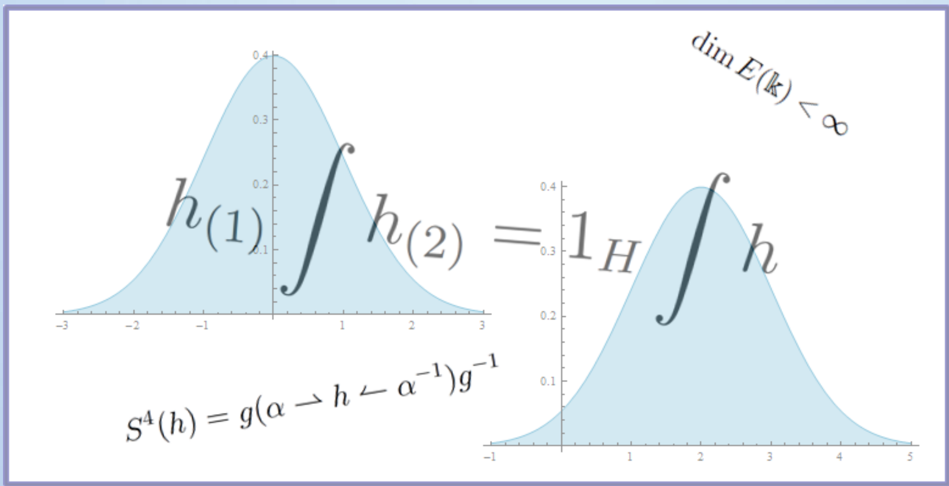
# La integral en álgebras de Hopf


Autora: Laura Martín Valverde

Director: Juan Cuadra Díaz


Titulación: Máster en Matemáticas





Universidad de Almería

23 de julio de 2015

# La integral en álgebras de Hopf


Autora: Laura Martín Valverde

Director: Juan Cuadra Díaz


Titulación: Máster en Matemáticas

VºBº del director:

Juan Cuadra Díaz

Trabajo defendido por:

Laura Martín Valverde


Universidad de Almería


23 de julio de 2015

# Índice general

**Introducción** **3**

**1. La integral de Haar** **13**
1.1. Preliminares topológicos . . . . . 13
1.2. Grupos compactos y localmente compactos . . . . . 14
1.3. Integral de Haar . . . . . 18
1.4. Existencia y unicidad de la integral de Haar . . . . . 19
1.5. La función modular . . . . . 28
1.6. El álgebra de Hopf de las funciones representativas . . . . . 34

**2. Álgebras de Hopf con integral** **47**
2.1. Álgebras y coálgebras . . . . . 47
2.2. Dualidad entre álgebras y coálgebras . . . . . 51
2.3. Comódulos . . . . . 56
2.4. Comódulos y módulos racionales . . . . . 58
2.5. Álgebras de Hopf . . . . . 62
2.6. Integrales . . . . . 68
2.7. Módulos de Hopf . . . . . 71
2.8. Biyectividad de la antípoda y unicidad de la integral . . . . . 73
2.9. El elemento modular . . . . . 79
2.10. Fórmula de Radford . . . . . 83
2.11. Teorema de Maschke . . . . . 89
2.12. Álgebras de Frobenius . . . . . 91
2.13. Caracterizaciones homológicas . . . . . 94
2.14. Condiciones de finitud . . . . . 95

**3. Nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con integral** **99**
3.1. Ejemplos de partida . . . . . 99
3.2. Nuevos ejemplos . . . . . 100
3.3. Futura línea de trabajo . . . . . 111

**Créditos fotográficos** **113**

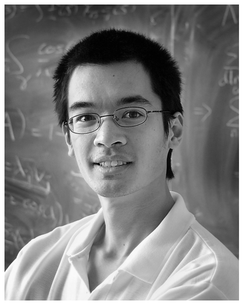
**Bibliografía** **115**

**Índice de términos** **121**

# Introducción

Escribe Terence Tao en la entrada [62] de su popular blog *What's new*:

«*The fundamental notions of calculus, namely differentiation and integration, are often viewed as being the quintessential concepts in mathematical analysis, as their standard definitions involve the concept of a limit. However, it is possible to capture most of the essence of these notions by purely algebraic means (almost completely avoiding the use of limits, Riemann sums, and similar devices), which turns out to be useful when trying to generalise these concepts to more abstract situations in which it becomes convenient to permit the underlying number systems involved to be something other than the real or complex numbers, even if this makes many standard analysis constructions unavailable. For instance, the algebraic notion of a derivation often serves as a substitute for the analytic notion of a derivative in such cases, by abstracting out the key algebraic properties of differentiation, namely linearity and the Leibniz rule (also known as the product rule).*»

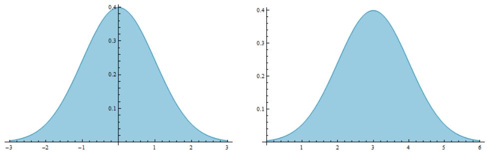


T. Tao
1975 -

Efectivamente, en nuestra formación como matemáticos aprendemos que se puede definir la derivada en otros ambientes aparte del analítico. Por ejemplo, definimos la derivada formal de un polinomio con coeficientes en un cuerpo (en el que puede no tener sentido el concepto de límite) y esta derivada formal resulta muy útil para detectar la existencia de raíces múltiples. En Geometría Algebraica la derivada formal proporciona, como en el caso geométrico-analítico, el espacio tangente de una variedad, y el estudio local de la variedad a través del espacio tangente en un punto es una técnica muy usada. Sin embargo, como continúa Tao en su entrada: «*Abstract algebraic analogues of integration are less well known, but can still be developed.*» Aunque la integral formal de un polinomio pudiera tener sentido (la característica del cuerpo base plantea problemas), no se estudia en la carrera ningún uso o interpretación comparable al de la derivada.

En esa entrada del blog se discute una propiedad algebraica de la integral, en la que quizá no se hace tanto énfasis, pero que permite generalizarla a un contexto algebraico y que resulta ser muy útil. Se trata de la *invarianza bajo traslaciones*. Si consideramos una función integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la integral representa el área de la función y ese área no varía si desplazamos la función hacia la izquierda o la derecha en el eje abcisas. Matemáticamente,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+r)dx, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$



En este trabajo damos una introducción a la noción y el uso de la integral en uno de estos contextos algebraicos: la Teoría de Álgebras de Hopf. En el primer capítulo explicamos cómo surge esta noción de integral mediante la abstracción de la propiedad anterior en la integral de Haar sobre grupos localmente compactos. La estructura de grupo es la adecuada para hablar de «traslaciones» y los grupos localmente compactos proporcionan el ambiente más general en el que existe una integral invariante. En el segundo capítulo introducimos la estructura de álgebra de Hopf y justificamos la importancia de la integral presentando varios resultados fundamentales que dependen de ella. Son los siguientes:

(1) La Fórmula de Radford, que relaciona la cuarta potencia de la antípoda con los elementos modulares que provienen de las integrales. De esta fórmula se deriva una propiedad estructural importante en un álgebra de Hopf de dimensión finita: su antípoda tiene orden finito para la composición.

(2) El Teorema de Maschke generalizado, que caracteriza la (co)semisimplicidad de un álgebra de Hopf a través de que la integral no se anule en el elemento unidad.

(3) Toda álgebra de Hopf de dimensión finita es un álgebra de Frobenius con forma bilineal definida mediante la integral. Esto incluye a las álgebras de Hopf en una clase distinguida de álgebras.

(4) Varias caracterizaciones de la existencia de integral. En términos homológicos: la existencia de un comódulo proyectivo no nulo, de suficientes proyectivos o de cubiertas proyectivas. Y en términos de finitud: la filtración corradical es finita, cada comódulo no nulo tiene un cociente no nulo de dimensión finita o cada comódulo de dimensión finita tiene una envolvente inyectiva de dimensión finita.

Finalmente, en el tercer capítulo construimos una nueva familia de ejemplos de álgebras de Hopf con integral a partir de unos ejemplos construidos por Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof.

Estos serían, de manera resumida, los objetivos de este trabajo. A continuación describimos más detalladamente las ideas y el contenido del mismo.

En el primer capítulo explicamos cómo aparece, en el ambiente de los grupos topológicos, la estructura de álgebra de Hopf cuando se consideran un tipo especial de funciones sobre ellos: las funciones representativas. Muchas identidades conocidas en Matemáticas, como la identidad binomial, las trigonométricas para la suma de ángulos, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ ó $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, expresan que las funciones consideradas son representativas. En Ejemplos 1.6.3 se pueden ver varios otros, entre los que se encuentran los polinomios de Hermite, Bernoulli y Euler.

Cuando el grupo es localmente compacto, posee una integral de Haar y la propiedad de invarianza bajo traslaciones, aplicada a una función representativa, se traduce en una condición expresable en términos de la estructura de álgebra de Hopf. Así se llega a la noción de integral en este contexto. Muchos de los resultados sobre la integral de Haar tienen análogos para la integral en álgebras de Hopf. En este capítulo presentamos dos resultados importantes que ilustran muy bien el paralelismo: el Teorema de Existencia y Unicidad de la Integral de Haar y la construcción de la función modular.

Sea $G$ un grupo topológico (Hausdorff) localmente compacto. Consideremos el espacio $\mathcal{C}(G)$ de funciones continuas de $G$ en $\mathbb{R}$ y, dentro de él, el subespacio $\mathcal{C}_c(G)$ de funciones con soporte compacto. Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$ y $x \in G$ la traslación $x \cdot \varphi$ de $\varphi$ por $x$ a izquierda está definida como $(x \cdot \varphi)(y) = \varphi(yx)$ para todo $y \in G$. Una aplicación lineal $\lambda : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$ es una integral de Haar a izquierda sobre $G$ si es no nula, no negativa e invariante a izquierda. Esto último significa que $\lambda(x \cdot \varphi) = \lambda(\varphi)$ para todo $x \in G$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$; véase Definición 1.3.2. Esta definición admite una versión a derecha, que adquiere sentido cuando $G$ no es abeliano. Para la traslación a derecha escribimos $\varphi \cdot x$. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, considerado como grupo topológico bajo la suma, la integral de Lebesgue (o Riemann) es una integral de Haar. En la Sección 1.3 se presentan otros ejemplos, varios de ellos no abelianos.

El Teorema de Haar, que es uno de los resultados más importantes de la primera mitad del s. XX, afirma que todo grupo topológico localmente compacto $G$ posee una integral de Haar a izquierda (resp. derecha) y que esta es única salvo escalares; véase Teoremas 1.4.1 y 1.4.2. Como consecuencia de la unicidad, se construye un homomorfismo de grupos $\mathrm{mod} : G \to \mathbb{R}^{\bullet}_{+}$, llamado función modular, que detecta la diferencia entre las integrales a derecha e izquierda. Sea $\lambda$ una integral de Haar a izquierda sobre $G$. Para cada $x \in G$ consideramos $\lambda_x : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \lambda(\varphi \cdot x)$. Se demuestra (Sección 1.5) que $\lambda_x$ es una integral de Haar invariante a izquierda. Entonces, existirá un número real positivo $\mathrm{mod}(x)$ tal que $\lambda_x = \mathrm{mod}(x)\lambda$. Por tanto, toda integral de Haar a izquierda lo es a derecha (y viceversa) si y sólo si la función modular es trivial. A los grupos en los que se cumple esto se les llama unimodulares. En la Sección 1.5 se presentan ejemplos de grupos unimodulares y uno no unimodular.

Por otra parte, una función continua $\varphi : G \to \mathbb{R}$ es representativa si el subespacio generado por $\{\varphi \cdot x\}_{x \in G}$ es de dimensión finita. Tomemos $\{\varphi''_i\}_{i=1}^n$ una base de él. Para cada $x \in G$ existen $\varphi'_1(x), \ldots, \varphi'_n(x) \in \mathbb{R}$ únicos tales que

$$\varphi(xy) = (\varphi \cdot x)(y) = \varphi'_1(x)\varphi''_1(y) + \ldots + \varphi'_n(x)\varphi''_n(y), \qquad \forall y \in G. \tag{1}$$

Así, se obtienen funciones continuas $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n : G \to \mathbb{R}$ que también son representativas, Proposición 1.6.7. En realidad, la existencia de funciones $\{\varphi'_i, \varphi''_i\}_{i=1}^n$ que cumplan (1) es equivalente a que $\varphi$ sea representativa, Proposición 1.6.6. El espacio de las funciones representativas, que denotaremos por $\mathcal{R}(G)$, es una subálgebra de $\mathcal{C}(G)$. La estructura de grupo de $G$ dota al álgebra $\mathcal{R}(G)$ de una estructura adicional, que recibirá el nombre de *álgebra de Hopf*. Esta estructura adicional viene dada por tres aplicaciones $\Delta$, $\varepsilon$ y $S$. La aplicación $\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$, $\varphi \mapsto \sum_{i=1}^n \varphi'_i \otimes \varphi''_i$ es un homomorfismo de álgebras, llamado comultiplicación por ser dual de la multiplicación en el grupo $m : G \times G \to G$. (Aquí, $\otimes$ denota el producto tensorial sobre $\mathbb{R}$.) La evaluación en el elemento neutro $1_G$ da lugar a un homomorfismo de álgebras $\varepsilon : \mathcal{R}(G) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(1_G)$, llamado counidad. Finalmente, la inversión induce un antihomomorfismo de álgebras $S : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G)$, definido por $S(\varphi)(x) = \varphi(x^{-1})$. Se le llama antípoda. A modo de ejemplo, en el grupo aditivo de los número reales, las conocidas identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \end{aligned}$$

expresan que $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones representativas. La comultiplicación, counidad y antípoda sobre ellas estarían dadas por:

$$\begin{aligned} &\Delta(\operatorname{sen}) = \operatorname{sen} \otimes \cos + \cos \otimes \operatorname{sen}, && \varepsilon(\operatorname{sen}) = 0, && S(\operatorname{sen}) = -\operatorname{sen}, \\ &\Delta(\cos) = \cos \otimes \cos - \operatorname{sen} \otimes \operatorname{sen}, && \varepsilon(\cos) = 1, && S(\cos) = \cos. \end{aligned}$$

De la condición (1) que define $\Delta$ vemos que la asociatividad del producto en el grupo $G$ se debe traducir en una propiedad dual para $\Delta$. Recibe el nombre de coasociatividad y es $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$. En el primer diagrama de la página 39 se pueden ver ambas propiedades comparadas. Del mismo modo, el axioma de elemento neutro de $G$, que también involucra al producto, debe traducirse en una propiedad de $\Delta$ y $\varepsilon$. Se le llama propiedad de la counidad y es $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id$. Expresada mediante elementos sería $\varphi = \sum_{i=1}^n \varepsilon(\varphi'_i)\varphi''_i = \sum_{i=1}^n \varphi'_i \varepsilon(\varphi''_i)$. En el segundo diagrama de la página 39 se pueden ver ambas propiedades comparadas. Finalmente, el axioma de elemento inverso en $G$, que involucra al producto, inverso y elemento neutro, debe reflejarse en una propiedad que afecte a $\Delta, \varepsilon$ y $S$. Se le llama propiedad de la antípoda y es, expresada mediante elementos,$\sum_{i=1}^n S(\varphi'_i)\varphi''_i = \sum_{i=1}^n \varphi'_i S(\varphi''_i) = \varepsilon(\varphi) 1_{\mathcal{R}(G)}$. (Aquí $1_{\mathcal{R}(G)}$ es el elemento identidad de $\mathcal{R}(G)$). En las páginas 39 y 40 aparecen comparadas mediante diagramas ambas propiedades. Toda la construcción del álgebra de Hopf $\mathcal{R}(G)$ se explica en detalle en la Sección 1.6.

Supongamos ahora que $G$ es compacto. Toda función continua $\varphi : G \to \mathbb{R}$ tiene soporte compacto. La integral de Haar a izquierda $\lambda : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{R}$ puede restringirse entonces a $\mathcal{R}(G)$. Cuando $\varphi \in \mathcal{R}(G)$ la propiedad de invarianza a izquierda de $\lambda$ se traduce en la siguiente condición, expresada mediante $\Delta$ y el elemento identidad de

$\mathcal{R}(G)$:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(\varphi_i')\varphi_i'' = \lambda(\varphi)1_{\mathcal{R}(G)}.$$
Esta condición tiene sentido en cualquier álgebra de Hopf y fue utilizada por Sweedler para introducir el concepto de integral en esta estructura algebraica.

En el segundo capítulo introduciremos las álgebras de Hopf y estudiaremos la noción de integral sobre ellas. Sea $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario. Un álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ es una $\Bbbk$-álgebra $H$ junto con aplicaciones $\Delta : H \to H \otimes H$ (comultiplicación), $\varepsilon : H \to \Bbbk$ (counidad) y $S : H \to H$ (antípoda) que satisfacen las mismas propiedades que en el caso de $\mathcal{R}(G)$. (Ahora, $\otimes$ denota el producto tensorial sobre $\Bbbk$.) Trabajar con la comultiplicación puede resultar engorroso y, para facilitar la tarea, se usa la notación de Sweedler. Dado $h \in H$, tendremos $\Delta(h) = \sum_{i=1}^{n} h_{1i} \otimes h_{2i}$ con $h_{1i}, h_{2i} \in H$. Sweedler propone escribir $\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, donde los subíndices (1) y (2) son simbólicos; no se refieren a un elemento concreto de $H$. El uso ha impuesto una simplificación adicional: suprimir el sumatorio. De modo que se pone $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, pero se lleva en mente que esto representa una suma finita de elementos.

Una integral a derecha sobre $H$ es una aplicación lineal $\mu : H \to \Bbbk$ que satisface
$$\mu(h_{(1)})h_{(2)} = \mu(h)1_H, \qquad \forall h \in H.$$
Aquí, $1_H$ denota el elemento identidad de $H$. Evaluando en el segundo tensorando se obtiene la noción de integral a izquierda. Obsérvese que la aplicación nula es una integral. Diremos que $H$ tiene integral cuando exista una integral (a derecha o izquierda) no nula. Podemos prescindir del lado, pues demostraremos en el Corolario 2.8.9 que un álgebra de Hopf que tenga una integral a derecha tiene una a izquierda y viceversa. La razón de esto es que en un álgebra de Hopf con integral la antípoda es biyectiva (Teorema 2.8.7) y lleva integrales a derecha en integrales a izquierda y viceversa. Diremos que $H$ no tiene integral cuando la aplicación nula sea su única integral. En Ejemplo 2.6.3 se da un ejemplo de álgebra de Hopf así. Por otro lado, toda álgebra de Hopf de dimensión finita tiene integral.

El Teorema de Unicidad de la Integral, que estableceremos en el Teorema 2.8.11, afirma que el espacio $\int_l(H)$ de integrales a izquierda (derecha) sobre $H$ es de dimensión menor o igual que uno. En otras palabras, si $H$ tiene una integral a derecha (izquierda), esta es única salvo escalares. Al igual que en el caso de $\mathcal{R}(G)$, la unicidad permite construir un elemento modular que detecta la diferencia entre integrales a derecha e izquierda. Veremos en la Sección 2.9 que existe $g \in H$ tal que
$$h_{(1)}\mu(h_{(2)}) = \mu(h)g, \qquad \forall h \in H.$$
Además, $g$ es un elemento especial, de los llamados de tipo grupo. Esto significa que $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$. Tales elementos forman un grupo (Corolario 2.5.6), así que

$g$ es invertible. Se dice que $H$ es unimodular cuando $g = 1_H$, lo cual equivale a que toda integral a derecha lo sea a izquierda y viceversa.

Cuando $H$ es de dimensión finita, el espacio dual $H^*$ también es un álgebra de Hopf; véase la Proposición 2.5.11. La dualidad intercambia el papel de cada aplicación: la comultiplicación de $H^*$ es el dual de la multiplicación de $H$, la counidad de $H^*$ viene dada por evaluar en $1_H$ y la antípoda de $H^*$ es el dual de la antípoda de $H$. Entonces aparece una noción dual de integral. Un elemento $\Gamma \in H$ es una integral a derecha si cumple:

$$\Gamma h = \varepsilon(h)\Gamma, \qquad \forall h \in H.$$

La versión a izquierda resulta multiplicando por $h$ a ese lado. Del mismo modo, aparece también una noción dual de elemento modular: existe un homomorfismo de álgebras $\alpha : H \to \Bbbk$ tal que

$$h\Gamma = \alpha(h)\Gamma, \qquad \forall h \in H.$$

La Fórmula de Radford, que veremos en la Sección 2.10, establece una conexión entre la potencia cuarta de la antípoda y los elementos modulares. Concretamente, es:

$$S^4(h) = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1}, \qquad \forall h \in H.$$

Aquí, $\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1}$ denota a la aplicación dual de conjugar por $\alpha$ en el álgebra $H^*$. Puesto que los elementos modulares son de tipo grupo y tales elementos forman un grupo, cuando $\dim H < \infty$ ambos tienen orden finito. Por tanto, debe ser $S^{4n} = id_H$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia se obtiene que, en un álgebra de Hopf de dimensión finita, la antípoda tiene orden finito.

Aunque $H$ no sea de dimensión finita, la Fórmula de Radford es válida si $H$ tiene una integral en el sentido (2.9). Esto fue demostrado por Beattie, Bulacu y Torrecillas en [10] y su demostración es la que expondremos aquí. En este ambiente, puede ocurrir que la antípoda ya no tenga orden finito, pues esto depende de la finitud del orden de los elementos modulares. Por otro lado, es importante resaltar que en el caso de $\mathcal{R}(G)$ la conexión establecida por la Fórmula de Radford no se ve, pues $S^2 = id$. Este es un punto en el que la Teoría de Álgebras de Hopf empieza a mostrar nuevos fenómenos.

Aquí hay que señalar también que, aunque el Teorema de Unicidad de la Integral y la construcción del elemento modular está inspirada en el caso de grupos localmente compactos, la estrategia y herramientas usadas en su demostración son totalmente distintas. Una primera diferencia es que, en el caso de grupos, la antípoda es automáticamente biyectiva, mientras que en álgebras de Hopf hay que probarlo. Existen distintas demostraciones del Teorema de Unicidad de la Integral. En la página 97 hacemos algunos comentarios sobre cada una de ellas. Nosotros hemos seguido la de Iovanov y Raianu [37], que nos ha parecido la más corta y elemental de todas. Además, hemos simplificado parte de la demostración con un argumento nuestro.

La clave de esta demostración es el uso de los módulos de Hopf, que definimos en la Sección 2.6. De hecho, el desarrollo de las técnicas necesarias para esta demostración nos obliga a realizar una aproximación diferente a la noción de álgebra de Hopf que la que hacemos en esta introducción.

En lugar de la dualidad grupo-álgebra de funciones, usaremos la dualidad en espacios vectoriales. A partir de la definición de álgebra, llegaremos por dualidad a la de coálgebra. Una coálgebra es un $\Bbbk$-espacio vectorial $C$ junto con aplicaciones lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicación) y $\varepsilon : C \to \Bbbk$ (counidad) que satisfacen las propiedades de coasociatividad y counidad que hemos visto antes. En la primera parte del Capítulo 2 estudiaremos la dualidad existente entre álgebras y coálgebras. Para una coálgebra $C$ el espacio dual $C^*$ es un álgebra con el llamado producto convolución. Dados $\varphi, \psi \in C^*$ se define como:

$$(\varphi \star \psi)(c) = \varphi(c_{(1)})\psi(c_{(2)}), \qquad \forall c \in C.$$

El elemento unidad de $C^*$ es $\varepsilon$. Mediante dualidad surgirá también la noción de comódulo a partir de la de módulo. Un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ es un $C$*-comódulo* a derecha si existe una aplicación lineal $\rho : M \to M \otimes C$ (coacción) de forma que $(\rho \otimes id) \circ \rho = (id \otimes \Delta) \circ \rho$ e $(id \otimes \varepsilon) \circ \rho = id$.

En el Teorema 2.4.6 veremos que los $C$-comódulos se pueden identificar con un tipo especial de $C^*$-módulos: los racionales. Dado un $C^*$-módulo a izquierda $M$ diremos que $m \in M$ es racional si existe $\rho_m := \sum_{i=1}^r m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ tal que $\psi m = \sum_{i=1}^r \psi(c_i)m_i$ para todo $\psi \in C^*$. El submódulo racional $Rat(M)$ de $M$ se define como el conjunto de elementos racionales de $M$. Diremos que $M$ es racional si $M = Rat(M)$. En el caso de $C^*$, que podemos ver como $C^*$-módulo a derecha e izquierda, escribimos $Rat_r(C^*)$ y $Rat_l(C^*)$ para cada uno de ellos. Para un álgebra de Hopf $H$, veremos en la Sección 2.8 que $Rat_l(H^*)$ es un módulo de Hopf. Es decir, es simultáneamente un $H$-módulo y un $H$-comódulo de modo que la coacción es un morfismo de $H$-módulos. La propia $H$ es un módulo de Hopf considerada como $H$-módulo y $H$-comódulo a izquierda. Y, para un espacio vectorial $V$, el producto tensorial $V \otimes H$ es un $H$-módulo de Hopf con la estructura heredada de $H$. El Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf, Teorema 2.7.5, afirma que todo módulo de Hopf $M$ es de esa forma: $V$ aparece como el subespacio de elementos coinvariantes. Tal subespacio se define como

$$M^{co(H)} = \{m \in M : \rho(m) = 1_H \otimes m\}.$$

Resulta que, para $Rat_l(H^*)$, el subespacio de coinvariantes es precisamente el espacio de integrales a izquierda $\int_l(H)$, Lema 2.8.2. Esta es la conexión clave para la demostración del Teorema de Unicidad de la Integral en álgebras de Hopf.

La segunda aplicación de la integral que veremos es una generalización del Teorema de Maschke. Dualmente al caso de álgebras, una coálgebra se dice cosemisimple si es una suma directa de subcoálgebras simples. Se puede demostrar que una coálgebra es cosemisimple si y sólo si todo comódulo a izquierda (derecha) sobre ella es completamente reducible, es decir, una suma directa de subcomódulos simples. El Teorema de Maschke generalizado, Teorema 2.11.2, afirma que un álgebra de Hopf $H$ es cosemisimple si y sólo si existe una integral a izquierda $\lambda : H \to \Bbbk$ tal que $\lambda(1_H) \neq 0$. A raíz de esta caracterización observaremos que el álgebra de Hopf $\mathcal{R}(G)$ es cosemisimple para un grupo compacto $G$. Cuando $H$ tiene dimensión finita, este teorema toma la siguiente forma: $H$ es semisimple si y sólo si existe una integral a izquierda $\Lambda \in H$ tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$. Cuando esto se aplica al álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ para un grupo finito $G$, recuperamos la afirmación de Maschke: $\Bbbk[G]$ es semisimple si y solo si $|G| \neq 0$ en $\Bbbk$.

Veremos también en esta sección que un álgebra de Hopf cosemisimple (resp. semisimple) es unimodular (resp. counimodular). Como consecuencia de la Fórmula de Radford obtendremos que en un álgebra de Hopf $H$ semisimple y cosemisimple se cumple $S^4 = id$. Esto supone una primera aproximación a la quinta conjetura de Kaplansky, que afirma que, en un álgebra de Hopf semisimple, la antípoda al cuadrado es la identidad. Realizaremos varios comentarios sobre lo que actualmente se conoce en torno a este problema.

La última aplicación de la integral que presentaremos es la forma bilineal que define en el caso de álgebras de Hopf de dimensión finita. Recordemos que un álgebra de Frobenius es un álgebra dotada de una forma bilineal $[\ ,\ ] : A \times A \to \Bbbk$ no degenerada tal que $[ab, c] = [a, bc]$, para todos $a, b, c \in A$. Esto equivale a que exista un monomorfismo de módulos de $A$ en $A^*$. En el Teorema 2.12.4 se prueba que, para un álgebra de Hopf $H$ de dimensión finita, la forma bilineal $(h, h') \mapsto \lambda(hh')$ convierte a $H$ en un álgebra de Frobenius. Además, esta noción se puede dualizar y se puede definir una coálgebra co-Frobenius como una coálgebra $C$ para la que existe un monomorfismo de $C^*$-módulos de $C$ en $C^*$. Veremos en el Teorema 2.12.6 que un álgebra de Hopf es co-Frobenius si y sólo si tiene integral. Es por esta razón, que en la literatura, las álgebras de Hopf con integral reciben el nombre de álgebras de Hopf co-Frobenius.

En la Sección 2.13 presentaremos varias caracterizaciones de la existencia de integral en términos homológicos. Esto resulta muy sorprendente pues, de la definición de integral, no se intuye a priori ninguna conexión de este tipo, ni en el caso de grupos topológicos existe algo parecido. Entre las caracterizaciones que mostraremos se incluyen: la envolvente inyectiva de un comódulo de dimensión finita es de dimensión finita; existe un comódulo proyectivo no nulo; todo comódulo tiene una cubierta proyectiva y, finalmente, todo comódulo inyectivo es proyectivo.

Terminaremos el segundo capítulo con dos caracterizaciones mediante condiciones de finitud. La primera afirma que un álgebra de Hopf tiene integral si y sólo si todo comódulo no nulo tiene un cociente de dimensión finita no nulo, Teorema 2.14.1. La segunda, recientemente demostrada por Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof en [3], afirma que un álgebra de Hopf tiene integral si y sólo si la filtración corradical es finita, Teorema 2.14.2. Esto responde a una conjetura planteada por Andruskiewitsch y Dăscălescu en [4] y surgida a partir de un problema estudiado por Radford en los años 70.

En el tercer capítulo construiremos una nueva familia de ejemplos de álgebras de Hopf con integral a partir de otra previamente construida por Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof en [3]. Nuestra familia surge al aplicar el método desarrollado en [3] a levantamientos de rectas cuánticas sobre ciertos grupos no abelianos, aunque, por simplicidad, la expondremos de un modo diferente, indicando sólo la regla encontrada.

Partiremos de un álgebra de Hopf construida por estos autores. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y supongamos que $\Bbbk$ contiene una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad $\omega$. Sea $I$ un conjunto no vacío y, para cada $i \in I$, tomamos $q_i \in \Bbbk$ no nulo. Consideramos la $\Bbbk$-álgebra $H$ generada por $u, x$ y $a_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ sujeta a las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{llll} u^n = 1, & x^n = 0, & ux = \omega x u, & a_i^{\pm 1} a_i^{\mp 1} = 1, \\ u a_i = a_i u, & a_i x = q_i x a_i, & a_i a_j = a_j a_i, & i, j \in I. \end{array}$$

Sea ahora $\alpha \in \Bbbk$ no nulo. Entonces, $H$ admite una estructura de álgebra de Hopf con comultiplicación, counidad y antípoda definida sobre los generadores por:

$$\Delta(u) = u \otimes u, \qquad \Delta(x) = u \otimes x + x \otimes 1,$$

$$\Delta(a_i^{\pm 1}) = a_i^{\pm 1} \otimes a_i^{\pm 1} + \alpha(1 - q_i^{\pm n}) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k a_i^{\pm 1} \otimes x^k a_i^{\pm 1},$$

$$\begin{array}{lll} \varepsilon(u) = 1, & \varepsilon(x) = 0, & \varepsilon(a_i^{\pm 1}) = 1, \\ S(u) = u^{n-1}, & S(x) = -u^{n-1} x, & S(a_i^{\pm 1}) = a_i^{\mp 1}. \end{array}$$

Nosotros consideraremos un álgebra de Hopf $B$ y una familia de elementos $\{z_i\}_{i \in I}$ en $Z(B) \otimes Z(B)$ que satisfacen varias condiciones, listadas en la página 100. En el álgebra producto tensorial $L_z := H \otimes B$ alteraremos la comultiplicación y la antípoda de $a_i$ del siguiente modo:

$$\Delta_z(a_i) = \Delta_H(a_i) z_i \qquad \text{y} \qquad S_z(a_i) = S_H(a_i) \nabla_B(z_i).$$

Aquí $\nabla_B$ denota la multiplicación de $B$. Demostraremos en el Teorema 3.2.1 que las condiciones pedidas aseguran que $L_z$ es un álgebra de Hopf. También, $L_z$ tendrá integral si $B$ la tiene, Teorema 3.2.2. El caso más sencillo de esta modificación es tomar $z_i = 1_B \otimes 1_B$. Entonces, $L_z$ es simplemente el producto tensorial de álgebras de Hopf. En las proposiciones 3.2.5 y 3.2.6 veremos otros ejemplos cuando $B$ es el álgebra de grupo sobre los grupos $\mathbb{Z}_m$ ó $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$.

En cuanto a la bibliografía nos gustaría comentar que en ésta no sólo se incluyen los libros y artículos que hemos utilizado para realizar este trabajo. Hemos incluido una bibliografía amplia sobre el tema con objeto de que el lector pueda consultar los aspectos no tratados aquí, especialmente en lo referente a ejemplos. El trabajo quizá peca un poco de falta de ellos, pero el problema es que los ejemplos más significativos de álgebras de Hopf con integral necesitarían una cantidad de preliminares que lo alargaría excesivamente. Entre los ejemplos más genuinos de esta clase de álgebras están las *álgebras de coordenadas cuantizadas*, veáse [1] y [4], y los *grupos cuánticos asociados a simetrías de Hecke*, véase [29].

Terminamos esta introducción indicando que este trabajo fue iniciado en mi etapa como becaria de colaboración en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería, en el curso 2013-14. En él he querido reflejar una buena parte de lo que he aprendido durante estos dos cursos y presentar los primeros resultados obtenidos en mi iniciación a la investigación.

Mi intención es realizar una tesis doctoral en este tema con el mismo director. En los próximos años queremos profundizar en la estructura de las álgebras de Hopf con integral. Para ello, necesitamos producir nuevos ejemplos que nos puedan dar pistas sobre qué patrón sigue la estructura. Hasta ahora, los ejemplos sugieren que las álgebras de Hopf con integral se pueden construir, de algún modo, a partir de álgebras de Hopf de dimensión finita y álgebras de Hopf cosemisimples. Nos gustaría confirmar si este es o no el patrón seguido por esta clase de álgebras de Hopf.

# Capítulo 1

# La integral de Haar

En este primer capítulo estudiaremos la integral de Haar sobre grupos localmente compactos. Estableceremos el Teorema de Existencia y Unicidad de la Integral y construiremos la función modular. Definiremos el álgebra de las funciones representativas sobre un grupo y explicaremos cómo la estructura de grupo la convierte en un álgebra de Hopf. En el caso de grupos compactos veremos que la invarianza de la integral de Haar se puede expresar en términos de esta nueva estructura.

## 1.1. Preliminares topológicos

A lo largo de este capítulo trabajaremos con espacios topológicos Hausdorff compactos o localmente compactos, por lo que recordamos brevemente estas nociones y algunos resultados sobre ellos.

Un espacio topológico $X$ se dice:

- *Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existen entornos $U_x$ de $x$ y $U_y$ de $y$ tal que $U_x \cap U_y = \emptyset$.
- *Compacto* si para todo recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X$ existe $F \subset I$ finito tal que $\{U_i\}_{i \in F}$ es un recubrimiento de $X$.
- *Localmente compacto* si cada $x \in X$ tiene una base de entornos compactos.
- *Normal* si dados $A, B \subset X$ cerrados y disjuntos, existen $U$ entorno de $A$ y $V$ entorno de $B$ también disjuntos.

Una caracterización de compacidad es la siguiente: $X$ *es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados* $\{F_i\}_{i \in I}$ *con la propiedad de la intersección finita cumple que* $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Recordemos que dados espacios topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$, la *topología producto* sobre $\prod_{i \in I} X_i$ se define como la topología con base de abiertos

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \text{ es abierto y } U_i = X_i \text{ para casi todo } i \right\}.$$

Es la topología más fina que hace continuas a las proyecciones $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$.

**Teorema 1.1.1** (Tychonoff). *El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Se sabe que todo espacio compacto y Hausdorff es normal. Una importante caracterización de la normalidad es la siguiente [44, Theorem 1, pág. 12]:

**Lema 1.1.2** (Urysohn). *Un espacio topológico $X$ es normal si y sólo si para cualesquiera $A, B \subset X$ cerrados disjuntos existe $\varphi : X \to [0,1]$ continua con $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(b) = 1$ para todos $a \in A$ y $b \in B$.*

En lo sucesivo trabajaremos con los siguientes subespacios de la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}^X$ de funciones de $X$ en $\mathbb{R}$:

- El subespacio $\mathcal{C}(X)$ de funciones continuas.
- El subespacio $\mathcal{C}_c(X)$ de funciones continuas con soporte compacto. Recordemos que para $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ su soporte es $\operatorname{Sop}\varphi = \overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$.

El Lema de Urysohn admite la siguiente extensión a espacios localmente compactos [52, Corollary 1.27]:

**Lema 1.1.3.** *Sea $X$ un espacio localmente compacto y Hausdorff. Sea $C \subseteq X$ compacto y $U \subseteq X$ abierto tal que $C \subset U$. Entonces, existe $\varphi : X \to [0,1]$ continua tal que $\varphi(a) = 0$ y $\varphi(c) = 1$ para todos $a \notin U$ y $c \in C$.*

*Además, se puede elegir $\varphi$ de modo que $\operatorname{Sop}\varphi$ es compacto y $\operatorname{Sop}\varphi \subset U$.*

Una consecuencia del lema anterior y la compacidad local es el siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar en [52, pág. 115]:

**Proposición 1.1.4** (Partición de la unidad). *Sea $X$ un espacio localmente compacto y Hausdorff. Sea $C \subseteq X$ compacto y $W_1, \ldots, W_n$ subconjuntos abiertos de $X$ tales que $C \subseteq \cup_{k=1}^n W_k$. Entonces, existe una familia de funciones continuas $\{\varphi_k : X \to [0,1]\}_{k=1}^n$ tal que $\operatorname{Sop}\varphi_k \subseteq W_k$ para todo $k$ y $(\sum_{k=1}^n \varphi_k)(c) = 1$ para todo $c \in C$.*

## 1.2. Grupos compactos y localmente compactos

Un *grupo topológico* es un grupo $G$ dotado de una topología Hausdorff de modo que el producto $G \times G \to G, (x,y) \mapsto xy$ y la aplicación inversión $inv : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ son continuas (a $G \times G$ se le dota de la topología producto). Ambas condiciones son equivalentes a: la aplicación $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ es continua. Entonces, para $x \in G$ las traslaciones a derecha e izquierda, $R_x : G \mapsto G, y \mapsto yx$ y $L_x : G \mapsto G, y \mapsto xy$, son homeomorfismos. Al elemento neutro de $G$ lo denotaremos por $1_G$. Si $U$ es un subconjunto de $G$ escribimos $U^{-1} = inv(U)$. Diremos que $U$ es *simétrico* si $U = U^{-1}$.

Se dice que un grupo topológico es un *grupo compacto* (resp. *localmente compacto*) si su topología le hace ser un espacio compacto (resp. localmente compacto).

Veamos varios ejemplos de grupos de este tipo:

**Ejemplos 1.2.1.**

1. Todo grupo finito, equipado con la topología discreta, es un grupo compacto.

2. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo localmente compacto con la suma y la topología inducida por la métrica euclídea.

3. El grupo $GL_n(\mathbb{R})$ de matrices invertibles de orden $n$ con coeficientes reales es un grupo localmente compacto. Su topología es la inducida por la métrica euclídea en $\mathbb{R}^{n^2}$ al considerar cada matriz como un punto aquí. La función determinante det es continua y $GL_n(\mathbb{R})$ es abierto por ser imagen inversa mediante det de un abierto. Ahora obsérvese que la propiedad de ser localmente compacto pasa a abiertos.

