos tratados en esta sesión, del Documento 4. (20 minutos).

La última parte será destinada a corregir las actividades en la pizarra. Un alumno escogido al azar de cada grupo hará cada una de las actividades y se las explicará al resto de la clase. De esta manera nos aseguramos que todos los elementos del grupo trabajen de la misma manera, resuelvan las dudas y sepan hacer todas las actividades. (10 minutos).

Aquellos grupos que hayan terminado todas las actividades propuestas y su compañero explique de forma correcta en la pizarra el ejercicio que le ha tocado tendrán una valoración positiva que le repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad. Esta nota será un valor numérico entre 0 y 10.

Por último se les mandarán como tarea tres ejercicios relacionados con los contenidos del Documento 4 (Actividades de Desarrollo). Serán realizados en casa de forma individual.

Otra tarea que tendrán que realizar será buscar de forma individual: Método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos. Con esta actividad trabajamos un punto importante de nuestra metodología, la introducción de la historia en el aprendizaje de las matemáticas.

A partir de esta sesión y hasta la número 11, la metodología utilizada será la misma variando tan solo los contenidos tratados. Lo podemos ver con más detalle en la siguiente tabla.

3ª Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Condiciones necesarias y suficientes para determinar la monotonía de una función y sus extremos locales.</i> ➤ <i>Criterio de la derivada segunda para establecer los extremos relativos.</i> <p>Historia de las matemáticas. Puesta en común entre los miembros del grupo base del trabajo: <i>Método de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos.</i> Posteriormente será explicado a la clase por un alumno escogido al azar por el profesor.</p> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>
4º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Teorema de Rolle, del valor medio de Lagrange y de Cauchy.</i> <p>Historia de las matemáticas. Como tarea adicional para casa tendrán que buscar información acerca de: <i>Método de Fermat para determinar la tangente a una función en un punto.</i> Podrá ser realizada de forma individual o en grupo base.</p> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>
5º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Concavidad y convexidad de una función en un intervalo abierto.</i> ➤ <i>Condiciones necesarias y suficientes para determinar la curvatura de una función derivable en un intervalo abierto.</i> ➤ <i>Condición necesaria y suficiente para determinar los puntos de inflexión.</i> <p>Historia de las matemáticas. Puesta en común entre los miembros del grupo base del trabajo: <i>Método de Fermat para determinar la tangente a una función en un punto.</i> Posteriormente será explicado a la clase por un alumno escogido al azar por el profesor.</p> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>

6º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Problemas de máximos y mínimos. Optimización.</i> <p>Historia de las matemáticas. Como tarea adicional para casa tendrán que buscar información acerca de: <i>Método de Descartes para determinar la tangente en un punto</i>. Puede ser realizada de forma individual o en grupo base.</p> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>
7º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Asíntotas de una función.</i> ➤ <i>Representación gráfica de funciones: funciones polinómicas.</i> <p>Historia de las matemáticas. Puesta en común entre los miembros del grupo base del trabajo: <i>Método de Descartes para determinar la tangente en un punto</i>. Posteriormente será explicado a la clase por un alumno escogido al azar por el profesor.</p> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>
8º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Representación gráfica de funciones: funciones irracionales del tipo $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$</i> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>

9º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Representación gráfica de funciones: funciones exponenciales. <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p> <p>Historia: Como tarea adicional se les mandarán el Documento 10, “ejercicios históricos”, para que los hagan en casa y los entreguen en la sesión 17. Se realizarán en los grupos base. Estas actividades deben ser explicadas por los alumnos al profesor, siendo éste el que decida quien lo hace. Tendrá una repercusión en la nota final en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación. Se puntuará de 0 a 10, donde todos los miembros del grupo se ayuden y apoyen, realicen todos los problemas y los expongan de forma correcta.</p>
10º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Representación gráfica de funciones: funciones logarítmicas.</i> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>
11º Sesión	<p>Contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ <i>Representación gráfica de funciones: funciones trigonométricas.</i> <p>Actividades de desarrollo. Se realizan ejercicios relacionados con los contenidos del documento 4.</p>

A partir de la sesión 12 variará la metodología de la siguiente manera.

12º Sesión	<p>Problemas: Dedicamos esta sesión para mostrar a nuestros alumnos la utilidad de las matemáticas y su interdisciplinaridad.</p> <p>Agrupamiento: grupos base.</p> <p>Actividades: relación de problemas del Documento 9.</p>
13º Sesión	<p>Problemas: Al igual que en la sesión anterior, dedicamos esta sesión para mostrar a nuestros alumnos la utilidad de las matemáticas y su interdisciplinaridad.</p> <p>Agrupamiento: grupos base.</p> <p>Actividades: relación de problemas del Documento 9.</p> <p>Esta relación de ejercicios debe ser entregada en las siguientes tres sesiones y explicada por los alumnos al profesor, siendo el docente quien decida el estudiante que lo hace. Tendrá una repercusión en la nota final en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación. Se puntuará de 0 a 10, donde todos los miembros del grupo se ayuden y apoyen, realicen todos los problemas y los expongan de forma correcta.</p>

14º Sesión	<p>Atención a la Diversidad: Dedicamos esta sesión a resolver las lagunas que puedan presentar los alumnos respecto a los contenidos del tema o dar más a aquellos que lo demanden.</p> <p>Agrupamientos: grupos esporádicos.</p> <p>Actividades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Refuerzo (Documento 5) ➤ Ampliación (Documento 6) <p>El desarrollo de la clase será supervisado en todo momento por el profesor, que gracias a este tipo de agrupamiento podrá hacer una atención más personalizada a los alumnos que así lo necesiten.</p> <p>Los ejercicios deben ser realizados por todos los componentes del grupo, los cuales deben ayudarse unos a otros e intentar solucionar las dudas que les puedan surgir. Se puntuará de forma positiva el trabajo cooperativo en grupo, donde todos los miembros se ayuden y apoyen, vayan al mismo ritmo y se realicen todos los ejercicios propuestos por el docente. Repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad con una puntuación entre 0 y 10.</p>
15º Sesión	<p>TIC: Dedicamos esta sesión a mostrar la utilización de los programas informáticos Wiris y Geogebra.</p> <p>Agrupamiento: Para esta actividad los alumnos estarán sentados de forma individual, disponiendo de un ordenador para cada uno de ellos.</p> <p>Actividades: ejercicios y problemas de las actividades de desarrollo (Documento 4) relacionados con cada uno de los contenidos tratados.</p> <p>Esta sesión también nos servirá para atender a la diversidad del alumnado, ayudando a aquellos alumnos que lo necesiten y dándole material extra a los que lo demanden.</p>

16º Sesión	<p>TIC: Dedicamos esta sesión a mostrar la utilización de los programas informáticos Wiris y Geogebra.</p> <p>Agrupamiento: Para esta actividad los alumnos estarán sentados de forma individual, disponiendo de un ordenador para cada uno de ellos.</p> <p>Actividades: ejercicios y problemas de las actividades de desarrollo (Documento 4) relacionados con cada uno de los contenidos tratados.</p> <p>Esta sesión también nos servirá para atender a la diversidad del alumnado, ayudando a aquellos alumnos que lo necesiten y dándole material extra a los que lo demanden.</p> <p>Como tarea adicional para realizar en casa, habrá cinco actividades en el blog y en la plataforma Moodle (Documento 11) que deberán ser entregadas al profesor en la última sesión. Esta tarea se hará en los grupos base y debe ser explicada al profesor, siendo éste el que diga que alumno expone cada problema.</p> <p>Se puntuará de forma positiva el trabajo cooperativo en grupo, donde todos los miembros se ayuden y apoyen, vayan al mismo ritmo y se realicen todos los ejercicios propuestos por el docente. Repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad con una puntuación entre 0 y 10.</p>
17º Sesión	<p>Prueba de grupo: Documento 7.</p> <p>Agrupamiento: grupos base.</p> <p>Se puntuará de forma positiva el trabajo cooperativo en grupo, donde todos los miembros se ayuden y apoyen, vayan al mismo ritmo y se realicen todos los ejercicios propuestos por el docente. Repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad con una puntuación entre 0 y 10.</p>

18º Sesión	<p>Historia: Exposición del trabajo histórico o de investigación.</p> <p>Agrupamiento: grupos base y a nivel de toda la clase.</p> <p>Esta sesión estará dedicada a la exposición del trabajo que los alumnos deberán haber colgado el trabajo el día anterior en la plataforma Moodle. La exposición se realizará en la pizarra donde todos los integrantes del grupo deben participar. Podrán hacer uso de los dispositivos electrónicos a su alcance: ordenador, internet, proyector, pizarra digital, etc. Y tendrá una duración de 10 minutos por grupo.</p> <p>Cada grupo que exponga tendrá la posibilidad de realizarle preguntas a los compañeros para ver el nivel de seguimiento que están haciendo. Del mismo modo deberán de responder a las cuestiones planteadas y relacionadas con los temas tratados.</p>
19º Sesión	<p>Historia: Exposición del trabajo histórico o de investigación.</p> <p>Agrupamiento: grupos base y a nivel de toda la clase.</p> <p>Al igual que en la sesión anterior, continuaremos con las exposiciones de los trabajos.</p> <p>La puntuación del trabajo se realizará por los propios compañeros. Cada grupo dará una puntuación del 0 al 10. La nota final será la suma de todas las puntuaciones. Repercutirá en el 60% (en el apartado de trabajo en grupo e individual y actividades de investigación) de la nota de la unidad con una puntuación entre 0 y 10, mediante una regla de tres simple.</p>
20º Sesión	<p>Actividad final: Prueba escrita (Documento 8).</p> <p>Agrupamiento: individual.</p> <p>La corrección de esta prueba estará presente en el blog y en la plataforma Moodle para que todos puedan acceder a ella y comparar los resultados.</p>

9.2.4.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Mi objetivo será realizar una experiencia de aprendizaje cooperativo y compararla con otra de aprendizaje tradicional (una clase individualista, la cual no tiene por qué ser competitiva) para observar en ellas objetivos alcanzados, niveles de cooperación y resultados. Quiero diseñar una propuesta de observación que muestre si la nueva estrategia da mejor rendimiento, tanto en la adquisición de los contenidos matemáticos como en el aumento de la motivación en el alumnado.