   El subconjunto $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ es un grupo localmente compacto. Podemos verlo como la imagen inversa de $\{1\}$ mediante det, por tanto es cerrado. Y la propiedad de ser localmente compacto también pasa a cerrados.

   El subconjunto $O_n(\mathbb{R})$ de matrices ortogonales de orden $n$ es un grupo compacto. Es cerrado en $\mathbb{R}^{n^2}$ pues está formado por puntos que son solución de un sistema de ecuaciones polinomiales: el que expresa la igualdad $AA^t = Id$. Es acotado pues $|a_{ij}| \leq 1$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$ debido a la igualdad

   $$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2 = 1.$$

4. El grupo $C_\infty$ de las rotaciones del plano euclídeo, identificado con la circunferencia unidad $S^1$, es compacto. Para un ángulo $\theta$ denotamos por $r_\theta$ a la rotación correspondiente.

5. El grupo $D_\infty$ de las rotaciones y reflexiones del plano euclídeo que preservan el origen es compacto. Para una reflexión $s$ se tienen las siguientes relaciones:

   $$s^2 = 1 \quad \text{y} \quad sr_\theta = r_{-\theta}s.$$

   Todo elemento de $D_\infty$ puede escribirse de forma única como $r_\theta$ ó $sr_\theta$, por lo que, topológicamente, $D_\infty$ consta de dos circunferencias disjuntas.

S. Lie
1842-1899

Un ejemplo relevante de grupos topológicos son los grupos de Lie. Un *grupo de Lie* es un grupo que, a su vez, es una variedad diferenciable de modo que las operaciones de grupo (producto e inversión) son funciones diferenciables. Todos los ejemplos anteriores, salvo el primero, son grupos de Lie. En [9, págs. 189-191] se prueba que los grupos $GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R})$ y $O_n(\mathbb{R})$ lo son. En [9, Theorem 7.25], se demuestra que la estructura de grupo de Lie se hereda a subgrupos cerrados. Entonces, $C_\infty$ y $D_\infty$ son también grupos de Lie pues los podemos ver como subgrupos cerrados de $GL_2(\mathbb{R})$ del siguiente modo:

$$C_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in (0, 2\pi] \right\},$$

$$D_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in (0, 2\pi] \right\}.$$

En este contexto hay que mencionar que la estructura de álgebra de Hopf, que veremos después, apareció precisamente en un problema sobre grupos de Lie. Fue la estructura de álgebra de Hopf de los grupos de homología lo que permitió a Heinz Hopf demostrar que las esferas de orden par no son grupos de Lie. Véase [42, págs. 592-596].

A continuación extraemos varias consecuencias de la definición de grupo topológico. El siguiente lema se deduce de la continuidad de la aplicaciones producto e inversión.

**Lema 1.2.2.** *Sea $G$ un grupo topológico, $\mathcal{B}$ una base de entornos de $1_G$ y $U \in \mathcal{B}$. Entonces:*

*(i) Existen $V, W \in \mathcal{B}$ tales que $VW \subseteq U$.*

*(ii) Existen $V, W \in \mathcal{B}$ tales que $VW^{-1} \subseteq U$.*

Tomando $X = V \cap W$ en (i) y (ii) obtenemos un entorno de $1_G$ tal que $XX \subseteq U$ y $XX^{-1} \subseteq U$ respectivamente. Por otro lado, nótese que $U^{-1}$ también es un entorno de $1_G$. Entonces, $U \cap U^{-1}$ es un entorno simétrico de $1_G$ contenido en $U$. Así que cualquier entorno de $1_G$ contiene uno simétrico.

Otra consecuencia, que utilizaremos después, es que sobre un grupo topológico las funciones continuas con soporte compacto son uniformemente continuas. Sea $\varphi \in \mathcal{C}(G)$ y $\varepsilon > 0$. Un *entorno de $\varepsilon$-uniformidad a derecha de $\varphi$* es un entorno $V$ de $1_G$ tal que para todos $x, y \in G$ con $yx^{-1} \in V$ se tiene $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Cambiando $yx^{-1}$ por $x^{-1}y$ obtenemos la versión a izquierda de esta definición. Un *entorno de $\varepsilon$-uniformidad de $\varphi$* es un entorno de $\varepsilon$-uniformidad a derecha e izquierda. Diremos que $\varphi$ *es uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno de $\varepsilon$-uniformidad. Claramente, continuidad uniforme implica continuidad.

**Proposición 1.2.3.** *Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$. Entonces, $\varphi$ es uniformemente continua.*

*Demostración.* Tomamos $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe un entorno $W$ de $1_G$ tal que $|\varphi(wx) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in G$ y $w \in W$. Haciendo el cambio $w = yx^{-1}$ tendremos la uniformidad continua a derecha.

Dado $x \in G$, consideremos la función $\varphi \circ R_x : G \to \mathbb{R}, g \mapsto \varphi(gx)$. Es continua por ser composición de continuas. Sea $K = \operatorname{Sop}\varphi$. Entonces, para cada $x \in K$ existe un entorno $V_x$ de $1_G$ tal que $|\varphi(yx) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in V_x$. Tomamos $U_x$ un entorno abierto de $1_G$ con $U_xU_x \subseteq V_x$. Como $K$ es compacto, podemos encontrar $F \subseteq K$ finito tal que $K \subseteq \cup_{z\in F} U_z z$. Ahora, $\cap_{z\in F} U_z$ es un entorno de $1_G$. Existe otro entorno $W$ de $1_G$ de modo que $WW^{-1} \subseteq \cap_{z\in F} U_z$.

Sea ahora $x \in G$ arbitrario. Si $Wx \cap K = \emptyset$, entonces $\varphi(Wx) = 0$, con lo que $|\varphi(wx) - \varphi(x)| = 0 < \varepsilon$ para todo $w \in W$. En caso contrario, existirá $z \in F$ tal que $Wx \cap U_z z \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in W^{-1}U_z z$. De aquí, $Wx \subseteq WW^{-1}U_z z \subseteq U_z U_z z \subseteq V_z z$ y $Wxz^{-1} \subseteq V_z$. Luego, para todo $w \in W$ tendremos $|\varphi(wx) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. En particular, para $1_G$ obtenemos $|\varphi(x) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, para $w \in W$ se cumple:

$$\begin{aligned} |\varphi(wx) - \varphi(x)| &= |\varphi(wx) - \varphi(z) + \varphi(z) - \varphi(x)| \\ &\leq |\varphi(wx) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(x)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera simétrica se demuestra la uniformidad continua a izquierda. □

**Nota 1.2.4.** Como se puede ver en [52, págs. 72-74], cualquier grupo topológico $(G, \mathcal{T})$ puede dotarse de estructura de espacio uniforme de forma que la topología inducida por la uniformidad coincida con $\mathcal{T}$. De este modo, la definición que aquí hacemos de continuidad uniforme coincide con la definición usual en espacios uniformes.

Más adelante usaremos el siguiente resultado:

**Proposición 1.2.5.** *Sean $G$ y $G'$ grupos topológicos y $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces, $f$ es continuo si y sólo si $f$ es continuo en $1_G$.*

*Demostración.* Supongamos que $f$ es continuo en $1_G$. Probaremos la continuidad en $x \in G$ arbitrario. Sea $U \subseteq G'$ un entorno de $f(x)$. Como $f$ es homomorfismo y el producto de $G'$ continuo, $f(x^{-1})U$ es un entorno de $1_{G'}$. Como $1_{G'} = f(1_G)$, por hipótesis, $f^{-1}(f(x^{-1})U)$ es un entorno de $1_G$. Aplicando de nuevo que $f$ es homomorfismo, se comprueba que $f^{-1}(f(x^{-1})U) = x^{-1}f^{-1}(U)$. Entonces, $x^{-1}f^{-1}(U)$ es un entorno de $1_G$. Y $f^{-1}(U) = x(x^{-1}f^{-1}(U))$ es un entorno de $x$ puesto que el producto en $G$ es continuo. El recíproco es claro. □

## 1.3. Integral de Haar

Para cualquier subespacio vectorial $E$ de $\mathbb{R}^X$, recordemos que el *cono no negativo* de $E$ se define como

$$E^+ = \{\varphi \in E : \varphi(x) \geq 0,\ \forall x \in X\}.$$

A los elementos de $E^+$ los llamaremos *funciones no negativas* y escribiremos también $\varphi \geq 0$ para $\varphi \in E^+$. Pondremos $\varphi \geq \psi$ si $\varphi - \psi \geq 0$. Para los conos no negativos de los subespacios de $\mathbb{R}^X$ considerados antes escribimos $\mathcal{C}^+(X)$ y $\mathcal{C}_c^+(X)$. Para un conjunto $Y$, diremos que una aplicación $\lambda : E \to \mathbb{R}^Y$ es *no negativa* si $\lambda(E^+) \subseteq (\mathbb{R}^Y)^+$. El siguiente lema es fácil de demostrar:

**Lema 1.3.1.** *Sea $\lambda : E \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal no negativa. Si la función $|\varphi| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |\varphi(x)|$ pertenece a $E$, entonces $|\lambda(\varphi)| \leq \lambda(|\varphi|)$.*

Sea ahora $G$ un grupo topológico. Dada $\varphi \in \mathbb{R}^G$ y $x \in G$ denotaremos por $x \cdot \varphi$ a la aplicación de $G$ en $\mathbb{R}$ dada por $(x \cdot \varphi)(y) = \varphi(yx)$ para todo $y \in G$. Análogamente, escribimos $\varphi \cdot x$ para la aplicación definida por $(\varphi \cdot x)(y) = \varphi(xy)$. Se les llama *traslaciones de $\varphi$ por $x$ a izquierda y derecha* respectivamente.

A. Haar
1885-1933

**Definición 1.3.2.** *Una aplicación lineal $\lambda : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$ se llama* integral invariante a izquierda sobre $G$ *si*

$$\lambda(x \cdot \varphi) = \lambda(\varphi), \qquad \forall x \in G \ \text{y} \ \varphi \in \mathcal{C}_c(G).$$

*Una integral invariante a izquierda $\lambda$ se llama* integral de Haar a izquierda sobre $G$ *si es no nula y no negativa.*

De manera simétrica se define la noción de integral invariante e integral de Haar a derecha. Más adelante daremos un ejemplo de integral de Haar a izquierda que no lo es a derecha. Cuando digamos solamente integral de Haar, sin especificar el lado, entenderemos que lo es a derecha e izquierda.

**Ejemplos 1.3.3.**

1. Si $G$ es un grupo finito dotado de la topología discreta, todos sus subconjuntos son compactos. Luego, $\mathcal{C}_c(G) = \mathcal{C}(G)$. Todas las funciones de $G$ en $\mathbb{R}$ serán continuas, por lo que $\mathcal{C}_c(G) = \mathbb{R}^G$. La aplicación

$$\lambda : \mathbb{R}^G \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \sum_{g \in G} \varphi(g)$$

es una integral de Haar sobre $G$.

2. La integral de Lebesgue (o Riemann) es un integral de Haar sobre $\mathbb{R}^n$.

3. En el grupo $GL_n(\mathbb{R})$, la aplicación $\lambda$ dada por

$$\lambda(\varphi) = \int_{GL(n,\mathbb{R})} \frac{\varphi(A)}{|\det A|^n} dA, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(GL_n(\mathbb{R}))$$

es una integral de Haar.

4. Sobre el grupo $C_\infty$ una integral de Haar es $\frac{d\theta}{2\pi}$. Es decir,

$$\int_{C_\infty} \varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r_\theta)d\theta, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(C_\infty).$$

5. Una integral de Haar sobre $D_\infty$ es $\frac{d\theta}{4\pi}$. Es decir,

$$\int_{D_\infty} \varphi(t)dt = \frac{1}{4\pi} \left( \int_0^{2\pi} \varphi(r_\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} \varphi(sr_\theta)d\theta \right), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(D_\infty).$$

## 1.4. Existencia y unicidad de la integral de Haar

En esta sección demostraremos el importante Teorema de Existencia y Unicidad de la Integral de Haar sobre grupos localmente compactos. Comenzamos con la parte de la existencia:

**Teorema 1.4.1.** *(Existencia) Todo grupo localmente compacto $G$ admite una integral de Haar a izquierda (resp. derecha).*

*Demostración.* Realizaremos la demostración en varios pasos:

Paso 1. Veamos que probar la existencia de la integral de Haar a izquierda es equivalente a encontrar su restricción a un cono no negativo. Es decir, a construir una función $\lambda^+$ sobre $\mathcal{C}_c^+(G)$ que cumpla:

(1) $\lambda^+ \neq 0$ y $\lambda^+ \geq 0$.

(2) $\lambda^+(r\varphi) = r\lambda^+(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

(3) $\lambda^+(\varphi + \psi) = \lambda^+(\varphi) + \lambda^+(\psi)$ para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^+(G)$.

(4) $\lambda^+(x \cdot \varphi) = \lambda^+(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ y $x \in G$.

Si $\lambda$ es una integral de Haar a izquierda, tomamos $\lambda^+$ como su restricción a $\mathcal{C}_c^+(G)$. Recíprocamente, construida $\lambda^+$ podemos definir $\lambda$ como extensión de $\lambda^+$ del siguiente modo: dada $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$, consideramos su parte positiva $\varphi_+(x)$ y su parte negativa $\varphi_-(x)$. Entonces, $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ y definimos

$$\lambda(\varphi) = \lambda^+(\varphi_+) - \lambda^+(\varphi_-).$$

En los siguientes pasos probaremos la existencia de $\lambda^+$.

<u>Paso 2.</u> Fijamos $\psi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ con $\psi \neq 0$. Por la continuidad de $\psi$, existe $V \subseteq G$ abierto no vacío y $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que $\psi(x) > \gamma$ para todo $x \in V$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$. Como $\operatorname{Sop}\varphi$ es compacto, podemos tomar $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que $Vx_1, \ldots, Vx_n$ es un recubrimiento por abiertos de $\operatorname{Sop}\varphi$. Pongamos $M = \max\varphi$. Comprobamos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\varphi \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{\gamma}(x_i^{-1} \cdot \psi).$$

Dado $x \in \operatorname{Sop}\varphi$, será $x = vx_k$ para algún $v \in V$ y algún índice $k$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{\gamma}(x_i^{-1} \cdot \psi)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{\gamma}\psi(xx_i^{-1}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{M}{\gamma}\psi(xx_i^{-1}) + M\frac{\psi(v)}{\gamma} \geq \varphi(x).$$

En particular:

$$\textit{Existen } z_1, \ldots, z_n \in G \textit{ y } \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}^+ \textit{ tales que } \varphi \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(z_i \cdot \psi). \tag{1.1}$$

<u>Paso 3.</u> Definimos $(\varphi : \psi)$ como el ínfimo de todas las sumas $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ que podemos obtener de esta forma. Es decir,

$$(\varphi : \psi) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \ : \ \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \varphi \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(z_i \cdot \psi) \text{ con } z_i \in G \right\}. \tag{1.2}$$

Ponemos $N = \max\psi$. Entonces $\varphi \leq N(\varphi : \psi)$. Luego, $(\varphi : \psi) > 0$ cuando $\varphi \neq 0$. De la construcción se deduce la siguiente propiedad: $(\varphi : \theta) \leq (\varphi : \psi)(\psi : \theta)$ para $\theta \in \mathcal{C}_c^+(G)$ no nulo. De aquí, $\frac{(\varphi:\theta)}{(\psi:\theta)} \leq (\varphi : \psi)$. Análogamente, $\frac{1}{(\psi:\varphi)} \leq \frac{(\varphi:\theta)}{(\psi:\theta)}$ para $\varphi \neq 0$. Denotamos por $K_\varphi$ al intervalo cerrado con extremos $\frac{1}{(\psi:\varphi)}$ y $(\varphi : \psi)$ si $\varphi \neq 0$. Para $\varphi = 0$, ponemos $K_\varphi = \{0\}$. Sea $K = \prod_{\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)} K_\varphi$. Por lo anterior, $\frac{(\varphi:\theta)}{(\psi:\theta)} \in K_\varphi$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$. *Llamamos* $\kappa(\theta)$ *al elemento de* $K$ *cuya proyección sobre* $K_\varphi$ *es* $\frac{(\varphi:\theta)}{(\psi:\theta)}$ *para cada* $\varphi$.

Dado un entorno abierto $V$ de $1_G$, definimos

$$\mathcal{C}_V^+(G) = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G) : \varphi \neq 0 \text{ y } \operatorname{Sop}\varphi \subseteq V\}.$$

Veamos que $\mathcal{C}_V^+(G) \neq \emptyset$. Como $G$ es localmente compacto, existe un entorno compacto $D$ de $1_G$ con $D \subseteq V$. Por el Lema 1.1.3, existe $f : G \to [0, 1]$ continua con $f(d) = 1$ para todo $d \in D$, $\operatorname{Sop} f$ compacto y $\operatorname{Sop} f \subset V$. Así, $f \in \mathcal{C}_V^+(G)$ y $\mathcal{C}_V^+(G) \neq \emptyset$.

Sea ahora $K(V) = \overline{\{\kappa(\theta) : \theta \in \mathcal{C}_V^+(G)\}}$. Es fácil ver que la familia de todos los $K(V)$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por el Teorema de Tychonoff, $K$

es compacto. Y por la caracterización de espacios compactos, existe $\lambda^+ \in K$ que pertenece a $K(V)$ para todo $V$. Comprobamos a continuación que $\lambda^+$ satisface las cuatro propiedades de la integral de Haar.

Por la forma en que está definida la topología producto, *que* $\lambda^+ \in K(V)$ *para todo* $V$ *se traduce en que, dados* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{C}_c^+(G)$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe* $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ *tal que*

$$\left| \frac{(\varphi_i : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(\varphi_i) \right| < \varepsilon, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

<u>Paso 4.</u> Utilizando lo anterior procedemos a probar los puntos (1), (2) y (4):

(1) Tomamos $\varphi_1 = \psi$ en (1.3). Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ tal que

$$\left| \frac{(\psi : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(\psi) \right| = |1 - \lambda^+(\psi)| < \varepsilon.$$

Entonces $\lambda^+(\psi) = 1$ y $\lambda^+ \neq 0$. Además, $\lambda^+(\varphi) \in K_\varphi \subset \mathbb{R}^+$ si $\varphi \neq 0$ y $\lambda^+(\varphi) = 0$ si $\varphi = 0$. Luego $\lambda^+ \geq 0$.

(2) El caso $r = 0$ es trivial, por lo que nos centraremos en el caso $r > 0$. Estableceremos en primer lugar que:

$$(r\varphi : \psi) = r(\varphi : \psi), \qquad \forall r > 0.$$

Si $r\varphi \leq \sum_i \gamma_i (z_i \cdot \psi)$, entonces $\varphi \leq \sum_i \frac{\gamma_i}{r}(z_i \cdot \psi)$. De aquí, $(\varphi : \psi) \leq \frac{1}{r}(r\varphi : \psi)$. Recíprocamente, si $\varphi \leq \sum_i \eta_i (z_i \cdot \psi)$, entonces $r\varphi \leq \sum_i r\eta_i (z_i \cdot \psi)$. Luego $(r\varphi : \psi) \leq r(\varphi : \psi)$.

Ahora tomamos $\varphi_1 = \varphi$ y $\varphi_2 = r\varphi$ en (1.3). Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ tal que

$$\left| \frac{(\varphi_i : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(\varphi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{1 + r}, \qquad i = 1, 2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|\lambda^+(r\varphi) - r\lambda^+(\varphi)| &= \left| \lambda^+(r\varphi) - \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} + \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - r\lambda^+(\varphi) \right| \\
&\leq \left| \lambda^+(r\varphi) - \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| + \left| \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - r\lambda^+(\varphi) \right| \\
&= \left| \lambda^+(r\varphi) - \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| + \left| \frac{r(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - r\lambda^+(\varphi) \right| \\
&= \left| \lambda^+(r\varphi) - \frac{(r\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| + r \left| \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(\varphi) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{1 + r} + r\frac{\varepsilon}{1 + r} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda^+(r\varphi) = r\lambda^+(\varphi)$.

(4) Comprobaremos primero que

$$(x \cdot \varphi : \psi) = (\varphi : \psi), \qquad \forall x \in G.$$

Supongamos que $x \cdot \varphi \leq \sum_i \gamma_i (z_i \cdot \psi)$. Dado $y \in G$ tenemos

$$\varphi(yx) = (x \cdot \varphi)(y) \leq \sum_i \gamma_i (z_i \cdot \psi)(y) = \sum_i \gamma_i \psi(y z_i).$$

Poniendo $y = tx^{-1}$ obtenemos $\varphi \leq \sum_i \gamma_i ((x^{-1} z_i) \cdot \psi)$. De esto se sigue que $(\varphi : \psi) \leq (x \cdot \varphi : \psi)$. Supongamos ahora que $\varphi \leq \sum_i \gamma'_i (z'_i \cdot \psi)$. Un argumento como el anterior da $x \cdot \varphi \leq \sum_i \gamma'_i ((x z'_i) \cdot \psi)$. De aquí, $(x \cdot \varphi : \psi) \leq (\varphi : \psi)$.

Tomamos ahora $\varphi_1 = \varphi$ y $\varphi_2 = x \cdot \varphi$ en (1.3). Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ tal que

$$\left| \frac{(\varphi_i : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(\varphi_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\lambda^+(\varphi) - \lambda^+(x \cdot \varphi)| &= \left| \lambda^+(\varphi) - \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} + \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(x \cdot \varphi) \right| \\
&\leq \left| \lambda^+(\varphi) - \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| + \left| \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(x \cdot \varphi) \right| \\
&= \left| \lambda^+(\varphi) - \frac{(\varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| + \left| \frac{(x \cdot \varphi : \theta)}{(\psi : \theta)} - \lambda^+(x \cdot \varphi) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda^+(x \cdot \varphi) = \lambda^+(\varphi)$.

<u>Paso 5.</u> Ya sólo nos queda probar el punto (3): la propiedad de aditividad.

(3) Por definición, $(\varphi_1 + \varphi_2 : \theta) \leq (\varphi_1 : \theta) + (\varphi_2 : \theta)$. Puesto que no tenemos garantizada la igualdad hemos de proceder de forma diferente a los anteriores puntos. No obstante, podemos aprovecharla parcialmente. Consideremos (1.3) para las funciones $\varphi_1, \varphi_2$ y $\varphi_1 + \varphi_2$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ tal que

$$\left| \lambda^+(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2 : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \lambda^+(\varphi_i) - \frac{(\varphi_i : \theta)}{(\psi : \theta)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i = 1, 2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)-\lambda^+(\varphi_1)-\lambda^+(\varphi_2)\\
&\quad\le \lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}+\frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_1)+\frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_2)\\
&\quad\le \left|\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\right|+\left|\frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_1)\right|+\left|\frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_2)\right|\\
&\quad< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\
&\quad=\varepsilon.
\end{aligned}$$

De ello obtenemos $\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)\le\lambda^+(\varphi_1)+\lambda^+(\varphi_2)$.

Pasamos a demostrar la otra desigualdad. Por el Lema 1.1.3, existe $\rho\in\mathcal{C}_c^+(G)$ tal que $\rho(\operatorname{Sop}\varphi_1\cup\operatorname{Sop}\varphi_2)=\{1\}$. Dado $\varepsilon>0$ definimos $\sigma=\varphi_1+\varphi_2+\varepsilon\rho$ y $\sigma_i=\frac{\varphi_i}{\sigma}$ para $i=1,2$. Puesto que $\sigma_1$ y $\sigma_2$ se anulan fuera de $\operatorname{Sop}\varphi_1\cup\operatorname{Sop}\varphi_2$, ambas tienen soporte compacto. Además, $\varphi_i=\sigma_i\sigma$ y $\sigma_1+\sigma_2\le 1$.

La continuidad uniforme, Proposición 1.2.3, nos garantiza un entorno $V$ de $1_G$ tal que, dados $x,y\in G$ con $yx^{-1}\in V$, se cumple $|\sigma_i(y)-\sigma_i(x)|<\varepsilon$ para $i=1,2$. Sea $\theta\in\mathcal{C}_V^+(G)$. Por (1.1) existen $x_i\in G$ y $\gamma_i\in\mathbb{R}^+$ con $i=1,\dots,n$ tales que $\sigma\le\sum_i\gamma_i(x_i\cdot\theta)$. Si $xx_l\in V$, entonces $\sigma_j(x)<\varepsilon+\sigma_j(x_l^{-1})$. Si $xx_l\notin V$, entonces $\theta(xx_l)=0$. Luego,

$$\varphi_j(x)=\sigma_j(x)\sigma(x)\le\sum_i\gamma_i\sigma_j(x)\theta(xx_i)<\sum_i\gamma_i(\sigma_j(x_i^{-1})+\varepsilon)\theta(xx_i).$$

Por tanto, $(\varphi_j:\theta)\le\sum_i\gamma_i(\sigma_j(x_i^{-1})+\varepsilon)$. Ahora, como $\sigma_1+\sigma_2\le 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1:\theta)+(\varphi_2:\theta)&\le\sum_i\gamma_i(\sigma_1(x_i^{-1})+\varepsilon)+\sum_i\gamma_i(\sigma_2(x_i^{-1})+\varepsilon)\\
&=\sum_i\gamma_i(\sigma_1(x_i^{-1})+\sigma_2(x_i^{-1})+2\varepsilon)\\
&\le(1+2\varepsilon)\sum_i\gamma_i.
\end{aligned}$$

De esto deducimos que $(\varphi_1:\theta)+(\varphi_2:\theta)\le(1+2\varepsilon)(\sigma:\theta)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1:\theta)+(\varphi_2:\theta)&\le(1+2\varepsilon)(\varphi_1+\varphi_2+\varepsilon\rho:\theta)\\
&\le(1+2\varepsilon)\big((\varphi_1+\varphi_2:\theta)+\varepsilon(\rho:\theta)\big).
\end{aligned}$$

Y a partir de aquí vamos a probar que

$$\lambda^+(\varphi_1)+\lambda^+(\varphi_2)\le(1+2\varepsilon)\big(\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)+\varepsilon\lambda^+(\rho)\big).$$

Por (1.3), dado $\delta > 0$ existe $\theta \in \mathcal{C}_V^+(G)$ tal que

$$\left|\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2) - \frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\right| < \frac{\delta}{4(1+2\varepsilon)}, \qquad \left|\lambda^+(\varphi_1) - \frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}\right| < \frac{\delta}{4},$$

$$\left|\lambda^+(\varphi_2) - \frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\right| < \frac{\delta}{4}, \qquad \left|\lambda^+(\rho) - \frac{(\rho:\theta)}{(\psi:\theta)}\right| < \frac{\delta}{4\varepsilon(1+2\varepsilon)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\lambda^+(\varphi_1)+\lambda^+(\varphi_2)-(1+2\varepsilon)\big(\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)+\varepsilon\lambda^+(\rho)\big)\\
&\quad\le \lambda^+(\varphi_1)-\frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}+\lambda^+(\varphi_2)-\frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\\
&\qquad +(1+2\varepsilon)\left(\frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}+\varepsilon\frac{(\rho:\theta)}{(\psi:\theta)}\right)\\
&\qquad -(1+2\varepsilon)\big(\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)+\varepsilon\lambda^+(\rho)\big)\\
&\quad\le \left|\lambda^+(\varphi_1)-\frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}\right|+\left|\lambda^+(\varphi_2)-\frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\right|\\
&\qquad +(1+2\varepsilon)\left|\frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}+\varepsilon\frac{(\rho:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)-\varepsilon\lambda^+(\rho)\right|\\
&\quad\le \left|\lambda^+(\varphi_1)-\frac{(\varphi_1:\theta)}{(\psi:\theta)}\right|+\left|\lambda^+(\varphi_2)-\frac{(\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}\right|\\
&\qquad +(1+2\varepsilon)\left|\frac{(\varphi_1+\varphi_2:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)\right|\\
&\qquad +(1+2\varepsilon)\varepsilon\left|\frac{(\rho:\theta)}{(\psi:\theta)}-\lambda^+(\rho)\right|\\
&\quad< \frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}+(1+2\varepsilon)\frac{\delta}{4(1+2\varepsilon)}+(1+2\varepsilon)\varepsilon\frac{\delta}{4\varepsilon(1+2\varepsilon)}\\
&\quad=\delta.
\end{aligned}$$

Finalmente, $\lambda^+(\varphi_1)+\lambda^+(\varphi_2) \le \lambda^+(\varphi_1+\varphi_2)$ y así queda probada la existencia de la integral de Haar a izquierda.

□

A continuación, pasamos a probar su unicidad.

**Teorema 1.4.2.** *(Unicidad) La integral de Haar a izquierda (resp. derecha) sobre un grupo localmente compacto es única salvo escalares. Es decir, si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son dos integrales de Haar a izquierda (resp. derecha), entonces existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_2 = r\lambda_1$.*

*Demostración.* En primer lugar, observamos que para $\varphi, \rho \in \mathcal{C}_c^+(G)$ con $\rho \neq 0$ se tiene:

$$\lambda_j(\varphi) \leq (\varphi : \rho)\lambda_j(\rho). \tag{1.4}$$

Recordemos que

$$(\varphi : \rho) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i : \exists z_1, \ldots, z_n \in G \text{ con } \varphi \leq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(z_i \cdot \rho) \text{ y } \gamma_i \in \mathbb{R}^+, \quad \forall i\right\}.$$

La desigualdad (1.4) se deduce del siguiente cálculo, donde usamos la no negatividad, linealidad e invarianza de la integral:

$$\lambda_j(\varphi) \leq \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(z_i \cdot \rho)\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \lambda_j(z_i \cdot \rho) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \lambda_j(\rho).$$

Como existe $\varphi_j$ con $\lambda_j(\varphi_j) > 0$, entonces $\lambda_j(\rho) > 0$ para todo $\rho \in \mathcal{C}_c^+(G)$ no nulo.

Nuestro objetivo será probar que, fijada $\eta \in \mathcal{C}_c^+(G)$ con $\eta \neq 0$, para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ se cumple:

$$\frac{\lambda_1(\varphi)}{\lambda_1(\eta)} = \frac{\lambda_2(\varphi)}{\lambda_2(\eta)}. \tag{1.5}$$

Poniendo $r = \frac{\lambda_1(\eta)}{\lambda_2(\eta)}$, obtendremos $\lambda_1 = r\lambda_2$. Esto lo probaremos del siguiente modo: dada una integral a izquierda $\lambda$, estableceremos primero que existe $\pi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ no nula tal que para cualquier $\alpha > 0$ se cumple:

$$(1-\alpha)(\phi : \pi) \leq \frac{\lambda(\phi)}{\lambda(\pi)} \leq (\phi : \pi), \tag{1.6}$$

donde $\phi \in \{\varphi, \eta\}$. Una vez establecida (1.6), como los tres términos de la desigualdad son positivos y ésta es válida tanto para $\eta$ como para $\varphi$, se tendrá:

$$\frac{(1-\alpha)(\varphi : \pi)}{(\eta : \pi)} \leq \frac{\lambda(\varphi)}{\lambda(\eta)} \leq \frac{(\varphi : \pi)}{(1-\alpha)(\eta : \pi)}.$$

En particular, la desigualdad se cumple para $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$, y de ello se deduce la siguiente cadena de desigualdades:

$$\frac{\lambda_1(\varphi)}{\lambda_1(\eta)} \leq \frac{1}{(1-\alpha)^2}\frac{\lambda_2(\varphi)}{\lambda_2(\eta)} \leq \frac{1}{(1-\alpha)^4}\frac{\lambda_1(\varphi)}{\lambda_1(\eta)}.$$

Haciendo tender $\alpha$ a 0, la Regla del Sandwich nos dará la igualdad (1.5).

Procedemos por tanto a demostrar las desigualdades (1.6). Lo realizamos en varios pasos:

Paso 1. Construimos la función $\pi$. Por la continuidad uniforme de $\varphi$ y $\eta$, fijado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $U$ de $1_G$ tal que, si $xy^{-1} \in U$ se tiene $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$

(recordemos que $\phi$ puede ser tanto $\varphi$ como $\eta$). Podemos tomar $U$ compacto, por la compacidad local de $G$. Sea $V = U \cap U^{-1}$. Por el Corolario 1.1.3, existe $\psi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ no nula con $\operatorname{Sop} \psi \subseteq V$. Definimos $\pi \in \mathcal{C}^+(G)$ como $\pi(x) = \psi(x) + \psi(x^{-1})$. Tenemos por tanto que $\pi$ es una función no nula, simétrica y con soporte compacto contenido en $V$.

Paso 2. Fijado $\delta > 0$, por la continuidad uniforme de $\pi$, podemos tomar un entorno $W$ de $1_G$ con $\overline{W}$ compacto (compacidad local de $G$) tal que, si $xy^{-1} \in W$, se tiene $|\pi(x) - \pi(y)| < \delta$. Como $S := \operatorname{Sop} \varphi \cup \operatorname{Sop} \eta$ es compacto, existen $a_1, \ldots, a_m \in S$ tales que $S \subseteq \cup_{k=1}^m W a_k$. Entonces, por el Teorema 1.1.4, existe una familia de funciones $\{\psi_k : G \to [0,1] : k = 1, \ldots, m\}$ con $\operatorname{Sop} \psi_k \subseteq W a_k$ y $\sum_{k=1}^m \psi_k(s) = 1$ para todo $s \in G$. Así pues $\phi = \sum_{k=1}^m \phi \psi_k$. Poniendo $b_k = \lambda(\phi \psi_k)$, tenemos:

$$\lambda(\phi) = \sum_{k=1}^m b_k.$$

Paso 3. Probaremos ahora que, para cada $y \in G$, se cumple:

$$(\phi(y) - \varepsilon)\lambda(\pi) \leq \lambda\big(\phi(y^{-1} \cdot \pi)\big) = \sum_{k=1}^m \lambda\big(\phi\psi_k(y^{-1} \cdot \pi)\big).$$

La igualdad es clara. Para la desigualdad, obsérvese que, dado $x \in G$:

- Si $xy^{-1} \notin V$, se tiene $(y^{-1} \cdot \pi)(x) = 0$, pues $\operatorname{Sop} \pi \subseteq V$.
- Si $xy^{-1} \in V$, entonces $\phi(y) - \phi(x) \leq |\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$, por continuidad uniforme. Por tanto, $\phi(y) - \varepsilon < \phi(x)$.

Entonces, $(\phi(y) - \varepsilon)(y^{-1} \cdot \pi) \leq \phi(y^{-1} \cdot \pi)$. Aplicando $\lambda$ y usando la invarianza, obtenemos la desigualdad.

Paso 4. Ahora probaremos que

$$\sum_{k=1}^m \lambda\big(\phi\psi_k(y^{-1} \cdot \pi)\big) \leq \sum_{k=1}^m \lambda(\phi\psi_k)\big((a_k^{-1} \cdot \pi)(y) + \delta\big).$$

- Si $x \notin W a_k$, entonces $\psi_k(x) = 0$.
- Si $x \in W a_k$, entonces $(xy^{-1})(y a_k^{-1}) = x a_k^{-1} \in W$. Por la continuidad uniforme y la simetría de $\pi$ se tiene

  $$\pi(xy^{-1}) - \pi(y a_k^{-1}) = \pi(xy^{-1}) - \pi(a_k y^{-1}) \leq |\pi(xy^{-1}) - \pi(a_k y^{-1})| < \delta,$$

  es decir, $(y^{-1} \cdot \pi)(x) < \delta + (a_k^{-1} \cdot \pi)(y)$.

Combinando los dos puntos anteriores se tiene $\psi_k(y^{-1}\cdot\pi) \leq \psi_k(\delta + (a_k^{-1}\cdot\pi)(y))$, de donde se deduce fácilmente la desigualdad que se quería probar.

Paso 5. Veamos ahora que

$$\phi(y) - 2\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{\lambda(\pi)}(a_k^{-1}\cdot\pi)(y).$$

Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $\lambda(\phi)\delta < \lambda(\pi)\varepsilon$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
(\phi(y)-\varepsilon)\lambda(\pi) &\leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(\phi\psi_k(y^{-1}\cdot\pi)) && \text{(paso 3)}\\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(\phi\psi_k)\big((a_k^{-1}\cdot\pi)(y)+\delta\big) && \text{(paso 4)}\\
&= \sum_{k=1}^{m} b_k((a_k^{-1}\cdot\pi)(y)+\delta) && \text{(definición de } b_k)\\
&= \sum_{k=1}^{m} b_k(a_k^{-1}\cdot\pi)(y) + \sum_{k=1}^{m} b_k\delta\\
&= \sum_{k=1}^{m} b_k(a_k^{-1}\cdot\pi)(y) + \lambda(\phi)\delta && \text{(paso 2)}\\
&\leq \sum_{k=1}^{m} b_k(a_k^{-1}\cdot\pi)(y) + \lambda(\pi)\varepsilon.
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene la desigualdad buscada.

Paso 6. Definimos $\phi^\varepsilon \in \mathcal{C}_c^+(G)$ por $\phi^\varepsilon(y) = \max\{\phi(y)-2\varepsilon, 0\}$ para cada $y \in G$. Por el paso anterior, tenemos:

$$\phi^\varepsilon(y) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{\lambda(\pi)}(a_k^{-1}\cdot\pi)(y).$$

Esto implica:

$$(\phi^\varepsilon : \pi)\lambda(\pi) \leq \sum_{k=1}^{m} b_k = \lambda(\phi).$$

Además, por (1.4), se tendrá:

$$(\phi^\varepsilon : \pi)\lambda(\pi) \leq \lambda(\phi) \leq (\phi : \pi)\lambda(\pi).$$

Paso 7. Tomamos ahora $\xi : G \to [0,1]$, continua con soporte compacto, de forma que $\xi(x) = 1$ para todo $x \in \operatorname{Sop}\phi$. Entonces $\phi \leq \phi^\varepsilon + 2\varepsilon\xi$. La desigualdad anterior y las propiedades de $(\ :\ )$ nos dan:

$$(\phi : \pi) \leq (\phi^\varepsilon : \pi) + 2\varepsilon(\xi : \pi) \leq (\phi^\varepsilon : \pi) + 2\varepsilon(\xi : \phi)(\phi : \pi).$$

De aquí se deduce $(1-2\varepsilon(\xi:\phi))(\phi:\pi) \leq (\phi^\varepsilon:\pi)$. Multiplicando por $\lambda(\pi)$ y aplicando la desigualdad obtenida en el paso anterior llegamos a:

$$(1-2\varepsilon(\xi:\phi))(\phi:\pi)\lambda(\pi) \leq (\phi^\varepsilon:\pi)\lambda(\pi) \leq \lambda(\phi) \leq (\phi:\pi)\lambda(\pi).$$

Así, dado $\alpha > 0$ arbitrario, si ponemos $\varepsilon = \frac{\alpha}{2(\xi:\phi)}$, obtenemos la desigualdad (1.6) buscada. Con esto concluye la prueba. □

## 1.5. La función modular

En esta sección daremos una importante aplicación de la propiedad de unicidad de la integral de Haar. Veremos que existe una función que controla la diferencia entre las integrales a derecha e izquierda.

Sea $G$ un grupo localmente compacto y $\lambda$ una integral de Haar a izquierda sobre $G$. Para cada $x \in G$ definimos $\lambda_x : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \lambda(\varphi \cdot x)$. Afirmamos que $\lambda_x$ es una integral de Haar invariante a izquierda:

- Linealidad. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_c(G)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\lambda_x(r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2) &= \lambda\big((r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2)\cdot x\big)\\ &= \lambda\big(r_1(\varphi_1\cdot x) + r_2(\varphi_2\cdot x)\big)\\ &= r_1\lambda(\varphi_1\cdot x) + r_2\lambda(\varphi_2\cdot x)\\ &= r_1\lambda_x(\varphi_1) + r_2\lambda_x(\varphi_2).\end{aligned}$$

- Invarianza. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$ e $y \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned}\lambda_x(y\cdot\varphi) &= \lambda\big((y\cdot\varphi)\cdot x\big)\\ &= \lambda\big(y\cdot(\varphi\cdot x)\big)\\ &= \lambda(\varphi\cdot x) && (\lambda \text{ integral izqda})\\ &= \lambda_x(\varphi).\end{aligned}$$

- Positividad. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^+(G)$. Entonces, $\varphi\cdot x \in \mathcal{C}_c^+(G)$ para todo $x \in G$, pues $(\varphi\cdot x)(y) = \varphi(xy) \geq 0$ para todo $y \in G$. Por otro lado, si $\lambda(\varphi) \neq 0$, entonces $\lambda_x(\varphi\cdot x^{-1}) = \lambda(\varphi) \neq 0$. Luego, $\lambda_x \neq 0$.

Por el Teorema de Unicidad de la Integral, existe un número real positivo $\mathrm{mod}_l(x)$ tal que

$$\lambda_x = \mathrm{mod}_l(x)\lambda, \qquad \forall x \in G. \tag{1.7}$$

Esto da lugar a una función $\mathrm{mod}_l : G \to \mathbb{R}_+^\bullet,\ x \mapsto \mathrm{mod}_l(x)$, a la que llamaremos *función modular a izquierda.* Obsérvese que $\mathrm{mod}_l$ no depende de $\lambda$, ya que si partiésemos de una integral diferente, como sería un múltiplo escalar de $\lambda$, multiplicando (1.7) por el escalar obtendríamos la misma función.

**Proposición 1.5.1.** *La función modular* $\operatorname{mod}_l : G \to \mathbb{R}_+^\bullet$ *es un homomorfismo de grupos continuo.*

*Demostración.* Veamos primero que es homomorfismo. Sean $x, y \in G$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$ tal que $\lambda(\varphi) \neq 0$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod}_l(xy)\lambda(\varphi) &= \lambda_{xy}(\varphi) && \text{(por (1.7))}\\
&= \lambda\big(\varphi \cdot (xy)\big) && \text{(definición de } \lambda_{xy})\\
&= \lambda\big((\varphi \cdot x) \cdot y\big) &&\\
&= \lambda_y(\varphi \cdot x) && \text{(definición de } \lambda_y)\\
&= \operatorname{mod}_l(y)\lambda(\varphi \cdot x) && \text{(por (1.7))}\\
&= \operatorname{mod}_l(y)\lambda_x(\varphi) && \text{(definición de } \lambda_x)\\
&= \operatorname{mod}_l(y)\operatorname{mod}_l(x)\lambda(\varphi) && \text{(por (1.7))}\\
&= \operatorname{mod}_l(x)\operatorname{mod}_l(y)\lambda(\varphi).
\end{aligned}$$

Entonces, $\operatorname{mod}_l(xy) = \operatorname{mod}_l(x)\operatorname{mod}_l(y)$.

Pasamos a demostrar la continuidad. Por la Proposición 1.2.5, basta comprobarla en $1_G$. Sea $K$ un entorno compacto de $1_G$. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua de soporte compacto $\phi : G \to [0,1]$ tal que $\phi(k) = 1$ para todo $k \in K$. Como $\phi \in \mathcal{C}_c^+(G)$ y $\phi \neq 0$, sabemos que $\lambda(\phi) > 0$; véase el principio de la demostración del Teorema de Unicidad. El subespacio $K\operatorname{Sop}\phi$ es compacto por ser imagen mediante el producto del compacto $K \times \operatorname{Sop}\phi$. Aplicando de nuevo el Lema de Urysohn, podemos construir una función continua de soporte compacto $\psi : G \to [0,1]$ tal que $\psi(m) = 1$ para todo $m \in K\operatorname{Sop}\phi$.

Por la Proposición 1.2.3, $\phi$ es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno $V$ de $1_G$ tal que $|\phi(vx) - \phi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in G, v \in V$. Podemos elegir $V$ abierto, simétrico y contenido en $K$. Por otro lado, obsérvese que la función $\phi \cdot x - \phi$ tiene soporte compacto, pues está incluido en $x^{-1}\operatorname{Sop}\phi \cup \operatorname{Sop}\phi$. Para $v \in V$ tenemos $\operatorname{Sop}(\phi \cdot v - \phi) \subset K\operatorname{Sop}\phi$ ya que $V$ es simétrico, $V \subset K$ y $1_G \in V$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\big|\operatorname{mod}_l(v) - \operatorname{mod}_l(1_G)\big| &= \big|\operatorname{mod}_l(v) - 1\big| = \frac{1}{\lambda(\phi)}\big|\operatorname{mod}_l(v)\lambda(\phi) - \lambda(\phi)\big|\\
&\leq \frac{1}{\lambda(\phi)}\big|\lambda(\phi \cdot v) - \lambda(\phi)\big| = \frac{1}{\lambda(\phi)}\big|\lambda(\phi \cdot v - \phi)\big|\\
&\leq \frac{1}{\lambda(\phi)}\lambda\big(|\phi \cdot v - \phi|\big) = \frac{1}{\lambda(\phi)}\lambda\big(|\phi \cdot v - \phi|\psi\big)\\
&\leq \frac{1}{\lambda(\phi)}\lambda(\varepsilon\psi) = \varepsilon\frac{\lambda(\psi)}{\lambda(\phi)}.
\end{aligned}$$

□

**Proposición 1.5.2.** *Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$ se cumple*

$$\lambda(\varphi \circ inv) = \lambda(\varphi \operatorname{mod}_l).$$

*Además, la aplicación $\mu : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \lambda(\varphi \circ inv)$ es una integral de Haar a derecha.*

*Demostración.* Realizaremos la demostración en tres pasos:

Paso 1. Veamos que $\mu_1 : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \lambda(\varphi \circ inv)$ es una integral de Haar a derecha. La linealidad y positividad se deducen fácilmente de las respectivas propiedades de $\lambda$. Comprobamos la invarianza a derecha. Para $x, y \in G$ tenemos:

$$[(\varphi \cdot x) \circ inv](y) = (\varphi \cdot x)(y^{-1}) = \varphi(xy^{-1}) = \varphi\big((yx^{-1})^{-1}\big) = [x^{-1} \cdot (\varphi \circ inv)](y).$$

Luego,

$$\mu_1(\varphi \cdot x) = \lambda((\varphi \cdot x) \circ inv) = \lambda(x^{-1} \cdot (\varphi \circ inv)) = \lambda(\varphi \circ inv) = \mu_1(\varphi).$$

Paso 2. Veamos que $\mu_2 : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \lambda(\varphi \operatorname{mod}_l)$ es también una integral a derecha. Aquí $\varphi \operatorname{mod}_l$ denota la función producto, es decir, $(\varphi \operatorname{mod}_l)(x) = \varphi(x)\operatorname{mod}_l(x)$ para todo $x \in G$. Entonces $\varphi \operatorname{mod}_l \in \mathcal{C}_c(G)$ si $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$ y así, $\mu_2$ está bien definida. La linealidad de $\mu_2$ se sigue de la linealidad de $\lambda$ y la del producto en $\mathcal{C}_c(G)$. La positividad se sigue de la positividad de $\lambda$ y $\operatorname{mod}_l$. Sea ahora $\rho \in \mathcal{C}_c^+(G)$ tal que $\lambda(\rho) \neq 0$. Entonces, $\rho \operatorname{mod}_l \neq 0$. Por lo visto al principio de la demostración del Teorema de Unicidad, obtenemos $\mu_2(\rho) = \lambda(\rho \operatorname{mod}_l) \neq 0$. Ya sólo queda probar la invarianza a derecha. Sean $x, y \in G$. Obsérvese que:

$$\begin{aligned}
[(\varphi \cdot x) \operatorname{mod}_l](y) &= \varphi(xy)\operatorname{mod}_l(y) \\
&= \varphi(xy)\operatorname{mod}_l(x^{-1})\operatorname{mod}_l(xy) && (\operatorname{mod}_l \text{ hom. grupos}) \\
&= [\operatorname{mod}_l(x^{-1})((\varphi \operatorname{mod}_l) \cdot x)](y).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_2(\varphi \cdot x) &= \lambda\big((\varphi \cdot x) \operatorname{mod}_l\big) \\
&= \operatorname{mod}_l(x^{-1})\lambda\big((\varphi \operatorname{mod}_l) \cdot x)\big) && (\text{igualdad anterior}) \\
&= \operatorname{mod}_l(x^{-1})\operatorname{mod}_l(x)\lambda(\varphi \operatorname{mod}_l) && (\text{por } (1.7)) \\
&= \mu_2(\varphi) && (\operatorname{mod}_l \text{ hom. grupos}).
\end{aligned}$$

Paso 3. Comprobaremos que $\mu_1 = \mu_2$. Por el Teorema de Unicidad, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu_2 = r\mu_1$. Demostraremos que $r = 1$. Como $\operatorname{mod}_l$ es homomorfismo, $\operatorname{mod}_l(1_G) = 1$. Como es continuo, dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno $V$ de $1_G$ (que podemos suponer simétrico) tal que $|\operatorname{mod}_l(v) - 1| < \varepsilon$ para todo $v \in V$. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua de soporte compacto $\phi : G \to [0, 1]$ tal que $\phi(1_G) = 1$ y $\phi(x) = 0$ para todo $x \notin V$. Podemos suponer que $\phi$ es simétrica (si no lo fuese, tomaríamos $\phi + (\phi \circ inv))$. Y también podemos suponer que $\lambda(\phi) = 1$ (si no fuese así, tomamos $\lambda(\phi)^{-1}\phi$). Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}
|r-1| &= |r\lambda(\phi) - \lambda(\phi)| \\
&= |r\lambda(\phi \circ inv) - \lambda(\phi)| && (\phi \text{ es simétrica}) \\
&= |r\mu_1(\phi) - \lambda(\phi)| && (\text{definición de } \mu_1) \\
&= |\mu_2(\phi) - \lambda(\phi)| \\
&= |\lambda(\phi \operatorname{mod}_l) - \lambda(\phi)| \\
&= |\lambda(\phi \operatorname{mod}_l - \phi)| \\
&\leq \lambda(|\operatorname{mod}_l - 1)|\phi) && (\text{Lema 1.3.1 y } \phi \geq 0).
\end{aligned}$$

Obsérvese que $|\operatorname{mod}_l - 1|\phi \leq \varepsilon\phi$, pues para $x \in V$ es $|\operatorname{mod}_l(x) - 1|\phi(x) \leq \varepsilon\phi(x)$ y para $x \notin V$ es $|\operatorname{mod}_l(x) - 1|\phi(x) = 0 \leq \varepsilon\phi(x)$. Por tanto,

$$\lambda(|\operatorname{mod}_l - 1|\phi) \leq \lambda(\varepsilon\phi) = \varepsilon\lambda(\phi) = \varepsilon.$$

Entonces $|r-1| \leq \varepsilon$, por lo que $r = 1$. □

La discusión anterior también la podemos hacer para una integral de Haar a derecha $\mu$. Para cada $x \in G$ se define $\mu_x : \mathcal{C}_c(G) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \mu(x \cdot \varphi)$. Entonces, $\mu_x$ es una integral de Haar a derecha. Existirá un homomorfismo de grupos continuo $\operatorname{mod}_r : G \to \mathbb{R}_+^\bullet, x \mapsto \operatorname{mod}_r(x)$ tal que

$$\mu_x = \operatorname{mod}_r(x)\mu, \qquad \forall x \in G. \tag{1.8}$$

Lo llamaremos *función modular a derecha*. En realidad, podemos prescindir del lado, ya que la siguiente proposición nos dice que una es inversa de la otra:

**Proposición 1.5.3.** *Para cada $x \in G$ se tiene* $\operatorname{mod}_l(x)\operatorname{mod}_r(x) = 1$.

*Demostración.* Sea $\lambda$ una integral a izquierda y $\mu$ la integral a derecha definida en la proposición anterior. Tomamos $\rho \in \mathcal{C}_c(G)$ tal que $\mu(\rho) \neq 0$. Observemos que para $y \in G$ se tiene:

$$[(x \cdot \rho) \circ inv](y) = \rho(y^{-1}x) = \rho\big((x^{-1}y)^{-1}\big) = [(\rho \circ inv) \cdot x^{-1}](y).$$

La afirmación se sigue del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod}_l(x)\operatorname{mod}_r(x)\mu(\rho) &= \operatorname{mod}_l(x)\mu(x \cdot \rho) && (\text{por } (1.8)) \\
&= \operatorname{mod}_l(x)\lambda\big((x \cdot \rho) \circ inv\big) && (\text{definición de } \mu) \\
&= \operatorname{mod}_l(x)\lambda\big((\rho \circ inv) \cdot x^{-1}\big) && (\text{igualdad anterior}) \\
&= \lambda\big(((\rho \circ inv) \cdot x^{-1}) \cdot x\big) && (\text{por } (1.7)) \\
&= \lambda(\rho \circ inv) \\
&= \mu(\rho).
\end{aligned}$$

□

En adelante escribiremos simplemente mod para $\mathrm{mod}_l$ y $\mathrm{mod}^{-1}$ para $\mathrm{mod}_r$.

**Definición 1.5.4.** *Un grupo localmente compacto se llama* unimodular *si toda integral a izquierda lo es a derecha (y viceversa).*

Por construcción de mod, un grupo localmente compacto es unimodular si y sólo si la función modular es trivial, es decir, constantemente uno.

**Proposición 1.5.5.** *Un grupo localmente compacto $G$ que cumpla alguna de las siguientes propiedades es unimodular:*

*(i) Es abeliano.*

*(ii) Es compacto.*

*(iii) La clausura del subgrupo conmutador coincide con $G$.*

*Demostración.* (i) Si $G$ es abeliano, entonces la acción de $G$ a derecha e izquierda sobre $\mathcal{C}_c(G)$ coinciden. Efectivamente, sean $x, y \in G$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$. Tenemos:

$$(x \cdot \varphi)(y) = \varphi(yx) = \varphi(xy) = (\varphi \cdot x)(y).$$

Entonces toda integral invariante a izquierda lo es a derecha.

(ii) Supongamos que $G$ es compacto. Como mod es un homomorfismo de grupos continuo, $\mathrm{mod}(G)$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{R}_+^\bullet$. Pero el único subgrupo compacto de $\mathbb{R}_+^\bullet$ es $\{1\}$. La razón es la siguiente: si $C$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{R}_+^\bullet$ distinto de $\{1\}$, existe $x \in C$ con $x \neq 1$. Entonces, $x$ ó $x^{-1}$ sería mayor que 1. Tomando potencias, obtendríamos una sucesión infinita dentro de $C$ no acotada superiormente.

(iii) Recordemos que dados $x, y \in G$ el conmutador de $x$ e $y$ se define como $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. El subgrupo conmutador de $G$, denotado por $d^1(G)$, es el subgrupo generado por los elementos de la forma $[x, y]$ con $x, y \in G$. Como mod es homomorfismo y $\mathbb{R}_+^\bullet$ es abeliano, tenemos

$$\mathrm{mod}([x, y]) = \mathrm{mod}(xyx^{-1}y^{-1}) = \mathrm{mod}(x)\mathrm{mod}(x)^{-1}\mathrm{mod}(y)\mathrm{mod}(y)^{-1} = 1.$$

De aquí se deduce que $\mathrm{mod}(d^1(G)) = \{1\}$.

Sea ahora $x \in G$ arbitrario y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de mod, existe un entorno $U$ de $x$ tal que $|\mathrm{mod}(u) - \mathrm{mod}(x)| < \varepsilon$ para todo $u \in U$. Puesto que $G = \overline{d^1(G)}$, podemos tomar $y \in U \cap d^1(G)$. Entonces, como $\mathrm{mod}(y) = 1$, obtenemos $|1 - \mathrm{mod}(x)| < \varepsilon$. Esto implica que $\mathrm{mod}(x) = 1$. $\square$

Se sabe que $SL(n, \mathbb{R})$ es igual a su conmutador; véase por ejemplo [38, Theorem 9.2, pág. 541]. El argumento es de Álgebra Lineal: se basa en la relación entre matrices elementales y operaciones de fila. Como consecuencia del resultado anterior obtenemos:

**Corolario 1.5.6.** *El grupo $SL(n, \mathbb{R})$ es unimodular.*

**Proposición 1.5.7.** *El grupo $GL(n,\mathbb{R})$ es unimodular.*

*Demostración.* Comprobaremos que la integral $\lambda(\varphi) = \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{\varphi(X)}{|\det X|^n} dX$ es invariante a derecha e izquierda. En el proceso necesitaremos aplicar el Teorema del Cambio de Variable del siguiente modo. Sea $A \in GL(n,\mathbb{R})$ y consideremos la aplicación $\theta : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), X \mapsto XA$. Se puede comprobar sin mucha dificultad que el jacobiano de $\theta$ es $J(\theta) = (\det A)^n$. Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}
\lambda(A\cdot\varphi) &= \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{(A\cdot\varphi)(X)}{|\det X|^n} dX \\
&= \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{\varphi(XA)}{|\det X|^n} dX \\
&\quad \left[\ Y := \theta(X) = XA\ \right] \\
&= \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{\varphi(Y)}{|\det YA^{-1}|^n} |(\det A)^n|^{-1} dY \\
&= \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{\varphi(Y)}{|\det Y|^n |\det A|^{-n}} |\det A|^{-n} dY \\
&= \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{\varphi(Y)}{|\det Y|^n} dY \\
&= \lambda(\varphi).
\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que $\lambda(\varphi\cdot A) = \lambda(\varphi)$. □

Los resultados anteriores muestran que todos los ejemplos de grupos topológicos que hemos dado son unimodulares. Terminamos esta sección con un ejemplo que no lo es. El grupo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$$

es localmente compacto. Veamos que $d\lambda = x^{-1}dxdy$ es una integral de Haar a izquierda. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c(G)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi\left( \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x^{-1}dxdy &= \int_G \varphi \begin{pmatrix} ax & bx+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1}dxdy \\
&\quad \left[ \begin{array}{l} x = a^{-1}t \\ y = -a^{-1}bt + z \end{array} \right] \\
&= \int_G \varphi \begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a^{-1}t)^{-1}|a^{-1}|dtdz \\
&= \int_G \varphi \begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^{-1}dtdz.
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que $d\mu = x^{-2}dxdy$ es una integral de Haar a derecha. El elemento modular viene dado por:

$$\operatorname{mod}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^{-1}.$$

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\varphi\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \int_G \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) x^{-1}dxdy \\
&= \int_G \varphi\begin{pmatrix} ax & ay+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^{-1}dxdy \\
&\quad \begin{bmatrix} x = a^{-1}t \\ y = -a^{-1}b + a^{-1}z \end{bmatrix} \\
&= \int_G \varphi\begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (a^{-1}t)^{-1}(a^{-1}dt)(a^{-1}dz) \\
&= a^{-1}\int_G \varphi\begin{pmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^{-1}dtdz \\
&= a^{-1}\lambda(\varphi).
\end{aligned}$$

## 1.6. El álgebra de Hopf de las funciones representativas

En esta sección explicaremos cómo aparece la estructura de álgebra de Hopf cuando se consideran funciones representativas sobre un grupo topológico.

Para un grupo topológico $G$ la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}(G)$ es un $G$-bimódulo mediante las acciones dadas por las traslaciones a derecha e izquierda, esto es:

$$(x\cdot\varphi)(y) = \varphi(yx) \qquad \text{y} \qquad (\varphi\cdot x)(y) = \varphi(xy), \qquad \forall x, y \in G, \varphi \in \mathcal{C}(G).$$

**Proposición 1.6.1.** *Sea $\varphi \in \mathcal{C}(G)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) El subespacio generado por $\{x\cdot\varphi\}_{x\in G}$ es de dimensión finita.*

*(ii) El subespacio generado por $\{\varphi\cdot x\}_{x\in G}$ es de dimensión finita.*

*(iii) El subespacio generado por $\{x\cdot\varphi\cdot z\}_{x,z\in G}$ es de dimensión finita.*

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ una base del subespacio generado por $\{x\cdot\varphi\}_{x\in G}$. Para cada $x \in G$ existen $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x) \in \mathbb{R}$ únicos tales que

$$(x\cdot\varphi)(y) = \varphi(yx) = \alpha_1(x)\varphi_1(y) + \ldots + \alpha_n(x)\varphi_n(y), \qquad \forall y \in G. \tag{1.9}$$

Así tenemos definidas funciones $\alpha_1, \dots, \alpha_n : G \to \mathbb{R}$. Como $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, existen $y_1, \dots, y_n \in G$ tal que la matriz con coeficientes $\varphi_i(y_j)$ tiene determinante no nulo. Cada $\alpha_i(x)$ se puede expresar, mediante la Regla de Cramer, como una función racional en $\varphi_i(y_j)$ y $\varphi(y_i x)$, de lo que se sigue que $\alpha_i$ es continua.

Intercambiando $x$ e $y$ en (1.9), obtenemos que $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto generador del subespacio generado por $\{\varphi \cdot x\}_{x\in G}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se demuestra de modo simétrico.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Cada $\varphi_i$ pertenece al subespacio generado por $\{x \cdot \varphi\}_{x\in G}$. Entonces $\{x \cdot \varphi_i\}_{x\in G}$ genera un subespacio contenido en él y, por tanto, es de dimensión finita. Por (i) $\Rightarrow$ (ii), el subespacio generado por $\{\varphi_i \cdot z\}_{z\in G}$ es de dimensión finita. La igualdad

$$(x \cdot \varphi \cdot z)(y) = \varphi(zyx) = \alpha_1(x)(\varphi_1 \cdot z)(y) + \ldots + \alpha_n(x)(\varphi_n \cdot z)(y), \qquad \forall y \in G,$$

da que el subespacio generado por $\{x \cdot \varphi \cdot z\}_{x,z\in G}$ está contenido en el generado por $\cup_{i=1}^n \{\varphi_i \cdot z\}_{z\in G}$, que es de dimensión finita.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Es claro pues $\{x \cdot \varphi\}_{x\in G} \subset \{x \cdot \varphi \cdot z\}_{x,z\in G}$. □

**Definición 1.6.2.** *Diremos que* $\varphi \in \mathcal{C}(G)$ *es* representativa *si cumple alguna de las condiciones de la proposición anterior.*

Veamos varios ejemplos de funciones representativas.

**Ejemplos 1.6.3.**

1. Para $G = (\mathbb{R}, +)$, la función $\exp : G \to \mathbb{R}$ es representativa debido a la igualdad $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ para todo $x, y \in G$.

2. Las famosas identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \end{aligned}$$

   expresan que $\operatorname{sen}, \cos : G \to \mathbb{R}$ son funciones representativas.

3. Una sucesión de polinomios $\{p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de *tipo binomial* si cumple

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   Por tanto, cada $p_n$ es una función representativa en $G$. En esta familia encontramos:

   (a) Los polinomios $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Los factoriales inferiores $\{(x)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidos como

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

(c) Los factoriales superiores $\{(x)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidos como

$$(x)^n = x(x+1)\dots(x+n-1).$$

(d) Los polinomios de Abel, dados por $p_n(x) = x(x-an)^{n-1}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

4. Una sucesión de polinomios $\{p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de *Appel* si cumple la relación:

$$\frac{d}{dx}p_n(x) = np_{n-1}(x),$$

donde $p_0(x)$ es una constante no nula. En una sucesión de Appel se da la siguiente fórmula:

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) y^{n-k}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cada $p_n$ es pues una función representativa en $G$. Esta familia incluye a los polinomios de Hermite, los de Bernoulli y los de Euler.

5. En el grupo $G = ((0,\infty),\cdot)$, la función $\log : G \to \mathbb{R}$ es representativa pues $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ para todo $x, y \in G$.

6. Si $G$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$, la función determinante $\det : G \to \mathbb{R}$ es representativa ya que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para todo $A, B \in G$.

7. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ las siguientes funciones sobre el grupo $C_\infty$ son representativas:

$$\begin{aligned} Cos_m &: C_\infty \to \mathbb{R},\ r_\theta \mapsto \cos(m\theta), \\ Sen_m &: C_\infty \to \mathbb{R},\ r_\theta \mapsto \operatorname{sen}(m\theta). \end{aligned}$$

Se puede demostrar, aunque requiere bastante trabajo, que toda función representativa sobre $C_\infty$ es suma de estas y la función constantemente 1.

Para un grupo topológico $G$ denotaremos por $\mathcal{R}(G)$ al subconjunto de $\mathcal{C}(G)$ formado por las funciones representativas de $G$. Obsérvese que $\mathcal{R}(G)$ es una $\mathbb{R}$-subálgebra de $\mathcal{C}(G)$. Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(G)$ y $x \in G$ tenemos que $x\cdot(\varphi - \psi) = x\cdot\varphi - x\cdot\psi$ y $x\cdot(\varphi\psi) = (x\cdot\varphi)(x\cdot\psi)$. La Proposición 1.6.1 nos da que $\varphi - \psi$ y $\varphi\psi$ son representativas. Además, la función constantemente 1 es representativa.

A continuación veremos que la estructura de grupo en $G$ induce, de manera natural, una estructura adicional a la de álgebra conmutativa en $\mathcal{R}(G)$, llamada de *álgebra de Hopf*. Comenzaremos explicando cómo la multiplicación $m : G \times G \to G$

induce un homomorfismo de álgebras $\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. Aquí el producto tensorial $\otimes$ está tomado sobre $\mathbb{R}$.

Dado otro grupo topológico $G'$ consideremos la aplicación

$$\Phi_{G,G'} : \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G') \to \mathcal{C}(G \times G')$$

definida por

$$\Phi_{G,G'}(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}(G), \psi \in \mathcal{C}(G'), x \in G, y \in G'. \tag{1.10}$$

Es fácil comprobar que $\Phi_{G,G'}$ es un homomorfismo de álgebras.

**Proposición 1.6.4.** *La aplicación $\Phi_{G,G'}$ es inyectiva.*

*Demostración.* Sea $\sum_j \varphi_j \otimes \psi_j \in \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G')$. Podemos reescribir este elemento de manera que el conjunto $\{\psi_j\}_j$ sea linealmente independiente. Supongamos que $\sum_j \varphi_j(x)\psi_j(y) = 0$ para todo $x \in G, y \in G'$. Entonces, $\sum_j \varphi_j(x)\psi_j = 0$ para todo $x \in G$. Como $\{\psi_j\}_j$ es linealmente independiente, $\varphi_j(x) = 0$ para todo $j$. Luego $\varphi_j = 0$ para todo $j$ y $\sum_j \varphi_j \otimes \psi_j = 0$.

□

**Proposición 1.6.5.** *Se cumple $\Phi_{G\times G,G} \circ (\Phi_{G,G} \otimes id) = \Phi_{G,G\times G} \circ (id \otimes \Phi_{G,G})$.*

*Demostración.* Como $\Phi_{G,G}$ es lineal, basta comprobar la igualdad para elementos de la forma $\varphi \otimes \psi \otimes \rho$ con $\varphi, \psi, \rho \in \mathcal{C}(G)$. Sean $x, y, z \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
[(\Phi_{G\times G,G} \circ (\Phi_{G,G} \otimes id))(\varphi \otimes \psi \otimes \rho)](x, y, z) &= [\Phi_{G\times G,G}(\Phi_{G,G}(\varphi \otimes \psi) \otimes \rho)](x, y, z) \\
&= [\Phi_{G,G}(\varphi \otimes \psi)](x, y)\rho(z) \\
&= \big(\varphi(x)\psi(y)\big)\rho(z) \\
&= \varphi(x)\psi(y)\rho(z).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
[(\Phi_{G,G\times G} \circ (id \otimes \Phi_{G,G}))(\varphi \otimes \psi \otimes \rho)](x, y, z) &= [\Phi_{G,G\times G}(\varphi \otimes \Phi_{G,G}(\psi \otimes \rho))](x, y, z) \\
&= \varphi(x)\,[\Phi_{G,G}(\psi \otimes \rho)](y, z) \\
&= \varphi(x)\big(\psi(y)\rho(z)\big) \\
&= \varphi(x)\psi(y)\rho(z).
\end{aligned}$$

□

La multiplicación $m : G \times G \to G$ induce un homomorfismo de álgebras $m^* : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G\times G)$ dado por $m^*(\varphi)(x, y) = \varphi(xy)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}(G), x, y \in G$.

**Proposición 1.6.6.** *Sea $\varphi \in \mathcal{C}(G)$. Entonces, $m^*(\varphi) \in$ Im $\Phi$ si y sólo si $\varphi$ es representativa.*

*Demostración.* Supongamos que $m^*(\varphi) \in \operatorname{Im} \Phi$. Existirán $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{C}(G), i = 1, \dots, n$, tales que $\varphi(xy) = \sum_i \varphi_i(x)\psi_i(y)$ para todo $x, y \in G$. Luego $y \cdot \varphi = \sum_i \psi_i(y)\varphi_i$ para cada $y \in G$. Así pues el espacio generado por $\{y \cdot \varphi\}_{y \in G}$ es de dimensión finita. Es decir, $\varphi$ es representativa.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi$ es representativa. El espacio generado por $\{x \cdot \varphi\}_{x \in G}$ es de dimensión finita. Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base de él. El argumento utilizado en la demostración de (i) $\Rightarrow$ (ii) en el Teorema 1.6.1 nos proporciona funciones continuas $\alpha_1, \dots, \alpha_n : G \to \mathbb{R}$ tales que

$$(x \cdot \varphi)(y) = \varphi(yx) = \varphi_1(y)\alpha_1(x) + \ldots + \varphi_n(y)\alpha_n(x), \qquad \forall y \in G.$$

Luego, $\varphi = \Phi_{G,G}(\sum_i \varphi_i \otimes \alpha_i)$. □

Pongamos $\Delta = \Phi^{-1} \circ m^*|_{\mathcal{R}(G)} : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$.

**Proposición 1.6.7.** *La imagen de $\Delta$ está contenida en $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$.*

*Demostración.* Sea $\varphi \in \mathcal{R}(G)$. Escribimos $\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i$, donde $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{C}(G)$ para $i = 1, \dots, n$. Podemos reescribir $\Delta(\varphi)$ de forma que el conjunto $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente. Existirán pues $x_1, \dots, x_n \in G$ tales que la matriz con coeficientes $\varphi_i(x_j)$ tiene determinante no nulo. Para cada $j = 1, \dots, n$ tenemos:

$$(\varphi \cdot x_j)(y) = \varphi(x_j y) = \big(\Phi \circ \Delta(\varphi)\big)(x_j, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_j)\psi_i(y), \qquad \forall y \in G.$$

La Regla de Cramer nos permite expresar $\psi_i(y)$ como combinación lineal de $\{(\varphi \cdot x_j)(y)\}_{j=1}^n$ y los escalares de esta combinación lineal no dependen de $y$. Por tanto, $\psi_i$ es combinación lineal de $\{\varphi \cdot x_j\}_{j=1}^n$. Así, el subespacio generado por $\{\psi_i \cdot z\}_{z \in G}$ está incluido en el generado por $\{\varphi \cdot (x_j z) : j = 1, \dots, n; z \in G\}$. Este último es de dimensión finita porque $\varphi \in \mathcal{R}(G)$. Luego $\psi_i \in \mathcal{R}(G)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Tenemos entonces $\Delta(\varphi) \in \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. Escribimos ahora $\Delta(\varphi) = \sum_{k=1}^p \hat{\varphi}_k \otimes \hat{\psi}_k$, donde $\hat{\varphi}_k \in \mathcal{C}(G), \hat{\psi}_k \in \mathcal{R}(G)$, para $k = 1, \dots, p$, y el conjunto $\{\hat{\psi}_k\}_{k=1}^p$ es linealmente independiente. Razonando simétricamente se prueba que $\hat{\varphi}_k \in \mathcal{R}(G)$ para todo $k = 1, \dots, p$. □

Entonces, tenemos un homomorfismo de álgebras $\Delta : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$. Lo llamaremos *comultiplicación*. Dada $\varphi \in \mathcal{R}(G)$ escribimos

$$\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi'_i \otimes \varphi''_i, \qquad \text{donde } \varphi'_i, \varphi''_i \in \mathcal{R}(G). \tag{1.11}$$

Obsérvese que $\Delta(\varphi)$ queda determinado por la condición:

$$\varphi(xy) = (\Phi_{G,G} \circ \Delta(\varphi))(x, y) = \sum_i \varphi'_i(x)\varphi''_i(y), \qquad \forall x, y \in G. \tag{1.12}$$

Comprobaremos después que la asociatividad de la multiplicación en $G$, que podemos expresar mediante la conmutatividad del diagrama inferior izquierdo, se traduce en una propiedad sobre $\Delta$, llamada *coasociatividad*, que podemos expresar mediante la conmutatividad del diagrama inferior derecho:

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "id\times m"] \arrow[d, "m\times id"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) & \mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\
\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & \mathcal{R}(G) \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

El elemento neutro $1_G$ del grupo $G$ induce un homomorfismo de álgebras $\varepsilon : \mathcal{R}(G) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(1_G)$. Lo llamaremos *counidad*. El axioma de elemento neutro, que podemos expresar en el siguiente diagrama inferior izquierdo, se traduce en una propiedad para $\varepsilon$, que expresamos en el diagrama inferior derecho:

$$\begin{tikzcd}
\{1_G\}\times G \arrow[r, "\iota\times id"] \arrow[dr] & G\times G \arrow[d, "m"] & G\times\{1_G\} \arrow[l, "id\times\iota"'] \arrow[dl] \\
& G &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\otimes\mathcal{R}(G) & \mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) \arrow[l, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\varepsilon"] & \mathcal{R}(G)\otimes\mathbb{R} \\
& \mathcal{R}(G) \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\iota$ en el diagrama izquierdo es la inclusión. Las aplicaciones diagonales llevan $(1_G, x)$ y $(x, 1_G)$ a $x$. En el derecho, las aplicaciones diagonales son el inverso del isomorfismo inducido por el producto por escalares. Es decir, $\varphi \in \mathcal{R}(G)$ se aplica en $\varphi \otimes 1$ y $1 \otimes \varphi$. Usando la notación de (1.11), la conmutatividad del diagrama derecho también se puede expresar como:

$$\varphi = \sum_i \varepsilon(\varphi_i')\varphi_i'' = \sum_i \varphi_i'\,\varepsilon(\varphi_i'').$$

Finalmente, la aplicación inversión $inv : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ induce un antihomomorfismo de álgebras $S : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G)$, dado por $S(\varphi)(x) = \varphi(x^{-1})$ para todo $x \in G$. Lo llamaremos *antípoda*. El axioma de elemento inverso lo podemos expresar mediante la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "diag"] \arrow[dr] & G\times G \arrow[r, "inv\times id"] & G\times G \arrow[dd, "m"] & G\times G \arrow[l, "id\times inv"'] & G \arrow[l, "diag"'] \arrow[dl] \\
& \{1_G\} \arrow[dr, "\iota"'] & & \{1_G\} \arrow[dl, "\iota"] & \\
& & G & &
\end{tikzcd}$$

La aplicación $diag : G \to G \times G$ lleva $x$ a $(x, x)$. Para explicar cómo se refleja en $\mathcal{R}(G)$ el axioma de elemento inverso necesitamos antes entender qué hace la aplicación dual $diag^* : \mathcal{C}(G \times G) \to \mathcal{C}(G)$. Está definida por $diag^*(\phi)(x) = \phi(x, x)$ para todo $\phi \in \mathcal{C}(G \times G)$. Veamos $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$ dentro de $\mathcal{C}(G \times G)$ a través de $\Phi_{G,G}$. Entonces,

$$(diag^* \circ \Phi_{G,G})(\varphi \otimes \psi)(x) = \Phi_{G,G}(\varphi \otimes \psi)(x, x) = \varphi(x)\psi(x), \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}(G), x \in G.$$

Es decir, $diag^*$ restringida a $\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{C}(G)$ es la multiplicación de $\mathcal{C}(G)$. Como $\mathcal{R}(G)$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(G)$, tenemos que $diag^*$ restringida a $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ es la multiplicación de $\mathcal{R}(G)$. Llamémosla $\nabla$. El axioma de elemento inverso se traduce en la propiedad para $S$ expresada mediante la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(G) & & \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G) \arrow[ll, "\nabla"'] & & \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G) \arrow[ll, "S\otimes id"'] \arrow[rr, "id\otimes S"] & & \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G) \arrow[rr, "\nabla"] & & \mathcal{R}(G) \\
& \mathbb{R} \arrow[ul, "u"] & & & & & & \mathbb{R} \arrow[ur, "u"'] & \\
& & & & \mathcal{R}(G) \arrow[uu, "\Delta"'] \arrow[lllu, "\varepsilon"] \arrow[rrru, "\varepsilon"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Aquí $u$ denota la aplicación lineal que lleva $1_{\mathbb{R}}$ en $1_{\mathcal{R}(G)}$. Utilizando la notación de (1.11), la conmutatividad de este diagrama también se puede describir por:

$$\sum_i S(\varphi_i')\varphi_i'' = \varepsilon(\varphi)1_{\mathcal{R}(G)} = \sum_i \varphi_i' S(\varphi_i'').$$

Llamaremos *álgebra de Hopf* sobre $\mathbb{R}$ a un álgebra $H$ sobre $\mathbb{R}$ que posee homomorfismos de álgebras $\Delta : H \to H \otimes H$ y $\varepsilon : H \to \mathbb{R}$ y un antihomomorfismo de álgebras $S : H \to H$ que satisfacen diagramas como los anteriores.

Ya estamos en condiciones de demostrar que:

**Teorema 1.6.8.** *Para un grupo topológico $G$, el álgebra $\mathcal{R}(G)$ es un álgebra de Hopf.*

*Demostración.* Comprobamos primero la propiedad de coasociatividad, es decir, que $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$. Para ello, vemos ambas funciones en $\mathcal{C}(G \times G \times G)$ y comprobamos la igualdad aquí. Sea $\varphi \in \mathcal{R}(G)$ y escribimos $\Delta(f) = \sum_i \varphi_i' \otimes \varphi_i''$. Sean $x, y, z \in G$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
&\big[\big(\Phi_{G\times G,G} \circ (\Phi_{G,G} \otimes id)\big)\big(((\Delta \otimes id) \circ \Delta)(\varphi)\big)\big](x, y, z) \\
&\quad = \Phi_{G\times G,G}\Big(\sum_i (\Phi_{G,G} \circ \Delta)(\varphi_i') \otimes \varphi_i''\Big)(x, y, z) \\
&\quad = \sum_i [(\Phi_{G,G} \circ \Delta)(\varphi_i')](x, y)\varphi_i''(z) && \text{(por (1.10))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \varphi_i'(xy)\varphi_i''(z) && \text{(por (1.12))}\\
&= \varphi((xy)z) && \text{(por (1.12))}\\
&= \varphi(x(yz)) && \text{(asociatividad)}\\
&= \sum_i \varphi_i'(x)\varphi_i''(yz) && \text{(por (1.12))}\\
&= \sum_i \varphi_i'(x)[(\Phi_{G,G}\circ\Delta)(\varphi_i'')](y,z) && \text{(por (1.12))}\\
&= \Phi_{G,G\times G}\Big(\sum_i \varphi_i'\otimes(\Phi_{G,G}\circ\Delta)(\varphi_i'')\Big)(x,y,z) && \text{(por (1.10))}\\
&= \big[\big(\Phi_{G,G\times G}\circ(id\otimes\Phi_{G,G})\big)\big(((id\otimes\Delta)\circ\Delta)(\varphi)\big)\big](x,y,z).
\end{aligned}
$$

De aquí obtenemos $(\Delta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\Delta)\circ\Delta$ porque: $\Phi_{G\times G,G}\circ(\Phi_{G,G}\otimes id) = \Phi_{G,G\times G}\circ(id\otimes\Phi_{G,G})$ por la Proposición 1.6.5 y esta aplicación es inyectiva como consecuencia de la Proposición 1.6.4.