En las clases individualistas cada alumno trabajará solo o con los compañeros, no sabemos si de manera independiente y con poca interacción entre ellos, porque nos fijaremos en el producto final y pasaremos los mismos test que a la clase cooperativa. En estos casos, el docente tendrá un rol muy activo, ya que todas las preguntas y dudas tendrán a éste seguramente como único interlocutor. Si el ambiente del aula es individualista será monótono, poco motivador y en este tipo de clase seguramente sea difícil destacar tanto a los alumnos más aventajados como a los que tenían más dificultades para el aprendizaje.

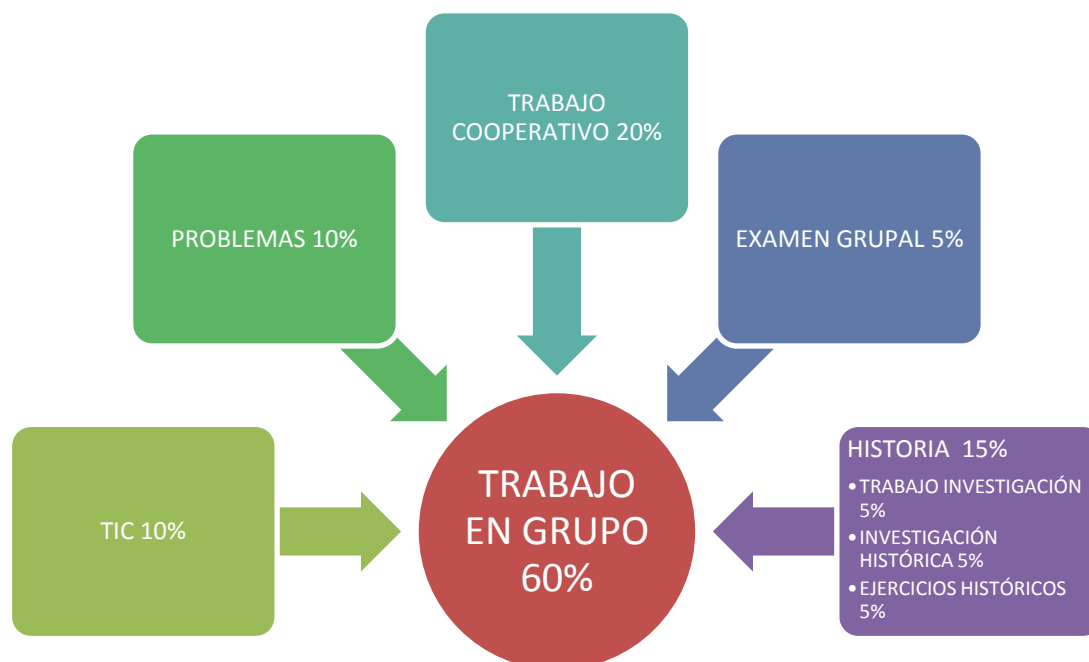
En el grupo en el que queremos hacer la propuesta de aprendizaje cooperativo estará formado por alumnos distribuidos ya en grupos base y acostumbrados a trabajar y aprender en equipo. Ellos sabrán que las tareas propuestas consistirán en la realización de trabajos prácticos y la entrega prefijada de los mismos, en el que se valorarán además otras habilidades sociales como la cooperación, la solidaridad, el respeto por las ideas ajenas, la mutua confianza, el apoyo recíproco,...

En nuestra propuesta, y por los trabajos que avalan estas estrategias sobre aprendizaje cooperativo (Gavilán y Alario, 2010; Pujolàs, 2008; Ferreiro y Calderón, 2006), además de las notas que surgen de las evaluaciones de las diferentes actividades y de los trabajos semanales en grupos cooperativos, les daremos una nota por superación en las metas de aprendizaje, al registrar las actividades de los alumnos en sus grupos, e identificando otras habilidades tales como comunicación, liderazgo, confianza y resolución de conflictos.

Evaluamos los siguientes aspectos: el trabajo en grupo y el trabajo individual, por lo que a cada alumno se le puntuará de la siguiente forma:

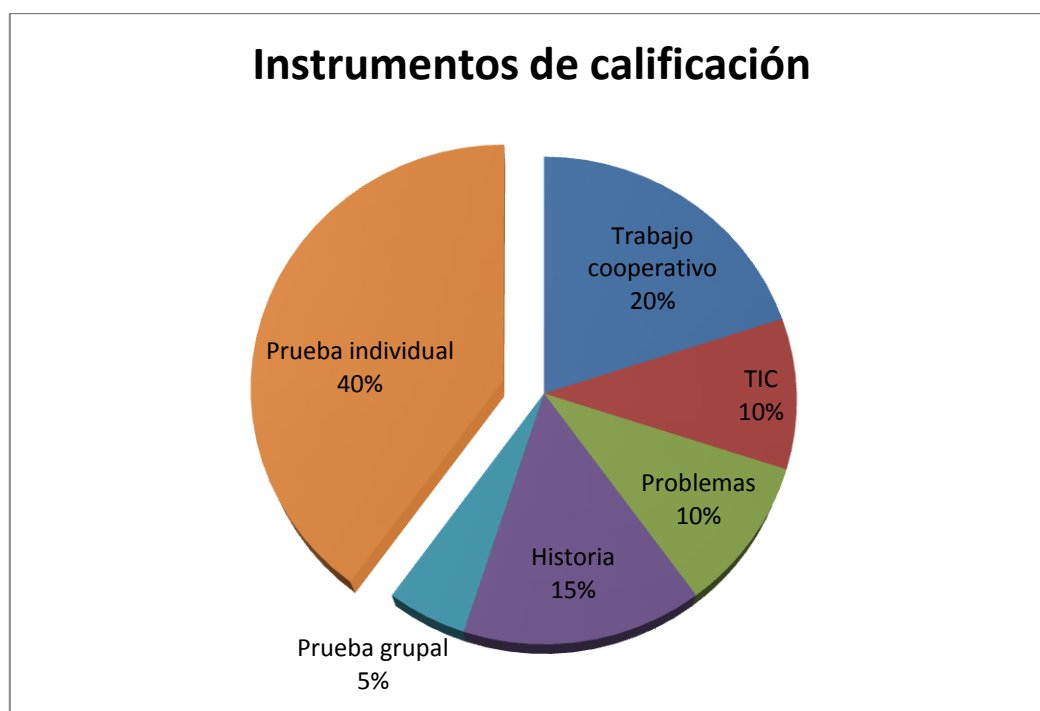
- 1) **Trabajo en grupo.** Al final de cada unidad se sumarán todos los puntos obtenidos dentro de este apartado y se realizará una proporcionalidad directa para ponderarla entre 0 y 10. Esto repercutirá en el 60% de la nota final. En este apartado incluimos:
 - a. Se puntuará de forma positiva el **trabajo cooperativo** donde todos los miembros del grupo se ayuden y apoyen, vayan al mismo ritmo y realicen todos los ejercicios propuestos por el docente en cada sesión. De la misma forma se puntuarán las actividades que se manden como tareas para casa, siendo positiva, cuando todos los miembros las traigan resueltas. El grupo tiene que trabajar como si fuera una persona

- individual. Cada grupo optará a conseguir hasta un diez en cada actividad propuesta. Al final de cada unidad se sumarán todos los puntos obtenidos y se hará una proporcionalidad directa para ponderarla entre 0 y 10 puntos. Supondrá el 20% de la nota de este apartado.
- Se valorará la relación de **problemas** que tienen que hacer en grupo (Documento 9), entregar y explicar al profesor. Tendrá una nota entre 0 y 10. Supondrá el 10% de la nota de este apartado.
 - Las actividades **TIC** que tienen que hacer con Wiris y Geogebra (Documento 11), tendrá una nota entre 0 y 10 y supondrán el 10% de la nota de este apartado.
 - El **examen en grupo** que se hará en la sesión 17 tendrá una nota entre 0 y 10 y supondrá un 5% de la nota de este apartado.
 - Las actividades de **historia** supondrán un 15% en la nota de este apartado. Se dividen en tres tipos, teniendo la misma puntuación cada uno:
 - El **trabajo de investigación histórica** y su exposición en clase. Tendrá una nota entre 0 y 10.
 - Las **actividades sobre la evolución histórica** de los contenidos, relacionados con los “ejercicios históricos”, y su exposición en clase. Tendrá una nota entre 0 y 10.
 - Se puntuará la relación de **ejercicios “históricos”** (Documento 10) y su exposición al profesor. Tendrá una nota entre 0 y 10.



- 2) Se hará una **prueba individual** (Documento 8) de los conocimientos de la unidad. Repercutirá en el 40% de la nota con una puntuación entre 0 y 10, mediante una regla de tres simple.

En los gráficos siguientes podemos ver de forma más clara un resumen de lo expuesto anteriormente.



El desempeño individual lo evaluará el profesor mediante preguntas orales que se irán haciendo a los alumnos a lo largo de todas las sesiones, para comprobar que están aportando lo necesario a su grupo e involucrándose todo lo posible en el desarrollo de las tareas. Todo ello se anotará en la ficha individual de cada estudiante. Además, se tendrá en cuenta los diarios personales y los informes que cada alumno desarrolle.

Para valorar la autoevaluación y evaluación de los compañeros los alumnos contestarán individualmente el cuestionario que se muestra a continuación, adaptado de Randolh y Postner (1991). Este cuestionario deberán completarlo en casa, después de las sesión 19.