Comprobamos ahora la propiedad de la counidad, es decir, que $(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta = id$ y $(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = id$ . Calculamos:

$$
\begin{aligned}
((\varepsilon\otimes id)\circ\Delta)(\varphi)(x) &= \sum_i \varepsilon(\varphi_i')\varphi_i''(x) &&\\
&= \sum_i \varphi_i'(1_G)\varphi_i''(x) && \text{(definición de } \varepsilon)\\
&= \varphi(1_G\, x) && \text{(por (1.12))}\\
&= \varphi(x) && \text{(elemento neutro).}
\end{aligned}
$$

De manera similar se comprueba que $(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = id$.

Finalmente, comprobamos la propiedad de la antípoda:

$$
\begin{aligned}
\big(\textstyle\sum_i \varphi_i' S(\varphi_i'')\big)(x) &= \textstyle\sum_i \varphi_i'(x)S(\varphi_i'')(x) &&\\
&= \textstyle\sum_i \varphi_i'(x)\varphi_i''(x^{-1}) && \text{(definición de } S)\\
&= \varphi(xx^{-1}) && \text{(por (1.12))}\\
&= \varphi(1_G) && \text{(elemento inverso)}\\
&= \varepsilon(\varphi)1_{\mathcal{R}(G)}(x) && \text{(definición de } \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Del mismo modo se comprueba que $\sum_i S(\varphi_i')\varphi_i'' = \varepsilon(\varphi)1_{\mathcal{R}(G)}$. Así queda demostrado que $\mathcal{R}(G)$ es un álgebra de Hopf. $\square$

Si $G$ es un grupo abeliano, esta propiedad también se refleja en $\mathcal{R}(G)$. Ser abeliano se puede expresar mediante la conmutatividad del diagrama inferior izquierdo. Esto da lugar a la conmutatividad del diagrama inferior derecho:

$$\begin{tikzcd} & G\times G \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "m"] & \\ G\times G \arrow[rr, "m"'] & & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) & \\ \mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) \arrow[ur, "\tau"] & & \mathcal{R}(G) \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[ll, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

La aplicación $\tau$ lleva $(x,y)$ en $(y,x)$ en el caso del producto cartesiano y $\varphi\otimes\psi$ en $\psi\otimes\varphi$ en el caso del producto tensorial. Veamos que efectivamente esto es así:

$$\begin{aligned}
[(\Phi_{G,G}\circ\tau\circ\Delta)(\varphi)](x,y) &= \Big[\Phi_{G,G}\circ\tau\Big(\sum_i \varphi_i'\otimes\varphi_i''\Big)\Big](x,y) \\
&= \Phi_{G,G}\Big(\sum_i \varphi_i''\otimes\varphi_i'\Big)(x,y) \\
&= \sum_i \varphi_i''(x)\varphi_i'(y) && \text{(def. de } \Phi_{G,G}) \\
&= \varphi(yx) && \text{(por (1.12))} \\
&= \varphi(xy) && (G \text{ es abeliano}) \\
&= [\Phi_{G,G}\circ\Delta(\varphi)](x,y) && \text{(por (1.12)).}
\end{aligned}$$

Como $\Phi_{G,G}$ es inyectiva, obtenemos $\tau\circ\Delta=\Delta$. En este caso diremos que $\mathcal{R}(G)$ es un álgebra de Hopf *coconmutativa*.

Por otro lado, si $f: G\to G'$ es un homomorfismo de grupos topológicos, entonces el homomorfismo de álgebras $\mathcal{R}(f):\mathcal{R}(G')\to\mathcal{R}(G)$, $\varphi\mapsto\varphi\circ f$ es compatible con la estructura de álgebra de Hopf de $\mathcal{R}(G)$ y $\mathcal{R}(G')$. Con esto queremos decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

(1) Compatibilidad con la comultiplicación:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(G') \arrow[r, "\mathcal{R}(f)"] \arrow[d, "\Delta'"'] & \mathcal{R}(G) \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathcal{R}(G')\otimes\mathcal{R}(G') \arrow[r, "\mathcal{R}(f)\otimes\mathcal{R}(f)"'] & \mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G) \end{tikzcd}$$

(2) Compatibilidad con la counidad:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(G') \arrow[rr, "\mathcal{R}(f)"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & & \mathcal{R}(G) \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

(3) Compatibilidad con la antípoda:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(G') \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "\mathcal{R}(f)"'] & \mathcal{R}(G') \arrow[d, "\mathcal{R}(f)"] \\ \mathcal{R}(G) \arrow[r, "S"'] & \mathcal{R}(G) \end{tikzcd}$$

Los diagramas son consecuencia de las siguientes tres propiedades de $f$:

(1) $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in G$.

(2) $f(1_G) = 1_{G'}$.

(3) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ para todo $x \in G$.

Veámoslo:

(1) Compatibilidad con la comultiplicación:

$$\begin{aligned}
&[(\Phi_{G,G} \circ (\mathcal{R}(f) \otimes \mathcal{R}(f)) \circ \Delta')(\varphi)](x \otimes y) \\
&\qquad = (\Phi_{G,G} \circ (\mathcal{R}(f) \otimes \mathcal{R}(f)))\Big(\sum_i \varphi_i' \otimes \varphi_i''\Big)(x \otimes y) \\
&\qquad = \Phi_{G,G}\Big(\sum_i (\varphi_i' \circ f) \otimes (\varphi_i'' \circ f)\Big)(x \otimes y) \\
&\qquad = \sum_i \varphi_i'(f(x))\varphi_i''(f(y)) \\
&\qquad = \varphi(f(x)f(y)) \\
&\qquad = \varphi(f(xy)) \\
&\qquad = \mathcal{R}(f)(\varphi)(xy) \\
&\qquad = [(\Phi_{G,G} \circ \Delta \circ \mathcal{R}(f))(\varphi)](x \otimes y).
\end{aligned}$$

Ahora se aplica que $\Phi_{G,G}$ es inyectiva.

(2) Compatibilidad con la counidad:

$$\varepsilon(\mathcal{R}(f))(\varphi) = \varepsilon(\varphi \circ f) = \varphi(f(1_G)) = \varphi(1_{G'}) = \varepsilon'(\varphi).$$

(3) Compatibilidad con la antípoda:

$$\begin{aligned}
((\mathcal{R}(f) \circ S')(\varphi))(x) &= (S'(\varphi) \circ f)(x) \\
&= S'(\varphi)(f(x)) \\
&= \varphi(f(x)^{-1}) \\
&= \varphi(f(x^{-1})) \\
&= (\varphi \circ f)(x^{-1}) \\
&= (\mathcal{R}(f)(\varphi))(x^{-1}) \\
&= S(\mathcal{R}(f)(\varphi))(x) \\
&= ((S \circ \mathcal{R}(f))(\varphi))(x).
\end{aligned}$$

**Nota 1.6.9.** *Obsérvese que la construcción de $\mathcal{R}(G)$ en realidad se puede realizar para cualquier grupo y cualquier cuerpo.*

Cuando $G$ es un grupo compacto, toda función continua tiene soporte compacto y por tanto la integral de Haar (a izquierda) $\lambda$ sobre $G$ se puede restringir a $\mathcal{R}(G)$. En este caso, la propiedad de invarianza de la integral de Haar se puede expresar mediante la comultiplicación y unidad de $\mathcal{R}(G)$. Veámoslo:

Sea $\varphi \in \mathcal{R}(G)$ y pongamos $\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi_i' \otimes \varphi_i''$. Dado $y \in G$ tenemos

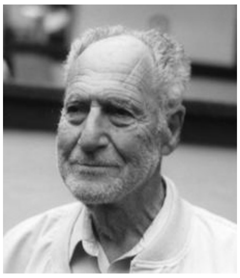
$$(y \cdot \varphi)(x) = \varphi(xy) = \sum_i \varphi_i'(x)\varphi_i''(y), \qquad \forall x \in G.$$

Entonces,

$$\lambda(\varphi) = \lambda(y \cdot \varphi) = \sum_i \lambda(\varphi_i')\varphi_i''(y), \qquad \forall y \in G.$$

De aquí,

$$\boxed{\sum_i \lambda(\varphi_i')\varphi_i'' = \lambda(\varphi)1_{\mathcal{R}(G)}.} \tag{1.13}$$



G. Hochschild
1915-2010

Esta condición aparece en [32, pág. 28] y es necesaria para reconocer las $\mathbb{R}$-álgebras de Hopf conmutativas que son de la forma $\mathcal{R}(G)$ para un grupo compacto $G$. Véase [32, Theorem 3.5]. Más tarde, Sweedler introdujo en [59], mediante esta condición, la noción de integral para un álgebra de Hopf (no necesariamente conmutativa) sobre cualquier cuerpo. La estudiaremos en el segundo capítulo.

## Comentarios bibliográficos

En la elaboración de este capítulo hemos utilizado los libros de Baker [9], Bump [13], Hochschild [32], Lang [38], Nachbin [44], Procesi [45], Serre [51] y Stroppel [52]. Concretamente, los ejemplos de la Sección 1.2 de grupos matriciales están extraídos de [9, Secciones 1.4 y 1.5] y [51, Secciones 5.2 y 5.5]. En la Sección 1.3 hemos usado [52, Capítulo D]. Para la demostración del Teorema de Existencia de la Integral de Haar hemos seguido [32, Sección I.3] y [44, Sección II.8]. En [44] se dan dos demostraciones de la existencia de integral de Haar: una de André Weil y otra de Henri Cartan. La primera es la que nosotros hemos incluido. Es interesante leer allí los comentarios sobre una y otra demostración. Por ejemplo, se comenta que la demostración de Weil está expuesta a la crítica al utilizar el Axioma de Elección. La de Cartan no depende de él. La demostración del Teorema de Unicidad está tomada de [52, Capítulo D]. Nos ha parecido la más sencilla de las que hemos visto. La demostración que aparece en [32] usa el Teorema de Stone-Weiertrass para espacios localmente compactos. Para la construcción de la función modular hemos usado [44, Sección II.5] y los apuntes de Tornier [64]. El ejemplo de grupo no unimodular está tomado de [13, pág. 4]. La construcción del álgebra de Hopf de las funciones representativas y la discusión sobre la invarianza de la integral está basada en [32, Sección II.3] y [45, Sección 8.2].

# Capítulo 2

# Álgebras de Hopf con integral

En este capítulo estudiaremos la noción de integral en álgebras de Hopf. Introduciremos primero la estructura de álgebra de Hopf. Será necesario, para el desarrollo posterior, tratar de manera aislada las estructuras de álgebra, coálgebra, módulo y comódulo. Analizaremos la dualidad existente entre álgebras y coálgebras y veremos que los comódulos sobre una coálgebra se pueden identificar con cierto tipo de módulos sobre el álgebra dual: los llamados módulos racionales.

Después demostraremos el Teorema de Unicidad de la Integral. Como paso previo, definiremos los módulos de Hopf y probaremos el teorema sobre su estructura, que es la herramienta clave en la demostración. Como consecuencia de la unicidad, construiremos el elemento modular, que controla la diferencia entre integrales a derecha e izquierda.

Finalmente, presentaremos varios resultados sobre álgebras de Hopf en los que se usa la integral. El primero es la Fórmula de Radford para la potencia cuarta de la antípoda. De ella derivaremos una importante propiedad estructural de las álgebras de Hopf de dimensión finita, a saber, su antípoda tiene orden finito. El segundo es el Teorema de Maschke, que caracteriza la cosemisimplicidad mediante una condición sobre la integral. En tercer lugar, probaremos que un álgebra de Hopf de dimensión finita es un álgebra de Frobenius. Para terminar daremos varias caracterizaciones, en términos homológicos y de finitud, de la existencia de integral sobre un álgebra de Hopf.

*A lo largo del capítulo trabajaremos sobre un cuerpo base arbitrario* $\Bbbk$. *Salvo que se indique otra cosa, los espacios vectoriales serán sobre* $\Bbbk$, *las aplicaciones serán* $\Bbbk$*-lineales y el producto tensorial* $\otimes$ *estará tomado sobre* $\Bbbk$.

## 2.1. Álgebras y coálgebras

Comenzaremos dando la definición usual de álgebra, en términos de elementos, para posteriormente expresar las propiedades de asociatividad y unitalidad a través de aplicaciones lineales. Así llegaremos al concepto dual de coálgebra.

Recordemos que un espacio vectorial $A$ es un álgebra (sobre $\Bbbk$ ó $\Bbbk$-álgebra para enfatizar $\Bbbk$) si está dotado de una operación binaria (multiplicación) $(x, y) \mapsto xy$ que cumple las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in A$ y $\alpha \in \Bbbk$:

(1) Asociatividad: $(xy)z = x(yz)$;

(2) Elemento unidad: existe $1_A \in A$ tal que $x1_A = 1_A x = x$;

(3) Distributividad 1: $x(y + z) = xy + xz$;

(4) Distributividad 2: $(x + y)z = xz + yz$;

(5) Compatibilidad con el producto escalar: $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Las propiedades (3)-(5) dicen que la operación binaria es lineal en ambas variables. Usando el producto tensorial y aplicaciones lineales podemos dar la siguiente definición equivalente de álgebra:

Un *álgebra* es un $\Bbbk$-espacio vectorial $A$ junto con dos aplicaciones lineales, $\nabla : A \otimes A \to A$ (multiplicación) y $u : \Bbbk \to A$ (unidad), tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

Asociatividad:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\nabla \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \nabla"'] & A \otimes A \arrow[d, "\nabla"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\nabla"'] & A \end{tikzcd}$$

Unidad:

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "\nabla"] & \\ \Bbbk \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "id \otimes u"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Nótese que el elemento unidad de $A$ es $1_A = u(1)$. Cuando queramos mencionar expresamente la multiplicación y la unidad diremos el álgebra $(A, \nabla_A, u_A)$.

Consideremos la aplicación trasposición $\tau : V \otimes W \to W \otimes V, v \otimes w \mapsto w \otimes v$. Que la multiplicación sea conmutativa es equivalente a $\nabla \circ \tau = \nabla$. Con esta nueva interpretación también podemos definir el álgebra opuesta. Recordemos que el álgebra opuesta $A^{op}$ se define cambiando el producto en $A$ por $x \odot y = yx$ para todo $x, y \in A$. Luego, podemos definir que $A^{op}$ es igual a $A$ como espacio vectorial, con multiplicación $\nabla^{op} = \nabla \circ \tau$ y unidad $u^{op} = u$. Claramente, $A$ es conmutativa si y sólo si $A = A^{op}$ como álgebras.

Mediante dualización, cambiando el sentido de las flechas, llegamos a la noción de coálgebra. Aunque es más cómodo introducir la noción de coálgebra como dual de la de álgebra, hemos visto en el Capítulo 1 que este cambio de sentido de las flechas aparece de modo natural cuando consideramos el álgebra de funciones representativas sobre un grupo.

**Definición 2.1.1.** *Una* coálgebra *(sobre $\Bbbk$ ó $\Bbbk$-coálgebra) es un espacio vectorial $C$ junto con dos aplicaciones lineales, $\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicación) y $\varepsilon : C \to \Bbbk$ (counidad), tal que los siguientes diagramas son conmutativos:*

*Coasociatividad:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C\otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd}$$

*Counidad:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\Delta"] & \\ \Bbbk\otimes C \arrow[ur, "\cong"] & & C\otimes\Bbbk \arrow[ul, "\cong"'] \\ & C\otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

*Además, diremos que $C$ es* coconmutativa *si* $\tau\circ\Delta=\Delta$.

Cuando queramos mencionar expresamente la comultiplicación y la counidad diremos la coálgebra $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$. Dada una coálgebra $C$ se define su *coálgebra coopuesta* del siguiente modo: $C^{cop}=C$ como espacio vectorial, $\Delta_{C^{cop}}=\tau\circ\Delta$ y $\varepsilon_{C^{cop}}=\varepsilon_C$.

M. E. Sweedler
1942 -

**Notación de Sweedler.** Obsérvese que la multiplicación «fusiona» (multiplicando dos elementos, obtenemos como resultado un solo elemento), mientras que la comultiplicación «fisiona» (comultiplicando un elemento, obtenemos una familia finita de pares de elementos). Para trabajar con la comultiplicación, Sweedler introdujo la siguiente notación, que resulta muy útil. Dado $c\in C$ podemos escribir $\Delta(c)$ como $\Delta(c)=\sum_{i=1}^n c_i\otimes c_i'$ con $c_i,c_i'\in C$. Teniendo en cuenta la posición de cada tensorando, podríamos simplificar esto a $\Delta(c)=\sum_{i=1}^n c_{1i}\otimes c_{2i}$.

Sweedler propone suprimir el subíndice $i$ y escribir

$$\Delta(c)=\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)},$$

donde ahora los subíndices (1) y (2) son simbólicos; no se refieren a un elemento concreto de $C$.

Esta notación muestra su potencia cuando $\Delta$ se aplica más de una vez. La conmutatividad del diagrama de la coasociatividad se escribiría como

$$\sum_{(c)}\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)_{(1)}}\otimes c_{(1)_{(2)}}\otimes c_{(2)}=\sum_{(c)}\sum_{(c_{(2)})} c_{(1)}\otimes c_{(2)_{(1)}}\otimes c_{(2)_{(2)}}.$$

Podemos continuar con el proceso de simplificación y denotar a este elemento por:

$$\Delta_2(c)=\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes c_{(3)}.$$

Iterando este procedimiento, para $\Delta_{n-1}(c)=(\Delta\otimes id)\Delta_{n-2}(c)$ escribiremos:

$$\Delta_{n-1}(c)=\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes\cdots\otimes c_{(n)}.$$

Con esta notación, la propiedad de la counidad se escribe como:

$$c = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(2)})c_{(1)}, \tag{2.1}$$

Con los años, imitando el convenio de Einstein, se ha ido imponiendo la supresión del sumatorio, de modo que simplemente se escribe:

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Esta notación abreviada será la que nosotros usaremos.

La dualidad también nos permite introducir los homomorfismos de coálgebras. Recordemos que en el caso de grupos topológicos llegamos a ellos a partir de homomorfismos entre los grupos.

Sean $A$ y $B$ dos $\Bbbk$-álgebras. Sabemos que un *homomorfismo de álgebras* es una aplicación lineal $f : A \to B$ tal que $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A$ y $f(1_A) = 1_B$. Estas dos condiciones se pueden expresar mediante la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\nabla_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\nabla_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Bbbk \arrow[dl, "u_A"'] \arrow[dr, "u_B"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

Cambiando el sentido de las flechas obtenemos la noción de homomorfismo de coálgebras.

**Definición 2.1.2.** *Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos coálgebras sobre $\Bbbk$. Una aplicación lineal $f : C \to D$ es un* homomorfismo de coálgebras *si los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \Bbbk & \end{tikzcd}$$

En la notación de Sweedler, la conmutatividad del primer diagrama se expresa como:

$$f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)} = f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}), \qquad \forall c \in C.$$

Terminaremos esta sección dándole nombre a ciertos elementos cuya comultiplicación tiene una forma especial:

**Definición 2.1.3.** *Sea $C$ una coálgebra sobre $\Bbbk$. Un elemento no nulo $g \in C$ se llama* de tipo grupo *si $\Delta(g) = g \otimes g$. Al conjunto de tales elementos lo denotaremos por $G(C)$.*

Obsérvese que si $g \in G(C)$, entonces $\varepsilon(g) = 1$. Esto es por la propiedad de la counidad: $g = \varepsilon(g)g$. Si consideramos el grupo aditivo de $\mathbb{R}$, la función exponencial en $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ es un elemento de este tipo, véase (1.11) y (1.12).

El siguiente resultado será necesario más adelante:

**Proposición 2.1.4.** *El conjunto $G(C)$ es linealmente independiente.*

*Demostración.* Los elementos de $G(C)$ son no nulos, así que todo subconjunto unitario de $G(C)$ es linealmente independiente. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $G(C)$ no es linealmente independiente. Sea $n$ minimal tal que todo subconjunto de $G(C)$ de $n$ elementos distintos es linealmente independiente y existe un subconjunto de $n+1$ elementos distintos de $G(C)$ que no lo es. Tendremos una igualdad de la forma

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n,$$

con $g, g_1, g_2, \ldots, g_n \in G(C)$ distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk$. Aplicando la comultiplicación y usando esta igualdad llegamos a:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j g_i \otimes g_j = g \otimes g = \Delta(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta(g_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \otimes g_i. \tag{2.2}$$

Por la elección de $n$, el subconjunto $\{g_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente. Entonces, $\{g_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^n$ también lo es. Como $g \neq 0$, algún $\alpha_i$ es no nulo, digamos $\alpha_1$. De (2.2) obtendríamos que $\alpha_j = 0$ para $j \neq 1$. Por tanto, $g = \alpha_1 g_1$. Ahora $1 = \varepsilon(g) = \alpha_1 \varepsilon(g_1) = \alpha_1$. Tendríamos pues $g = g_1$, lo que contradice el que estos elementos eran distintos. □

## 2.2. Dualidad entre álgebras y coálgebras

La situación más sencilla en la que encontramos el cambio de sentido de las flechas es cuando consideramos espacios vectoriales y sus duales. En dimensión finita, donde la dualidad es perfecta, la estructura de álgebra (resp. coálgebra) en un espacio vectorial debería pasar a estructura de coálgebra (resp. álgebra) en su dual. Para ver que esto es así, necesitamos entender la relación entre el espacio dual de un producto tensorial de espacios y el producto tensorial de los duales.

Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre $\Bbbk$. La aplicación lineal $\Phi_{V,W} : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ definida por

$$\Phi_{V,W}(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v)\psi(w), \qquad \forall \varphi \in V^*, \psi \in W^*, v \in V, w \in W, \tag{2.3}$$

es inyectiva. Además, es sobreyectiva si y sólo si $V$ ó $W$ es de dimensión finita.

**Proposición 2.2.1.** *Sea* $(C, \Delta, \varepsilon)$ *una coálgebra sobre* $\Bbbk$*. Las aplicaciones* $\Delta^* \circ \Phi_{C,C} : C^* \otimes C^* \to C^*$ *y* $\varepsilon^* : \Bbbk \to C^*$ *dotan a* $C^*$ *de estructura de álgebra. Además, si* $f : C \to D$ *es un homomorfismo de coálgebras, entonces* $f^* : D^* \to C^*$ *es un homomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Denotamos por $\star$ a $\Delta^* \circ \Phi_{C,C}$. Para $\phi, \varphi, \psi \in C^*$ y $c \in C$ tenemos $(\varphi \star \psi)(c) = \varphi(c_{(1)})\psi(c_{(2)})$. Veamos que $\star$ es asociativo:

$$\begin{aligned}
((\phi \star \varphi) \star \psi)(c) &= (\phi \star \varphi)(c_{(1)})\psi(c_{(2)}) \\
&= \phi(c_{(1)})\varphi(c_{(2)})\psi(c_{(3)}) \\
&= \phi(c_{(1)})(\varphi \star \psi)(c_{(2)}) && \text{(coasociatividad)} \\
&= (\phi \star (\varphi \star \psi))(c).
\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\varepsilon^*(1)$ es la unidad:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon^*(1) \star \varphi)(c) &= \varepsilon^*(1)(c_{(1)})\varphi(c_{(2)}) \\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varphi(c_{(2)}) \\
&= \varphi(\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}) \\
&= \varphi(c) && \text{(counidad).}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se comprueba que $\varphi \star \varepsilon^*(1) = \varphi$.

Demostramos la segunda afirmación. Sean $\alpha, \beta \in D^*$ y $c \in C$. Entonces,

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha \star \beta)(c) &= (\alpha \star \beta)(f(c)) \\
&= \alpha(f(c)_{(1)})\beta(f(c)_{(2)}) \\
&= \alpha(f(c_{(1)}))\beta(f(c_{(2)})) && (f \text{ hom. coálgebras}) \\
&= (f^*(\alpha) \star f^*(\beta))(c).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$f^*(\varepsilon_D(1))(c) = \varepsilon_D(1)(f(c)) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c).$$

□

**Definición 2.2.2.** *A* $C^*$ *la llamaremos* álgebra dual de $C$ *y a* $\star$ producto convolución.

El paso de álgebras a coálgebras no siempre es posible. Si $A$ es un álgebra con multiplicación $\nabla : A \otimes A \to A$, entonces, al dualizar, obtenemos $\nabla^* : A^* \to (A \otimes A)^*$. El obstáculo que encontramos es que, en general, no podemos identificar $(A \otimes A)^*$ con $A^* \otimes A^*$. Este obstáculo desaparece cuando $A$ es de dimensión finita, pues $\Phi_{A,A} : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ es un isomorfismo y podemos usar su inversa $\Phi_{A,A}^{-1}$.

**Proposición 2.2.3.** *Sea* $(A, \nabla, u)$ *una* $\Bbbk$*-álgebra de dimensión finita. Las aplicaciones* $\Phi_{A,A}^{-1} \circ \nabla^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ *y* $u^* : A^* \to \Bbbk$ *dotan a* $A^*$ *de estructura de coálgebra. Además, si* $f : A \to B$ *es un homomorfismo de álgebras, entonces* $f^* : B^* \to A^*$ *es un homomorfismo de coálgebras.*

*Demostración.* Pongamos $\Delta = \Phi_{A,A}^{-1} \circ \nabla^*$ y $\varepsilon = u^*$. Dado $\varphi \in A^*$ escribimos

$$\Delta(\varphi) = \sum_i \varphi_{1i} \otimes \varphi_{2i}.$$

Entonces,

$$\varphi(xy) = \sum_i \varphi_{1i}(x)\varphi_{2i}(y), \qquad \forall x, y \in A. \tag{2.4}$$

Esto es debido a que

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \nabla^*(\varphi)(x \otimes y) \\ &= (\Phi_{A,A} \circ \Delta(\varphi))(x \otimes y) \\ &= \Phi_{A,A}\Big(\sum_i \varphi_{1i} \otimes \varphi_{2i}\Big)(x \otimes y) \\ &= \sum_i \varphi_{1i}(x)\varphi_{2i}(y). \end{aligned}$$

Para demostrar la coasociatividad necesitamos considerar la aplicación

$$\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\Phi_{A,A} \otimes id) : A^* \otimes A^* \otimes A^* \to (A \otimes A \otimes A)^*,$$

que está definida por

$$[\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\Phi_{A,A} \otimes id)(\phi \otimes \varphi \otimes \psi)](x \otimes y \otimes z) = \phi(x)\varphi(y)\psi(x).$$

Es fácil ver que $\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\Phi_{A,A} \otimes id) = \Phi_{A,A\otimes A} \circ (id \otimes \Phi_{A,A})$. Además, esta aplicación es inyectiva. Entonces, dado $\varphi \in A^*$ y $x, y, z \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned} &[\Phi_{A,A\otimes A} \circ (id \otimes \Phi_{A,A}) \circ (id \otimes \Delta) \circ \Delta]\,(\varphi)\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = [\Phi_{A,A\otimes A} \circ (id \otimes \nabla^*) \circ \Delta]\,(\varphi)\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = [\Phi_{A,A\otimes A} \circ (id \otimes \nabla^*)]\,(\textstyle\sum_i \varphi_{1i} \otimes \varphi_{2i})\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = \Phi_{A,A\otimes A}\,(\textstyle\sum_i \varphi_{1i} \otimes (\varphi_{2i} \circ \nabla))\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = \textstyle\sum_i \varphi_{1i}\,(x)\,\varphi_{2i}\,(yz) \\ &\qquad = \varphi\,(x(yz)) \\ &\qquad = \varphi\,((xy)z) \qquad\qquad\qquad \text{(asociatividad)} \\ &\qquad = \textstyle\sum_i \varphi_{1i}\,(xy)\,\varphi_{2i}\,(z) \\ &\qquad = \Phi_{A\otimes A,A}\,(\textstyle\sum_i (\varphi_{1i} \circ \nabla) \otimes \varphi_{2i})\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = [\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\nabla^* \otimes id)]\,(\textstyle\sum_i \varphi_{1i} \otimes \varphi_{2i})\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = [\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\nabla^* \otimes id) \circ \Delta]\,(\varphi)\,(x \otimes y \otimes z) \\ &\qquad = [\Phi_{A\otimes A,A} \circ (\Phi_{A,A} \otimes id) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta]\,(\varphi)\,(x \otimes y \otimes z)\,. \end{aligned}$$

De aquí se sigue la coasociatividad: $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$.

Para demostrar la propiedad de la counidad, nótese que $\varepsilon(\varphi) = \varphi(1_A)$. Calculamos:

$$[(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(\varphi)](x) = \Big(\sum_i \varepsilon(\varphi_{1i})\varphi_{2i}\Big)(x) = \sum_i \varphi_{1i}(1_A)\varphi_{2i}(x) = \varphi(1_A x) = \varphi(x).$$

Similarmente se comprueba que $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id$.

Demostramos ahora que si $f : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras, entonces $f^* : B^* \to A^*$ es un homomorfismo de coálgebras. Sea $\alpha \in B^*$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{A,A}\Big(\sum_i f^*(\alpha_{1i}) \otimes f^*(\alpha_{2i})\Big)(x \otimes y) \\
&\quad = \sum_i \alpha_{1i}(f(x))\alpha_{2i}(f(y)) \\
&\quad = \alpha(f(x)f(y)) && \text{(por (2.4))} \\
&\quad = \alpha(f(xy)) && \text{($f$ hom. álgebras)} \\
&\quad = f^*(\alpha)(xy) \\
&\quad = \sum_j f^*(\alpha)_{1j}(x) f^*(\alpha)_{2j}(y) && \text{(por (2.4))} \\
&\quad = \Phi_{A,A}\Big(\sum_j f^*(\alpha)_{1j} \otimes f^*(\alpha)_{2j}\Big)(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Como $\Phi_{A,A}$ es inyectiva, se sigue la compatibilidad con la comultiplicación.

Finalmente,

$$\varepsilon_{A^*} \circ f^*(\alpha) = f^*(\alpha)(1_A) = \alpha\big(f(1_A)\big) = \alpha(1_B) = \varepsilon_{B^*}(\alpha).$$

$\square$

**Definición 2.2.4.** *Diremos que* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ *es la* coálgebra dual de $A$.

**Nota 2.2.5.** *Obsérvese la similitud de la demostración anterior con la demostración hecha en el Capítulo 1 de que* $\mathcal{R}(G)$ *es una coálgebra.*

Cuando el espacio vectorial es de dimensión finita, el espacio bidual es isomorfo a él. En este caso, al realizar el proceso de dualización dos veces recuperamos la estructura inicial de álgebra o coálgebra. Esto es lo que demostraremos seguidamente. Recordemos que para un $\Bbbk$-espacio vectorial $V$ la aplicación $\kappa_V : V \to V^{**}$, dada por $\kappa_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$ para todo $v \in V, \varphi \in V^*$, es lineal e inyectiva. Además, es sobreyectiva si y sólo si $\dim V < \infty$.

**Proposición 2.2.6.** *Sean $A$ y $C$ un álgebra y una coálgebra sobre $\Bbbk$ respectivamente. Supongamos que ambas son de dimensión finita. Entonces,*

*(i)* $\kappa_A : A \to A^{**}$ *es un isomorfismo de álgebras.*

*(ii)* $\kappa_C : C \to C^{**}$ *es un isomorfismo de coálgebras.*

*Demostración.* (i) Sean $x, y \in A$ y $\alpha \in A^*$. Pongamos $\Delta_A(\alpha) = \sum_i \alpha_{1i} \otimes \alpha_{2i}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\kappa_A(x) \star \kappa_A(y))(\alpha) &= \textstyle\sum_i \kappa_A(x)(\alpha_{1i})\kappa_A(y)(\alpha_{2i}) \\
&= \textstyle\sum_i \alpha_{1i}(x)\alpha_{2i}(y) && \text{(definición de } \kappa_A) \\
&= \alpha(xy) && \text{(definición de } \Delta_{A^*}) \\
&= \kappa_A(xy)(\alpha) && \text{(definición de } \kappa_A).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\kappa_A(1_A)(\alpha) = \alpha(1_A) = \varepsilon_{A^*}(\alpha)$.

(ii) Sea $c \in C$ y $\varphi, \psi \in C^*$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{C^*,C^*}((\Delta_{C^{**}} \circ \kappa_C)(c))(\varphi \otimes \psi) &= (\Phi_{C^*,C^*} \circ \Delta_{C^{**}})(\kappa_C(c))(\varphi \otimes \psi) \\
&= \kappa_C(c)(\varphi \star \psi) \\
&= (\varphi \star \psi)(c) \\
&= \varphi(c_{(1)})\psi(c_{(2)}) \\
&= \kappa_C(c_{(1)})(\varphi)\kappa_C(c_{(2)})(\psi) \\
&= \Phi_{C^*,C^*}(\kappa_C(c_{(1)}) \otimes \kappa_C(c_{(2)}))(\varphi \otimes \psi) \\
&= \Phi_{C^*,C^*}((\kappa_C \otimes \kappa_C) \circ \Delta(c))(\varphi \otimes \psi).
\end{aligned}$$

Como $\Phi_{C^*,C^*}$ es inyectiva, obtenemos la compatibilidad con la comultiplicación. Por otro lado,

$$(\varepsilon_{C^{**}} \circ \kappa_C)(c) = \varepsilon_{C^{**}}(\kappa_C(c)) = \kappa_C(c)(1_{C^*}) = 1_{C^*}(c) = \varepsilon_C(c).$$

$\square$

Nosotros sólo hemos definido la noción de coálgebra dual para álgebras de dimensión finita, puesto que es el caso que necesitaremos después. Pero hay que señalar que es posible definirla en general usando un espacio dual más pequeño: el llamado dual finito. Para un álgebra $A$, el dual finito se define como

$$A^\circ = \{\alpha \in A^* : \alpha(I) = 0 \text{ para algún ideal } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim A/I < \infty\}.$$

La aplicación dual de la multiplicación $\nabla^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ cumple $\nabla^*(A^\circ) \subset A^\circ \otimes A^\circ$ y se toma como comultiplicación $\nabla^*|_{A^\circ}$. La counidad se define igual que antes y no presenta ningún problema. Los detalles de esta construcción se puede consultar en [49, Section 2.5].

Más adelante usaremos el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.7.** *Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita y consideremos la coálgebra dual $A^*$. Un elemento $\alpha \in A^*$ es de tipo grupo si y sólo si $\alpha : A \to \Bbbk$ es un homomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Por la definición de la comultiplicación en $A^*$, se tiene que $\Delta(\alpha) = \sum_i \alpha_{1i} \otimes \alpha_{2i}$ si y sólo si $\alpha(xy) = \sum_i \alpha_{1i}(x)\alpha_{2i}(y)$ para todo $x, y \in A$. Además, $\alpha(1_A) = \varepsilon_{A^*}(\alpha)$ por la definición de counidad en $A^*$. Por otro lado, $\alpha$ es de tipo grupo si $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha$ y $\varepsilon_{A^*}(\alpha) = 1$. Y $\alpha$ es homomorfismo de álgebras si $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ y $\alpha(1_A) = 1$. De esto se deduce la afirmación. □

## 2.3. Comódulos

Al igual que hemos hecho antes con la definición de coálgebra, comenzaremos dando la definición usual de módulo para luego expresar sus propiedades a través de aplicaciones lineales y así definir la noción de comódulo de forma dual.

Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Recordemos que un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ es un $A$-módulo a derecha si existe una aplicación $M \times A \to M, (m, x) \mapsto mx$, a la que llamaremos acción, que cumple las siguientes propiedades para todo $m, m' \in M$ y $x, y \in A$:

(1) Pseudoasociatividad: $m(xy) = (mx)y$.

(2) Linealidad en $A$: $m(x + y) = mx + my$.

(3) Linealidad en $M$: $(m + m')x = mx + m'y$.

(4) Elemento neutro: $m1_A = m$.

De manera simétrica se define un $A$-módulo a izquierda. Usando el producto tensorial, podemos dar la siguiente definición equivalente:

Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ es un *$A$-módulo a derecha* si existe una aplicación lineal $\omega : M \otimes A \to M$ (acción) tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\nabla"] \arrow[d, "\omega\otimes id"'] & M \otimes A \arrow[d, "\omega"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\omega"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes \Bbbk \arrow[r, "id\otimes u"] \arrow[dr, "\cong"'] & M \otimes A \arrow[d, "\omega"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Considerando los diagramas duales llegamos a la noción de comódulo.

**Definición 2.3.1.** *Sea $C$ una coálgebra sobre $\Bbbk$. Un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ es un* $C$-comódulo a derecha *si existe una aplicación lineal $\rho : M \to M \otimes C$ (coacción) de forma que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & M \otimes C \arrow[d, "\rho\otimes id"] \\ M \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\cong"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ & M \otimes \Bbbk \end{tikzcd}$$

*Del mismo modo se define un $C$-comódulo a izquierda.*

A $\rho$ también la llamaremos aplicación estructura y escribiremos $\rho_M$ cuando aparezcan varias coacciones de comódulos distintos. También hablaremos del comódulo $(M, \rho)$ para especificar cuál es la coacción.

**Notación de Sweedler.** Al igual que para la comultiplicación, se usa una notación que hace más sencillo trabajar con la expresión $\rho(m) = \sum_i m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ para $m \in M$. Se escribe

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}.$$

La conmutatividad del diagrama izquierdo anterior entonces se expresaría como:

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)(1)} \otimes m_{(1)(2)} = m_{(0)(0)} \otimes m_{(0)(1)} \otimes m_{(1)}.$$

Y este elemento a su vez se escribe como

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}.$$

Se aumentaría el valor de los subíndices cuando se aplicase $\rho$ ó $\Delta$ a este elemento.

La conmutatividad del diagrama derecho anterior sería:

$$m = m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}).$$

Para comódulos a izquierda, se escribiría

$$\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$$

y utilizaríamos el mismo convenio, pero con subíndices negativos.

La dualidad también nos permite definir la noción de homomorfismo de comódulos. Sea $A$ un álgebra y $M$ y $N$ dos $A$-módulos a derecha. Recordemos que una aplicación lineal $f : M \to N$ es un homomorfismo de $A$-módulos si $f(ma) = f(m)a$ para todo $m \in M$ y $a \in A$. Podemos expresar esta condición mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \arrow[r, "f \otimes id"] \arrow[d, "\omega_M"'] & N \otimes A \arrow[d, "\omega_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Mediante el diagrama dual obtenemos la noción de homomorfismo de comódulos.

**Definición 2.3.2.** *Sea $C$ una coálgebra y $M$ y $N$ dos $C$-comódulos a derecha. Una aplicación lineal $f : M \to N$ es un* homomorfismo de comódulos *si el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M \otimes C \arrow[r, "f \otimes id"'] & N \otimes C
\end{tikzcd}$$

*De forma análoga se define un homomorfismo de $C$-comódulos a izquierda.*

Usando la notación de Sweedler, la conmutatividad del anterior diagrama se expresa como

$$f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = f(m)_{(0)} \otimes f(m)_{(1)}, \qquad \forall m \in M.$$

Denotaremos por *Comod*-$C$ a la categoría cuyos objetos son los $C$-comódulos a derecha y cuyos morfismos son los homomorfismos de comódulos. Para la versión a izquierda escribiremos $C$-*Comod*.

## 2.4. Comódulos y módulos racionales

En esta sección veremos que los comódulos sobre una coálgebra $C$ se corresponden con un tipo especial de módulos sobre el álgebra dual $C^*$: los racionales.

**Definición 2.4.1.** *Sea $C$ una coálgebra y $C^*$ su álgebra dual. Sea $M$ un $C^*$-módulo a izquierda. Diremos que $m \in M$ es* racional *si existe $\rho_m := \sum_{i=1}^r m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ tal que*

$$\varphi m = (id \otimes \varphi)(\rho_m) = \sum_{i=1}^r \varphi(c_i) m_i, \qquad \forall \varphi \in C^*. \tag{2.5}$$

Obsérvese que si $m$ es un elemento racional, entonces de la definición se sigue que $\rho_m$ es único con esta propiedad.

**Definición 2.4.2.** *Sea $M$ un $C^*$-módulo a izquierda. Definimos el* submódulo racional de $M$ *como*

$$Rat(M) = \{m \in M : m \text{ es racional}\}.$$

El siguiente resultado justifica la terminología «submódulo racional»:

**Proposición 2.4.3.** $Rat(M)$ *es un submódulo de $M$.*

*Demostración.* Probaremos en primer lugar que $Rat(M)$ es un subespacio de $M$. Sean $m, m' \in Rat(M)$ y $\alpha \in \Bbbk$. Existen $\rho_m = \sum_{i=1}^r m_i \otimes c_i$ y $\rho_{m'} = \sum_{i=1}^{r'} m'_i \otimes c'_i$ en $M \otimes C$ que cumplen (2.5). Tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi(m + m') &= \varphi m + \varphi m' = \sum_{i=1}^r \varphi(c_i) m_i + \sum_{i=1}^{r'} \varphi(c'_i) m'_i, \\
\varphi(\alpha m) &= \alpha \varphi(m) = \alpha \sum_{i=1}^r \varphi(c_i) m_i = \sum_{i=1}^r \varphi(c_i) \alpha m_i, \qquad \forall \varphi \in C^*.
\end{aligned}$$

Así, $m + m' \in Rat(M)$ con $\rho_{m+m'} = \rho_m + \rho_{m'}$ y $\alpha m \in Rat(M)$ con $\rho_{\alpha m} = \alpha \rho_m$.

Veamos ahora que $Rat(M)$ es cerrado bajo la acción de $C^*$. Sea $\psi \in C^*$. Entonces,

$$\varphi(\psi m) = (\varphi \star \psi) m = \sum_{i=1}^r (\varphi \star \psi)(c_i) m_i = \sum_{i=1}^r \varphi(c_{i(1)}) \psi(c_{i(2)}) m_i.$$

Esto nos dice que $\psi m$ es un elemento racional con $\rho_{\psi m} = \sum_{i=1}^{r} \psi(c_{i(2)})m_i \otimes c_{i(1)}$.
$\square$

Recordemos que, para un álgebra $A$, un $A$-módulo a izquierda $M$ se dice *localmente finito* si todo submódulo cíclico de $M$ es de dimensión finita.

**Proposición 2.4.4.** *Sea $M$ un $C^*$-módulo a izquierda. Entonces,*

*(i) $Rat(M)$ es un $C^*$-submódulo de $M$ localmente finito.*

*(ii) $Rat(N) = Rat(M) \cap N$ para todo submódulo $N$ de $M$.*

*(iii) Si $f : M \to M'$ es un homomorfismo de $C^*$-módulos, entonces*

$$f(Rat(M)) \subseteq Rat(M').$$

*Demostración.* (i) Sea $m \in Rat(M)$. Tomamos $\rho_m = \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ tal que $\varphi m = \sum_{i=1}^{r} \varphi(c_i)m_i$ para todo $\varphi \in C^*$. Obsérvese que $C^*m$ está incluido en el subespacio generado por $\{m_1, \dots, m_r\}$, que es de dimensión finita.

(ii) Sea $n \in Rat(N)$. Tomamos $\rho_n = \sum_{i=1}^{r} n_i \otimes c_i \in N \otimes C$ tal que $\varphi n = \sum_{i=1}^{r} \varphi(c_i)n_i$ para todo $\varphi \in C^*$. Como $N \subseteq M$, tenemos $n \in Rat(M) \cap N$. Para la otra inclusión, sea $m \in Rat(M) \cap N$. Tomamos el correspondiente $\rho_m := \sum_{i=1}^{r} m_i \otimes c_i \in M \otimes C$ y lo escribimos de forma que el conjunto $\{c_i\}_{i=1}^{r}$ sea linealmente independiente. Para cada $i$ existe $\varphi_i \in C^*$ tal que $\varphi_i(c_j) = \delta_{ij}$. Entonces,

$$m_j = \sum_{i=1}^{r} \varphi_j(c_i)m_i = \varphi_j m.$$

Como $N$ es submódulo, $\varphi_j m \in N$ y así pues $m_j \in N$. De aquí, $\rho_m \in N \otimes C$ y por tanto $m \in Rat(N)$.

(iii) Sea $m \in Rat(M)$. Calculamos:

$$\varphi f(m) = f(\varphi m) = f\Big(\sum_{i=1}^{r} \varphi(c_i)m_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(c_i)f(m_i).$$

Tomamos $\rho_{f(m)} = \sum_{i=1}^{r} f(m_i) \otimes c_i \in M' \otimes C$ y así $f(m) \in Rat(M')$.
$\square$

**Definición 2.4.5.** *Diremos que un $C^*$-módulo a izquierda $M$ es racional si $M = Rat(M)$.*

Denotaremos por $Rat(C^*\text{-}Mod)$ a la subcategoría plena de $C^*\text{-}Mod$ formada por los módulos racionales.

**Teorema 2.4.6.** *Sea $C$ una coálgebra.*

*(i) Si $N$ es un $C$-comódulo a derecha, entonces $N$ es un $C^*$-módulo racional a izquierda con acción*

$$\varphi \cdot n = (id \otimes \varphi)(\rho(n)) = \varphi(n_{(1)})n_{(0)}, \qquad \forall \varphi \in C^*, n \in N. \tag{2.6}$$

*(ii) Si $M$ es un $C^*$-módulo a izquierda racional, entonces $M$ es un $C$-comódulo a derecha con coacción $\rho$ definida por $\rho(m) = \rho_m$ para cada $m \in M$.*

*(iii) Si $f : N \to N'$ es un homomorfismo de $C$-comódulos a derecha, entonces $f$ es un homomorfismo de $C^*$-módulos a izquierda.*

*(iv) Si $g : M \to M'$ es un homomorfismo de $C^*$-módulos a izquierda racionales, entonces $g$ es un homomorfismo de $C$-comódulos a derecha.*

*La dos asignaciones anteriores establecen un isomorfismo entre la categoría de $C^*$-módulos racionales izquierda y la categoría de $C$-comódulos a derecha.*

*Demostración.* (i) Comprobamos que (2.6) dota a $N$ de estructura de $C^*$-módulo:

- Axioma 1: Linealidad en $C^*$. Sean $\varphi, \psi \in C^*$ y $n \in N$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi) \cdot n &= (\varphi + \psi)(n_{(1)})n_{(0)} && \text{(def. de acción)} \\ &= [\varphi(n_{(1)}) + \psi(n_{(1)})]n_{(0)} \\ &= \varphi(n_{(1)})n_{(0)} + \psi(n_{(1)})n_{(0)} \\ &= \varphi \cdot n + \psi \cdot n && \text{(def. de acción).} \end{aligned}$$

- Axioma 2: Linealidad en $N$. Sean $n, n' \in N$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\varphi \cdot (n + n') \\ &\quad = (id \otimes \varphi)(\rho(n + n')) && \text{(def. de acción)} \\ &\quad = (id \otimes \varphi)(\rho(n)) + (id \otimes \varphi)(\rho(n')) && \text{(linealidad de } \varphi \text{ y } \rho) \\ &\quad = \varphi \cdot n + \varphi \cdot n' && \text{(def. de acción).} \end{aligned}$$

- Axioma 3: Pseudoasociatividad. Tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi \cdot (\psi \cdot n) &= \psi(n_{(1)})(\varphi \cdot n_{(0)}) && \text{(def. de acción y linealidad)} \\ &= \psi(n_{(1)})\varphi(n_{(0)(1)})n_{(0)(0)} && \text{(def. de acción)} \\ &= \psi(n_{(1)(2)})\varphi(n_{(1)(1)})n_{(0)(0)} && (N \text{ comódulo a dcha.}) \\ &= (\varphi \star \psi)(n_{(1)})n_{(0)} && \text{(definición de } \star) \\ &= (\varphi \star \psi) \cdot n && \text{(def. de acción).} \end{aligned}$$

- Axioma 4: Unidad. Tenemos:

$$\varepsilon \cdot n = \varepsilon(n_{(1)})n_{(0)} = n.$$

Es claro que $N$ es racional con esta acción.

(ii) Para $m \in M$ pongamos $\rho_m = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Entonces, $\varphi m = \varphi(m_{(1)})m_{(0)}$ para todo $\varphi \in C^*$. La linealidad de la acción (y de los elementos de $C^*$) implica que $\rho : M \to M \otimes C, m \mapsto \rho_m$ es lineal. La igualdad

$$m_{(0)(0)} \otimes m_{(0)(1)} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes m_{(1)(1)} \otimes m_{(1)(2)}.$$

es equivalente a

$$m_{(0)(0)}\varphi(m_{(0)(1)})\psi(m_{(1)}) = m_{(0)}\varphi(m_{(1)(1)})\psi(m_{(1)(2)}), \qquad \forall \varphi, \psi \in C^*.$$

Esta se obtiene como en el cálculo anterior. Y lo mismo para la counidad.

(iii) Dados $\varphi \in C^*$ y $n \in N$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(\varphi \cdot n) &= f(\varphi(n_{(1)})n_{(0)}) && \text{(por (2.6))} \\ &= \varphi(n_{(1)})f(n_{(0)}) && \text{(linealidad)} \\ &= \varphi(f(n)_{(1)})f(n)_{(0)} && (f \text{ hom. comódulos}) \\ &= \varphi \cdot f(n) && \text{(por (2.6))}. \end{aligned}$$

(iv) Con notación como en (ii), tenemos que demostrar la igualdad

$$g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = g(m)_{(0)} \otimes g(m)_{(1)}, \qquad \forall m \in M.$$

Esto es equivalente a

$$\varphi(m_{(1)})g(m_{(0)}) = \varphi(g(m)_{(1)})g(m)_{(0)}, \qquad \forall m \in M, \varphi \in C^*.$$

El lado izquierdo es $g(\varphi m)$ y el lado derecho $\varphi g(m)$, que son iguales por hipótesis.

Finalmente, si partimos de un $C$-comódulo a derecha $N$ con coacción $\rho$, lo convertimos en un $C^*$-módulo a izquierda racional como en (i) y este lo convertimos en un $C$-comódulo a derecha como en (ii), obtenemos $N$ con la misma coacción $\rho$. Lo mismo ocurre a nivel de morfismos. El argumento es análogo si partimos de $C^*$-módulos a izquierda racionales y morfismos entre ellos. Esto nos da el isomorfismo entre las categorías $C$-$Comod$ y $Rat(C^*$-$Mod)$.

□

El álgebra dual $C^*$ la podemos considerar como un $C^*$-módulo a izquierda o derecha. Escribiremos $Rat_l(C^*)$ para el submódulo racional en el primer caso y $Rat_r(C^*)$ en el segundo.

## 2.5. Álgebras de Hopf

En esta sección introducimos la estructura de álgebra de Hopf inspirándonos en el caso del álgebra de las funciones representativas sobre un grupo.

H. Hopf
1894-1971

Recordemos primero que si $A$ y $B$ son álgebras, entonces el producto tensorial $A \otimes B$ es un álgebra con la multiplicación realizada componente a componente; es decir, $\nabla_{A\otimes B} := (\nabla_A \otimes \nabla_B) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_B)$. El elemento identidad es $1_{A\otimes B} := 1_A \otimes 1_B$. Del mismo modo, si $C$ y $D$ son coálgebras, entonces $C \otimes D$ es una coálgebra con comultiplicación $\Delta_{C\otimes D} := (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ y counidad $\varepsilon_{C\otimes D} := \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$.

**Definición 2.5.1.** *Un espacio vectorial $H$ sobre $\Bbbk$ es un* álgebra de Hopf *si:*

*(i) $H$ es un álgebra con unidad $1_H$.*

*(ii) $H$ es una coálgebra con comultiplicación $\Delta$ y counidad $\varepsilon$.*

*(iii) $\Delta$ y $\varepsilon$ son homomorfismos de álgebras.*

*(iv) Existe una aplicación lineal $S : H \to H$, llamada* antípoda*, tal que*

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H, \qquad h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H, \qquad \forall h \in H. \tag{2.7}$$

Es natural preguntarse por qué no se pide en la definición una propiedad dual a (iii) para la multiplicación y la unidad. El siguiente resultado da la respuesta:

**Proposición 2.5.2.** *Sea $H$ un $\Bbbk$-espacio vectorial de modo que $(H, \nabla, u)$ es un álgebra y $(H, \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $\Delta$ y $\varepsilon$ son homomorfismos de álgebras.*

*(ii) $\nabla$ y $u$ son homomorfismos de coálgebras.*

*Demostración.* Obsérvese que $\nabla$ y $u$ son homomorfismo de coálgebras si y sólo si se cumple:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \Delta_H \circ \nabla = (\nabla \otimes \nabla) \circ \Delta_{H\otimes H}; & (3)\ \Delta_H \circ u = (u \otimes u) \circ \Delta_{\Bbbk}; \\ (2)\ \varepsilon_H \circ \nabla = \varepsilon_{H\otimes H}; & (4)\ \varepsilon_H \circ u = \varepsilon_{\Bbbk}. \end{array}$$

Escribiendo estas condiciones con elementos, tenemos:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \Delta(hh') = h_{(1)}h'_{(1)} \otimes h_{(2)}h'_{(2)} = \Delta(h)\Delta(h'); & (3)\ \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H; \\ (2)\ \varepsilon(hh') = \varepsilon(h)\varepsilon(h'); & (4)\ \varepsilon(1_H) = 1. \end{array}$$

Esto significa precisamente que $\Delta$ y $\varepsilon$ son homomorfismos de álgebras. $\square$

Existe una forma más conceptual de interpretar la antípoda que resulta muy útil a la hora de demostrar propiedades sobre ella. Es la siguiente: se puede comprobar fácilmente que el espacio $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H,H)$ es un álgebra con multiplicación dada por el llamado *producto convolución*, que se define como:

$$(f \star g)(h) = f(h_{(1)})g(h_{(2)}), \qquad \forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H,H), h \in H.$$

El elemento unidad es $\varepsilon(-)1_H$. Entonces, la condición (2.7) significa que $S$ es el inverso, para el producto $\star$, de la aplicación identidad en $H$.

Antes de ver varios ejemplos de álgebras de Hopf, deducimos algunas propiedades de la antípoda:

**Proposición 2.5.3.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf con antípoda $S$. Entonces,*

*(i) $S$ es un antihomomorfismo de álgebras, es decir:*

$$S(1_H) = 1_H \quad y \quad S(hh') = S(h)S(h'), \qquad \forall h, h' \in H.$$

*(ii) $S$ es un antihomomorfismo de coálgebras, es decir:*

$$\varepsilon \circ S = \varepsilon \quad y \quad S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} = S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}), \qquad \forall h \in H.$$

*Demostración.*

(i) Como $\Delta$ y $\varepsilon$ son homomorfismos de álgebras, tenemos $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ y $\varepsilon(1_H) = 1$. Entonces, $S(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H$. De aquí, $S(1_H) = 1_H$. La otra condición queda establecida mediante el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
S(hh') &= S((hh')_{(1)})\varepsilon((hh')_{(2)}) && \text{(def. de } \varepsilon \text{ y linealidad)}\\
&= S(h_{(1)}h'_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})\varepsilon(h'_{(2)}) && (\Delta \text{ y } \varepsilon \text{ hom. álgebras})\\
&= S(h_{(1)}h'_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)})\varepsilon(h'_{(2)}) && \text{(definición de } S)\\
&= S(h_{(1)}h'_{(1)})h_{(2)}\varepsilon(h'_{(2)})S(h_{(3)}) && \\
&= S(h_{(1)}h'_{(1)})h_{(2)}h'_{(2)}S(h'_{(3)})S(h_{(3)}) && \text{(definición de } S)\\
&= S((h_{(1)}h'_{(1)})_{(1)})(h_{(1)}h'_{(1)})_{(2)}S(h'_{(2)})S(h_{(2)}) && (\Delta \text{ hom. álgebras})\\
&= \varepsilon(h_{(1)}h'_{(1)})S(h'_{(2)})S(h_{(2)}) && \text{(definición de } S)\\
&= \varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(h'_{(1)})S(h'_{(2)})S(h_{(2)}) && (\varepsilon \text{ hom. álgebras})\\
&= S(\varepsilon(h'_{(1)})h'_{(2)})S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) && \text{(linealidad de } S)\\
&= S(h')S(h) && \text{(definición de } \varepsilon).
\end{aligned}$$

(ii) Vemos primero que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon(S(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}))) && \text{(definición de } \varepsilon)\\
&= \varepsilon(S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)}) && \text{(linealidad de } \varepsilon \circ S)\\
&= \varepsilon(S(h_{(1)})h_{(2)}) && (\varepsilon \text{ hom. álgebras})\\
&= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) && \text{(definición de } S)\\
&= \varepsilon(h) && (\varepsilon(1_H) = 1).
\end{aligned}$$

Comprobamos la otra condición:

$$
\begin{aligned}
S(h)_{(1)} \otimes S(h)_{(2)} &= \Delta(S(h)) && \\
&= \Delta(S(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}))) && \text{(definición de } \varepsilon) \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(\varepsilon(h_{(2)})1_H \otimes 1_H) && \text{(linealidad)} \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(h_{(2)}S(h_{(3)}) \otimes 1_H) && \text{(definición de } S) \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(h_{(2)}S(\varepsilon(h_{(3)})h_{(4)}) \otimes 1_H) && \text{(definición de } \varepsilon) \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(h_{(2)}S(h_{(4)}) \otimes \varepsilon(h_{(3)})1_H) && \text{(linealidad de } S) \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(h_{(2)}S(h_{(5)}) \otimes h_{(3)}S(h_{(4)})) && \text{(definición de } \varepsilon) \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))(h_{(2)} \otimes h_{(3)})(S(h_{(5)}) \otimes S(h_{(4)})) && \\
&= \Delta(S(h_{(1)}))\Delta(h_{(2)})(S(h_{(4)}) \otimes S(h_{(3)})) && \\
&= \Delta(S(h_{(1)})h_{(2)})(S(h_{(4)}) \otimes S(h_{(3)})) && (\Delta \text{ hom. álg.}) \\
&= \Delta(\varepsilon(h_{(1)})1_H)(S(h_{(3)}) \otimes S(h_{(2)})) && \text{(definición de } S) \\
&= \varepsilon(h_{(1)})(S(h_{(3)}) \otimes S(h_{(2)})) && \\
&= S(h_{(3)}) \otimes S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}) && \text{(linealidad de } S) \\
&= S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}) && \text{(definición de } \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Estos cálculos son un buen ejemplo de lo útil que resulta la notación de Sweedler. □

**Corolario 2.5.4.** *Si $H$ es un álgebra de Hopf conmutativa o coconmutativa, entonces $S^2 = id_H$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $H$ es conmutativa. Dado $h \in H$ tenemos $S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H$. Aplicamos $S$ a esta igualdad y que $S$ es antihomomorfismo de álgebras. Entonces, $\varepsilon(h)1_H = S(h_{(2)})S^2(h_{(1)})$. Usamos ahora que $H$ es conmutativa: $\varepsilon(h)1_H = S^2(h_{(1)})S(h_{(2)})$. Luego $S^2$ es inverso a izquierda de $S$ para el producto convolución. Como $id_H$ es el inverso de $S$, obtenemos $S^2 = id_H$.

Para la otra afirmación, al ser $H$ coconmutativa, se tiene $h_{(1)} \otimes h_{(2)} = h_{(2)} \otimes h_{(1)}$. Entonces, $\varepsilon(h)1_H = S(h_{(2)})S^2(h_{(1)}) = S(h_{(1)})S^2(h_{(2)})$ y se continúa como antes. □

**Proposición 2.5.5.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf con antípoda $S$. Si $g \in G(H)$, entonces $g$ es invertible y $S(g) = g^{-1}$.*

*Demostración.* Como $g \in G(H)$, tenemos $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$. Por la definición de antípoda, $S(g)g = gS(g) = \varepsilon(g)1_H = 1_H$. Luego $g$ es invertible y $S(g) = g^{-1}$. □

**Corolario 2.5.6.** *En un álgebra de Hopf $H$ el conjunto $G(H)$ es un grupo.*

*Demostración.* Dado $g \in G(H)$, por la proposición anterior, existe $g^{-1}$. Entonces,

$$1_H \otimes 1_H = \Delta(1_H) = \Delta(gg^{-1}) = \Delta(g)\Delta(g^{-1}) = (g \otimes g)\Delta(g^{-1}).$$

Así, $\Delta(g^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1}$ y, por tanto, $g^{-1} \in G(H)$. Por otro lado, para $h \in G(H)$, tenemos:

$$\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh.$$

De esto, $gh \in G(H)$. □

**Ejemplos 2.5.7.**

1. Dado un grupo $G$, el álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ es un álgebra de Hopf con comultiplicación, counidad y antípoda dadas por:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1 \qquad \text{y} \qquad S(g) = g^{-1}, \qquad \forall g \in G.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $\omega \in \Bbbk$ una raíz primitiva $n$-ésima de la unidad. El *álgebra de Taft* $T_n(\omega)$ está generada sobre $\Bbbk$ por $u$ y $x$ sujetas a las relaciones:

$$u^n = 1, \qquad x^n = 0 \qquad \text{y} \qquad ux = \omega xu. \tag{2.8}$$

E. Taft
1931 -

Su comultiplicación, counidad y antípoda están definidas por:

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= u \otimes u, & \Delta(x) &= x \otimes 1 + u \otimes x, \\ \varepsilon(u) &= 1, & \varepsilon(x) &= 0, \\ S(u) &= u^{n-1}, & S(x) &= -u^{n-1}x. \end{aligned}$$

Es necesario aclarar varios puntos para afirmar que $T_n(\omega)$ es un álgebra de Hopf. Primero, puesto que $T_n(\omega)$ está definida por generadores y relaciones, basta definir $\Delta, \varepsilon$ y $S$ sobre los generadores y extenderlas multiplicativamente a un homomorfismo de álgebras. En el caso de $S$, a un antihomomorfismo de álgebras. Esto funciona siempre y cuando se respeten las relaciones (2.8). El punto más delicado de comprobar es que $\Delta(x)^n = 0$. Para ello se necesita la fórmula del binomio cuántico, que recordamos a continuación.

Sean $j, k$ y $m$ números naturales con $j \leq k \leq m$. Sea $q \in \Bbbk$ no nulo. Los siguientes tres elementos se llaman *$q$-número, $q$-factorial y $q$-coeficiente binomial* respectivamente:

$$(j)_q = \sum_{i=0}^{j-1} q^i, \qquad (k)!_q = \prod_{j=1}^{k} (j)_q \qquad \text{y} \qquad \binom{m}{k}_q = \frac{(m)!_q}{(k)!_q (m-k)!_q}.$$

Nótese que si $q$ es una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad, entonces $(n)_q = 0$ y por tanto $\binom{n}{k}_q = 0$ para todo $1 \leq k \leq n-1$. Los $q$-coeficientes binomiales cumplen la siguiente generalización de la identidad de Pascal:

$$\binom{m+1}{k}_q = q^k \binom{m}{k}_q + \binom{m}{k-1}_q.$$

También tenemos la siguiente generalización de la Fórmula del Binomio de Newton:

**Lema 2.5.8** (Fórmula binomial cuántica)**.** *Sea $A$ un álgebra sobre $\Bbbk$ y $q \in \Bbbk$ no nulo. Sean $a, b \in A$ tal que $ab = qba$. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}_q b^i a^{m-i}.$$

La comprobación de que $\Delta(x)^n = 0$ sería la siguiente. En nuestro caso tomamos $a = x \otimes 1$ y $b = u \otimes x$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(x)^n &= (x \otimes 1 + u \otimes x)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_\omega (u \otimes x)^i (x \otimes 1)^{n-i} \\ &= (u \otimes x)^n + (x \otimes 1)^n \\ &= u^n \otimes x^n + x^n \otimes 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Nota 2.5.9.** *El orden de la antípoda en $T_n(\omega)$ es $2n$. Este hecho fue importante en su momento pues proporcionaba una familia de álgebras de Hopf con antípoda de orden finito, pero no acotado. Compárese con $S^2 = id$ del caso conmutativo o coconmutativo.*

A lo largo del trabajo irán apareciendo otros ejemplos de álgebras de Hopf. A partir de un álgebra de Hopf se pueden producir otras considerando la multiplicación o comultiplicación opuesta. Obsérvese que si $H$ es un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva $S$, entonces $H^{op}$ y $H^{cop}$ son álgebras de Hopf con antípoda $S^{-1}$. Y $H^{op,cop}$ es un álgebra de Hopf con antípoda $S$ (en este caso no se necesita la biyectividad).

Seguidamente definimos la noción de homomorfismo de álgebras de Hopf. Véase el caso de $\mathcal{R}(G)$ en las páginas 42 y 43.

**Definición 2.5.10.** *Sean $H$ y $K$ álgebras de Hopf. Una aplicación lineal $f : H \to K$ es un* homomorfismo de álgebras de Hopf *si $f$ es un homomorfismo de álgebras, de coálgebras y $f \circ S_H = S_K \circ f$.*

Antes hemos visto que, mediante la dualidad en espacios vectoriales, la estructura de álgebra pasa a coálgebra y la de coálgebra a álgebra. La estructura de álgebra de Hopf es autodual, en el siguiente sentido:

**Proposición 2.5.11.** *Si $H$ es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces $H^*$ es también un álgebra de Hopf. Además, la aplicación natural $\kappa_H : H \to H^{**}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.*

*Demostración.* Las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.3 nos dan que $H^*$ es un álgebra y una coálgebra. Recordemos que $\Delta_{H^*} = \Phi_{H,H}^{-1} \circ \nabla_H^*$. Como $H$ es álgebra de Hopf, $\nabla_H$ es un homomorfismo de coálgebras, y por tanto $\nabla_H^*$ es un homomorfismo de álgebras.

Si probamos que $\Phi_{H,H}$ es un homomorfismo de álgebras, obtendremos que $\Delta_{H^*}$ también lo es. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in H^*$ y $h, h' \in H$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{H,H}\big((\varphi_1 \otimes \psi_1) \star (\varphi_2 \otimes \psi_2)\big)(h \otimes h') \\
&\quad = \Phi_{H,H}\big((\varphi_1 \star \varphi_2) \otimes (\psi_1 \star \psi_2)\big)(h \otimes h') \\
&\quad = (\varphi_1 \star \varphi_2)(h)(\psi_1 \star \psi_2)(h') && (\text{def. de } \Phi_{H,H}) \\
&\quad = \varphi_1(h_{(1)})\varphi_2(h_{(2)})\psi_1(h'_{(1)})\psi_2(h'_{(2)}) && (\text{def. de } \star \text{ en } H^*) \\
&\quad = \varphi_1(h_{(1)})\psi_1(h'_{(1)})\varphi_2(h_{(2)})\psi_2(h'_{(2)}) \\
&\quad = \Phi_{H,H}(\varphi_1 \otimes \psi_1)(h_{(1)} \otimes h'_{(1)})\Phi_{H,H}(\varphi_2 \otimes \psi_2)(h_{(2)} \otimes h'_{(2)}) && (\text{def. de } \Phi_{H,H}) \\
&\quad = \Phi_{H,H}(\varphi_1 \otimes \psi_1)((h \otimes h')_{(1)})\Phi_{H,H}(\varphi_2 \otimes \psi_2)((h \otimes h')_{(2)}) && (\text{def. de } \Delta_{H\otimes H}) \\
&\quad = \big(\Phi_{H,H}(\varphi_1 \otimes \psi_1) \star \Phi_{H,H}(\varphi_2 \otimes \psi_2)\big)(h \otimes h') && (\text{def. de } \star \text{ en } (H \otimes H)^*).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, se tiene:

$$\Phi_{H,H}(1_{H^*\otimes H^*})(h \otimes h') = \Phi_{H,H}(\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H)(h \otimes h') = \varepsilon_H(h)\varepsilon_H(h') = 1_{(H\otimes H)^*}(h \otimes h').$$

Que $\varepsilon_{H^*}$ es homomorfismo de álgebras se sigue de que $\varepsilon_{H^*} = u_H^*$ y $u_H^*$ es homomorfismo de álgebras porque $u_H$ lo es de coálgebras (Proposición 2.2.3).

Sólo resta probar la existencia de la antípoda. Veamos que $S^*$ es la antípoda para $H^*$. Sea $\varphi \in H^*$ y $h \in H$. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(S^*(\varphi_{(1)}) \star \varphi_{(2)})(h) &= S^*(\varphi_{(1)})(h_{(1)})\varphi_{(2)}(h_{(2)}) && (\text{definición de } \star) \\
&= \varphi_{(1)}(S(h_{(1)}))\varphi_{(2)}(h_{(2)}) \\
&= \varphi(S(h_{(1)})h_{(2)}) && (\text{definición de } \Delta_{H^*}) \\
&= \varphi(\varepsilon_H(h)1_H) && (\text{definición de } S) \\
&= \varphi(1_H)\varepsilon_H(h) && (\text{linealidad de } \varphi) \\
&= \varepsilon_{H^*}(\varphi)1_{H^*}(h) && (\text{definición de } \varepsilon_{H^*} \text{ y } 1_{H^*}).
\end{aligned}
$$

El caso $\varphi_{(1)} \star S^*(\varphi_{(2)}) = \varepsilon_{H^*}(\varphi)1_{H^*}$ es totalmente análogo.

Para probar la segunda afirmación, recordemos que, por la Proposición 2.2.6, $\kappa_H$ es isomorfismo de álgebras y de coálgebras. Veamos pues que $\kappa_H \circ S = S_{H^{**}} \circ \kappa_H$. Dados $h \in H$ y $\varphi \in H^*$ calculamos:

$$
\begin{aligned}
[S_{H^{**}} \circ \kappa_H(h)](\varphi) &= [\kappa_H(h)](S^*(\varphi)) \\
&= (S^*(\varphi))(h) \\
&= \varphi(S(h)) \\
&= [\kappa_H(S(h))](\varphi) \\
&= [\kappa_H \circ S(h)](\varphi).
\end{aligned}
$$

□

## 2.6. Integrales

La noción de integral para un álgebra de Hopf fue introducida por Sweedler en [59] mediante la condición (1.13) obtenida para la invarianza de la integral de Haar en el álgebra de Hopf de las funciones representativas sobre un grupo compacto.

**Definición 2.6.1.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf sobre un cuerpo $\Bbbk$. Una aplicación lineal $\mu : H \to \Bbbk$ es una* integral a derecha *si cumple:*

$$\mu(h_{(1)})h_{(2)} = \mu(h)1_H, \qquad \forall h \in H. \tag{2.9}$$

*Similarmente, una aplicación lineal $\lambda : H \to \Bbbk$ es una* álgebra de Hopf!integral a izquierda *si cumple:*

$$h_{(1)}\lambda(h_{(2)}) = \lambda(h)1_H, \qquad \forall h \in H. \tag{2.10}$$

La condición (2.9) significa que $\mu$ es un homomorfismo de comódulos a derecha, donde $H$ es un $H$-comódulo a derecha a través de la comultiplicación y $\Bbbk$ con la estructura trivial de $H$-comódulo, es decir, $\rho(1) = 1 \otimes 1_H$. Similarmente a izquierda.

Denotaremos por $\int_r(H)$ (resp. $\int_l(H)$) al espacio de todas las integrales a derecha (resp. izquierda) sobre $H$. Nótese que la aplicación nula es una integral a derecha e izquierda. *En adelante, cuando digamos que un álgebra de Hopf tiene una integral, entenderemos que es una integral no nula.*

**Ejemplos 2.6.2.**

1. Sea $G$ un grupo con elemento neutro $e$ y $\Bbbk[G]$ el álgebra de grupo. Es fácil ver que la aplicación $\lambda : \Bbbk[G] \to \Bbbk$ definida por $\lambda(g) = \delta_{g,e}$ para todo $g \in G$ es una integral a derecha e izquierda sobre $\Bbbk[G]$.

2. Consideremos el álgebra de Taft $T_n(\omega)$. Obsérvese que una base de ella es $\{x^i u^j : i, j = 0, \ldots, n-1\}$. Utilizando la Fórmula binomial cuántica se puede comprobar que la comultiplicación de un elemento de esta base es:

$$\Delta(x^i u^j) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}_q x^{i-k} u^{k+j} \otimes x^k u^j. \tag{2.11}$$

   Las aplicaciones $\mu$ y $\lambda$ siguientes son integrales a derecha e izquierda respectivamente sobre $T_n(\omega)$:

$$\mu(x^i u^j) = \delta_{i,n-1}\delta_{j,0} \qquad \text{y} \qquad \lambda(x^i u^j) = \delta_{i,n-1}\delta_{j,1}.$$

Sin embargo, no todas las álgebras de Hopf poseen integral, como se muestra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.6.3.** El $\Bbbk$-espacio vectorial $H$ con base $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un álgebra de Hopf con multiplicación

$$c_n c_m = \binom{n+m}{n} c_{n+m},$$

unidad $c_0$ y comultiplicación, counidad y antípoda

$$\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i \otimes c_{n-i}, \qquad \varepsilon(c_n) = \delta_{0,n} \qquad \text{y} \qquad S(c_n) = (-1)^n c_n.$$

Este álgebra de Hopf recibe el nombre de *álgebra de potencias divididas*. Veamos que no tiene integral. Supongamos que $\mu$ es una integral a derecha sobre $H$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, se tiene

$$\mu(c_n)c_0 = \sum_{i=0}^{n} \mu(c_i)c_{n-i}.$$

Por tanto $\sum_{i=0}^{n-1} \mu(c_i)c_{n-i} = 0$. La independencia lineal nos da $\mu(c_i) = 0$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Luego $\mu(c_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\mu = 0$.

Obsérvese que, usando el producto convolución en $H^*$, al evaluar (2.9) en $\varphi \in H^*$ obtenemos

$$\varphi(1_H)\mu(h) = \mu(h_{(1)})\varphi(h_{(2)}) = (\mu \star \varphi)(h), \qquad \forall h \in H.$$

Por tanto, (2.9) es equivalente a:

$$\mu \star \varphi = \varphi(1_H)\mu, \qquad \forall \varphi \in H^*. \tag{2.12}$$

Del mismo modo, (2.10) es equivalente a:

$$\varphi \star \lambda = \varphi(1_H)\lambda, \qquad \forall \varphi \in H^*. \tag{2.13}$$

Existe una relación entre las integrales y el submódulo racional de $H^*$:

**Proposición 2.6.4.** *El espacio $\int_r(H)$ es un ideal bilátero de $H^*$ y está contenido en $Rat_r(H^*)$.*

*Demostración.* Veamos primero que $\int_r(H)$ es un ideal bilátero. Sea $\mu \in \int_r(H)$ y $\varphi, \psi \in H^*$. Entonces,

$$(\mu \star \varphi) \star \psi = \mu \star (\varphi \star \psi) = (\varphi \star \psi)(1_H)\mu = \varphi(1_H)\psi(1_H)\mu = \psi(1_H)(\mu \star \varphi).$$

Luego $\mu \star \varphi \in \int_r(H)$ y $\int_r(H)$ es un ideal a derecha. Veamos que lo es a izquierda:

$$(\varphi \star \mu) \star \psi = \varphi \star (\mu \star \psi) = \varphi \star (\psi(1_H)\mu) = \psi(1_H)(\varphi \star \mu).$$

Finalmente probamos que $\mu \in Rat_r(H^*)$. Hemos de ver que existe $\rho_\mu \in H \otimes H^*$ tal que $\mu \star \varphi = (\varphi \otimes id)(\rho_\mu)$ para todo $\varphi \in H^*$. Como $\mu \star \varphi = \varphi(1_H)\mu$ basta tomar $\rho_\mu = 1_H \otimes \mu$. $\square$

Cuando $H$ es de dimensión finita, la noción de integral admite una noción dual. Obsérvese que, en este caso, en las ecuaciones (2.12) y (2.13) el término $\varphi(1_H)$ sería $\varepsilon_{H^*}(\varphi)$. Llegamos así a la siguiente definición:

**Definición 2.6.5.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf de dimensión finita. Un elemento $\Gamma \in H$ es una* integral a derecha *si cumple:*

$$\Gamma h = \varepsilon(h)\Gamma, \qquad \forall h \in H. \tag{2.14}$$

*Similarmente, $\Lambda \in H$ es una* integral a izquierda *si cumple:*

$$h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda, \qquad \forall h \in H. \tag{2.15}$$

Para evitar confusiones, a las integrales que cumplen (2.9) y (2.10) las llamaremos integrales <u>sobre</u> $H$ y a las que cumplen (2.14) y (2.15) las llamaremos integrales <u>en</u> $H$. Al subespacio de integrales a derecha (resp. izquierda) en $H$ lo denotaremos por $I_r(H)$ (resp. $I_l(H)$).

**Nota 2.6.6.** *Las condiciones* (2.14) *y* (2.15) *tienen sentido en cualquier álgebra de Hopf, no necesariamente de dimensión finita. Sin embargo, se puede demostrar que si un álgebra de Hopf $H$ tiene una integral no nula en este sentido, entonces $H$ es de dimensión finita. Véase [21, Lemma 5.3.1(iii)].*

**Ejemplos 2.6.7.**

1. Sea $G$ un grupo finito. En el álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ el elemento $\sum_{g\in G} g$ es una integral a derecha e izquierda.

2. En el álgebra de Taft $T_n(\omega)$ los siguientes elementos son integrales a derecha e izquierda respectivamente:

$$\Gamma = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1}u^j \qquad \text{y} \qquad \Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{n-j}x^{n-1}u^j.$$

   Nótese que sería suficiente comprobar las condiciones (2.14) y (2.15) sobre los generadores $g$ y $x$ puesto que $\varepsilon$ es un homomorfismo de álgebras.

Como en el caso de la integral de Haar para grupos localmente compactos, se puede demostrar que las integrales sobre un álgebra de Hopf, si existen, son únicas salvo escalares. Nuestro siguiente objetivo será establecer este resultado. Para ello, necesitaremos una herramienta importante: los módulos de Hopf, que tratamos en la siguiente sección.

## 2.7. Módulos de Hopf

**Definición 2.7.1.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf. Diremos que $(M, \cdot, \rho)$ es un $H$-*módulo de Hopf a izquierda *si $(M, \cdot)$ es un $H$-módulo a izquierda, $(M, \rho)$ es un $H$-comódulo a izquierda y*

$$\rho(h \cdot m) = h_{(1)}m_{(-1)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}, \qquad \forall h \in H, m \in M. \tag{2.16}$$

*Similarmente, un $H$-*módulo de Hopf a derecha *$(M, \cdot, \rho)$ es un $H$-módulo a derecha $(M, \cdot)$ y un $H$-comódulo a derecha $(M, \rho)$ tal que*

$$\rho(m \cdot h) = m_{(0)} \cdot h_{(1)} \otimes m_{(1)}h_{(2)}, \qquad \forall h \in H, m \in M. \tag{2.17}$$

Si $M$ es un $H$-módulo a izquierda, entonces $H \otimes M$ también lo es, con acción $h \cdot (g \otimes m) = h_{(1)}g \otimes h_{(2)} \cdot m$ para todo $h, g \in H, m \in M$. Por otro lado, si $M$ es un $H$-comódulo a izquierda, entonces $H \otimes M$ también lo es, con coacción definida por $\rho_{H\otimes M}(h \otimes m) = h_{(1)}m_{(-1)} \otimes (h_{(2)} \otimes m_{(0)})$ para todo $h \in H, m \in M$. Obsérvese que la condición (2.16) significa que la coacción de $M$ es un homomorfismo de $H$-módulos a izquierda. Y también que la acción de $M$ es un homomorfismo de $H$-comódulos a izquierda.