Rellena la tabla, asignándote a ti mismo y a cada uno de tus compañeros una calificación entre 0 y 10 puntos para cada uno de los aspectos que se señalan:

Asigna una columna (entre la 2 y la 4) a cada uno de tus compañeros de grupo:	Tú	2	3
2:			
3:			
Asiste con regularidad a las reuniones del grupo			
Aporta ideas			
Busca, analiza y prepara el material para la tarea			
Ayuda a que el grupo funcione correctamente			
Anima y apoya a los diferentes miembros del grupo			
Tiene una contribución importante en el resultado final			
Puntuación total			

La puntuación merecerá o se acercará a los 10 puntos si cumple los siguientes criterios:

- Asiste con regularidad a las reuniones del grupo y no las abandona hasta que se llega al final, trabaja de acuerdo con la planificación temporal, está activo y atento, y es flexible en cuanto a la temporización de las reuniones.
- Aporta ideas Piensa en los temas antes de las reuniones, proporciona ideas prácticas que son adoptadas por el grupo, se apoya en las sugerencias del resto del grupo.
- Busca, analiza y prepara el material para la tarea. Trae el material, hace una parte equitativa de todos los trabajos y ayuda a analizar y evaluar la información buscada. Investiga de forma activa y participativa.
- Ayuda a que el grupo funcione correctamente Deja las diferencias personales fuera del grupo. Muestra interés en analizar el funcionamiento del grupo y en abordar los conflictos, adopta diferentes roles según sea necesario, ayuda a que el grupo vaya en la línea adecuada, tiene buena predisposición y flexibilidad. Tiene iniciativa propia para la búsqueda de información y realización de tareas.
- Anima y apoya a los diferentes miembros del grupo. Siempre está dispuesto a escuchar a los demás, anima a la participación, facilita un clima colaborativo, sensible a los aspectos que puedan afectar a los miembros del grupo. Ayuda a los miembros que tienen necesidades especiales.
- Tiene una contribución valiosa en el producto final Tiene voluntad para intentar cosas nuevas. Tiene una contribución importante, tiene sus propias iniciativas, es fiable y realiza un trabajo de calidad

En caso contrario, la puntuación se acercará o será 0.

9.2.4.5 RECOGIDA DE DATOS

En este punto nos centraremos en los instrumentos y procedimientos que nos permitirán dar respuesta al segundo objetivo de nuestra investigación.

Puesto que en todo proceso educativo es necesario tener unos criterios que permitan evaluar la práctica para mejorarla, se propone, en primer lugar, establecer un cuestionario (Linares, 2011) para valorar que este trabajo final de la unidad esté bien diseñado. Para ello, todas las cuestiones, salvo la última, deben ser afirmativas. Esta evaluación se realizará por el equipo de investigación, formado por el profesor investigador, en la fase llevada a cabo de planificación de la metodología investigación-acción.

Para valorar el diseño del trabajo propuesto, tenemos las siguientes tablas y cuestionarios elaborados por compañeras que realizaron el Máster Universitario en Formación del Profesorado y el Máster en Matemáticas (Rosa M^a Escribano Vitón y

Beatriz Blanes Castro). Me parece conveniente utilizarlos ya que sus TFM están desarrollados en base a una puesta en práctica de una metodología similar a la mía.

Marcar con una X donde corresponda	SI	NO	NS/ NC
¿La tarea a realizar está bien explicitada al comienzo de la misma? ¿Está claramente identificado, para todos los participantes, el problema o tarea común a realizar?			
¿Disponen todos los participantes de la información, los materiales, capacidades y elementos necesarios para resolver la tarea?			
¿Se plantea algún tipo de demanda individualizada en algún momento del proceso? ¿La consecución de la tarea es común y colectiva?			
¿Se asegura de alguna forma la implicación y participación de todos los miembros del grupo? ¿Hay diversificación de funciones entre los componentes del grupo?			
¿Se puede conocer y valorar el progreso realizado por los distintos alumnos desde el inicio hasta el final del trabajo? ¿Posibilita el éxito de los componentes más débiles del grupo?			
¿Se han anticipado las dificultades más previsibles que pueden encontrar los alumnos en el proceso de trabajo?			
¿Se ha previsto alguna manera de detectar y delimitar problemas en el desarrollo del proceso?			
¿Se dispone de ayudas o soportes específicos que puedan facilitar el desbloqueo de determinadas dificultades o problemas?			
¿Se dispone de una cierta gama de recursos que puedan orientar o guiar el proceso en los grupos con menos recursos?			
¿Se puede realizar de forma autónoma?			
REFLEXIONES UNA VEZ DESARROLLADA:			
PROPUESTAS DE MODIFICACIÓN O MEJORA:			

Cuestionario:

1. ¿Crees que aprendes más con tus compañeros que cuando explica el profesor?
 - Aprendo mucho menos
 - Aprendo menos
 - Aprendo Igual
 - Aprendo más
 - Aprendo mucho más
2. ¿Estás más motivado cuanto estudias en grupo que cuando atiendes en clase?
 - Nada motivado
 - Menos motivado
 - Igual
 - Más motivado
 - Mucho más motivado
3. ¿Estás de acuerdo con que parte de tú nota dependa de la nota final del grupo?
 - Totalmente en desacuerdo
 - En desacuerdo
 - Indiferente
 - De acuerdo
 - Muy de acuerdo
4. ¿Te parece justo el sistema de evaluación?
 - Totalmente en desacuerdo
 - En desacuerdo
 - Indiferente
 - De acuerdo
 - Muy de acuerdo
5. ¿Crees que todos los miembros de tu grupo han realizado un esfuerzo similar?
 - Totalmente en desacuerdo
 - En desacuerdo
 - Indiferente
 - De acuerdo
 - Muy de acuerdo
6. ¿Crees que todos los miembros de tu grupo de expertos han contribuido en igual medida a la elaboración del tema?
 - Totalmente en desacuerdo
 - En desacuerdo
 - Indiferente
 - De acuerdo
 - Muy de acuerdo
7. ¿Crees que estudiar con tus compañeros te ha ayudado a preparar la asignatura?
 - No me ha ayudado nada
 - No me ha ayudado mucho
 - Me da igual

- Sí, me ha ayudado un poco
 - Sí, me ha ayudado mucho
8. ¿Te gustaría repetir esta experiencia en otros temas o materias?
- No, nunca
 - Seguramente No
 - Me da igual
 - Seguramente Sí
 - Sí, seguro
9. ¿Crees que se necesitaría más tiempo para hacerlo mejor?
- Sí, mucho más tiempo
 - Sí, pero solo un poco más
 - No sabría decirlo
 - No, quizás un poco más
 - No
10. ¿Te ha gustado la experiencia?
- No, no me ha gustado nada
 - No mucho
 - No sabría decirlo
 - Un poco
 - Me ha gustado mucho

Para evaluar la motivación se pasará a cada alumno, al término de la exposición del trabajo final, en la sesión diez de la unidad, el siguiente cuestionario (Montoro, 2014). Deberán completarlo de manera individual y lo realizarán en ambos grupos, tanto el que ha seguido la metodología tradicional como en el que ha llevado una metodología cooperativa.

Nombre:	
Actividad:	
Reflexiona sobre cómo te has sentido realizando esta actividad y valora las siguientes afirmaciones del 1 al 5. 1 = “Totalmente en desacuerdo”, 2 = “En desacuerdo”, 3 = “Ni en acuerdo ni en desacuerdo”, 4 = “De acuerdo” y 5 = “Totalmente de acuerdo”	
La actividad no me ha supuesto un desafío	1 2 3 4 5
La actividad me ha interesado	1 2 3 4 5
Sabía claramente lo que pedía la actividad	1 2 3 4 5
La actividad me ha parecido aburrida	1 2 3 4 5
La actividad era complicada	1 2 3 4 5
He podido confirmar si lo estaba haciendo bien o mal	1 2 3 4 5
Con esta actividad no he aprendido nada	1 2 3 4 5
Estaba confuso sobre lo que pedía la actividad	1 2 3 4 5
Me he divertido con la actividad	1 2 3 4 5
La actividad es útil para mi formación	1 2 3 4 5
Me he aburrido con la actividad	1 2 3 4 5
La actividad era fácil	1 2 3 4 5
Mi concentración era interrumpida por cualquier cosa	1 2 3 4 5
Tengo dudas sobre si lo he hecho bien o mal	1 2 3 4 5
Mi atención estaba totalmente centrada en la actividad	1 2 3 4 5
La actividad me ha supuesto un reto	1 2 3 4 5
Se me ha pasado el tiempo volando con esta actividad	1 2 3 4 5

Cuestionarios:

Para evaluar cómo son las interacciones sociales entre iguales y comprobar si se desarrollan valores en el alumnado rellenaré sesión por sesión y de cada grupo el siguiente cuestionario elaborado:

- 1. Todos los miembros del grupo propiciaron responsabilidad individual.*
- 2. Todos los miembros del grupo explicaron unos a otros lo que estaban aprendiendo.*
- 3. Todos los miembros del grupo participaron en igual medida.*
- 4. El grupo trabajó con eficacia*
- 5. Se logró la participación de los alumnos/as reticentes.*
- 6. El grupo estuvo dispuesto a colaborar con otros grupos.*
- 7. El liderazgo fue compartido o hubo algún/a alumno/a que intentara adoptar el rol del líder.*
- 8. El trabajo fue concluido en el tiempo estipulado.*

Para comprobar cómo influye en el alumnado la metodología usada y para valorar el uso de la plataforma Moodle y el blog en esa metodología, una vez acabada la unidad rellenaré el siguiente cuestionario elaborado:

- 1. ¿El aprendizaje cooperativo es adecuado para el desarrollo de los contenidos de esta unidad?*
- 2. ¿El uso de Moodle y el blog y la elaboración de la práctica con han sido motivadores y han despertado interés en el alumnado?*
- 3. ¿El uso de Geogebra y el Wiris en la elaboración de las actividades TIC han sido motivadores y han despertado interés en el alumnado?*
- 3. ¿Es eficiente el uso de esta metodología con alumnado que necesita atención a la diversidad?*
- 4. ¿En mi Departamento apoyan esta innovación? ¿De qué modo?*
- 5. ¿Se observan resultados positivos (académicos o personales) con el desarrollo de esta unidad?*
- 6. Dificultades encontradas por el alumnado.*
- 7. Propuestas de mejora.*

Para la revisión del funcionamiento de los grupos tenemos las siguientes tablas, sacadas del libro de “Álgebra en Secundaria, trabajo cooperativo en Matemáticas” de Gavilán, P. (2004).