**Ejemplo 2.7.2.** Para un espacio vectorial $V$, el espacio $H \otimes V$ tiene estructura de $H$-módulo de Hopf a izquierda con acción y coacción inducidas por la multiplicación y comultiplicación de $H$. Es decir, $h \cdot (g \otimes v) = hg \otimes v$ y $\rho_{H\otimes V}(h \otimes v) = h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \otimes v)$ para todo $h, g \in H, v \in V$.

El Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf, que demostraremos a continuación, afirma que todo módulo de Hopf es de esta forma. Para la demostración necesitaremos una definición y un lema previo.

**Definición 2.7.3.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf y $M$ un $H$-comódulo a izquierda con coacción $\rho : M \to H \otimes M$. Se define* el subespacio de elementos coinvariantes de $M$ *como*

$$M^{co(H)} = \{m \in M : \rho(m) = 1_H \otimes m\}.$$

**Lema 2.7.4.** *Sea $M$ un $H$-módulo de Hopf a izquierda. Definimos $P : M \to M$ como $P(m) = S(m_{(-1)}) \cdot m_{(0)}$ para cada $m \in M$. Entonces,*

*(i)* *Im* $P = M^{co(H)}$ *y* $P^2 = P$.

*(ii)* $P(h \cdot m) = \varepsilon(h)P(m)$ *para todo* $h \in H$.

*(iii)* $m_{(-1)} \cdot P(m_{(0)}) = m$.

*Demostración.* (i) Calculamos:

$$\begin{aligned}
\rho(P(m)) &= \rho\big(S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)}\big) && \\
&= (S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)})_{(-1)}\otimes (S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)})_{(0)} && \\
&= S(m_{(-1)})_{(1)}m_{(0)(-1)}\otimes S(m_{(-1)})_{(2)}\cdot m_{(0)(0)} && (M \text{ módulo de Hopf})\\
&= S(m_{(-1)(2)})m_{(0)(-1)}\otimes S(m_{(-1)(1)})\cdot m_{(0)(0)} && (S \text{ antihom. coálgebras})\\
&= S(m_{(-1)(2)})m_{(-1)(3)}\otimes S(m_{(-1)(1)})\cdot m_{(0)} && (\text{axioma comódulo})\\
&= \varepsilon(m_{(-1)(2)})1_H\otimes S(m_{(-1)(1)})\cdot m_{(0)} && (\text{definición de } S)\\
&= 1_H\otimes S(\varepsilon(m_{(-1)(2)})m_{(-1)(1)})\cdot m_{(0)} && (\text{linealidad})\\
&= 1_H\otimes S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)} && (\text{axioma comódulo})\\
&= 1_H\otimes P(m). &&
\end{aligned}$$

Por tanto, $\operatorname{Im} P \subseteq M^{co(H)}$. Para la otra inclusión, obsérvese que si $n \in M^{co(H)}$, entonces $P(n) = S(1_H)\cdot n = 1_H \cdot n = n$. Esto último prueba además que $P^2 = P$, pues $P(m) \in M^{co(H)}$ y así $P^2(m) = P(P(m)) = P(m)$.

(ii) Calculamos:

$$\begin{aligned}
P(h\cdot m) &= S((h\cdot m)_{(-1)})\cdot (h\cdot m)_{(0)} && \\
&= S(h_{(1)}m_{(-1)})\cdot (h_{(2)}\cdot m_{(0)}) && (M \text{ módulo de Hopf})\\
&= (S(h_{(1)}m_{(-1)})h_{(2)})\cdot m_{(0)} && (\text{axioma módulo})\\
&= (S(m_{(-1)})S(h_{(1)})h_{(2)})\cdot m_{(0)} && (S \text{ antihom. álgebras})\\
&= (S(m_{(-1)})\varepsilon(h)1_H)\cdot m_{(0)} && (\text{definición de } S)\\
&= \varepsilon(h)P(m). &&
\end{aligned}$$

(iii) Por último,

$$\begin{aligned}
m_{(-1)}\cdot P(m_{(0)}) &= m_{(-2)}\cdot (S(m_{(-1)})\cdot m_{(0)}) && \\
&= (m_{(-2)}S(m_{(-1)}))\cdot m_{(0)} && (\text{axioma módulo})\\
&= (m_{(-1)(1)}S(m_{(-1)(2)}))\cdot m_{(0)} && (\text{axioma comódulo})\\
&= (\varepsilon(m_{(-1)})1_H)\cdot m_{(0)} && (\text{definición de } S)\\
&= \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)} && (\text{axioma módulo})\\
&= m && (\text{axioma comódulo}).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.7.5** (Fundamental de los módulos de Hopf)**.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf y $M$ un $H$-módulo de Hopf a izquierda. Entonces, la aplicación*

$$\Phi : H\otimes M^{co(H)} \to M,\ \ h\otimes m \mapsto h\cdot m,$$

*es un isomorfismo de módulos de Hopf. Similarmente, si $M$ es un $H$-módulo de Hopf a derecha, la aplicación*

$$M^{co(H)}\otimes H \to M,\ \ m\otimes h \mapsto m\cdot h,$$

*es un isomorfismo de módulos de Hopf.*

*Demostración.* Probamos primero que es homomorfismo de $H$-módulos de Hopf.

- Compatibilidad con la estructura de módulo. Sea $h \in H$ y $g \otimes m \in H \otimes M^{co(H)}$. Entonces,

$$\Phi(h \cdot (g \otimes m)) = \Phi(hg \otimes m) = (hg) \cdot m = h \cdot (g \cdot m) = h \cdot \Phi(g \otimes m).$$

- Compatibilidad con la estructura de comódulo. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\rho_M(\Phi(g \otimes m)) &= \rho_M(g \cdot m) \\
&= (g \cdot m)_{(-1)} \otimes (g \cdot m)_{(0)} \\
&= g_{(1)} m_{(-1)} \otimes (g_{(2)} \cdot m_{(0)}) && (M \text{ módulo de Hopf}) \\
&= g_{(1)} \otimes g_{(2)} \cdot m && (m \in M^{co(H)}) \\
&= g_{(1)} \otimes \Phi(g_{(2)} \otimes m) \\
&= (id \otimes \Phi)\rho_{H \otimes M^{co(H)}}(g \otimes m).
\end{aligned}$$

A continuación comprobamos que es isomorfismo. Definimos

$$\Psi : M \to H \otimes M^{co(H)}, \ m \mapsto m_{(-1)} \otimes P(m_{(0)}). \tag{2.18}$$

Por el lema anterior, está bien definida. Ahora:

$$\begin{aligned}
\Phi(\Psi(m)) &= \Phi(m_{(-1)} \otimes P(m_{(0)})) \\
&= m_{(-1)} \cdot P(m_{(0)}) \\
&= m && (\text{Lema } 2.7.4(\text{iii})).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(\Phi(g \otimes m)) &= \Psi(g \cdot m) \\
&= (g \cdot m)_{(-1)} \otimes P((g \cdot m)_{(0)}) \\
&= g_{(1)} m_{(-1)} \otimes P(g_{(2)} \cdot m_{(0)}) && (M \text{ módulo de Hopf}) \\
&= g_{(1)} m_{(-1)} \otimes \varepsilon(g_{(2)}) P(m_{(0)}) && (\text{Lema } 2.7.4(\text{ii})) \\
&= g_{(1)} \varepsilon(g_{(2)}) m_{(-1)} \otimes P(m_{(0)}) && (\text{linealidad}) \\
&= g m_{(-1)} \otimes P(m_{(0)}) && (\text{axioma counidad}) \\
&= g \otimes P(m) && (m \in M^{co(H)}) \\
&= g \otimes m && (\text{Lema } 2.7.4(\text{i})).
\end{aligned}$$

La afirmación para módulos de Hopf a derecha se demuestra de manera similar.

□

## 2.8. Biyectividad de la antípoda y unicidad de la integral

En esta sección demostramos el importante teorema de unicidad de las integrales. Para ello, es necesario probar primero que en un álgebra de Hopf con integral la antípoda es biyectiva. La prueba usa el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf y la estructura de módulo de Hopf del submódulo racional del álgebra dual. Los coinvariantes resultan ser el espacio de integrales.

Sea $H$ un álgebra de Hopf. Recordemos que $H^*$ tiene estructura de $H$-bimódulo con acción a derecha e izquierda dadas por:

$$(\varphi \leftharpoonup h)(g) = \varphi(hg), \qquad (h \rightharpoonup \varphi)(g) = \varphi(gh), \qquad \forall g, h \in H, \varphi \in H^*. \tag{2.19}$$

Como la antípoda es un antihomomorfismo de álgebras, a través de ella podemos convertir todo $H$-módulo a izquierda en un $H$-módulo a derecha. Entonces, $H^*$ es un $H$-módulo a derecha con acción:

$$(\varphi \leftharpoondown h)(g) := (S(h) \rightharpoonup \varphi)(g) = \varphi(gS(h)), \qquad \forall g, h \in H, \varphi \in H^*. \tag{2.20}$$

Por otro lado, sabemos que $Rat_l(H^*)$ es un $H^*$-módulo racional a izquierda. Por el Teorema 2.4.6(ii), $Rat_l(H^*)$ tiene estructura de $H$-comódulo a derecha. Recordemos que, para $\varphi \in Rat_l(H^*)$, la coacción está definida por $\rho(\varphi) = \varphi_{(0)} \otimes \varphi_{(1)}$ tal que

$$\psi \star \varphi = \psi(\varphi_{(1)})\varphi_{(0)}, \qquad \forall \psi \in H^*. \tag{2.21}$$

Al igual que antes, como la antípoda es un antihomomorfismo de coálgebras, a través de ella podemos convertir todo $H$-comódulo a derecha en un $H$-comódulo a izquierda. Entonces, $Rat_l(H^*)$ es un $H$-comódulo a izquierda con coacción:

$$\rho^S : Rat_l(H^*) \to H \otimes Rat_l(H^*),\ \varphi \mapsto S(\varphi_{(1)}) \otimes \varphi_{(0)}. \tag{2.22}$$

**Proposición 2.8.1.** *El módulo racional $Rat_l(H^*)$ es un $H$-módulo de Hopf a derecha con estructura de módulo* (2.20) *y estructura de comódulo* (2.21).

*Demostración.* Comprobaremos que se cumple la siguiente igualdad:

$$\psi \star (\varphi \leftharpoondown h) = \psi(\varphi_{(1)}h_{(2)})(\varphi_{(0)} \leftharpoondown h_{(1)}), \qquad \forall h \in H, \psi \in H^*, \varphi \in Rat_l(H^*). \tag{2.23}$$

Esto implica que $\varphi \leftharpoondown h \in Rat_l(H^*)$, recuérdese (2.5), lo que da que $Rat_l(H^*)$ es un $H$-submódulo a derecha de $H^*$.

Teniendo en cuenta cómo está definida la coacción en $Rat_l(H^*)$, recuérdese (2.21), la anterior igualdad también implica:

$$(\varphi \leftharpoondown h)_{(0)} \otimes (\varphi \leftharpoondown h)_{(1)} = (\varphi_{(0)} \leftharpoondown h_{(1)}) \otimes \varphi_{(1)}h_{(2)}, \qquad \forall h \in H, \varphi \in Rat_l(H^*).$$

Esta es precisamente la condición de compatibilidad entre las estructuras de módulo y comódulo que define un módulo de Hopf.

Pasamos entonces a establecer la igualdad (2.23). Calculamos:

$$
\begin{aligned}
&\psi(\varphi_{(1)}h_{(2)})(\varphi_{(0)} \leftharpoondown h_{(1)})(g) \\
&\quad = \psi(\varphi_{(1)}h_{(2)})\varphi_{(0)}(gS(h_{(1)})) && \text{(definición de } \leftharpoondown) \\
&\quad = (h_{(2)} \rightharpoonup \psi)(\varphi_{(1)})\varphi_{(0)}(gS(h_{(1)})) && \text{(definición de } \rightharpoonup) \\
&\quad = ((h_{(2)} \rightharpoonup \psi) \star \varphi)(gS(h_{(1)})) && \text{(definición de } \rho) \\
&\quad = (h_{(2)} \rightharpoonup \psi)(g_{(1)}S(h_{(1)})_{(1)})\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)})_{(2)}) && \text{(definición de } \star) \\
&\quad = (h_{(2)} \rightharpoonup \psi)(g_{(1)}S(h_{(1)(2)}))\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)(1)})) && (S \text{ antihom. coálgebras}) \\
&\quad = (h_{(3)} \rightharpoonup \psi)(g_{(1)}S(h_{(2)}))\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)})) \\
&\quad = \psi(g_{(1)}S(h_{(2)})h_{(3)})\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)})) && \text{(definición de } \rightharpoonup) \\
&\quad = \psi(g_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})1_H)\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)})) && \text{(definición de } S) \\
&\quad = \psi(g_{(1)})\varphi(g_{(2)}S(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}))) && \text{(linealidad)} \\
&\quad = \psi(g_{(1)})\varphi(g_{(2)}S(h)) && \text{(axioma counidad)} \\
&\quad = \psi(g_{(1)})(\varphi \leftharpoondown h)(g_{(2)}) && \text{(definición de } \leftharpoondown) \\
&\quad = (\psi \star (\varphi \leftharpoondown h))(g) && \text{(definición de } \star).
\end{aligned}
$$

□

Describamos los coinvariantes de este módulo de Hopf:

**Lema 2.8.2.** *Consideremos $Rat_l(H^*)$ con la estructura de $H$-comódulo* (2.21)*. Entonces, $Rat_l(H^*)^{co(H)} = \int_l(H)$.*

*Demostración.* Por definición, $\varphi \in Rat_l(H^*)^{co(H)}$ si y sólo si $\rho(\varphi) = \varphi \otimes 1_H$. Evaluando esta expresión en $h \otimes \psi$, obtenemos $\varphi_{(0)}(h)\varphi_{(1)}(\psi) = \psi(1_H)\varphi(h)$. Por la definición de la coacción, $\varphi_{(0)}(h)\varphi_{(1)}(\psi) = (\psi \star \varphi)(h)$. Esto nos dice que $\varphi$ es una integral a izquierda. □

Como consecuencia obtenemos:

**Proposición 2.8.3.** *En un álgebra de Hopf con integral a izquierda la antípoda es inyectiva.*

*Demostración.* Sea $x \in H$ tal que $S(x) = 0$. Por la Proposición 2.8.1 y el Teorema 2.7.5, la aplicación

$$\Phi : Rat_l(H^*)^{co(H)} \otimes H \to Rat_l(H^*),\ \lambda \otimes h \mapsto \lambda \leftharpoondown h$$

es un isomorfismo. Tomemos $\lambda \neq 0$. Entonces,

$$\Phi(\lambda \otimes x)(g) = (\lambda \leftharpoondown x)(g) = \lambda(gS(x)) = 0, \qquad \forall g \in H.$$

Luego $\Phi(\lambda \otimes x) = 0$ y, como $\Phi$ es inyectiva y $\lambda \neq 0$, obtenemos $x = 0$.

□

Todo lo anterior nos da una primera caracterización de las álgebras de Hopf con integral.

**Corolario 2.8.4.** *Un álgebra de Hopf $H$ tiene una integral a izquierda si y sólo si $Rat_l(H^*) \neq 0$.*

**Nota 2.8.5.** *Si $\dim H < \infty$, entonces $Rat_l(H^*) = H^*$ y la inyectividad de $S$ implica la sobreyectividad. Además, puesto que $\dim H = \dim H^*$, tendríamos $\dim \int_l(H) = 1$. Esto probaría que un álgebra de Hopf de dimensión finita posee integral y ésta es única salvo escalares. El caso general requiere más trabajo.*

Consideremos ahora $Rat_l(H^*)$ con estructuras diferentes:

**Proposición 2.8.6.** *El módulo racional $Rat_l(H^*)$ es un $H$-módulo de Hopf a izquierda con estructura de módulo (2.19) y estructura de comódulo (2.22).*

*Demostración.* La afirmación es trivialmente cierta si $Rat_l(H^*) = 0$. Supongamos pues que $Rat_l(H^*) \neq 0$. Por el resultado anterior, $H$ tiene una integral a izquierda, y por la Proposición 2.8.3, la antípoda es inyectiva. Sea $S'$ una inversa a izquierda de $S$.

Comprobaremos que se cumple la siguiente igualdad para todo $h \in H, \psi \in H^*$ y $\varphi \in Rat_l(H^*)$:

$$(\psi \circ S) \star (h \rightharpoonup \varphi) = \psi(h_{(1)}S(\varphi_{(1)}))(h_{(2)} \rightharpoonup \varphi_{(0)}). \tag{2.24}$$

Reemplazando $\psi$ por $\psi \circ S'$ y teniendo en cuenta que $S' \circ S = id_H$ llegaríamos a:

$$\psi \star (h \rightharpoonup \varphi) = \psi(S'(h_{(1)}S(\varphi_{(1)})))(h_{(2)} \rightharpoonup \varphi_{(0)}).$$

Esto nos dice que $h \rightharpoonup \varphi \in Rat_l(H^*)$, lo que da que $Rat_l(H^*)$ es un $H$-submódulo a izquierda de $H^*$.

La igualdad (2.24) también implica:

$$S((h \rightharpoonup \varphi)_{(1)}) \otimes (h \rightharpoonup \varphi)_{(0)} = h_{(1)}S(\varphi_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \rightharpoonup \varphi_{(0)}), \qquad \forall h \in H, \varphi \in Rat_l(H^*).$$

Si recordamos cómo está definida la coacción (2.22), esto es precisamente la condición de compatibilidad entre las estructuras de módulo y comódulo en un módulo de Hopf.

Pasamos entonces a establecer (2.24). Sea $g \in H$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
&((\psi \circ S) \star (h \rightharpoonup \varphi))(g) \\
&\quad = (\psi \circ S)(g_{(1)})(h \rightharpoonup \varphi)(g_{(2)}) && \text{(definición de } \star\text{)} \\
&\quad = \psi(S(g_{(1)}))\varphi(g_{(2)}h) && \text{(definición de } \rightharpoonup\text{)} \\
&\quad = \psi(S(g_{(1)}))\varphi(g_{(2)}h_{(2)})\varepsilon(h_{(1)}) && \text{(axioma counidad)} \\
&\quad = \psi(\varepsilon(h_{(1)})S(g_{(1)}))\varphi(g_{(2)}h_{(2)}) \\
&\quad = \psi(h_{(1)}S(h_{(2)})S(g_{(1)}))\varphi(g_{(2)}h_{(3)}) && \text{(definición de } S\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\psi \leftharpoonup h_{(1)})(S(g_{(1)}h_{(2)}))\varphi(g_{(2)}h_{(3)}) && \text{(definición de } \leftharpoonup\text{)}\\
&= (\psi \leftharpoonup h_{(1)})(S((gh_{(2)})_{(1)}))\varphi((gh_{(2)})_{(2)}) &&\\
&= (((\psi \leftharpoonup h_{(1)}) \circ S) \star \varphi)(gh_{(2)}) && \text{(definición de } \star\text{)}\\
&= (((\psi \leftharpoonup h_{(1)}) \circ S)(\varphi_{(1)})\varphi_{(0)})(gh_{(2)}) && \text{(definición de } \rho\text{)}\\
&= \psi(h_{(1)}S(\varphi_{(1)}))\varphi_{(0)}(gh_{(2)}) && \text{(definición de } \leftharpoonup\text{)}\\
&= \big(\psi(h_{(1)}S(\varphi_{(1)}))(h_{(2)} \rightharpoonup \varphi_{(0)})\big)(g) && \text{(definición de } \rightharpoonup\text{).}
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.8.7.** *En un álgebra de Hopf con integral a izquierda la antípoda es biyectiva.*

*Demostración.* Antes hemos establecido la inyectividad. Nos queda probar la sobreyectividad. Tomemos $h \in H$ y $\lambda \in Rat_l(H^*)^{co(H)}$ no nulo. Por el Teorema 2.7.5, existe $\varphi \in Rat_l(H^*)$ tal que $h \otimes \lambda = \Psi(\varphi)$. Recordemos de (2.18) que

$$\Psi(\varphi) = \varphi_{(-1)} \otimes P(\varphi_{(0)}) = \varphi_{(-2)} \otimes (S(\varphi_{(-1)}) \rightharpoonup \varphi_{(0)}).$$

Tengamos en cuenta la estructura de módulo de Hopf sobre $Rat_l(H^*)$ de la Proposición 2.8.6. Entonces,

$$\begin{aligned}
h \otimes \lambda &= \Psi(\varphi) &&\\
&= \varphi_{(-2)} \otimes (S(\varphi_{(-1)}) \rightharpoonup \varphi_{(0)}) &&\\
&= \varphi_{(-1)(1)} \otimes (S(\varphi_{(-1)(2)}) \rightharpoonup \varphi_{(0)}) &&\\
&= S(\varphi_{(1)})_{(1)} \otimes (S(S(\varphi_{(1)})_{(2)}) \rightharpoonup \varphi_{(0)}) && \text{(por (2.22))}\\
&= S(\varphi_{(1)(2)}) \otimes (S(S(\varphi_{(1)(1)})) \rightharpoonup \varphi_{(0)}) && (S \text{ antihom. coálgebras})\\
&= S(\varphi_{(2)}) \otimes (S^2(\varphi_{(1)})) \rightharpoonup \varphi_{(0)}). &&
\end{aligned}$$

Sea $x \in H$ tal que $\lambda(x) \neq 0$. Evaluando en $x$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
h\lambda(x) &= S(\varphi_{(2)})(S^2(\varphi_{(1)}) \rightharpoonup \varphi_{(0)})(x) &&\\
&= S(\varphi_{(2)})\varphi_{(0)}(xS^2(\varphi_{(1)})) && \text{(definición de } \rightharpoonup\text{)}\\
&= S\big(\varphi_{(2)}\varphi_{(0)}(xS^2(\varphi_{(1)}))\big) && \text{(linealidad de } S\text{).}
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $h \in \operatorname{Im} S$. □

**Nota 2.8.8.** *Obsérvese la dualidad presente en la demostración. Cuando $S$ aparece en la estructura de módulo de $Rat_l(H^*)$ (Proposición 2.8.1) obtenemos la inyectividad y cuando aparece en la estructura de comódulo (Proposición 2.8.6) obtenemos la sobreyectividad.*

Una vez que sabemos que la antípoda es biyectiva, ya no es necesario distinguir entre integrales a derecha e izquierda.

**Corolario 2.8.9.** *Sea $\lambda \in \int_l(H)$ no nula. Entonces, $\lambda \circ S \in \int_r(H)$ y $\lambda \circ S \neq 0$. Similarmente, si $\mu \in \int_r(H)$, entonces $\mu \circ S^{-1} \in \int_l(H)$ y $\mu \circ S^{-1} \neq 0$. Como consecuencia, $S^*(\int_l(H)) = \int_r(H)$.*

*Demostración.* Sea $h \in H$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(\lambda \circ S)(h_{(1)})h_{(2)} &= \lambda(S(h_{(1)}))S^{-1}(S(h_{(2)})) && (S \text{ biyectiva})\\
&= \lambda(S(h)_{(2)})S^{-1}(S(h)_{(1)}) && (S \text{ antihom. coálgebras})\\
&= S^{-1}\big(\lambda(S(h)_{(2)})S(h)_{(1)}\big) &&\\
&= S^{-1}(\lambda(S(h))1_H) && (\lambda \in \textstyle\int_l(H))\\
&= (\lambda \circ S)(h)1_H && (S^{-1}(1_H) = 1_H).
\end{aligned}$$

Como $S$ es biyectiva, $S^*$ es biyectiva y $S^*(\lambda) = \lambda \circ S \neq 0$.

La afirmación para la integral a derecha se demuestra análogamente o bien se aplica la anterior a $H^{cop}$. La antípoda en $H^{cop}$ es $S^{-1}$ y una integral a derecha (resp. izquierda) sobre $H$ es una integral a izquierda (resp. derecha) sobre $H^{cop}$. □

**Nota 2.8.10.** *Si aplicamos el corolario anterior a $H^{op}$, cuya antípoda es $S^{-1}$, obtendríamos la misma afirmación cambiando $S$ por $S^{-1}$.*

Ya tenemos todos los requisitos necesarios para demostrar el Teorema de Unicidad de las Integrales.

**Teorema 2.8.11** (Unicidad de integrales)**.** *La dimensión del espacio de integrales a izquierda (derecha) sobre un álgebra de Hopf es menor o igual que uno.*

*Demostración.* Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \int_l(H)$ con $\lambda_2 \neq 0$. Vamos a demostrar que $\lambda_1$ es un múltiplo escalar de $\lambda_2$. Por el corolario anterior, $\mu := \lambda_2 \circ S \in \int_r(H)\backslash\{0\}$. En primer lugar veremos que para cualquier $h \in H$ existe $g \in H$ tal que $\lambda_1(xh) = \lambda_2(xg)$ para todo $x \in H$.

Tomamos $l, m \in H$ tales que $\mu(l) = \lambda_2(m) = 1$. Esto es posible puesto que $\mu$ y $\lambda_2$ son no nulas y podemos reescalar si es necesario. Pongamos $e = hl_{(1)}\lambda_1(S(l_{(2)}))$ y $g = \mu(S^{-1}(m_{(1)}))em_{(2)}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(xh) &= \mu(l)\lambda_1(xh) && (\mu(l) = 1)\\
&= \mu(\lambda_1(xh)l) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(x_{(1)}h_{(1)}\lambda_1(x_{(2)}h_{(2)})l) && (\lambda_1 \in \textstyle\int_l(H))\\
&= \mu(x_{(1)}h_{(1)}l)\lambda_1(x_{(2)}h_{(2)}) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(x_{(1)}h_{(1)}l_{(1)})\lambda_1(x_{(2)}h_{(2)}l_{(2)}S(l_{(3)})) && (\text{propiedades de } \varepsilon \text{ y } S)\\
&= \lambda_1(\mu(x_{(1)}h_{(1)}l_{(1)})x_{(2)}h_{(2)}l_{(2)}S(l_{(3)})) && (\text{linealidad de } \lambda_1)\\
&= \lambda_1(\mu(xhl_{(1)})S(l_{(2)})) && (\mu \in \textstyle\int_r(H))\\
&= \mu(xhl_{(1)})\lambda_1(S(l_{(2)})) && (\text{linealidad de } \lambda_1)\\
&= \mu(xhl_{(1)}\lambda_1(S(l_{(2)}))) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(xe) && (\text{definición de } e)\\
&= \mu(xe)\lambda_2(m) && (\lambda_2(m) = 1)\\
&= \lambda_2(\mu(xe)m) && (\text{linealidad de } \lambda_2)\\
&= \lambda_2(\mu(x_{(1)}e_{(1)})x_{(2)}e_{(2)}m) && (\mu \in \textstyle\int_r(H))\\
&= \mu(x_{(1)}e_{(1)})\lambda_2(x_{(2)}e_{(2)}m) && (\text{linealidad de } \lambda_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu(x_{(1)}e_{(1)}m_{(2)}S^{-1}(m_{(1)}))\lambda_2(x_{(2)}e_{(2)}m_{(3)}) && (\text{propiedades de } \varepsilon \text{ y } S^{-1})\\
&= \mu(x_{(1)}e_{(1)}m_{(2)}\lambda_2(x_{(2)}e_{(2)}m_{(3)})S^{-1}(m_{(1)})) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(\lambda_2(xem_{(2)})S^{-1}(m_{(1)})) && (\lambda_2 \in \textstyle\int_l(H))\\
&= \mu(S^{-1}(m_{(1)}))\lambda_2(xem_{(2)}) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \lambda_2(x\mu(S^{-1}(m_{(1)}))em_{(2)}) && (\text{linealidad de } \lambda_2)\\
&= \lambda_2(xg) && (\text{definición de } g).
\end{aligned}
$$

Ya estamos en condiciones de demostrar que $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son proporcionales. Sea $y \in H$ arbitrario. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(y) &= \mu(l)\lambda_1(y) && (\mu(l) = 1)\\
&= \lambda_1(y\mu(l)) && (\text{linealidad de } \lambda_1)\\
&= \lambda_1(y\mu(l_{(1)})l_{(2)}) && (\mu \in \textstyle\int_r(H))\\
&= \mu(l_{(1)})\lambda_1(yl_{(2)}) && (\text{linealidad de } \lambda_1)\\
&= \mu(S(y_{(1)})y_{(2)}l_{(1)})\lambda_1(y_{(3)}l_{(2)}) && (\text{propiedades de } \varepsilon \text{ y } S)\\
&= \mu(S(y_{(1)})y_{(2)}l_{(1)}\lambda_1(y_{(3)}l_{(2)})) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(S(y_{(1)})\lambda_1(y_{(2)}l)) && (\lambda_1 \in \textstyle\int_l(H))\\
&= \mu(S(y_{(1)}))\lambda_1(y_{(2)}l) && (\text{linealidad de } \mu).
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, existe $g \in H$ con $\lambda_1(y_{(2)}l) = \lambda_2(y_{(2)}g)$. Continuamos el cálculo usando esto:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(y) &= \mu(S(y_{(1)}))\lambda_2(y_{(2)}g)\\
&= \mu(S(y_{(1)})\lambda_2(y_{(2)}g)) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(S(y_{(1)})y_{(2)}g_{(1)}\lambda_2(y_{(3)}g_{(2)})) && (\lambda_2 \in \textstyle\int_l(H))\\
&= \mu(S(y_{(1)})y_{(2)}g_{(1)})\lambda_2(y_{(3)}g_{(2)}) && (\text{linealidad de } \mu)\\
&= \mu(g_{(1)})\lambda_2(yg_{(2)}) && (\text{propiedades de } \varepsilon \text{ y } S)\\
&= \lambda_2(y\mu(g_{(1)})g_{(2)}) && (\text{linealidad de } \lambda_2)\\
&= \lambda_2(y\mu(g)) && (\mu \in \textstyle\int_r(H))\\
&= \mu(g)\lambda_2(y) && (\text{linealidad de } \lambda_2).
\end{aligned}
$$

Como $\mu(g) \in \Bbbk$ y $g$ no depende de $y$, hemos terminado. □

**Nota 2.8.12.** *La demostración de los Teoremas 2.8.7 y 2.8.11 están tomadas de [37]. Sin embargo, hemos utilizado un argumento nuestro que simplifica la demostración. Compárese con [37, Theorem 3]. Para deducir que la antípoda es sobreyectiva, allí se utiliza el espacio de coeficientes y varias de sus propiedades. Aquí hemos dado un argumento directo, dual al que prueba la inyectividad, usando el inverso del isomorfismo dado en el Teorema Fundamental de los Módulos de Hopf.*

## 2.9. El elemento modular

Al igual que ocurría en el caso de grupos localmente compactos, el Teorema de Unicidad de las Integrales en álgebras de Hopf asegura la existencia de un elemento modular. Veámoslo.

**Teorema 2.9.1.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf con integral a derecha $\mu$ no nula. Entonces, existe $g \in G(H)$ único tal que*

$$\psi \star \mu = \psi(g)\mu, \qquad \forall \psi \in H^*. \tag{2.25}$$

Antes de probar el teorema, observamos que la condición (2.25) es equivalente a:

$$h_{(1)}\mu(h_{(2)}) = \mu(h)g, \qquad \forall h \in H. \tag{2.26}$$

Esto es debido a que, si evaluamos (2.25) en $h \in H$ arbitrario, tendríamos, para todo $\psi \in H^*$:

$$\psi(\mu(h)g) = \psi(g)\mu(h) = (\psi \star \mu)(h) = \psi(h_{(1)})\mu(h_{(2)}) = \psi(h_{(1)}\mu(h_{(2)})).$$

*Demostración.* En la Proposición 2.6.4 vimos que $\int_r(H) = \Bbbk\mu$ es un ideal bilátero de $H^*$. Como $\dim \int_r(H) = 1$, existe $\alpha(\psi) \in \Bbbk$ único tal que $\psi \star \mu = \alpha(\psi)\mu$. Sea $l \in H$ tal que $\mu(l) = 1$. Entonces,

$$\alpha(\psi) = \alpha(\psi)\mu(l) = (\psi \star \mu)(l) = \psi(l_{(1)})\mu(l_{(2)}) = \psi(\mu(l_{(2)})l_{(1)}).$$

Poniendo $g = \mu(l_{(2)})l_{(1)} \in H$, tenemos $\alpha(\psi) = \psi(g)$. Por tanto:

$$\psi \star \mu = \psi(g)\mu, \qquad \forall \psi \in H^*. \tag{2.27}$$

Veamos que $g \in G(H)$. Primero, $g$ es no nulo. Si fuese $g = 0$, de (2.27) obtendríamos $\psi \star \mu = 0$ para todo $\psi \in H^*$. En particular, $\mu = \varepsilon \star \mu = 0$, lo que contradice $\mu \neq 0$. Segundo, aplicamos $\Delta$ a (2.26) y obtenemos:

$$\mu(h)\Delta(g) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}\mu(h_{(3)}) = h_{(1)} \otimes \mu(h_{(2)})g = h_{(1)}\mu(h_{(2)}) \otimes g = \mu(h)g \otimes g.$$

Por tanto, $\Delta(g) = g \otimes g$.

Finalmente, $g$ no depende de $\mu$ pues, si partiésemos de una integral diferente, como sería un múltiplo escalar de $\mu$, multiplicando (2.25) por el escalar, obtendríamos el mismo elemento $g$. □

**Definición 2.9.2.** *El elemento $g$ anterior recibe el nombre de* elemento modular.

De (2.25) ó (2.26) es claro que:

**Corolario 2.9.3.** *En un álgebra de Hopf $H$ con integral no nula, $\int_r(H) = \int_l(H)$ si y sólo si $g = 1$.*

**Definición 2.9.4.** *Diremos que un álgebra de Hopf $H$ con integral es* unimodular *si $\int_r(H) = \int_l(H)$. Es decir, si $g = 1$.*

**Ejemplos 2.9.5.**

(1) Para un grupo finito $G$, el álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ es unimodular.

(2) El elemento modular del álgebra de Taft $T_n(\omega)$ es $u^{n-1}$. Recordemos de Ejemplos 2.6.2(2) que las integrales a izquierda y a derecha sobre $T_n(\omega)$ venían dadas, respectivamente, por:

$$\lambda(x^i u^j) = \delta_{i,n-1}\delta_{j,1} \quad \text{y} \quad \mu(x^i u^j) = \delta_{i,n-1}\delta_{j,0}.$$

Calculamos entonces su elemento modular $g$. Utilizamos la fórmula (2.11) que da la comultiplicación de $x^i u^j$. Tenemos:

$$\begin{aligned} g &= \mu(x^{n-1})g \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_\omega x^{n-1-k}u^k \mu(x^k) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_\omega x^{n-1-k}u^k \delta_{k,n-1} \\ &= u^{n-1}. \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que la integral a derecha se puede obtener a partir del elemento modular y la integral a izquierda. Este hecho nos será útil para probar, en la sección siguiente, la Fórmula de Radford. Antes necesitamos el siguiente lema técnico:

**Lema 2.9.6.** *Sea $\lambda \in \int_l(H)$ no nula y $h, h' \in H$. Se tiene:*

$$h_{(1)}\lambda(h_{(2)}S(h')) = \lambda(hS(h'_{(1)}))h'_{(2)}.$$

*Demostración.* Calculamos:

$$\begin{aligned} h_{(1)}\lambda(h_{(2)}S(h')) &= \lambda(h_{(2)}S(h'_{(1)}\varepsilon(h'_{(2)})))h_{(1)} && \text{(definición de } \varepsilon) \\ &= \lambda(h_{(2)}S(h'_{(1)}))h_{(1)}\varepsilon(h'_{(2)}) \\ &= \lambda(h_{(2)}S(h'_{(1)}))h_{(1)}S(h'_{(2)})h'_{(3)} && \text{(definición de } S) \\ &= \lambda(h_{(2)}S(h'_{(1)})_{(2)})h_{(1)}S(h'_{(1)})_{(1)}h'_{(2)} && (S \text{ antihom. coálgebras}) \\ &= \lambda((hS(h'_{(1)}))_{(2)})(hS(h'_{(1)}))_{(1)}h'_{(2)} && \text{(axioma álg. Hopf)} \\ &= \lambda(hS(h'_{(1)}))h'_{(2)} && (\lambda \text{ integral izqda}). \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.9.7.** *Sea $\lambda \in \int_l(H)$ no nula y $g$ el elemento modular. Se cumple $g^{-1} \rightharpoonup \lambda = \lambda \circ S$.*

*Demostración.* Sea $\mu \in \int_r(H)$ no nula. Aplicando $S$ a (2.26) y usando que es antihomomorfismo de coálgebras obtendríamos:

$$\mu((S^{-1}\circ S)(h))g^{-1} = S(h_{(1)})\mu((S^{-1}\circ S)(h_{(2)})) = S(h)_{(2)}\mu(S^{-1}(S(h)_{(1)})).$$

Como $S$ es biyectiva y $\mu \circ S^{-1}$ es una integral a izquierda, deducimos:

$$\lambda(h_{(1)})h_{(2)} = \lambda(h)g^{-1}, \qquad \forall h \in H. \tag{2.28}$$

Sabemos que $\lambda \circ S$ es integral a derecha. Veamos que $g^{-1} \rightharpoonup \lambda$ también. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(g^{-1} \rightharpoonup \lambda)(h_{(1)})h_{(2)} &= \lambda(h_{(1)}g^{-1})h_{(2)}g^{-1}g \\
&= \lambda((hg^{-1})_{(1)})(hg^{-1})_{(2)}g && (g^{-1} \in G(H)) \\
&= \lambda(hg^{-1})g^{-1}g && (\text{por } (2.28)) \\
&= (g^{-1} \rightharpoonup \lambda)(h).
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Unicidad de la Integral, existe $\theta \in \Bbbk$ tal que $g^{-1} \rightharpoonup \lambda = \theta(\lambda \circ S)$. Mostramos que $\theta = 1$. Sea $x \in H$ tal que $\lambda(x) = 1$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta\lambda(x) \\
&= \theta(\lambda \circ S)(S^{-1}(x)) \\
&= (g^{-1} \rightharpoonup \lambda)(S^{-1}(x)) \\
&= \lambda(S^{-1}(x)g^{-1}) \\
&= \lambda(S^{-1}(x)\lambda(x_{(1)})x_{(2)}) && (\text{por } (2.28)) \\
&= \lambda(x_{(1)})\lambda(S^{-1}(x)x_{(2)}) \\
&= \lambda(x_{(1)}\lambda(S^{-1}(x)x_{(2)})) \\
&= \lambda(x_{(2)}\lambda(S^{-1}(x_{(1)})x)) && (\text{Lema 2.9.6 aplicado a } H^{op}) \\
&= \lambda(x_{(2)})\lambda(S^{-1}(x_{(1)})x) \\
&= \lambda(S^{-1}(\lambda(x_{(2)})x_{(1)})x) \\
&= \lambda(S^{-1}(\lambda(x)1_H)x)) && (\lambda \text{ integral izqda}) \\
&= \lambda(x)\lambda(x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

**Nota 2.9.8.** *Obsérvese la similitud del anterior resultado con la Proposición 1.5.2 para grupos localmente compactos.*

Cuando $H$ es un álgebra de Hopf de dimensión finita también existe un elemento modular para las integrales en $H$:

**Teorema 2.9.9.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf de dimensión finita y $\Gamma$ una integral a derecha en $H$. Entonces, existe $\alpha \in G(H^*)$ único tal que*

$$h\Gamma = \alpha(h)\Gamma, \qquad \forall h \in H.$$

*Demostración.* En primer lugar probamos que $I_r(H)$ es un ideal a izquierda. Sean $h, h' \in H$. Entonces,

$$(h\Gamma)h' = h(\Gamma h') = h\varepsilon(h')\Gamma = \varepsilon(h')(h\Gamma).$$

Como $\dim I_r(H) = 1$, para cada $h \in H$, existe un único escalar $\alpha(h)$ tal que $h\Gamma = \alpha(h)\Gamma$. De la definición y la linealidad de la multiplicación en $H$ se sigue que la aplicación $\alpha : H \to \Bbbk,\ h \mapsto \alpha(h)$ es lineal. Veamos que es un homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\alpha(hh')\Gamma &= (hh')\Gamma\\ &= h(h'\Gamma)\\ &= h(\alpha(h')\Gamma)\\ &= \alpha(h')h\Gamma\\ &= \alpha(h')\alpha(h)\Gamma\\ &= \alpha(h)\alpha(h')\Gamma.\end{aligned}$$

De aquí, $\alpha(hh') = \alpha(h)\alpha(h')$. Como $\Gamma = 1_H\Gamma = \alpha(1_H)\Gamma$, obtenemos $\alpha(1_H) = 1$. Por la Proposición 2.2.7, $\alpha \in G(H^*)$. □

Análogamente al caso de integrales sobre $H$ obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 2.9.10.** *$I_r(H) = I_l(H)$ si y sólo si $\alpha = \varepsilon$.*

**Definición 2.9.11.** *Diremos que un álgebra de Hopf $H$ de dimensión finita es* counimodular *si $I_r(H) = I_l(H)$. Es decir, si $\alpha = 1$.*

**Ejemplos 2.9.12.**

1. Para un grupo finito $G$, el álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ es counimodular.

2. El elemento modular para las integrales en $T_n(\omega)$ es la aplicación $\alpha : T_n(\omega) \to \Bbbk$, $u \mapsto \omega^{n-1},\ x \mapsto 0$. Recordemos de Ejemplos 2.6.7(2) que la integral a derecha viene dada por $\Gamma = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1}u^j$. Como $\alpha$ será homomorfismo de álgebras, basta comprobar la condición para los generadores de $T_n(\omega)$. Así:

$$\begin{aligned}\alpha(x)\Gamma &= x\Gamma &&= 0.\\ \alpha(u)\Gamma &= u\Gamma &&= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} ux^{n-1}u^j\\ & &&= \omega^{n-1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1}u^{j+1}\\ & &&= \omega^{n-1}\Gamma.\end{aligned}$$

## 2.10. Fórmula de Radford

En esta sección veremos que en las álgebras de Hopf con integral se cumple la importante *Fórmula de Radford para la potencia cuarta de la antípoda.* Esta fórmula fue inicialmente demostrada por Radford en [47] para álgebras de Hopf de dimensión finita, véase alternativamente [49, Theorem 10.5.6]. En [10] Beattie, Bulacu y Torrecillas muestran que la demostración puede ser modificada para que funcione, más generalmente, en álgebras de Hopf con integral.