PRIMERA REVISIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL GRUPO

Escribe el nombre de los componentes de tu grupo base:

Escribe tres cosas que tu grupo haya hecho bien trabajando juntos:

- a)
- b)
- c)

Escribe tres cosas que pueda hacer mejor:

- a)
- b)
- c)

Valora de 1 a 10 tu esfuerzo por mejorar el trabajo del grupo:

Completa las frases que se enuncian a continuación:

- a) Nuestro grupo es bueno en ...
- b) Lo mejor que hemos hecho en el grupo hasta ahora es ...
- c) Algunas palabras que describen nuestro grupo son ...
- d) He ayudado a mi grupo en ...
- e) He aprendido de mi grupo a ...

Cosas que pienso hacer en el grupo de distinta manera ...

SEGUNDA REVISIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL GRUPO

Valora de 1 a 5 los siguientes aspectos, teniendo en cuenta que 1 corresponde a la mínima puntuación y 5 a la máxima.

Revisión del trabajo personal dentro del grupo

Contribuyo con mis ideas e información 5	1 2 3 4
Pido a los demás que den sus ideas	1 2 3 4 5
Resumo nuestras aportaciones	1 2 3 4 5
Pido ayuda cuando lo necesito	1 2 3 4 5
Ayudo a que los demás miembros de mi grupo aprendan	1 2 3 4 5
Me aseguro de que todos los componentes de mi grupo entienden lo que estamos haciendo	1 2 3 4 5
Ayudo a que el grupo se mantenga trabajando	1 2 3 4 5
Incluyo a todas las personas del grupo en nuestro trabajo	1 2 3 4 5
Cuando tengo una idea o una respuesta la comparto con el grupo	1 2 3 4 5
Cuando mi respuesta no coincide con la de alguien, trato de averiguar por qué	1 2 3 4 5
Cuando no entiendo algo, pregunto	1 2 3 4 5
Cuando alguien no entiende algo, le ayudo a comprender	1 2 3 4 5
Trato de que las personas del grupo se sientan respetadas	1 2 3 4 5
Antes de terminar un trabajo, me aseguro de que entiendo todas las preguntas y respuestas, que estoy de acuerdo con ellas y que las demás personas del grupo actúan igual	1 2 3 4 5

TERCERA REVISIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL GRUPO					
Autoevaluación y evaluación del trabajo de los componentes del grupo					
Valora de 1 a 4 los siguientes aspectos, teniendo en cuenta que: 4=excelente, 3=bien, 2=regular, 1=inapropiado					
Nombres de los componentes de tu grupo base, incluyéndote a ti					
1. Ayuda a crear un clima de trabajo					
2. Expresa y controla sus sentimientos					
3. Se esfuerza y trabaja					
4. Es constante y persiste en la tarea hasta el final					
5. Respeta a los demás					
6. Organiza el trabajo					
7. Explica lo que hace y por qué lo hace					
8. Se detiene a revisar lo que ha hecho					
9. Es capaz de reconducir lo que estáis haciendo si no vais por buen camino					
10. Se anima y anima al grupo cuando no sabéis avanzar					
11. Pregunta lo que no entiende y trata de resolver sus dudas					
12. Se hace y hace a los demás preguntas sobre lo que estáis haciendo					
13. Defiende sus ideas y trata de razonarlas					
14. Busca otras formas de hacer y razonar los ejercicios					
15. Cuando no sabe seguir trata de acordarse de algo parecido que ya conocía					
16. Cuando no sabe un ejercicio lo repasa y comprueba que está bien					
17. Trae preparado el material y los deberes					

10. CONCLUSIONES

En mis comienzos en la educación mi metodología de trabajo era tradicional, donde yo explicaba en la pizarra y los alumnos trabajaban de forma individual. De esta forma me he encontrado con el problema del miedo y la falta de motivación que presentan los alumnos hacia la asignatura de matemáticas. Esto conlleva un abandono de la asignatura y por tanto influye en la falta de preparación en matemáticas con la que llegan los estudiantes a estudios posteriores o se incorporan al mundo laboral. Por todos es conocida la alta cantidad de alumnos que escogen ramas de Bachillerato o ciclos formativos donde las matemáticas no existen o son residuales, simplemente por ese rechazo a encontrarse con ellas. Del mismo modo, hemos escuchado más de una vez la típica frase: “No escojo esa carrera porque las matemáticas que tiene son muy complicadas”.

Cuando comencé el Máster en Matemáticas se me presentó una nueva forma de enseñar mucho más dinámica y motivadora, saliéndome del enfoque tradicional. Y me hice la siguiente pregunta: ¿Si hasta ahora no consigo que mis alumnos alcancen los objetivos que yo quiero y su gusto por las matemáticas no aumenta, por qué no cambio mi metodología en el aula?

Pedí ayuda a mi profesora en el Máster Maribel Ramírez y a finales del curso 2013-2014 comencé a implementar el trabajo cooperativo en mis clases de matemáticas. Mi sorpresa fue mayúscula cuando comprobé que no solo los estudiantes aceptaban esta metodología mejor que la tradicional, sino que el desarrollo de las sesiones era más dinámico y motivador donde los alumnos tenían más capacidad de trabajo y no se “aburrían”. En el año posterior continué con este tipo de metodología y comprobé que los resultados mejoraban a lo largo del curso, conforme los alumnos se sentían más cómodos con esta forma de trabajar.

A partir de aquí, pensé en realizar mi Trabajo Fin de Máster enfocado a la educación, desarrollando una metodología centrada en el trabajo colaborativo, relacionándolo con el aprendizaje basado en problemas, el uso de las TIC en el aula y la inclusión de la historia en la enseñanza de las matemáticas. De tal forma que pueda ser aplicado y utilizado en mis clases, siéndome de ayuda en mi trabajo.

Por otra parte y teniendo en cuenta los estudios analizados para poder llevar a cabo este trabajo, se pone de manifiesto que al aplicar junto a una metodología cooperativa el aprendizaje basado en problemas aporta muchos beneficios en el aula, obteniéndose mejores resultados y reduciendo el fracaso escolar debido a que los alumnos se sienten más motivados y perciben la necesidad del trabajo en equipo para tener más éxito, así como comprueban la utilidad real de las matemáticas. Todo esto unido al uso de las TIC's y al conocimiento de la historia, dota a las matemáticas de un carácter más humano, mostrando que es una ciencia en continua evolución dependiendo de las necesidades sociales, haciéndolas más divertidas y accesibles.

Con todo lo expuesto anteriormente, he llegado a la conclusión de que la metodología docente tratada presenta las siguientes ventajas:

- ✚ La adopción de un enfoque de aprendizaje por problemas facilitará un proceso de aprendizaje significativo, donde el alumnado va construyendo las soluciones a partir de las herramientas básicas que ya conoce. Se consigue así romper con la estructura clásica basada en la memorización e introducir al alumnado en la lógica de la investigación científica, además de desarrollar sus capacidades para el aprendizaje continuo. Así mismo se muestra al estudiante la utilidad real de las matemáticas y su relación con otras materias y nuestra sociedad.
- ✚ La utilización del aprendizaje colaborativo facilitará la necesidad de cooperar con compañeros, el aprendizaje entre iguales, promover relaciones entre los estudiantes que aumenten la motivación y la autoestima, desarrollar habilidades interpersonales y estrategias para resolver conflictos, fortalecer la habilidad para opinar y escuchar, de manera que los alumnos expliquen con sus palabras lo que han entendido, aclarando y corrigiendo los contenidos aprendidos, desarrollar la tolerancia y la flexibilidad hacia las ideas de los demás, ser conscientes de la necesidad de compartir responsabilidades, del compromiso hacia los demás, saber organizarse y dividir las tareas. La carencia de una solución explicada por el profesor, aumentará la flexibilidad y la implicación del alumnado en su proceso de aprendizaje. Este hecho se traduce en dos beneficios: por un lado, la comprensión del carácter instrumental de la disciplina y de sus fundamentos básicos, que serán aplicados posteriormente a situaciones concretas distintas. Por otro lado, se desarrollarán competencias relacionadas con la interdependencia y el autoaprendizaje continuo.
- ✚ Se potenciarán las habilidades y competencias relacionadas con la búsqueda, revisión y síntesis de información. El uso de la plataforma Moodle y del blog para la búsqueda de material matemático y su aplicación en la resolución, de forma autónoma, de dudas y problemas, permitirá un uso más eficiente de las nuevas tecnologías y resalta las posibilidades de éstas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La estructuración de la materia en un entorno virtual facilitará la superación de barreras de localización y tiempo, permitiendo el trabajo desde sitios distintos al aula, como por ejemplo en casa. La utilización de programas informáticos, como Wiris o Geogebra, nos ayuda a la adquisición de determinados conceptos como límites, derivadas o representación de funciones, ya que nos facilita los tediosos cálculos, haciendo más útiles y divertidas las matemáticas.
- ✚ Según podemos leer en la Revista Suma, en su número de Febrero de 2004, el estudio de la Historia de las Matemáticas puede ser un elemento importante en la autoformación permanente del profesor así como una de las fuentes principales de inspiración en la orientación de la actividad docente. La enseñanza no es sólo una vocación o una profesión, puede ser también un arte, y es indudable que el conocimiento de la Historia de las Matemáticas

influirá decisivamente en el espíritu del profesor y en su actitud hacia la propia Matemática.

A lo largo de este curso académico y con la experiencia del día a día, he desarrollado este trabajo para 2º de Bachillerato. Se pondrá en práctica el año que viene, durante el curso 2015-2016, con el objetivo de sacar las conclusiones necesarias para poder rediseñarlo y continuar utilizándolo, pero ya no solo en este curso y en esta unidad en concreto, sino en toda la etapa y durante todo el año escolar.

Me gustaría añadir dos frases. La primera del célebre matemático Jules Henri Poincarè, la cual intento que mis alumnos comprendan e interioricen, descubriendo la importancia de las Matemática:

“Todo saber tiene de ciencia lo que tiene de matemática.”