Sea $H$ un álgebra de Hopf con integral a izquierda $\lambda : H \to \Bbbk$. Vimos en la Proposición 2.8.3 que la aplicación

$$\Phi : H \to Rat_l(H^*),\ h \mapsto \lambda \leftharpoondown h$$

es un isomorfismo de módulos de Hopf. Recordemos que $(\lambda \leftharpoonup h)(x) = \lambda(xS(h))$ para todo $x \in H$. Como $S$ es biyectiva, la aplicación

$$H \to Rat_l(H^*), \; h \mapsto \lambda \leftharpoonup h \tag{2.29}$$

es un isomorfismo (ahora sólo lineal). Por otro lado, en la Proposición 2.8.6 probamos que $h \rightharpoonup \lambda \in Rat_l(H^*)$ para todo $h \in H$. Luego, dado $h \in H$, debe existir $\chi(h) \in H$ único tal que $h \rightharpoonup \lambda = \lambda \leftharpoonup \chi(h)$. Esto significa que

$$\lambda(xh) = \lambda(\chi(h)x), \qquad \forall x, h \in H. \tag{2.30}$$

Obtenemos así una aplicación $\chi : H \to H$ a la que llamaremos *automorfismo de Nakayama* de $H$.

**Proposición 2.10.1.** *$\chi$ es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* La linealidad se sigue de la condición (2.30) que define $\chi$, la linealidad de $\lambda$ y de la multiplicación en $H$. Veamos que $\chi$ es un isomorfismo. Primero recordemos que la Proposición 2.8.6 y el Teorema 2.7.5 nos dicen que la aplicación $H \to Rat_l(H^*), y \mapsto y \rightharpoonup \lambda$ es un isomorfismo. Sea ahora $h \in H$ tal que $\chi(h) = 0$. Entonces, por (2.30), $\lambda(xh) = 0$ para todo $x \in H$. Es decir, $h \rightharpoonup \lambda = 0$. Por tanto, $h = 0$. Para probar la sobreyectividad, sea $z \in H$. Como $\lambda \leftharpoonup z \in Rat_l(H^*)$, por la sobreyectividad de la anterior aplicación, existe $h \in H$ tal que $h \rightharpoonup \lambda = \lambda \leftharpoonup z$. De aquí, $\chi(h) = z$.

Veamos a continuación que $\chi$ es homomorfismo de álgebras. Sean $h, h' \in H$. Para todo $x \in H$ se cumple:

$$\lambda(x(hh')) = \lambda((xh)h')) = \lambda((\chi(h')x)h) = \lambda(\chi(h)\chi(h')x).$$

Como $\chi(hh')$ es único con esta propiedad, tenemos $\chi(hh') = \chi(h)\chi(h')$. Del mismo modo se prueba que $\chi(1_H) = 1_H$. □

Consideremos el homomorfismo de álgebras $\alpha = \varepsilon \circ \chi : H \to \Bbbk$, al que vamos a llamar *elemento modular* de $H^*$. La razón para este nombre es que, cuando $H$ es de dimensión finita, $\alpha$ es el elemento modular de $H^*$, véase el Teorema 2.9.9.

**Proposición 2.10.2.** *Con notación como antes:*

*(i)* *$\alpha$ es invertible en $H^*$.*

*(ii)* *$\alpha \circ S^2 = \alpha$.*

*Demostración.* (i) Comprobamos que $\alpha^{-1} = \alpha \circ S$. Sea $h \in H$. Tenemos:

$$\big(\alpha \star (\alpha \circ S)\big)(h) = \alpha(h_{(1)})\alpha(S(h_{(2)})) = \alpha(h_{(1)}S(h_{(2)})) = \alpha(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h).$$
$$\big((\alpha \circ S) \star \alpha\big)(h) = \alpha(S(h_{(1)}))\alpha(h_{(2)}) = \alpha(S(h_{(1)})h_{(2)}) = \alpha(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h).$$

(ii) Probaremos ahora que $(\alpha\circ S)^{-1}=\alpha\circ S^2$, es decir, $\alpha=(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha\circ S^2$.

$$\begin{aligned}\big((\alpha\circ S^2)\star(\alpha\circ S)\big)(h) &= \alpha(S^2(h_{(1)}))\alpha(S(h_{(2)})) && \text{(definición de } \star)\\ &= \alpha(S(h_{(2)}))\alpha(S^2(h_{(1)})) && \\ &= \alpha(S(h_{(2)})S^2(h_{(1)})) && (\alpha \text{ hom. álgebras})\\ &= (\alpha\circ S)(S(h_{(1)})h_{(2)}) && (S \text{ antihom. álgebras})\\ &= (\alpha\circ S)(\varepsilon(h)1_H) && \text{(definición de } S)\\ &= \varepsilon(h) && ((\alpha\circ S)(1_H)=1).\end{aligned}$$

El cálculo de que $(\alpha\circ S)\star(\alpha\circ S^2)=\varepsilon$ es totalmente análogo. □

Toda la discusión anterior se puede realizar también para integrales a derecha usando el submódulo racional a derecha de $H^*$. Sea $\mu : H\to \Bbbk$ una integral a derecha. La conclusión sería que para cada $h\in H$ existe $\chi'(h)\in H$ único tal que:

$$\mu(xh)=\mu(\chi'(h)x),\qquad \forall x\in H. \tag{2.31}$$

A esta conclusión también podemos llegar de otro modo. Tenemos que $\mu=\lambda\circ S$ para una integral a izquierda $\lambda$. Entonces, usamos la afirmación para $\lambda$ y que $S$ es biyectiva. El cálculo sería el siguiente:

$$\begin{aligned}\mu(xh) &= \lambda(S(xh))\\ &= \lambda(S(h)S(x))\\ &= \lambda(S(x)\chi^{-1}(S(h)))\\ &= (\lambda\circ S)\big(S^{-1}(\chi^{-1}(S(h))x)\big)\\ &= \mu(\chi'(h)x).\end{aligned}$$

Aquí hemos puesto $\chi'=S^{-1}\circ\chi^{-1}\circ S$. Al igual que antes podemos definir la versión a derecha del elemento modular como $\alpha'=\varepsilon\circ\chi'$.

**Lema 2.10.3.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf con integral a izquierda $\lambda$. Sea $\alpha$ el elemento modular definido antes. Entonces,*

$$\chi(h)=\alpha(h_{(2)})S^{-2}(h_{(1)}),\qquad \forall h\in H.$$

*Demostración.* Probaremos en primer lugar que, dado $h\in H$, el elemento $\lambda_h := S^2(h_{(2)})\rightharpoonup\lambda\leftharpoonup S^{-1}(h_{(1)})$ es una integral a izquierda. Tomamos $h'\in H$ y comprobamos la condición de integral a izquierda:

$$\begin{aligned}&\lambda_h(h'_{(2)})h'_{(1)}\\ &\quad= \big(S^2(h_{(2)})\rightharpoonup\lambda\leftharpoonup S^{-1}(h_{(1)})\big)(h'_{(2)})h'_{(1)}\\ &\quad= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(2)})\big)h'_{(1)} && \text{(definición de } \leftharpoonup \text{ y } \rightharpoonup)\\ &\quad= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(\varepsilon(h_{(2)})\varepsilon(h_{(3)})h_{(4)})\big)h'_{(1)} && \text{(definición de } \varepsilon)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(4)})\big)\varepsilon(h_{(2)})h'_{(1)}\varepsilon(h_{(3)}) && (\text{linealidad de } \lambda)\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(4)})\big)S^{-1}(\varepsilon(h_{(2)})1_H)h'_{(1)}S(\varepsilon(h_{(3)})1_H) && (S(1_H)=1_H)\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(6)})\big)S^{-1}(h_{(2)}S(h_{(3)}))h'_{(1)}S(h_{(4)}S(h_{(5)}))\\
& && (\text{definición de } S)\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(6)})\big)h_{(3)}S^{-1}(h_{(2)})h'_{(1)}S^2(h_{(5)})S(h_{(4)})\\
& && (S \text{ antihom. álgebras})\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)(1)})h'_{(2)}S^2(h_{(3)(2)})\big)h_{(2)(1)}S^{-1}(h_{(1)(2)})h'_{(1)}S^2(h_{(3)(1)})S(h_{(2)(2)})\\
& && (\text{notación de Sweedler})\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})_{(2)}h'_{(2)}S^2(h_{(3)})_{(2)}\big)h_{(2)(1)}S^{-1}(h_{(1)})_{(1)}h'_{(1)}S^2(h_{(3)})_{(1)}S(h_{(2)(2)})\\
& && (S \text{ antihom. coálgebras})\\
&= \lambda\Big(\big(S^{-1}(h_{(1)})h'S^2(h_{(3)})\big)_{(2)}\Big)h_{(2)(1)}\big(S^{-1}(h_{(1)})h'S^2(h_{(3)})\big)_{(1)}S(h_{(2)(2)})\\
& && (\text{axioma álgebra de Hopf})\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'S^2(h_{(3)})\big)h_{(2)(1)}S(h_{(2)(2)}) && (\lambda \text{ integral izqda})\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'S^2(h_{(3)})\big)\varepsilon(h_{(2)})1_H && (\text{definición de } S)\\
&= \lambda\big(S^{-1}(h_{(1)})h'S^2(h_{(2)})\big)1_H && (\text{definición de } \varepsilon)\\
&= \big(S^2(h_{(2)}) \rightharpoonup \lambda \leftharpoonup S^{-1}(h_{(1)})\big)(h')1_H && (\text{definición de } \leftharpoonup \text{ y } \rightharpoonup)\\
&= \lambda_h(h')1_H.
\end{aligned}
$$

Por el Teorema de Unicidad de la Integral, para cada $h \in H$ existe $c_h \in \Bbbk$ tal que

$$S^2(h_{(2)}) \rightharpoonup \lambda \leftharpoonup S^{-1}(h_{(1)}) = c_h\lambda,$$

es decir,

$$\lambda \leftharpoonup (\chi(S^2(h_{(2)}))S^{-1}(h_{(1)})) = \lambda \leftharpoonup (c_h 1_H).$$

De aquí obtenemos, $\chi(S^2(h_{(2)}))S^{-1}(h_{(1)}) = c_h 1_H$. Ahora aplicamos $\varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
c_h &= \varepsilon(\chi(S^2(h_{(2)}))S^{-1}(h_{(1)}))\\
&= \varepsilon(\chi(S^2(h_{(2)})))\varepsilon(S^{-1}(h_{(1)})) && (\varepsilon \text{ hom. álgebras})\\
&= \alpha(S^2(h_{(2)}))\varepsilon(h_{(1)}) && (\text{definición de } \alpha)\\
&= \alpha(S^2(h_{(2)}\varepsilon(h_{(1)})))\\
&= \alpha(S^2(h)) && (\text{definición de } \varepsilon)\\
&= \alpha(h) && (\text{Proposición 2.10.2(ii)}).
\end{aligned}
$$

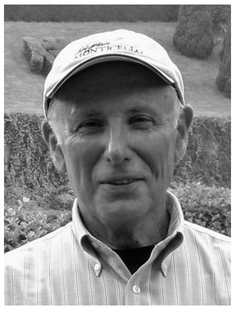
Por tanto, $\chi(S^2(h_{(2)}))S^{-1}(h_{(1)}) = \alpha(h)1_H$. Usando esto y la propiedad de $S^{-1}$, llegamos a:

$$\alpha(h_{(2)})h_{(1)} = \chi(S^2(h_{(3)}))S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} = \chi(S^2(h_{(2)}))\varepsilon(h_{(1)})1_H = \chi(S^2(h)).$$

Como $S$ es biyectiva y $S^2$ homomorfismo de coálgebras, finalmente tenemos:

$$\chi(h) = \alpha(S^{-2}(h_{(2)}))S^{-2}(h_{(1)}) = \alpha(h_{(2)})S^{-2}(h_{(1)}).$$

□



D. E. Radford
1943 -

**Teorema 2.10.4** (Fórmula de Radford). *Sea $H$ un álgebra de Hopf con integral a izquierda $\lambda$. Sean $g$ y $\alpha$ los elementos modulares de $H$ y $H^*$ respectivamente. Entonces,*

$$S^4(h) = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1}, \qquad \forall h \in H.$$

*Demostración.* En la Proposición 2.9.7 hemos visto que $g^{-1} \rightharpoonup \lambda = \lambda \circ S$. De aquí se sigue que $\lambda \leftharpoonup g^{-1} = \lambda \circ S^{-1}$. El cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned} (\lambda \leftharpoonup g^{-1})(h) &= \lambda(g^{-1}h) \\ &= (\lambda \circ S)(S^{-1}(h)g) \\ &= (g^{-1} \rightharpoonup \lambda)(S^{-1}(h)g) \\ &= \lambda(S^{-1}(h)gg^{-1}) \\ &= (\lambda \circ S^{-1})(h). \end{aligned}$$

Entonces, $\mu := \lambda \leftharpoonup g^{-1}$ es una integral a derecha. Vamos a obtener otra fórmula para la versión a derecha del automorfismo de Nakayama utilizando esto. Calculamos:

$$\begin{aligned} \mu(xh) &= (\lambda \leftharpoonup g^{-1})(xh) \\ &= \lambda(g^{-1}xh) \\ &= \lambda(\chi(h)g^{-1}x) \\ &= \lambda(g^{-1}g\chi(h)g^{-1}x) \\ &= \mu((g\chi(h)g^{-1})x). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos,

$$\chi'(h) = g\chi(h)g^{-1} = g\alpha(h_{(2)})S^{-2}(h_{(1)})g^{-1}, \qquad \forall h \in H. \tag{2.32}$$

Veamos que $\alpha$ y $\alpha'$ coinciden:

$$\alpha'(h) = (\varepsilon \circ \chi')(h) = \varepsilon(g\chi(h)g^{-1}) = \varepsilon(g)\varepsilon(\chi(h))\varepsilon(g^{-1}) = \varepsilon(\chi(h)) = \alpha(h).$$

Por otro lado, consideremos el álgebra de Hopf $H^{cop}$, cuya antípoda es $S^{-1}$. La integral a derecha $\mu$ sobre $H$ es una integral a izquierda sobre $H^{cop}$. El automorfismo de Nakayama y elemento modular son $\chi'$ y $\alpha'$ respectivamente. Aplicamos el Lema 2.10.3 y así obtenemos:

$$\chi'(h) = \alpha'(h_{(1)})(S^{-1})^{-2}(h_{(2)}) = \alpha(h_{(1)})S^2(h_{(2)}). \tag{2.33}$$

Combinando (2.32) y (2.33) llegamos a:

$$\alpha(h_{(1)})S^2(h_{(2)}) = g\alpha(h_{(2)})S^{-2}(h_{(1)})g^{-1}, \qquad \forall h \in H.$$

Aplicamos $S^2$ a ambos miembros, queda:

$$S^4(\alpha(h_{(1)})h_{(2)}) = g\alpha(h_{(2)})h_{(1)}g^{-1}, \qquad \forall h \in H.$$

Reemplazamos $h$ por $h \leftharpoonup \alpha^{-1} = \alpha^{-1}(h_{(1)})h_{(2)}$, lo cual podemos hacer porque esta asignación es un automorfismo (lineal) de $H$. Con esto, obtenemos finalmente la igualdad deseada:

$$S^4(h) = g\alpha(h_{(3)})h_{(2)}\alpha^{-1}(h_{(1)})g^{-1} = g(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})g^{-1}, \qquad \forall h \in H.$$

□

**Corolario 2.10.5.** *Con las hipótesis anteriores, si* $g = 1_H$ *y* $\alpha = \varepsilon$*, entonces* $S^4 = id_H$*.*

**Corolario 2.10.6.** *Con las hipótesis anteriores, si* $g$ *y* $\alpha$ *tienen orden finito, entonces* $S$ *tiene orden finito.*

*Demostración.* Dado $a \in G(H)$ consideremos el automorfismo $i_a : H \to H$, $h \mapsto aha^{-1}$. De manera dual, para $\gamma \in G(H^*)$ consideremos el automorfismo $j_\gamma : H \to H$, $h \mapsto \gamma \rightharpoonup h \leftharpoonup \gamma^{-1}$. Nótese que en $H^*$ tendríamos $j_\gamma^* = i_\gamma$. Por otro lado, es fácil ver que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple $i_a^n = i_{a^n}$ y $j_\gamma^n = j_{\gamma^n}$. Además, $i_1 = j_\varepsilon = id_H$.

En esta notación, la Fórmula de Radford se escribe $S^4 = i_g \circ j_\alpha$. Afirmamos que $i_g$ y $j_\alpha$ conmutan. Calculamos:

$$\begin{aligned}
(j_\alpha \circ i_g)(h) &= \alpha \rightharpoonup (ghg^{-1}) \leftharpoonup \alpha^{-1} \\
&= \alpha(gh_{(3)}g^{-1})(gh_{(2)}g^{-1})\alpha^{-1}(gh_{(1)}g^{-1}) \\
&= \alpha(g)\alpha(g^{-1})\alpha(h_{(3)})(gh_{(2)}g^{-1})\alpha^{-1}(h_{(1)})\alpha^{-1}(g)\alpha^{-1}(g^{-1}) \\
&= \alpha(h_{(3)})(gh_{(2)}g^{-1})\alpha^{-1}(h_{(1)}) && (\alpha, \alpha^{-1} \text{ hom. álgebras}) \\
&= g(\alpha(h_{(3)})h_{(2)}\alpha^{-1}(h_{(1)}))g^{-1} \\
&= (i_g \circ j_\alpha)(h).
\end{aligned}$$

Entonces, $S^{4n} = i_g^n \circ j_\alpha^n$. Sea $m = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(\alpha))$. Tenemos:

$$S^{4m} = i_g^m \circ j_\alpha^m = i_{g^m} \circ j_{\alpha^m} = i_1 \circ j_\varepsilon = id_H.$$

□

Como consecuencia de este resultado, obtenemos:

**Teorema 2.10.7.** *En un álgebra de Hopf de dimensión finita la antípoda tiene orden finito.*

*Demostración.* En la Proposición 2.1.4 demostramos que elementos distintos de tipo grupo son linealmente independientes. Si $H$ es de dimensión finita, entonces todo elemento de $G(H)$ tiene orden finito. □

**Nota 2.10.8.** *El anterior resultado no es cierto para álgebras de Hopf de dimensión infinita. En [10, Example 2.12] se da un ejemplo de álgebra de Hopf con integral tal que $g = 1_H$ y $\alpha$ no tiene orden finito. Por tanto, la antípoda tiene orden infinito.*

## 2.11. Teorema de Maschke

En esta sección vemos una segunda aplicación de las integrales. Probaremos una generalización del Teorema de Maschke, que caracteriza la cosemisimplicidad de un álgebra de Hopf en términos de la integral.

Una coálgebra se dice *simple* si no contiene subcoálgebras propias y *cosemisimple* si es una suma directa de subcoálgebras simples. Se puede demostrar que una coálgebra simple es de dimensión finita y que su álgebra dual es un álgebra simple; véase [49, Theorem 3.4.10 y Corollary 2.3.9]. Por tanto, en dimensión finita, el álgebra dual de una coálgebra cosemisimple es un álgebra semisimple.

Similarmente, un comódulo (a izquierda o derecha) sobre un coálgebra se dice simple si sus únicos subcomódulos son los triviales y semisimple si es una suma directa de subcomódulos simples. Al igual que para módulos, se demuestra que un comódulo es semisimple si y sólo si todo subcomódulo es un sumando directo. La caracterización de un álgebra semisimple por la condición de que todos sus módulos (a izquierda o derecha) sean semisimples se puede extender a coálgebras no necesariamente de dimensión finita; véase [49, Theorem 3.4.10].

**Proposición 2.11.1.** *Una coálgebra es cosemisimple si y sólo si todo comódulo (a izquierda o derecha) es semisimple.*

Con esta caracterización, ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Maschke generalizado:

**Teorema 2.11.2** (Maschke generalizado)**.** *Un álgebra de Hopf $H$ es cosemisimple si y sólo si existe $\lambda \in \int_l(H)$ tal que $\lambda(1_H) \neq 0$. Equivalentemente, existe $\mu \in \int_r(H)$ tal que $\mu(1_H) \neq 0$.*

*Demostración.* Supongamos que $H$ es cosemisimple. Como la subcoálgebra $\Bbbk 1_H$ es simple, existe otra subcoálgebra $C$ de $H$ tal que $H = \Bbbk 1_H \oplus C$. Todo elemento $h \in H$ se escribe de manera única como $h = \beta_h 1_H + c_h$, con $\beta_h \in \Bbbk$ y $c_h \in C$. Definimos $\lambda : H \to \Bbbk$ como la proyección sobre $\Bbbk 1_H$, es decir, $\lambda(h) = \beta_h$. Claramente, $\lambda(1_H) = 1 \neq 0$. Comprobamos que $\lambda$ es una integral a izquierda. Obsérvese que

$\Delta(h) = \beta_h 1_H \otimes 1_H + c_{h(1)} \otimes c_{h(2)}$ y $c_{h(1)} \otimes c_{h(2)} \in C \otimes C$ por ser $C$ subcoálgebra de $H$. Entonces,

$$\lambda(h_{(2)})h_{(1)} = \beta_h \lambda(1_H)1_H + \lambda(c_{h(2)})c_{h(1)} = \beta_h 1_H = \lambda(h)1_H. \tag{2.34}$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\lambda \in \int_l(H)$ tal que $\lambda(1_H) \neq 0$. Reemplazando $\lambda$ por $\lambda(1_H)^{-1}\lambda$ conseguimos una integral a izquierda con $(\lambda(1_H)^{-1}\lambda)(1_H) = 1$. Por tanto, podemos suponer que $\lambda(1_H) = 1$.

Sea ahora $M$ un $H$-comódulo a izquierda y $N$ un subcomódulo suyo. Tomemos una proyección $\Bbbk$-lineal $p : M \to N$. Definimos $\pi : M \to N$ como

$$\pi(m) = \lambda\left(m_{(-1)}S(p(m_{(0)})_{(-1)})\right) p(m_{(0)})_{(0)}, \qquad \forall m \in M.$$

Afirmamos que $\pi$ es un homomorfismo de comódulos tal que $\pi|_N = id_N$. Por tanto, $M = N \oplus \operatorname{Ker} \pi$ y así quedará probado que $M$ es semisimple.

El siguiente cálculo muestra que $\pi$ es un homomorfismo de comódulos:

$$\begin{aligned}
\pi(m)_{(-1)} \otimes \pi(m)_{(0)} &= \lambda\left(m_{(-1)}S(p(m_{(0)})_{(-1)})\right) p(m_{(0)})_{(0)(-1)} \otimes p(m_{(0)})_{(0)(0)}\\
&= \lambda\left(m_{(-1)}S(p(m_{(0)})_{(-2)})\right) p(m_{(0)})_{(-1)} \otimes p(m_{(0)})_{(0)}\\
&= m_{(-2)} \otimes \lambda\left(m_{(-1)}S(p(m_{(0)})_{(-1)})\right) p(m_{(0)})_{(0)} \qquad \text{(Lema 2.9.6)}\\
&= m_{(-1)} \otimes \lambda\left(m_{(0)(-1)}S(p(m_{(0)(0)})_{(-1)})\right) p(m_{(0)(0)})_{(0)}\\
&= m_{(-1)} \otimes \pi(m_{(0)}).
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\pi|_N = id_N$. Sea $n \in N$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\pi(n) &= \lambda\left(n_{(-1)}S(p(n_{(0)})_{(-1)})\right) p(n_{(0)})_{(0)}\\
&= \lambda\left(n_{(-1)}S(n_{(0)(-1)})\right) n_{(0)(0)} && (N \text{ subcomódulo y } p|_N = id_N)\\
&= \lambda\left(n_{(-2)}S(n_{(-1)})\right) n_{(0)}\\
&= \lambda\left(\varepsilon(n_{(-1)})1_H\right) n_{(0)} && (\text{definición de } S)\\
&= \lambda\left(1_H\right) \varepsilon(n_{(-1)})n_{(0)}\\
&= n && (\text{definición de } \varepsilon \text{ y } \lambda(1_H) = 1).
\end{aligned}$$

□

**Nota 2.11.3.** *Del resultado anterior se deduce que $\mathcal{R}(G)$ es cosemisimple para un grupo compacto $G$. Sea $\lambda$ una integral de Haar sobre $G$. Por ser $G$ compacto, la función constantemente uno tiene soporte compacto. Al principio de la demostración del Teorema de Unicidad de la Integral de Haar quedó establecido que la integral evaluada en una función no nula es no nula. Por tanto, $\lambda(1_{\mathcal{R}(G)}) \neq 0$.*

**Proposición 2.11.4.** *Toda álgebra de Hopf cosemisimple es unimodular.*

*Demostración.* En la demostración del resultado anterior hemos visto que la proyección sobre $\Bbbk 1_H$ era un integral a izquierda. Si en la igualdad (2.34) evaluamos dicha proyección en el tensorando izquierdo, vemos que también es una integral a derecha. □

Cuando $H$ es de dimensión finita, $H$ es cosemisimple si y sólo si $H^*$ es semisimple. Por otro lado, $\lambda$ es una integral sobre $H$ si y sólo si $\lambda$ es una integral en $H^*$. Además, $\lambda(1_H) = \varepsilon_{H^*}(\lambda)$. Entonces, tenemos la siguiente versión dual del resultado anterior:

**Teorema 2.11.5** (Maschke generalizado)**.** *Un álgebra de Hopf de dimensión finita $H$ es semisimple si y sólo si existe $\Lambda \in I_l(H)$ tal que $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$.*

El motivo por el que se le llama Teorema de Maschke es que al aplicarlo al álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ para un grupo finito $G$ recuperamos aquel. En Ejemplos 2.6.7(1) vimos que la integral en $\Bbbk[G]$ (tanto a derecha como izquierda) es $\Lambda = \sum_{g \in G} g$. Entonces, $\varepsilon(\Lambda) = |G|$. Luego $\Bbbk[G]$ es semisimple si y solo si $|G| \neq 0$ en $\Bbbk$, que es precisamente lo que el conocido Teorema de Maschke afirma.

De manera dual a la Proposición 2.11.4 tenemos:

**Proposición 2.11.6.** *Toda álgebra de Hopf semisimple es counimodular.*

De lo anterior y la Fórmula de Radford se sigue el siguiente corolario:

**Corolario 2.11.7.** *En un álgebra de Hopf semisimple y cosemisimple $H$ se cumple $S^4 = id_H$.*

La quinta conjetura de Kaplansky en álgebras de Hopf afirma que en un álgebra de Hopf semisimple $H$ se cumple $S^2 = id_H$. Está demostrada bajo ciertas condiciones. Larson y Radford demuestran en [39] que, cuando $\mathrm{car}(\Bbbk) = 0$, un álgebra de Hopf $H$ de dimensión finita es semisimple si y sólo si $S^2 = id_H$. Véase alternativamente [49, Theorem 16.1.2]. Etingof y Gelaki prueban en [25] que $H$ es semisimple y cosemisimple si y sólo si $S^2 = id_H$ y $\mathrm{car}(\Bbbk) \nmid \dim H$. Otro resultado es el de Sommerhäuser [54] que establece la conjetura si $\mathrm{car}(\Bbbk)$ es muy grande comparada con $\dim H$. Para saber más sobre las diez conjeturas de Kaplansky en álgebras de Hopf, recomendamos el artículo de Sommerhäuser [55].

I. Kaplansky
1917 - 2006

## 2.12. Álgebras de Frobenius

Veremos en esta sección que la integral sobre un álgebra de Hopf de dimensión finita permite definir una forma bilineal no degenerada que la convierte en un álgebra de Frobenius. Existe la noción dual de coálgebra co-Frobenius. En un álgebra de Hopf, no necesariamente de dimensión finita, esta otra condición es equivalente a la existencia de integral.

F. G. Frobenius
1849 - 1917

**Definición 2.12.1.** *Una* $\Bbbk$*-álgebra de dimensión finita* $A$ *se dice* de Frobenius *si existe una forma bilineal no degenerada* $[\ ,\ ] : A \times A \to \Bbbk$ *tal que* $[ab, c] = [a, bc]$ *para todo* $a, b, c \in A$.

Recordemos que *no degenerada* significa que si $[a, b] = 0$ para todo $b \in A$, entonces $a = 0$.

**Ejemplos 2.12.2.**

1. El álgebra de matrices $M_n(\Bbbk)$ es un álgebra de Frobenius con la forma bilineal dada por la traza. Es decir, $[P, Q] = tr(PQ)$ para todo $P, Q \in M_n(\Bbbk)$.
2. Para un grupo finito $G$, el álgebra de grupo $\Bbbk[G]$ es un álgebra de Frobenius con forma bilineal definida como sigue. Sean $a, b \in \Bbbk[G]$ y los escribimos como $a = \sum_{g\in G} \alpha_g g$ y $b = \sum_{g\in G} \beta_g g$ con $\alpha_g, \beta_g \in \Bbbk$ para todo $g \in G$. Definimos $[a, b] = \sum_{g\in G} \alpha_g \beta_{g^{-1}}$.

La siguiente proposición da una condición equivalente para que un álgebra $A$ sea Frobenius. Recordemos que el espacio dual $A^*$ tiene estructura de $A$-bimódulo con las siguientes acciones:

$$(\varphi \leftharpoonup a)(b) = \varphi(ab), \qquad (a \rightharpoonup \varphi)(b) = \varphi(ba), \qquad \forall a, b \in A, \varphi \in A^*.$$

**Proposición 2.12.3.** *Sea* $A$ *un álgebra de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i)* $A$ *es de Frobenius.*

*(ii) Existe un isomorfismo de* $A$*-módulos a derecha* $\Phi : A \to A^*$.

*(iii) Existe un isomorfismo de* $A$*-módulos a izquierda* $\Psi : A \to A^*$.

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Definimos $\Phi : A \to A^*$ como $\Phi(a)(x) = [a, x]$ para todo $a, x \in A$. Es fácil comprobar que $\Phi$ es lineal usando que $[\ ,\ ]$ es lineal en la primera variable. La no degeneración implica que $\Phi$ es inyectiva: si $\Phi(a) = 0$, entonces $[a, x] = 0$ para todo $x \in A$, de donde $a = 0$. Como $A$ es de dimensión finita, $\Phi$ es un isomorfismo. El siguiente cálculo muestra que $\Phi$ es un homomorfismo de $A$-módulos. Para $a, b, x \in A$ se tiene:

$$\Phi(ab)(x) = [ab, x] = [a, bx] = \Phi(a)(bx) = (\Phi(a) \cdot b)(x).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si tenemos un isomorfismo de módulos a derecha $\Phi : A \to A^*$, definimos $[\ ,\ ] : A \times A \to \Bbbk$ como $[a, x] = \Phi(a)(x)$ para todo $a, x \in A$. El mismo argumento anterior muestra que $[\ ,\ ]$ es no degenerada por ser $\Phi$ inyectiva. La condición $[ab, x] = [a, bx]$ se sigue de que $\Phi$ un homomorfismo de módulos.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Se demuestra de forma análoga. Lo único que hay que tener en cuenta es que no degeneración de la forma bilineal en la primera variable es equivalente a no degeneración en la segunda. $\square$

Vemos a continuación que un álgebra de Hopf de dimensión finita es un álgebra de Frobenius con la forma bilineal definida por la integral.

**Teorema 2.12.4.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $\lambda$ una integral a izquierda sobre $H$. Entonces, $H$ es un álgebra de Frobenius con forma bilineal:*

$$\begin{array}{rrcl} [\ ,\ ]: & H \times H & \to & \Bbbk, \\ & (h, h') & \mapsto & \lambda(hh'). \end{array}$$

*Demostración.* La bilinealidad de $[\ ,\ ]$ se deduce fácilmente de la linealidad de $\lambda$ y la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. Veamos que $[\ ,\ ]$ es no degenerada. Sea $h \in H$ tal que $\lambda(hh') = 0$ para todo $h' \in H$. Entonces, $\lambda \leftharpoonup h = 0$. De (2.29) obtenemos $h = 0$. Finalmente, para $h, h', h'' \in H$ se tiene:

$$[hh', h''] = \lambda((hh')h'') = \lambda(h(h'h'')) = [h, h'h''].$$

□

Definimos dualmente la noción de coálgebra co-Frobenius. Recordemos que una coálgebra $C$ es un $C^*$-bimódulo con las acciones

$$\varphi \rightharpoonup c = \varphi(c_{(2)})c_{(1)} \qquad \text{y} \qquad c \leftharpoonup \varphi = \varphi(c_{(1)})c_{(2)}, \qquad \forall c \in C, \varphi \in C^*.$$

**Definición 2.12.5.** *Una coálgebra $C$ es* co-Frobenius *a izquierda (derecha) si existe un monomorfismo de $C^*$-módulos a izquierda (derecha) de $C$ en $C^*$.*

Cuando $C$ es de dimensión finita, $C$ es co-Frobenius si y sólo si $C^*$ es Frobenius. En este caso no es necesario la distinción del lado. En general no es cierto que co-Frobenius a un lado implica co-Frobenius al otro. En [31, Example 1] aparece un ejemplo debido a Sweedler. En el caso de la estructura de coálgebra de un álgebra de Hopf, sí es cierto y, además, la condición de ser co-Frobenius caracteriza la existencia de integral. Es por esta razón, que en la literatura, las álgebras de Hopf con integral reciben el nombre de álgebras de Hopf co-Frobenius.

**Teorema 2.12.6.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(i) $H$ tiene una integral a izquierda.*

*(ii) $H$ es co-Frobenius a izquierda.*

*(iii) $H$ tiene una integral a derecha.*

*(iv) $H$ es co-Frobenius a derecha.*

*Demostración.* Probaremos sólo (i) $\Leftrightarrow$ (ii), pues sabemos por el Corolario 2.8.9 que (i) y (iii) son equivalentes. La demostración de (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) se realiza de forma análoga.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\lambda \in \int_l(H)$ no nula. Sabemos de la demostración de la Proposición 2.8.1 que la aplicación $\Phi : H \to Rat_l(H^*)$, $h \mapsto \lambda \leftharpoondown h$ es inyectiva. Consideremos su composición con la inclusión de $Rat_l(H^*)$ en $H^*$. Afirmamos que es un homomorfismo de $H^*$-módulos a izquierda. Por (2.23) se tiene $\psi \star \Phi(h) = \psi(h_{(2)})(\lambda \leftharpoondown h_{(1)})$ para todo $h \in H, \psi \in H^*$. Téngase en cuenta que $\lambda \in Rat_l(H^*)^{co(H)}$ por el Lema 2.8.2. Por otra parte,

$$\Phi(\psi \rightharpoonup h) = \Phi(\psi(h_{(2)})h_{(1)}) = \psi(h_{(2)})\Phi(h_{(1)}) = \psi(h_{(2)})(\lambda \leftharpoondown h_{(1)}) = \psi \star \Phi(h).$$

Esto prueba que $H$ es co-Frobenius a izquierda.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que $H$ es co-Frobenius a izquierda y sea $\Phi : H \to H^*$ el monomorfismo de $H^*$-módulos a izquierda dado por hipótesis. Como $H$ es un $H^*$-módulo racional, $\Phi(H)$ también lo es. Entonces, $\Phi(H) \subseteq Rat_l(H^*)$ y $\Phi(H) \neq \{0\}$. Por el Corolario 2.8.4, existe una integral a izquierda no nula. $\square$

En las dos siguientes secciones, para mantener este trabajo dentro de un límite razonable de páginas, no se incluirán las demostraciones de los resultados.

## 2.13. Caracterizaciones homológicas

Para comódulos puede hablarse, al igual que para módulos, de comódulos inyectivos y comódulos proyectivos. En esta sección presentamos dos caracterizaciones de la existencia de integral en términos de este tipo de comódulos. Esto resulta muy sorprendente pues, de la definición de integral, no se intuye a priori ninguna relación con estos conceptos, ni en el caso de grupos topológicos existe algo parecido.