La segunda va dirigida a mí, para intentar mejorar día a día como profesor, y es del escritor norteamericano William A. Ward:

“El profesor mediocre dice. El profesor bueno explica. El profesor superior demuestra. El profesor excelente inspira.”

11. BIBLIOGRAFÍA

- ✚ Amorós-Poveda, L. (2007). Moodle como recurso didáctico. Edutec 2007.
- ✚ Bará, J. y Domingo, J. (2005). Técnicas de Aprendizaje Cooperativo, Universidad Politécnica de Cataluña.
- ✚ Barba Martín, J. J. (2010). Diferencias entre el aprendizaje cooperativo y la asignación de tareas en la escuela rural. Retos: Nuevas Tendencias En Educación Física, Deporte y Recreación.
- ✚ Barbin, E., Bagni, G., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E. & Menghini, M. (2000). Integrating history: research perspectives.
- ✚ Barrows, H.S. (1986) A Taxonomy of problem-based learning methods, Medical Education. Volume 20.
- ✚ Barrows, H.S. and Tamblyn, R.M. (1980). Problem-based learning: an approach to medical education. Springer Publishing, New York, N.Y.
- ✚ Caiseda y Dávila. (2006). El Aprendizaje Basado en Problemas y Proyectos: Una Estrategia de Interacción. Universidad Interamericana de Puerto Rico.
- ✚ Centro de Actualización del Magisterio (CAM). (2005). Desarrollo de habilidades cognitivas en los alumnos de educación básica. Yucatán.
- ✚ Chaves, E., Salazar, J. (2003): La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Universidad Nacional de Costa Rica. Disponible en:
<http://www.cimm.ucr.ac.cr/una/tesis/La%20historia%20de%20la%20matemática%20como%20recurso%20metodologico%20en%20los%20procesos%20de%20enseñanza%20aprendizaje.pdf>.
- ✚ Cuesta, P. y Gómez, A.M. (2008). Web 2.0 y Educación. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria.
- ✚ Cuban, L. (2001) Oversold and Underused. Computers in the Classroom. Harvard University Press.
- ✚ Davidson, N. (1990). Cooperative learning in mathematics: A handbook for teachers. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.
- ✚ Decreto 416/2008 por el que se establecen las enseñanzas para el bachillerato en Andalucía.
- ✚ Domingo, J. (2010). El Aprendizaje Cooperativo y las Competencias. Revista d'Innovació Docent Universitària.
- ✚ Drexler, W., Dawson, K. & Ferdig, R.E. (2007). Collaborative Blogging as a Means to Develop Elementary Expository Writing Skills. Electronic Journal for the Integration of Technology in Education.
- ✚ Duch, Barbara Problems (1999): A Key Factor in PBL. Center for Teaching Effectiveness University of Delaware <http://www.udel.edu/pbl/cte/spr96-phys.html>.
- ✚ Echeita, G. (1997). El aprendizaje cooperativo. Un análisis psicosocial de sus ventajas respecto a otras estructuras de aprendizaje. En B. Pablo y M.

- Ángeles (Comps.). La interacción social en contextos educativos, 3ª edición, 167-189. México. Siglo XXI.
- ✚ Elias Arrieta, J. (2013). Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro. Facultad de Educación, Universidad de Cantabria.
 - ✚ Escamilla, A. (1992). Unidades Didácticas, una propuesta de trabajo en el aula. Colección Aula Reforma. Zaragoza: Luis Vives.
 - ✚ Fauvel, J. (1991): History in the mathematical classroom. The IREM papers. The Mathematical Association. Francia.
 - ✚ Ferreiro, R. y Calderón, M. (2006). El ABC del aprendizaje cooperativo. Trabajo en equipo para enseñar y aprender. Alcalá de Guadaíra (Sevilla): Editorial Trillas.
 - ✚ García, P., Elche, D., Martínez, R. y Parra, G. (2006). El proceso de formación y aplicación del aprendizaje basado en problemas. Universidad de Castilla-La Mancha.
 - ✚ Gavilán, P. (2004). Álgebra en Secundaria. Trabajo cooperativo en Matemáticas. MEC.
 - ✚ Gavilán, P. y Alario, R. (2010). Aprendizaje Cooperativo. Una metodología con futuro. Principios y aplicaciones. Madrid: Editorial CCS.
 - ✚ González, N. y García, M.R. (2007). El aprendizaje cooperativo como estrategia de enseñanza-aprendizaje en psicopedagogía (UC): repercusiones y valoraciones de los estudiantes, Revista Iberoamericana de Educación. Disponible en <http://www.rieoei.org/expe/1723Fernandez.pdf>
 - ✚ González, R., García, F. E. y Gonzalo, N. (2011). Los edublogs como herramienta facilitadora en comunidades virtuales de aprendizaje. En Relada 5.
 - ✚ Hernández, A., Lacuesta, R. (2007). Aplicación del aprendizaje basado en problemas (PBL) bajo un enfoque multidisciplinar: una experiencia práctica. En J. C. Ayala, y grupo de investigación FEDRA (Coords.), Conocimiento, innovación y emprendedores: camino al futuro. Universidad de la Rioja.
 - ✚ John R. Savery Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning.
 - ✚ Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1993). Cooperative Learning (<http://www.co-operation.org/pages/cl.html>).
 - ✚ Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1993). Cooperative learning and feedback in technology-based interaction. En J. V. Demy y G. C. Sales (Ed.), Interactive instruction and feedback. Englewood Cliffs: Educational Elementary Publications.
 - ✚ Johnson, D. W. y Johnson, R.T. (1997). Una visión global del aprendizaje cooperativo. Revista catalana de Educación especial y atención a la diversidad.
 - ✚ Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1984). Circles of learning. Cooperation in the classroom and school. Alexandria, V.A.: Association for Supervision and Curriculum Development.

- ✚ Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1982). Effects of cooperative learning experiences on interpersonal attraction between handicapped and nonhandicapped students. *Journal of social psychology*.
- ✚ Johnstone, K. M. y Biggs, S.F. (1998). Problem-Based Learning: Introduction, Analysis and Accounting Curricula Implications” *Journal of Accounting Education*.
- ✚ Kemmis, S. (1992): “Teoría Social y teoría crítica de la educación”. Ponencia presentada al Simposio Internacional sobre Teoría Crítica e Investigación Acción. Celebrado en Valladolid del 2 al 4 de Marzo de 1992.
- ✚ Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- ✚ Lara, T. (2005). *Uso de los Blogs en una Pedagogía Constructivista*. Telos Cuadernos de Comunicación, Tecnología y Sociedad. España. También disponible en:
<http://www.campusred.net/telos/articulocuaderno.asp?idarticulo=2&rev=65>
- ✚ Linares Garriga, J. E. (2011). *El Aprendizaje Cooperativo: Aprender a Cooperar, Aprendiendo Cooperando*. Materiales para la formación del profesorado. Programa 10.01: Convivencia Escolar. Consejería de Educación, Formación y Empleo. Región de Murcia.
- ✚ MEC (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid.
- ✚ Mena, B, Marcos, M. y Mena, J.J. (1996). *Didáctica y nuevas tecnologías en educación*. Madrid: Escuela Española.
- ✚ Montoro, A. B. (2014). *Tesis doctoral: Motivación y matemáticas. Experiencias de flujo en estudiantes de Maestro de Educación Primaria*. Almería.
- ✚ Montoya, M.; Baños, R.; Alías, A.; Gil, C. (2007). *Aprendizaje Cooperativo y Desarrollo de Competencias*. Universidad de Almería, España, Escuela Politécnica Superior.
- ✚ National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*.
- ✚ Nolla, R. (2001): *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica*. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques. Memòria de Llicència d’estudis. Generalitat de Catalunya.
<http://www.xtec.es/sgfp/llicencies/200001/resums/rnolla.htm>.
- ✚ Núñez Molina, M. (2006). *El Poder de los Weblogs. Aplicaciones de los Blogs en la Enseñanza*. También disponible en:
<http://blogrum.wordpress.com/2006/11/21/el-poder-de-los-weblogs/>
- ✚ Orden 05/08/2008 por el que se establecen las enseñanzas para el bachillerato en Andalucía.
- ✚ Ovejero Bernal, A. (1990). *El aprendizaje cooperativo. Una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional*. Barcelona: PPU.

- ✚ Ovejero Bernal, A. (1990). Métodos de aprendizaje cooperativo. Promociones y Publicaciones Universitarias. Barcelona.
- ✚ Plan Avanza 2007.
- ✚ Posada Prieto, F. (2010) Aplicaciones TIC para la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. IX Jornadas de Intercambio de Experiencias Educativas Avilés, 23, 24 y 25 de Noviembre de 2010.
- ✚ Pujolàs Maset, P. (2008). 9 Ideas Clave. El Aprendizaje Cooperativo. Grao.
- ✚ Pujolàs Maset, P. (2003) El Aprendizaje Cooperativo: Algunas Ideas Prácticas, Universidad de Vic.
- ✚ Randolph, W. A. y Posner, B. Z. (1991). Las 10 reglas de oro para trabajar en equipo. México: Grijalbo.
- ✚ Real Decreto 1467/2007 por el que se establecen las enseñanzas para el bachillerato en España.
- ✚ Revista Suma, Febrero 2004. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.
- ✚ Rincón Igea, D. (1997). Investigación acción – cooperativa. En MJ. Gregorio Rodríguez (71 - 97): Memorias del seminario de investigación en la escuela. Santa Fe, Bogota: Quebecor Impreandes.
- ✚ Rosa Almidón López, I. (2013). Enseñar Matemática incorporando su historia. Comunidad de Educadores para la cultura científica.
- ✚ Sandoval, S. (1998). Una visión de conjunto y un acercamiento práctico a la enseñanza del pensamiento. Revista de Educación, 6.
- ✚ Savery, J. R. (2006). Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions, The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning.
- ✚ Slavin, R. E. (1987). Cooperative Learning: Student Teams. Gran Bretaña: Longman.
- ✚ Solé, I. (1997) Conseguir un trabajo en grupo eficaz. Cuadernos de Pedagogía 1997.
- ✚ Sulbarán Piñeiro, E.; Rojón González C. (2006) Repercusión de la interactividad y los nuevos medios de comunicación en los procesos educativos.
- ✚ UNESCO (1996). La Educación Encierra un Tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI, presidida por J. Delors. Santillana (http://www.unesco.org/delors/delors_s.pdf).
- ✚ Vaquero, A. (1998) Las TIC para la enseñanza, la formación y el aprendizaje. Novática;
- ✚ Velázquez Callado, C. (2014). Desafíos físicos cooperativos: una experiencia de aula.
- ✚ Zapico, I (S.F.). Enseñar Matemática con su Historia. Instituto Superior del Profesorado “J. V. González” Universidad de Buenos Aires.
- ✚ Zugowitki, V. (2012) “El uso de las TIC en el aula incrementa la motivación de los alumnos” Artículo de su blog de 29/03/2012.

12. ANEXOS

En este punto se exponen las actividades necesarias para llevar a cabo la unidad didáctica diseñada para este trabajo de investigación.

Documento 1: Reseñas Históricas

EL CÁLCULO DIFERENCIAL, DEL SIGLO XVII AL XX

El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez construido, la historia de la matemática ya no fue igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica.

El siglo XVII y la disputa por la creación del cálculo

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

En parte estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Issac Newton: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada. Dos siglos pasaron hasta que las desprolijidades en los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaron, y hoy aquel cálculo, potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento. Al principio la disputa se realizó en el marco de la cortesía pero al cabo de tres décadas comenzó a ser ofensiva hasta que en el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los nuevos logros fueron sometidos a severas críticas, la

justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

El siglo XVIII

Durante buena parte del siglo los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés Monge la geometría descriptiva. Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo Laplace escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812). Sin embargo el gran matemático del siglo fue el suizo Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas.

El siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. Gauss, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Riemann. Cantor estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. Gauss desarrolló la geometría no euclidea pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Siglo XX y nuestros días

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros siguen sin solución. Al mismo tiempo aparecen nuevos y estimulantes problemas y aún la matemática más abstracta encuentra aplicación.

Documento 2: Biografías

NEWTON

Isaac Newton nació el día de Navidad del antiguo calendario en 1642 (correspondiente al 4 de Enero de 1643 del nuevo calendario), año en que moría Galileo, en el pueblecito de Woolsthorpe, unos 13 Km. al sur de Grantham, en el Lincolnshire. Fue un niño prematuro y su padre murió antes de su nacimiento, a los treinta y siete años. Isaac fue educado por su abuela, preocupada por la delicada salud de su nieto. Su madre, mujer ahorrativa y diligente, se casó de nuevo cuando su hijo no tenía más que tres años. Newton frecuentó la escuela del lugar y, siendo muy niño, manifestó un comportamiento completamente normal, con un interés marcado por los juguetes mecánicos.

El reverendo William Ayscough, tío de Newton y diplomado por el Trinity College de Cambridge, convenció a su madre de que lo enviara a Cambridge en lugar de dejarlo en la granja familiar para ayudarla. En junio de 1661, a los dieciocho años, era pues alumno del Trinity College, y nada en sus estudios anteriores permitía entrever o incluso esperar la deslumbrante carrera científica del fundador de la mecánica y la óptica. Por otra parte, el Trinity College tenía fama de ser una institución sumamente recomendable para aquellos que se destinaban a las órdenes. Afortunadamente, esta institución le brindó hospitalidad, libertad y una atmósfera amistosa que le permitieron tomar contacto verdadero con el campo de la ciencia.

Al comienzo de su estancia en Cambridge, se interesó en primer lugar por la química, y este interés, según se dice, se manifestó a lo largo de toda su vida. Durante su primer año de estudios, y probablemente por primera vez, leyó una obra de matemáticas sobre la geometría de Euclides, lo que despertó en él el deseo de leer otras obras. Parece también que su primer tutor fue Benjamin Pulleyn, posteriormente profesor de griego en la Universidad. En 1663, Newton leyó la *Clavis mathematicae* de Oughtred, la *Geometria a Renato Des Cartes* de Van Schooten, la *Optica* de Kepler, la *Opera mathematica* de Vieta, editadas por Van Schooten y, en 1644, la *Aritmética* de Wallis que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el teorema del binomio, ciertas cuadraturas. También a partir de 1663 Newton conoció a Barrow, quien le dio clase como primer profesor lucasiano de matemáticas. En la misma época, Newton entró en contacto con los trabajos de Galileo, Fermat, Huygens y otros, a partir probablemente de la edición de 1659 de la *Geometria* de Descartes por Van Schooten.

Desde finales de 1664, Newton parece dispuesto a contribuir personalmente al desarrollo de las matemáticas. Aborda entonces el teorema del binomio, a partir de los trabajos de Wallis, y el cálculo de fluxiones. Después, al acabar sus estudios de bachiller, debe volver a la granja familiar a causa de una epidemia de peste bubónica. Retirado con su familia durante los años 1665-1666, conoce un período muy intenso de descubrimientos: descubre la ley del inverso del cuadrado, de la gravitación, desarrolla su cálculo de fluxiones, generaliza el teorema del binomio y pone de manifiesto la naturaleza física de los colores. Sin embargo, Newton guarda silencio sobre sus descubrimientos y reanuda sus estudios en Cambridge en 1667.

De 1667 a 1669, emprende activamente investigaciones sobre óptica y es elegido *follow* del Trinity College. En 1669, Barrow renuncia a su cátedra lucasiana de matemáticas y Newton le sucede y ocupa este puesto hasta 1696. El mismo año envía a Collins, por medio de Barrow, su *Analysis per aequationes numero terminorum infinitos*. Para Newton, este manuscrito representa la introducción a un potente método general, que desarrollará más tarde: su cálculo diferencial e integral. En 1672 publicó una obra sobre la luz con una exposición de su filosofía de las ciencias, libro que fue severamente criticado por la mayor parte de sus contemporáneos, entre ellos Robert Hooke (1638-1703) y Huygens, quienes sostenían ideas diferentes sobre la naturaleza de la luz. Como Newton no quería publicar sus descubrimientos, no le faltaba más que eso para reafirmarle en sus convicciones, y mantuvo su palabra hasta 1687, año de la publicación de sus *Principia*, salvo quizá otra obra sobre la luz que apareció en 1675.

Desde 1673 hasta 1683, Newton enseñó álgebra y teoría de ecuaciones, pero parece que asistían pocos estudiantes a sus cursos. Mientras tanto, Barrow y el astrónomo Edmond Halley (1656-1742) reconocían sus méritos y le estimulaban en sus trabajos. Hacia 1679, verificó su ley de la gravitación universal y estableció la compatibilidad entre su ley y las tres de Kepler sobre los movimientos planetarios.

Newton descubrió los principios de su cálculo diferencial e integral hacia 1665-1666, y durante el decenio siguiente elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis. Desde 1684, su amigo Halley le incita a publicar sus trabajos de mecánica, y finalmente, gracias al sostén moral y económico de este último y de la Royal Society, publica en 1687 sus célebres *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Los tres libros de esta obra contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. El libro I contiene el método de las "primeras y últimas razones" y, bajo la forma de notas o de escolios, se encuentra como anexo del libro III la teoría de las fluxiones. Aunque esta obra monumental le aportó un gran renombre, resulta un estudio difícil de comprender, y parece que Newton quiso que fuera así con el fin «de evitar ser rebajado por pequeños semisabios en matemáticas». Quiso escapar así a las críticas suscitadas por sus textos sobre la luz.

En 1687, Newton defendió los derechos de la Universidad de Cambridge contra el impopular rey Jacobo II y, como resultado tangible de la eficacia que demostró en esa ocasión, fue elegido miembro del Parlamento en 1689, en el momento en que el rey era destronado y obligado a exiliarse. Mantuvo su escaño en el Parlamento durante varios años sin mostrarse, no obstante, muy activo durante los debates. Durante este tiempo prosiguió sus trabajos de química, en los que se reveló muy competente, aunque no publicara grandes descubrimientos sobre el tema. Se dedicó también al estudio de la hidrostática y de la hidrodinámica además de construir telescopios.

Después de haber sido profesor durante cerca de treinta años, Newton abandonó su puesto para aceptar la responsabilidad de Director de la Moneda en 1696. Durante los últimos treinta años de su vida, abandonó prácticamente sus investigaciones y se consagró progresivamente a los estudios religiosos. Fue elegido presidente de la Royal Society en 1703 y reelegido cada año hasta su muerte. En 1705 fue hecho caballero por la reina Ana, como recompensa a los servicios prestados a Inglaterra.

Los últimos años de su vida se vieron ensombrecidos por la desgraciada controversia, de envergadura internacional, con Leibniz a propósito de la prioridad de la invención del nuevo análisis, Acusaciones mutuas de plagio, secretos disimulados en criptogramas, cartas anónimas, tratados inéditos, afirmaciones a menudo subjetivas de amigos y partidarios de los dos gigantes enfrentados, celos manifiestos y esfuerzos desplegados por los conciliadores para aproximar a los clanes adversos, he aquí en pocas palabras los detalles de esta célebre controversia, que se terminó con la muerte de Leibniz en 1716, pero cuyas malhadadas secuelas se harán sentir hasta fines del siglo XVIII.

Después de una larga y atroz enfermedad, Newton murió durante la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado en la abadía de Westminster en medio de los grandes hombres de Inglaterra.

"No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero en mi opinión, me he comportado como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte buscando de vez en cuando una piedra más pulida y una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad se exponía ante mí completamente desconocido."

Esta era la opinión que Newton tenía de sí mismo al fin de su vida. Fue muy respetado, y ningún hombre ha recibido tantos honores y respeto, salvo quizá Einstein. Heredó de sus predecesores, como él bien dice "si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes"- los ladrillos necesarios, que supo disponer para erigir la arquitectura de la dinámica y la mecánica celeste, al tiempo que aportaba al cálculo diferencial el impulso vital que le faltaba.

LEIBNITZ

Leipzig, actual Alemania, 1646-Hannover, id., 1716) Filósofo y matemático alemán. Su padre, profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig, falleció cuando él contaba seis años. Capaz de escribir poemas en latín a los ocho años, a los doce empezó a interesarse por la lógica aristotélica a través del estudio de la filosofía escolástica. En 1661 ingresó en la universidad de su ciudad natal para estudiar leyes, y dos años después se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió matemáticas con E. Weigel. En 1666, la Universidad de Leipzig rechazó, a causa de su juventud, concederle el título de doctor, que obtuvo sin embargo en Altdorf; tras rechazar el ofrecimiento que allí se le hizo de una cátedra, en 1667 entró al servicio del arzobispo elector de Maguncia como diplomático, y en los años siguientes desplegó una intensa actividad en los círculos cortesanos y eclesiásticos. En 1672 fue enviado a París con la misión de disuadir a Luis XIV de su propósito de invadir Alemania; aunque fracasó en la embajada, permaneció cinco años en París, donde desarrolló una fecunda labor intelectual. De esta época datan su invención de una máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, así como la elaboración de las bases del cálculo infinitesimal. En 1676 fue nombrado bibliotecario del duque de Hannover, de quien más adelante sería consejero, además de historiador de la casa ducal. A la muerte de Sofía Carlota (1705), la esposa del duque, con quien Leibniz tuvo amistad, su papel como consejero de príncipes empezó a declinar. Dedicó sus últimos años a su tarea de historiador y a la redacción de sus obras filosóficas más importantes, que se publicaron póstumamente. Representante por excelencia del racionalismo, Leibniz situó el criterio de verdad del conocimiento en su necesidad intrínseca y no en su adecuación con la realidad; el modelo de esa necesidad lo proporcionan las verdades analíticas de las matemáticas. Junto a estas

verdades de razón, existen las verdades de hecho, que son contingentes y no manifiestan por sí mismas su verdad. El problema de encontrar un fundamento racional para estas últimas lo resolvió afirmando que su contingencia era consecuencia del carácter finito de la mente humana, incapaz de analizarlas por entero en las infinitas determinaciones de los conceptos que en ellas intervienen, ya que cualquier cosa concreta, al estar relacionada con todas las demás siquiera por ser diferente de ellas, posee un conjunto de propiedades infinito. Frente a la física cartesiana de la extensión, defendió una física de la energía, ya que ésta es la que hace posible el movimiento. Los elementos últimos que componen la realidad son las mónadas, puntos inextensos de naturaleza espiritual, con capacidad de percepción y actividad, que, aun siendo simples, poseen múltiples atributos; cada una de ellas recibe su principio activo y cognoscitivo de Dios, quien en el acto de la creación estableció una armonía entre todas las mónadas. Esta armonía preestablecida se manifiesta en la relación causal entre fenómenos, así como en la concordancia entre el pensamiento racional y las leyes que rigen la naturaleza. Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor. Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

Documento 3: Actividades Iniciales

1. Derivar y simplificar:
 - a. $f(x) = \frac{\text{sen}(3x^4)}{3 + 2e^x}$
 - b. $f(x) = \ln(\sqrt{3x-5}) \cdot \tan(5x^2 + 1)$
 - c. $f(x) = \sqrt[5]{(5x^2 + 3x)^2}$
 - d. $f(x) = (2x + \text{sen}x)^{4+5x}$
2. Dada $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal para $x = -1$. Representar gráficamente tanto la curva como las dos rectas.
3. Dada la función: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$
 - a. Estudiar la monotonía, puntos críticos y curvatura.
 - b. Representar gráficamente, con la mayor exactitud y limpieza posible.
4. Tras un estudio demográfico, se ha determinado que el número de habitantes de cierta población, en los próximos, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x + 7200}{2x+1}$, donde x es el número de años transcurridos de ahora en adelante.
 - a. Calcula la variación media de la población entre $x = 2$ y $x = 4$.
 - b. ¿Cuál es la variación instantánea de la población transcurridos cuatro años?

Documento 4: Actividades de Desarrollo

Interpretación geométrica de la derivada

- Halla el ángulo α que forman con el eje OX las tangentes a la curva $f(x) = x^2 - x$ en los puntos de abscisas:
 - $x = 0$
 - $x = \frac{1}{2}$
 - $x = 1$
- Calcula el ángulo que forma la curva $f(x) = \operatorname{sen} x$ cuando se corta con el eje de abscisas en el punto $(\pi, 0)$.
- Obtén el ángulo que forma la curva $f(x) = e^x$ cuando se corta con la recta $y = 1$.
- Calcula los puntos en que las tangentes a la curva $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ son rectas paralelas al eje de abscisas.
- ¿En qué puntos es igual a 5 la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^5$?

Ecuación de la recta tangente

- Obtén la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:
 - $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x = 5$
 - $f(x) = x^3 + 6x + 1$ en $x = 6$
 - $f(x) = (x - 2)^2$ en $x = 3$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = \frac{1}{2}$
- Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:
 - $f(x) = \frac{x+9}{x+5}$ en $x = -6$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ en $x = 4$
 - $f(x) = \ln(x^2 e^x)$ en $x = 1$
 - $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $x = \frac{\pi}{4}$
- Encuentra razonadamente el punto de la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcula el valor de esta pendiente. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto hallado.
- ¿Para qué valor de k la recta $kx + y = \ln 3$ es tangente a la curva $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa en $x = 0$?
- Calcula los valores del parámetro a , siendo $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Diferencial de una función

- Expresa la diferencial de las siguientes funciones:
 - $y = x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
 - $y = (x^2 + 5x)(\ln x)$
 - $y = \frac{x+4}{x^2}$
 - $y = \sqrt{x^2 - 5x + 1}$
 - $y = 4^{2x^2-1}$
 - $y = e^{\operatorname{tg} x}$

12. Calcula el valor de la diferencial de las funciones siguientes para los valores que se indican:
- $y = x^2$ para $x = 3$ y $h = 0,1$
 - $y = x^3$ para $x = 4$ y $h = 0,011$
 - $y = \sqrt{x+2}$ para $x = 2$ y $h = 0,001$
13. Utiliza la diferencial para calcular cuánto varía la superficie total de un cubo de 10 cm de arista, cuando la arista aumenta 0,3 cm. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos por usar la diferencial en vez de emplear la expresión $f(x+h) - f(x)$.
14. Utiliza la diferencial para calcular de forma aproximada cuanto varía el volumen de una esfera de radio 6 m cuando el radio aumenta en 0,2 cm.

Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos relativos.

15. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y, si existen, los máximos y mínimos relativos de las funciones siguientes:
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
 - $f(x) = x^3 - x^2 + x$
 - $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2x$
 - $f(x) = 4x^2 - 8x$
 - $f(x) = 2x^4 - 4x^2$
 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
16. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y, si existen, los máximos y mínimos relativos de las funciones siguientes:
- $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$
 - $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
 - $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
 - $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$
 - $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 - $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$
 - $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$
 - $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
 - $f(x) = xe^x$
 - $f(x) = xe^{-x}$
 - $f(x) = x^2e^x$
 - $f(x) = x^2e^{-x^2}$
 - $f(x) = \ln(x^2)$
 - $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$
 - $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
 - $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1})$
 - $f(x) = x^2 \ln(x^2)$
 - $f(x) = \ln^2 x$
17. Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento y, si existen, los máximos y mínimos relativos de estas funciones:
- $f(x) = \operatorname{sen} x$
 - $f(x) = \operatorname{cos} x$
 - $f(x) = \operatorname{tg} x$
 - $f(x) = \operatorname{sec} x$
 - $f(x) = \operatorname{cot} g x$
 - $f(x) = \operatorname{arctg} x$
 - $f(x) = \operatorname{cosec} x$
 - $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
 - $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$
18. Considera la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.
- Calcula c sabiendo que la recta tangente a la función y f en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal.

c. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$

e. $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$

d. $f(x) = \frac{4x}{(x+2)^2}$

26. Representa las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$

27. Dada la función $f(x) = 1 + 2 \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

a. Halla los puntos de corte con los ejes.

b. Calcula los máximos y mínimos.

c. Representala gráficamente.

28. Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la siguiente función $f(x) = 2 - \operatorname{sen}^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$. Utilizando la información obtenida representa la función.

29. Obtén los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función $f(x) = 1 + \operatorname{sen}^2 x$, $x \in [0, 2\pi]$. Dibuja su gráfica, utilizando la información obtenida.

30. Dada la función $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi]$, halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos. Utilizando esta información dibuja la gráfica.

31. Estudia y representa las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2|x+1|$

b. $f(x) = (x+1)e^x$

c. $f(x) = x^2e^x$

d. $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

e. $f(x) = xe^{x+2}$

f. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

g. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

h. $f(x) = x^2 \ln x$

i. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

j. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

k. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

l. $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$

m. $f(x) = \frac{2x}{1-|x|}$

Optimización de funciones

32. A una ventana rectangular se le añade otra parte con forma de triángulo equilátero sobre el lado superior. Si el perímetro total de la ventana así formada es de 11 m, determina las dimensiones para que el área de la ventana sea máxima.
33. Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3 . Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 100 unidades por m^2 , mientras que a través del techo es de 300 unidades por m^2 . La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcula las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.
34. Halla las dimensiones de una piscina abierta al aire, con 32 m^3 de volumen y fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo se construya con una cantidad de material mínima.
35. Se construyen dos chapas cuadradas de distintos materiales, cuyos precios respectivos son 2 € y 3 € por cm^2 . ¿Qué longitudes deben tener los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y sabemos que la suma de los perímetros de los cuadrados tiene que ser 1 m?
36. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para que el consumo de papel sea mínimo.
37. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?
38. Los costes de fabricación $C(x)$, en euros, de cierta variedad de pastas dependen de la cantidad elaborada x , en kilos: $C(x) = 0,5 + 7x$. El fabricante estima que el precio de venta, en euros, de cada kilo de pastas viene dado
$$P(x) = 8 - \frac{x^2}{300}.$$
- ¿El precio de venta aumenta o disminuye con la cantidad?
 - Suponiendo que el fabricante vende todo lo que fabrica, obtén la función que recoge sus ganancias.
 - Para conseguir la máxima ganancia, ¿qué cantidad de pastas interesa producir? En este caso, ¿cuál es el precio de venta? ¿Qué ganancia se obtiene?
39. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

40. La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión: $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$
- Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
 - ¿Qué producción de hortaliza se obtendría en este caso?

Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy

41. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = |x-1|$ en el intervalo $[0, 2]$?
42. Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. En caso afirmativo determinar los valores de c .
43. ¿Satisface la función $f(x) = 1 - X$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?
44. Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.
45. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $-25 + 15x + 6x^2 + x^3 = 0$?
46. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a $f(x) = 1 - 5x + 4x^2$ en $[0, 2]$?
47. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[0, 2]$?
48. Determinar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[2, 6]$.
49. Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo $[1, 4]$ a las funciones: $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$. En caso afirmativo, aplicarlo.
50. Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable a las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{cos}(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Ejercicios teóricos

51. La función $f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + 2$ cumple que $f(1) = 3, f(-1) = 0$, y que $f(x)$ no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula los valores de a, b , y c .
52. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcula los coeficientes a, b, c y d sabiendo que la función pasa por el punto $(1, 1)$, tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ y la recta tangente en ese punto es paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.
53. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, calcula a, b y c de modo que tenga un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 1$ y la recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX .
54. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$
- Calcula la pendiente de la recta r que une los puntos de $f(x)$ de abscisas $x = 3$ y $x = \frac{3}{2}$.
 - ¿Cuántas rectas serán tangentes a $f(x)$ y paralelas a la recta r dada en el apartado anterior? Escribe sus ecuaciones.
55. Un móvil se desplaza a lo largo de la gráfica de la curva $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x > 1$. Cuando llega al punto $P\left(2, \frac{8}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva en ese punto.
- Halla la ecuación de la recta tangente en P .
 - Si se desplaza de izquierda a derecha, ¿en qué punto el móvil encuentra a la asíntota oblicua?
 - Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en que el móvil encuentra a la asíntota vertical más próxima.

Documento 5: Actividades de Refuerzo

1. Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)} \text{ en } x_0 = 1$$

2. Dada la función: $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

3. Un transportista va de una ciudad A a otra B a una velocidad constante de x km/h por una carretera en la que debe cumplirse que $35 \leq x \leq 55$. El

precio del carburante es de 0,6 euros el litro y el consumo es de $10 + \frac{x^2}{120}$

litros por hora. El conductor cobra 8 euros por hora y la distancia entre A y B es de 300 km. Halla la velocidad a la que debe ir para que el viaje resulte lo más económico posible.

4. Calcula a , b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax & \text{si } x < 2 \\ bx + c & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿Qué asegura el teorema en este caso?

5. Demuestra que la ecuación: $e^x - x - 1 = 0$ solo tiene la raíz $x = 0$. Para ello, supón que tuviera otra raíz (digamos $x = a$), aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = e^x - x - 1$ en $[0, a]$ (o en $[a, 0]$ si $a < 0$) y llegarás a una contradicción.

6. Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la curva:

$$f(x) = 5x^2(x-1)^2$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

7. La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

8. Comprueba que la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 2]$. ¿Dónde cumple la tesis?

9. Representa la función: $f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3}{4}$

10. Halla los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = -2 + \cos^2 x, x \in [0, 2\pi]$$

Utilizando la información obtenida, represéntala gráficamente.

11. Representa gráficamente la siguiente función: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
12. Dibuja la gráfica de la función: $f(x) = \frac{4x}{(x+2)^2}$
13. Obtén los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x, x \in [0, 2\pi]$
Dibuja su gráfica utilizando la información obtenida.
14. Estudia y representa: $f(x) = x^2 e^x$.
15. Representa gráficamente: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
16. Estudiar si se verifica el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 3]$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

17. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = \ln(5 - x^2)$ en el intervalo $[-2, 2]$?
18. Comprobar que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real. La función $f(x) = x^7 + 3x + 3$ es continua y derivable en \mathfrak{R} .
19. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.
20. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m^3 , su altura 1 m y el coste de su construcción por m^2 es de 50 € para la base; 60 para la etapa y 40 para cada pared lateral.

Documento 6: Actividades de Ampliación

1. Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio 12 cm.
2. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo.
3. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?
4. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.
5. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.
6. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.
7. Una hoja de papel debe tener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.
8. El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por la función: $B(x) = 1.2x - (0.1x)^3$ donde x es el número de autobuses fabricados en un mes.
 - a) Calcula la producción mensual que hacen máximo el beneficio.
 - b) El beneficio máximo correspondiente a dicha producción.
9. Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:
 - a) La producción actual de la huerta.
 - b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.
 - c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.
 - d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
10. Un sector circular tiene un perímetro de 10 m. Calcular El radio y la amplitud del sector de mayor área

11. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 g en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos rubíes formados sea mínima.
12. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.
13. Una boya, formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases ha de ser construido mediante dos placas circulares de 3 m de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.
14. Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$.
15. La cantidad (y) expresa el dinero acumulado en una máquina tragaperras durante un día y sigue una ley del tipo: $y = \frac{1}{3}x^3 - 19x^2 + 352x + 100$ y = donde la variable x representa el tiempo en horas (de 0 a 24). Responde a las siguientes preguntas:
 - a) ¿Se queda alguna vez vacía de dinero la máquina?
 - b) Si se realiza la "caja" a las 24 horas. ¿Arroja ganancias para los dueños de la máquina?
 - c) ¿A qué hora la recaudación es máxima y a qué hora es mínima?
 - d) ¿Cuándo entrega el mayor premio?
16. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$. Hallar a y b de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x=1$ una inflexión, y cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.
17. Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo, para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$.
18. Determinar el valor de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en (0, 4) y un mínimo en (2, 0).
19. Buscar y comentar el método de exhausción.
20. Buscar y comentar el método de las primeras y últimas razones de Newton. Aplicarlo para derivar la función $y = x^4$.

Documento 7: Prueba escrita por grupos

1. La cotización de las sesiones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C = 0.01x^3 - 0.45x^2 + 2.43x + 300$$

- a) Determinar las cotizaciones máxima y mínima, así como los días en que ocurrieron, en días distintos del primero y del último.
 - b) Determinar los períodos de tiempo en el que las acciones subieron o bajaron.
2. Determinar a, b, c, d y e, de modo que la curva $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tenga un punto crítico en (1, 3) y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 2x$ en (0, 0).
 3. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2 . Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.
 4. Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

$$b) f(x) = x + \sqrt{x}$$

5. Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos A(1, 2) y B(3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

Documento 8: Prueba escrita individual

- Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por: $r = 300t(1-t)$. Donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:
 - ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?
 - ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?
 - ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?
- La curva $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$. Hallar a , b y c .
- Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3 . ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?
- Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$a) f(x) = (x-1)e^{-x}$$

$$b) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- Demostrar que la ecuación $2x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo $(0, 1)$.

Documento 9: Relación de Problemas

1. Teniendo terreno suficiente, se desea vallar una parcela rectangular que limita con un río que pasa por uno de los lados del terreno. La valla del lado opuesto al río cuesta 2 € el metro y la de los otros dos lados a 1 € el metro. ¿Cuál es la superficie máxima que podemos vallar si disponemos de 400 €?
2. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón rectangular de 80x50 cm cuatro cuadrados y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcula la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja obtenida sea máximo.
3. Una hoja de papel debe contener 18 cm superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.
4. Se desea construir una lata de conservas de forma cilíndrica de área total 150 cm² y volumen máximo. Halla el radio de la base y la altura de la lata.
5. Un nadador A se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a un punto B, situado en la misma playa, a 6 km de la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.
6. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm² y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.
7. Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.
8. Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm². Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.
9. Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?
10. Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m³. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?
11. Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?
12. En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x , es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $x^2 + 70x$ mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están

determinados por la expresión $\frac{400x}{x-30}$. Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

13. Se quiere construir un depósito cónico cuya generatriz tiene que medir 3 metros y cuyo volumen pretendemos que sea lo máximo posible. ¿Cuánto deben medir la altura y el radio de la base?
14. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m² para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?
15. Una empresa de ordenadores tiene unos ingresos y unos costes de producción que se ajustan a las siguientes funciones:

$$I(x) = 60x - x^2 \text{ (Función de ingresos)}$$

$$C(x) = x^2 - 12x + 120 \text{ (Función de costes)}$$

(x = número de unidades producidas)

Se desea saber cuál es el beneficio máximo de la empresa y que número de unidades es producir para obtenerlo.

Documento 10: Ejercicios Históricos

1. Utilizar el método de Descartes para encontrar la tangente y la recta normal a la curva de ecuación $y^2 = 8x$, en el punto $(2,4)$. ¿Cuál es el principal inconveniente del método de la tangente de Descartes?
2. Encontrar la tangente a la curva de ecuación $x^2 = 5y$ en el punto $(5,5)$ utilizando el método de Fermat.
3. Utilizar el método de los máximos y mínimos de Fermat para encontrar los valores máximos o mínimos de $(x+3)(x^2 + 3x - 4)$.

Documento 11: Actividades TIC

1. En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x , es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $x^2 + 70x$ mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\frac{400x}{x-30}$. Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.
2. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m² para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?
3. Una empresa de ordenadores tiene unos ingresos y unos costes de producción que se ajustan a las siguientes funciones:
 $I(x) = 60x - x^2$ (Función de ingresos)
 $C(x) = x^2 - 12x + 120$ (Función de costes)
(x = número de unidades producidas)
Se desea saber cuál es el beneficio máximo de la empresa y que número de unidades es producir para obtenerlo.
4. Estudia y representa: $f(x) = x^2 e^x$.
5. a) Estudia los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \cos^2 x - \cos x, x \in [0, 2\pi]$
b) Representala gráficamente.