Sea $C$ una coálgebra y $M$ un $C$-comódulo a izquierda. La *envolvente inyectiva* de $M$ es un comódulo inyectivo $E(M)$ junto con un monomorfismo de comódulos $i : M \to E(M)$ tal que $i(M)$ es esencial en $E(M)$. Es decir, para todo subcomódulo no nulo $N$ de $E(M)$, se tiene $i(M) \cap N \neq 0$. Se sabe que la categoría de comódulos tiene envolventes inyectivas; véase [21, Remark 2.4.6].

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [31, Theorem 3] y [17, Proposition 2.3].

**Teorema 2.13.1.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $H$ tiene integral.*

*(ii) $E(M)$ es de dimensión finita para todo comódulo a izquierda $M$ de dimensión finita.*

*(iii) La envolvente inyectiva del comódulo trivial $\Bbbk$ es de dimensión finita.*

*(iv) Existe un comódulo a izquierda no nulo e inyectivo de dimensión finita.*

Se dice que la categoría de comódulos a izquierda *tiene suficientes proyectivos* si todo comódulo a izquierda es cociente de un comódulo proyectivo. Por otro lado, dado un comódulo a izquierda $M$, una *cubierta proyectiva* de $M$ es un comódulo proyectivo $P(M)$ junto con un epimorfismo de comódulos $p : P(M) \to M$ tal que $\operatorname{Ker} p$ es superfluo en $P(M)$. Es decir, si $N$ es un subcomódulo de $P(M)$ con $N \neq P(M)$, entonces $N + \operatorname{Ker} p \neq P(M)$. A diferencia de lo que ocurre para envolventes inyectivas, no todo comódulo tiene una cubierta proyectiva. De hecho, esta condición caracteriza a las álgebras de Hopf con integral.

**Teorema 2.13.2.** *Sea $H$ un álgebra de Hopf. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(i) $H$ tiene integral.*

*(ii) La categoría de comódulos a izquierda tiene suficientes proyectivos.*

*(iii) Existe un comódulo a izquierda proyectivo y no nulo.*

*(iv) El comódulo trivial $\Bbbk$ tiene una cubierta proyectiva (que será de dimensión finita).*

*(v) Todo comódulo a izquierda de dimensión finita tiene una cubierta proyectiva (que será de dimensión finita).*

*(vi) Todo comódulo a izquierda tiene una cubierta proyectiva.*

*(vii) Todo comódulo a izquierda inyectivo es proyectivo.*

La demostración de este teorema aparece en [31, Theorem 10] y [2, Proposition 2.8].

## 2.14. Condiciones de finitud

En esta sección presentaremos dos condiciones de finitud que caracterizan a las álgebras de Hopf con integral.

La primera aparece en [2, Theorem 2.3]:

**Teorema 2.14.1.** *Un álgebra de Hopf tiene integral si y sólo si todo comódulo a izquierda no nulo tiene un cociente de dimensión finita no nulo.*

Para la segunda condición necesitamos introducir la *filtración corradical* de una coálgebra y previamente la operación wedge. Sea $C$ una coálgebra. Dados dos subespacios $D$ y $E$ de $C$ se define su *wedge* como el subespacio

$$D \wedge E = \{c \in C : \Delta(c) \in D \otimes C + C \otimes E\}.$$

Esta construcción es dual a la del producto de subespacios en un álgebra, pues $D \wedge E = (D^{\perp(C^*)} E^{\perp(C^*)})^{\perp(C)}$, donde $\perp(C^*)$ y $\perp(C)$ denotan los subespacios ortogonales en $C^*$ y $C$ respectivamente. Esto se puede consultar en [49, Proposition 2.4.2]. Si $D$ y $E$ son subcoálgebras de $C$, entonces $D \wedge E$ también lo es y $D, E \subset D \wedge E$.

Definimos el *corradical* $C_0$ de $C$ como la suma de todas las subcoálgebras simples de $C$. La *filtración corradical* de $C$, denotada por $\{C_n\}_{n\geq 0}$, se define inductivamente como $C_n = C_{n-1} \wedge C_0$ para $n \geq 1$. Se le llama filtración porque cumple las siguientes tres propiedades:

(1) $\bigcup_{n\geq 0} C_n = C$;

(2) $C_n \subseteq C_{n+1}$;

(3) $\Delta(C_n) \subseteq \sum\limits_{i+j=n} C_i \otimes C_j$.

Esta filtración es dual a las potencias del radical de Jacobson de $C^*$, véase [49, Theorem 4.6.1]. La razón es que el radical de Jacobson de $C^*$ es precisamente el subespacio ortogonal de $C_0$.

Se prueba en [3, Section 1] la siguiente caracterización:

**Teorema 2.14.2.** *Un álgebra de Hopf $H$ tiene integral si y sólo si su filtración corradical es finita, es decir, existe $m \geq 0$ tal que $H = H_m$.*

## Comentarios bibliográficos

En la elaboración del Capítulo 2 hemos utilizado: los libros de Dăscălescu, Năstăsescu y Raianu [21]; Montgomery [43] y Radford [49]; los apuntes de Schneider [53]; los artículos de Andruskiewitsch y Cuadra [2]; Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof [3]; Beattie, Bulacu y Torrecillas [10]; Donkin [24]; Iovanov y Raianu [37]; I-Peng Lin [31] y Sweedler [59].

Las primeras cinco secciones de este capítulo contienen lo que hoy en día es la introducción estándar a las estructuras de coálgebra, comódulo y álgebra de Hopf, tal y como se hace en los libros anteriores. Para la Sección 6 sobre integrales hemos usado [59] y [21, Capítulo 5]. El tratamiento de los módulos de Hopf en la Sección 7 está tomado de [49, Sección 8.2].

La demostración de la biyectividad de la antípoda y el Teorema de Unicidad de Integrales sigue [37]. Este punto merece que nos extendamos en él. El problema de la unicidad de la integral fue planteado por Sweedler en [59] y resuelto por él en el caso de dimensión finita. La primera demostración del caso general fue dada por Sullivan en [57, Theorem 2]: usa la inyectividad de la antípoda, probada por Sweedler, y la caracterización en términos de envolventes inyectivas. Más o menos al mismo tiempo, Takeuchi lo demostró en [62] para álgebras de Hopf coconmutativas. Más recientemente, Stefan da en [56] una demostración en la que usa la caracterización en términos de la densidad del submódulo racional. Raianu da otra demostración en [50]: usa envolventes inyectivas y un argumento de Van Daele [65] que sirve para establecer este resultado en el caso de grupos cuánticos compactos. La biyectividad de la antípoda se obtiene a posteriori. Esta demostración es refinada en [37]. Aquí hallan un modo de probar la biyectividad de la antípoda primero, el argumento de Van Daele sigue funcionando y se puede prescindir de las envolventes inyectivas. A nosotros nos parece la demostración más corta y elemental de todas. La última demostración dada de este resultado se debe a Hai y Hung [30]. Como indica el título del trabajo, es de naturaleza categórica y usan el Teorema de Gabriel-Popescu. Actualmente, el Teorema de Unicidad de la Integral está establecido, más generalmente, para coálgebras co-Frobenius. Véase Dăscălescu y Năstăsescu [18] e Iovanov [35]. Un resultado previo parcial aparece en Dăscălescu, Năstăsescu y Torrecillas [19]. La biyectividad de la antípoda fue demostrada por primera vez por Radford en [48]: usa envolventes inyectivas. Calinescu da otra demostración en [14]. Hai y Hung también la prueban en [30] en términos categóricos.

La construcción del elemento modular fue realizada por Radford en [48]. Nosotros, en la Sección 9, hemos adaptado la construcción que Donkin hace en [24] para esquemas de grupo, que nos parece más corta. También hemos utilizado aquí [21, Capítulo 5]. La demostración de la Fórmula de Radford para la potencia cuarta de la antípoda, en la Sección 10, está tomada de [10]. En la Sección 11, el Teorema de Maschke está probado dualizando la demostración que aparece en [43, Theorem 2.2.1] para el caso de dimensión finita. Para la Sección 11 hemos usado [53] y para la Secciones 12 y 13 [2] y [3].

# Capítulo 3

# Nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con integral

En este capítulo presentaremos una nueva familia de ejemplos de álgebras de Hopf con integral. Surge al aplicar el método desarrollado en [3] a levantamientos de rectas cuánticas sobre ciertos grupos no abelianos, aunque, por simplicidad, los expondremos de un modo diferente.

## 3.1. Ejemplos de partida

Comenzamos introduciendo la familia construida por Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof en [3, Subsection 3.3] a partir de la cual construiremos nuestros ejemplos.

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Supongamos que $\Bbbk$ contiene una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad $\omega$. Sea $I$ un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$ tomamos $q_i \in \Bbbk$ no nulo. Consideremos la $\Bbbk$-álgebra $H$ generada por $u, x$ y $a_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ sujeta a las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{llll} u^n = 1, & x^n = 0, & ux = \omega xu, & a_i^{\pm 1} a_i^{\mp 1} = 1, \\ ua_i = a_i u, & a_i x = q_i x a_i, & a_i a_j = a_j a_i, & i, j \in I. \end{array}$$

Para definir la estructura de álgebra de Hopf en $H$, antes necesitamos fijar una base de ella. Por el Axioma de Elección, podemos considerar un orden total $<$ en $I$. Para $r \geq 1$ ponemos $I^{[r]} = \{(i_1, \ldots, i_r) \in I^r : i_1 < \cdots < i_r\}$ e $I^{[0]} = \mathbb{Z}^0 = \{0\}$. Dados $F = (i_1, \ldots, i_r) \in I^{[r]}$ y $E = (e_1, \ldots, e_r) \in \mathbb{Z}^r$ ponemos

$$a_F^E = a_{i_1}^{e_1} \ldots a_{i_r}^{e_r}, \qquad q_F^E = q_{i_1}^{e_1} \ldots q_{i_r}^{e_r}, \qquad a_0^0 = 1, \qquad q_0^0 = 1.$$

Escribimos $\mathbb{Z}^\diamond = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y $(\mathbb{Z}^r)^\diamond = \mathbb{Z}^\diamond \times \overset{r}{\ldots} \times \mathbb{Z}^\diamond$. Consideremos el conjunto $\Gamma = \bigcup_{r \geq 1} I^{[r]} \times (\mathbb{Z}^r)^\diamond$. En [3, Subsection 3.3] se justifica que el conjunto

$$B := \left\{ x^s u^t a_F^E : 0 \leq s, t < n,\ (F, E) \in \Gamma \cup \{(0, 0)\} \right\}$$

es una base de $H$. Sea ahora $\alpha \in \Bbbk$ no nulo. En [3, Theorem 3.4] se demuestra que $H$ es un álgebra de Hopf con comultiplicación, counidad y antípoda definida por:

$$\Delta(u) = u \otimes u, \qquad \Delta(x) = u \otimes x + x \otimes 1,$$

$$\Delta(a_i^{\pm 1}) = a_i^{\pm 1} \otimes a_i^{\pm 1} + \alpha(1 - q_i^{\pm n}) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k a_i^{\pm 1} \otimes x^k a_i^{\pm 1},$$

$$\varepsilon(u) = 1, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \varepsilon(a_i^{\pm 1}) = 1,$$

$$S(u) = u^{n-1}, \qquad S(x) = -u^{n-1}x, \qquad S(a_i^{\pm 1}) = a_i^{\mp 1}.$$

Para ello, se prueba en [3, Theorem 3.4 (Step 2)] que la comultiplicación de cualquier elemento de la base viene dada por la fórmula:

$$\begin{aligned}\Delta(x^s u^t a_F^E) = & \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_\omega x^l u^{s-l+t} a_F^E \otimes x^{s-l} u^t a_F^E \\ & + (s)!_\omega \alpha (1 - q_F^{nE}) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} x^{n-k+s} u^{k+t} a_F^E \otimes x^k u^t a_F^E.\end{aligned}$$

Aquí, $q_F^{nE} = q_{i_1}^{ne_1} \dots q_{i_r}^{ne_r}$.

Esta familia ha permitido responder negativamente a la pregunta planteada por Andruskiewitsch y Dăscălescu en [4, pág. 153] sobre la generación finita sobre el zócalo de Hopf. La «extraña» forma de la comultiplicación de $a_i^{\pm 1}$ es la que impide la generación finita cuando algún $q_i$ no es una raíz de la unidad. Véase [3, Theorem 3.7] para más detalle. En [3, Subsection 3.2] se explica cómo se construye esta familia a partir de ciertas álgebras de Hopf de dimensión finita llamadas *levantamientos de rectas cuánticas*. Nosotros no vamos a entrar en la explicación porque sería necesario introducir muchos preliminares y esta memoria ya roza el límite de páginas razonable.

## 3.2. Nuevos ejemplos

Construimos aquí otra familia de álgebras de Hopf con integral a partir de las anteriores. Sea $B$ un álgebra de Hopf. Siendo $I$ como en la sección anterior, consideremos una aplicación $z : I \to Z(B) \otimes Z(B)$, $i \mapsto z_i$, de forma que cada $z_i$ cumpla las siguientes condiciones (♣):

(1) $z_i$ es invertible.

(2) $(z_i \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z_i) = (1 \otimes z_i)(id \otimes \Delta_B)(z_i)$.

(3) $(\varepsilon_B \otimes id)(z_i) = (id \otimes \varepsilon_B)(z_i) = 1$.

(4) $\nabla_B(z_i)\nabla_B((S_B \otimes id)(z_i)) = \nabla_B(z_i)\nabla_B((id \otimes S_B)(z_i)) = 1.$

Cuando lo necesitemos, escribiremos $z_i = z_{i1} \otimes z_{i2}$, imitando la notación de Sweedler y omitiendo la suma como allí.

En el álgebra producto tensorial $L_z := H \otimes B$ definimos una comultiplicación $\Delta_z$, counidad $\varepsilon_z$ y antípoda $S_z$ del siguiente modo. Sobre $u$ y $x$ coinciden con la comultiplicación, counidad y antípoda de $H$ respectivamente. Hacemos lo mismo para los elementos de $B$. La comultiplicación, counidad y antípoda de $a_i$ se alteran mediante $z_i$:

$$\Delta_z(a_i) = \Delta_H(a_i)z_i, \qquad \varepsilon_z(a_i) = \varepsilon_H(a_i), \qquad S_z(a_i) = S_H(a_i)\nabla_B(z_i).$$

Extendemos multiplicativamente $\Delta_z$ y $\varepsilon_z$ al resto de elementos de $L_z$ y antimultiplicativamente $S_z$.

Escribiremos el elemento $h \otimes b \in L_z$ como $hb$. Si $\{b_j : j \in J\}$ es una base de $B$, entonces

$$\{x^s u^t a_F^E b_j^\gamma : 0 \leq s, t < n,\ (F, E) \in \Gamma \cup \{(0, 0)\},\ j \in J,\ \gamma = 0, 1\}$$

es una base de $L_z$.

**Teorema 3.2.1.** *$L_z$ es un álgebra de Hopf.*

*Demostración.*

Paso 1: Probaremos que $\Delta_z$ y $\varepsilon_z$ son homomorfismos de álgebras y que $S_z$ es antihomomorfismo de álgebras. Para ello, basta probar que se respetan las relaciones que definen $L_z$. El caso de $\varepsilon_z$ es fácil pues, dados $h \in H$ y $b \in B$, se tiene $\varepsilon_z(hb) = \varepsilon_H(h)\varepsilon_B(b) = \varepsilon_z(bh)$ y tanto $\varepsilon_H$ como $\varepsilon_B$ son homomorfismos de álgebras. Por razones análogas, para $\Delta_z$ y $S_z$ basta probar que se respetan las relaciones que involucran a $a_i^{\pm 1}$.

- Relación $a_i u = u a_i$:

$$\begin{aligned}
\Delta_z(a_i u) &= \Delta_z(a_i)\Delta_z(u) \\
&= \Delta_H(a_i)z_i\Delta_H(u) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_H(a_i)\Delta_H(u)z_i && (z_i \in Z(L_z \otimes L_z)) \\
&= \Delta_H(a_i u)z_i && (\Delta_H \text{ hom. álgebras}) \\
&= \Delta_H(u a_i)z_i && \text{(relación)} \\
&= \Delta_H(u)\Delta_H(a_i)z_i && (\Delta_H \text{ hom. álgebras}) \\
&= \Delta_z(u)\Delta_z(a_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_z(u a_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z(a_iu) &= S_z(u)S_z(a_i) & \\
&= S_H(u)S_H(a_i)\nabla_B(z_i) & &\text{(definición de } S_z\text{)}\\
&= S_H(a_iu)\nabla_B(z_i) & &(S_H \text{ antihom. álgebras})\\
&= S_H(ua_i)\nabla_B(z_i) & &\text{(relación)}\\
&= S_H(a_i)S_H(u)\nabla_B(z_i) & &(S_H \text{ antihom. álgebras})\\
&= S_H(a_i)\nabla_B(z_i)S_H(u) & &(\nabla_B(z_i) \in Z(L_z))\\
&= S_z(a_i)S_z(u) & &\text{(definición de } S_z\text{)}\\
&= S_z(ua_i).
\end{aligned}$$

- Relación $a_ix = q_ixa_i$:

$$\begin{aligned}
\Delta_z(a_ix) &= \Delta_z(a_i)\Delta_z(x) & \\
&= \Delta_H(a_i)z_i\Delta_H(x) & &\text{(definición de } \Delta_z\text{)}\\
&= \Delta_H(a_i)\Delta_H(x)z_i & &(z_i \in Z(L_z \otimes L_z))\\
&= \Delta_H(a_ix)z_i & &(\Delta_H \text{ es hom. álgebras})\\
&= \Delta_H(q_ixa_i)z_i & &\text{(relación)}\\
&= \Delta_H(q_ix)\Delta_H(a_i)z_i & &(\Delta_H \text{ es hom. álgebras})\\
&= \Delta_z(q_ix)\Delta_z(a_i) & &\text{(definición de } \Delta_z\text{)}\\
&= \Delta_z(q_ixa_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z(a_ix) &= S_z(x)S_z(a_i) & \\
&= S_H(x)S_H(a_i)\nabla_B(z_i) & &\text{(definición de } S_z\text{)}\\
&= S_H(a_ix)\nabla_B(z_i) & &(S_H \text{ antihom. álgebras})\\
&= S_H(q_ixa_i)\nabla_B(z_i) & &\text{(relación)}\\
&= S_H(a_i)S_H(q_ix)\nabla_B(z_i) & &(S_H \text{ antihom. álgebras})\\
&= S_H(a_i)\nabla_B(z_i)S_H(q_ix) & &(\nabla_B(z_i) \in Z(L_z))\\
&= S_z(a_i)S_z(q_ix) & &\text{(definición de } S_z\text{)}\\
&= S_z(q_ixa_i).
\end{aligned}$$

- Relación $a_ia_i^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta_z(a_ia_i^{-1}) &= \Delta_z(a_i)\Delta_z(a_i^{-1}) & \\
&= \Delta_H(a_i)z_i\Delta_H(a_i^{-1})z_i^{-1} & &\text{(definición de } \Delta_z\text{)}\\
&= \Delta_H(a_i)z_iz_i^{-1}\Delta_H(a_i^{-1}) & &(z_i^{-1} \in Z(L_z \otimes L_z))\\
&= \Delta_H(a_i)\Delta_H(a_i^{-1}) & \\
&= \Delta_H(a_ia_i^{-1}) & &(\Delta_H \text{ hom. álgebras})\\
&= \Delta_H(1) & \\
&= \Delta_z(1).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_z(a_i a_i^{-1}) &= S_z(a_i^{-1})S_z(a_i) \\
&= S_H(a_i^{-1})\nabla_B(z_i^{-1})S_H(a_i)\nabla_B(z_i) && \text{(definición de } S_z) \\
&= S_H(a_i^{-1})\nabla_B(z_i^{-1})\nabla_B(z_i)S_H(a_i) && (\nabla_B(z_i) \in Z(L_z)) \\
&= S_H(a_i^{-1})S_H(a_i) && (\nabla_B(z_i^{-1})\nabla_B(z_i) = \nabla_B(z_i^{-1}z_i), \\
& && \text{pues } z_i \in Z(B) \otimes Z(B)) \\
&= S_H(a_i a_i^{-1}) && (S_H \text{ antihom. álgebras}) \\
&= S_H(1) \\
&= S_z(1).
\end{aligned}
$$

Del mismo modo se comprueba para $a_i^{-1}a_i = 1$.

- Relación $a_i a_j = a_j a_i$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_z(a_i a_j) &= \Delta_z(a_i)\Delta_z(a_j) \\
&= \Delta_H(a_i)z_i\Delta_H(a_j)z_j && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_H(a_i)\Delta_H(a_j)z_i z_j && (z_i \in Z(L_z \otimes L_z)) \\
&= \Delta_H(a_i a_j)z_i z_j && (\Delta_H \text{ hom. álgebras}) \\
&= \Delta_H(a_j a_i)z_i z_j && \text{(relación)} \\
&= \Delta_H(a_j)\Delta_H(a_i)z_i z_j && (\Delta_H \text{ hom. álgebras}) \\
&= \Delta_H(a_j)z_j\Delta_H(a_i)z_i && (z_j \in Z(L_z \otimes L_z)) \\
&= \Delta_z(a_j)\Delta_z(a_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_z(a_j a_i).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_z(a_i a_j) &= S_z(a_j)S_z(a_i) \\
&= S_H(a_j)\nabla_B(z_j)S_H(a_i)\nabla_B(z_i) && \text{(definición de } S_z) \\
&= S_H(a_j)S_H(a_i)\nabla_B(z_j)\nabla_B(z_i) && (\nabla_B(z_j) \in Z(L_z)) \\
&= S_H(a_i a_j)\nabla_B(z_j)\nabla_B(z_i) && (S_H \text{ antihom. álgebras}) \\
&= S_H(a_j a_i)\nabla_B(z_j)\nabla_B(z_i) && \text{(relación)} \\
&= S_H(a_i)S_H(a_j)\nabla_B(z_j)\nabla_B(z_i) && (S_H \text{ antihom. álgebras}) \\
&= S_H(a_i)\nabla_B(z_i)S_H(a_j)\nabla_B(z_j) && (\nabla_B(z_i) \in Z(L_z)) \\
&= S_z(a_i)S_z(a_j) && \text{(definición de } S_z) \\
&= S_z(a_j a_i).
\end{aligned}
$$

- Relación $a_i b_j = b_j a_i$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_z(a_i b_j) &= \Delta_z(a_i)\Delta_z(b_j) \\
&= \Delta_H(a_i)z_i\Delta_B(b_j) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_H(a_i)\Delta_B(b_j)z_i && (z_i \in Z(B) \otimes Z(B)) \\
&= \Delta_B(b_j)\Delta_H(a_i)z_i && (B \text{ y } H \text{ conmutan}) \\
&= \Delta_z(b_j)\Delta_z(a_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&= \Delta_z(b_j a_i).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
S_z(a_ib_j) &= S_z(b_j)S_z(a_i) \\
&= S_B(b_j)S_H(a_i)\nabla_B(z_i) && \text{(definición de } S_z) \\
&= S_H(a_i)\nabla_B(z_i)S_B(b_j) && (B \text{ y } H \text{ conmutan} \\
& && \text{ y } \nabla_B(z_i) \in Z(B)) \\
&= S_z(a_i)S_z(b_j) && \text{(definición de } S_z) \\
&= S_z(b_ja_i).
\end{aligned}$$

Paso 2: Probaremos la coasociatividad, es decir, veremos que se cumple la igualdad $(\Delta_z \otimes id)\Delta_z = (id \otimes \Delta_z)\Delta_z$. Basta probarlo para los generadores de $H$, pues $\Delta_z$ es homomorfismo de álgebras. Por otra parte, como $\Delta_z(u) = \Delta_H(u)$, $\Delta_z(x) = \Delta_H(x)$, $\Delta_z|_B = \Delta_B$ y sabemos que $\Delta_H$ y $\Delta_B$ cumplen la igualdad, es suficiente comprobarla para $a_i$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
&(\Delta_z \otimes id)\Delta_z(a_i) = \\
&\quad = (\Delta_z \otimes id)(\Delta_H(a_i)z_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&\quad = (\Delta_z \otimes id)(\Delta_H(a_i))(\Delta_z \otimes id)(z_i) && (\Delta_z \otimes id \text{ hom. álg.}) \\
&\quad = (\Delta_z \otimes id)(\Delta_H(a_i))(\Delta_B \otimes id)(z_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&\quad = (\Delta_z \otimes id)\left[\left(1 \otimes 1 + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega(n-k)!_\omega}x^{n-k}u^k \otimes x^k\right)(a_i \otimes a_i)\right] \\
&\qquad\quad (\Delta_B \otimes id)(z_i) && \text{(definición de } \Delta_H) \\
&\quad = (\Delta_z \otimes id)\left(1 \otimes 1 + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega(n-k)!_\omega}x^{n-k}u^k \otimes x^k\right) \\
&\qquad\quad (\Delta_z(a_i) \otimes a_i)\,(\Delta_B \otimes id)(z_i) && (\Delta_z \otimes id \text{ hom. álgebras}) \\
&\quad = (\Delta_H \otimes id)\left(1 \otimes 1 + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega(n-k)!_\omega}x^{n-k}u^k \otimes x^k\right) \\
&\qquad\quad (\Delta_H(a_i)z_i \otimes a_i)\,(\Delta_B \otimes id)(z_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&\quad = (\Delta_H \otimes id)\left(1 \otimes 1 + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega(n-k)!_\omega}x^{n-k}u^k \otimes x^k\right) \\
&\qquad\quad (\Delta_H(a_i) \otimes a_i)\,(z_i \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z_i) && (z_i \in Z(L_z \otimes L_z)) \\
&\quad = (\Delta_H \otimes id)\left[\left(1 \otimes 1 + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega(n-k)!_\omega}x^{n-k}u^k \otimes x^k\right)(a_i \otimes a_i)\right] \\
&\qquad\quad (z_i \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z_i) && (\Delta_H \otimes id \text{ hom. álgebras}) \\
&\quad = (\Delta_H \otimes id)\Delta_H(a_i)(z_i \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z_i) \\
&\quad = (id \otimes \Delta_H)\Delta_H(a_i)(1 \otimes z_i)(id \otimes \Delta_B)(z_i) \\
& && \text{(relación } \clubsuit \text{ (2) y coasociatividad de } \Delta_H)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (id \otimes \Delta_H) \left[ \left( 1 \otimes 1 + \alpha(1 - q_i^n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k \otimes x^k \right) (a_i \otimes a_i) \right] \\
&\qquad (1 \otimes z_i)(id \otimes \Delta_B)(z_i) \\
&= (id \otimes \Delta_H) \left( 1 \otimes 1 + \alpha(1 - q_i^n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k \otimes x^k \right) \\
&\qquad (a_i \otimes \Delta_H(a_i))\,(1 \otimes z_i)(id \otimes \Delta_B)(z_i) && (id \otimes \Delta_H \text{ hom. álgebras}) \\
&= (id \otimes \Delta_H) \left( 1 \otimes 1 + \alpha(1 - q_i^n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k \otimes x^k \right) \\
&\qquad (a_i \otimes \Delta_H(a_i) z_i)\,(id \otimes \Delta_B)(z_i) \\
&= (id \otimes \Delta_z) \left( 1 \otimes 1 + \alpha(1 - q_i^n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k \otimes x^k \right) \\
&\qquad (a_i \otimes \Delta_z(a_i))\,(id \otimes \Delta_z)(z_i) && (\text{definición de } \Delta_z) \\
&= (id \otimes \Delta_z) \left[ \left( 1 \otimes 1 + \alpha(1 - q_i^n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} x^{n-k} u^k \otimes x^k \right) (a_i \otimes a_i) \right] \\
&\qquad (id \otimes \Delta_z)(z_i) && (id \otimes \Delta_z \text{ hom. álgebras}) \\
&= (id \otimes \Delta_z)\,(\Delta_H(a_i))\,(id \otimes \Delta_z)(z_i) \\
&= (id \otimes \Delta_z)\,(\Delta_H(a_i) z_i) && (id \otimes \Delta_z \text{ hom. álgebras}) \\
&= (id \otimes \Delta_z)\,(\Delta_z(a_i)) && (\text{definición de } \Delta_z).
\end{aligned}
$$

<u>Paso 3:</u> Probamos la propiedad de la counidad. Por las mismas razones que en el paso 2, basta probar las igualdades $(\varepsilon_z \otimes id) \circ \Delta_z = id$ e $(id \otimes \varepsilon_z) \circ \Delta_z = id$ para $a_i$. Calculamos entonces:

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon_z \otimes id) \circ \Delta_z(a_i) \\
&\quad = (\varepsilon_z \otimes id)\,(\Delta_H(a_i) z_i) \\
&\quad = (\varepsilon_z \otimes id)\,(\Delta_H(a_i))\,(\varepsilon_z \otimes id)(z_i) && (\varepsilon_z \otimes id \text{ hom. álgebras}) \\
&\quad = \big((\varepsilon_H \otimes id) \circ \Delta_H\big)(a_i)(\varepsilon_B \otimes id)(z_i) && (\text{definición de } \varepsilon_z) \\
&\quad = \big((\varepsilon_H \otimes id) \circ \Delta_H\big)(a_i) && (\text{condición } \clubsuit\ (3)) \\
&\quad = a_i && (\text{propiedad de counidad}).
\end{aligned}
$$

La igualdad $(id \otimes \varepsilon_z) \circ \Delta_z = id$ se prueba de forma análoga.

<u>Paso 4:</u> Probamos por último la propiedad de la antípoda. Al igual que en los pasos 2 y 3, basta probar las igualdades $S_z \star id = \varepsilon_z(-)1_{L_z}$ e $id \star S_z = \varepsilon_z(-)1_{L_z}$

para $a_i$. Calculamos:

$$\begin{aligned}
&(S_z \star id)(a_i) \\
&\quad = (\nabla_z \circ (S_z \otimes id) \circ \Delta_z)(a_i) && \text{(definición de } \star) \\
&\quad = (\nabla_z \circ (S_z \otimes id))(\Delta_H(a_i)z_i) && \text{(definición de } \Delta_z) \\
&\quad = S_z(a_i z_{i1})a_i z_{i2} + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} S_z(a_i x^{n-k}u^k z_{i1})a_i x^k z_{i2} \\
& && (S_z \text{ antihom. álgebras}) \\
&\quad = S_z(z_{i1})S_z(a_i)a_i z_{i2} \\
&\qquad + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} S_z(z_{i1})S_z(x^{n-k}u^k)S_z(a_i)a_i x^k z_{i2} \\
&\quad = S_z(z_{i1})S_H(a_i)\nabla_B(z_i)a_i z_{i2} \\
&\qquad + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} S_z(z_{i1})S_H(x^{n-k}u^k)S_H(a_i)\nabla_B(z_i)a_i x^k z_{i2} \\
& && \text{(definición de } S_z) \\
&\quad = \nabla_B(z_i)S_z(z_{i1})S_H(a_i)a_i z_{i2} \\
&\qquad + \alpha(1-q_i^n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!_\omega (n-k)!_\omega} \nabla_B(z_i)S_z(z_{i1})S_H(a_i x^{n-k}u^k)a_i x^k z_{i2} \\
& && (\nabla_B(z_i) \in Z(H)) \\
&\quad = \nabla_B(z_i)S_z(z_{i1})(S_H \star id)(a_i)z_{i2} \\
&\quad = \nabla_B(z_i)S_z(z_{i1})\varepsilon_H(a_i)1_H z_{i2} \\
&\quad = \nabla_B(z_i)S_z(z_{i1})z_{i2} \\
&\quad = 1_B && \text{(condición } \clubsuit \text{ (4))} \\
&\quad = \varepsilon_z(a_i)1_{L_z} && (\varepsilon_z(a_i) = 1).
\end{aligned}$$

La igualdad $id \star S_z = \varepsilon_z(-)1_{L_z}$ se prueba de forma análoga. □

Además, esta familia de álgebras de Hopf tiene integral siempre que $B$ tenga integral.

**Teorema 3.2.2.** *Si $B$ tiene integral, entonces $L_z$ tiene integral. Las integrales a derecha e izquierda de $L_z$ vienen dadas por*

$$\mu_z(x^s u^t a_F^E b_j^\gamma) = \delta_{s,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b_j^\gamma),$$
$$\lambda_z(x^s u^t a_F^E b_j^\gamma) = \delta_{s,n-1}\delta_{t,1}\delta_{F,0}\lambda_B(b_j^\gamma),$$

*donde $\mu_B$ y $\lambda_B$ son integrales a derecha e izquierda de $B$, respectivamente. Si $g_B$ es el elemento modular de $B$, entonces el elemento modular de $L_z$ es $g_B u^{n-1}$.*

*Demostración.* Como $\Delta_z$ es homomorfismo de álgebras, podemos calcular la comultiplicación de un elemento general de la base. Es la siguiente:

$$\Delta_z\big(x^s u^t a_F^E b_j^\gamma\big) = \Delta_H\big(x^s u^t a_F^E\big) z_F^E \Delta_B(b_j^\gamma) \qquad (z_F^E \text{ denota } z_{i_1}^{e_{i_1}} \cdots z_{i_r}^{e_{i_r}})$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_\omega x^l u^{s-l+t} a_F^E b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E \otimes x^{s-l} u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E$$

$$+(s)!_\omega \alpha\big(1 - q_F^{nE}\big) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} x^{n-k+s} u^{k+t} a_F^E b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E \otimes x^k u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E.$$

Evaluamos $\mu_z$ en el segundo tensorando. Entonces,

$$\sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_\omega x^{s-l} u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E \mu_z\big(x^l u^{s-l+t} a_F^E b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E\big)$$

$$+(s)!_\omega \alpha\big(1 - q_F^{nE}\big) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} x^k u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E \mu_z\big(x^{n-k+s} u^{k+t} a_F^E b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E\big)$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_\omega x^{s-l} u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E \delta_{l,n-1} \delta_{s-l+t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E)$$

$$+(s)!_\omega \alpha\big(1 - q_F^{nE}\big) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} x^k u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E$$

$$\delta_{n-k+s,n-1} \delta_{k+t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E)$$

$$= u^t a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E \delta_{s,n-1} \delta_{t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E) \qquad \text{(Si } l = n-1, \text{ entonces } s = n-1$$
$$\text{y el segundo sumando desaparece)}$$

$$= a_F^E b_{j(2)}^\gamma z_{F2}^E \delta_{s,n-1} \delta_{t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b_{j(1)}^\gamma z_{F1}^E) \qquad \text{(aplicamos } t = 0)$$

$$= b_{j(2)}^\gamma \delta_{s,n-1} \delta_{t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b_{j(1)}^\gamma) \qquad \text{(si } F = 0, \text{ entonces } E = 0)$$

$$= \delta_{s,n-1} \delta_{t,0} \delta_{F,0} \mu_B(b^\gamma) 1_B \qquad (\mu_B \text{ es int. a derecha})$$

$$= \mu_z\big(x^s u^t a_F^E b_j^\gamma\big) 1_{L_z}.$$

Mostramos la afirmación sobre el elemento modular. De nuevo por linealidad, basta comprobar la condición $\mu_z(h_{(2)})h_{(1)} = \mu_z(h) g_B u^{n-1}$ para elementos $h$ de la base. Entonces,

$$\mu_z((x^s u^t a_F^E b_j^r)_{(2)})(x^s u^t a_F^E b_j^r)_{(1)}$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_\omega \mu_z(x^{s-l} u^t a_F^E b_{j(2)}^r z_{F2}^E) x^l u^{s-l+t} a_F^E b_{j(1)}^r z_{F1}^E$$

$$+(s)!_\omega \alpha(1 - q_F^{nE}) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} \mu_z(x^k u^t a_F^E b_{j(2)}^r z_{F2}^E) x^{n-k+s} u^{k+t} a_F^E b_{j(1)}^r z_{F1}^E$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_{\omega} \delta_{s-l,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)}z^E_{F2})x^l u^{s-l+t} a^E_F b^r_{j(1)} z^E_{F1} \\
&\quad +(s)!_\omega \alpha(1-q_F^{nE}) \sum_{k=s+1}^{n-1} \frac{1}{(k)!_\omega (n-k+s)!_\omega} \delta_{k,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)}z^E_{F2}) \\
&\quad x^{n-k+s}u^{k+t}a^E_F b^r_{j(1)} z^E_{F1} \\
&= \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l}_{\omega} \delta_{s-l,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)})x^l u^{s-l+t} b^r_{j(1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(si } F=0\text{, entonces } E=0 \text{ y así } q_F^{nE}=1) \\
&= \delta_{s,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)})u^{n-1+t}b^r_{j(1)} \qquad \text{(si } s-l=n-1\text{,entonces } s=n-1 \text{ y } l=0) \\
&= \delta_{s,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)})u^{n-1}b^r_{j(1)} \qquad \text{(condición } t=0) \\
&= \delta_{s,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}\mu_B(b^r_{j(2)})b^r_{j(1)}u^{n-1} \qquad (u \text{ conmuta con } b^r_{j(1)}) \\
&= \delta_{s,n-1}\delta_{t,0}\delta_{F,0}g_B u^{n-1} \qquad \text{(def. de } g_B) \\
&= \mu_z(x^s u^t a^E_F b^r_j) g_B u^{n-1} \qquad \text{(def. de } \mu_z).
\end{aligned}
$$

□

Por último, veremos algunos ejemplos concretos de esta construcción.

**Ejemplo 3.2.3.** *Si $B$ es cualquier álgebra de Hopf, $z = 1_B \otimes 1_B$ cumple las condiciones de ♣. En este caso, $L_z$ sería simplemente el producto tensorial de álgebras de Hopf $H \otimes B$.*

Antes de presentar el resto de ejemplos necesitaremos el siguiente lema, que nos da los idempotentes de la descomposición de Wedderburn de un álgebra de grupo para un grupo cíclico.

**Lema 3.2.4.** *Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$. Supongamos que $\mathrm{car}(\Bbbk) \nmid m$ y que existe una raíz m-ésima primitiva de la unidad $\eta \in \Bbbk$. Consideremos el grupo cíclico $\mathbb{Z}_m$ y fijemos un generador $\sigma$. Pongamos*

$$e_i = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} \eta^{il}\sigma^l, \qquad i = 0, \ldots, m-1.$$

*La familia $\{e_i\}_{i=1}^{m-1}$ satisface las siguientes propiedades:*

*(i) Es un conjunto completo de idempotentes ortogonales, es decir, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ y $\sum_{i=0}^{m-1} e_i = 1$.*

*(ii) $\sigma^j e_i = \eta^{-ji} e_i$ y $\sigma^j = \sum_{i=0}^{m-1} \eta^{-ji} e_i$.*

*Demostración.* (i) Para $i, j$ tenemos:

$$\begin{aligned}
e_i e_j &= \left(\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{il}\sigma^l\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\eta^{jk}\sigma^k\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\eta^{il+jk}\sigma^{l+k}\\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{t=0}^{m-1}\eta^{il+j(t-l)}\sigma^t = \frac{1}{m^2}\sum_{t=0}^{m-1}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{(i-j)l}\right)\eta^{jt}\sigma^t\\
&= \frac{1}{m^2}\sum_{t=0}^{m-1}(m\delta_{ij})\,\eta^{jt}\sigma^t = \delta_{ij}\frac{1}{m}\sum_{t=0}^{m-1}\eta^{jt}\sigma^t\\
&= \delta_{ij}e_j.
\end{aligned}$$

Calculamos la suma de los $e_i$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} e_i = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{il}\sigma^l = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\eta^{il}\right)\sigma^l = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} m\delta_{l0}\sigma^l = 1.$$

(ii) Veamos primero que $\sigma^j e_i = \eta^{-ji}e_i$:

$$\sigma^j e_i = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{il}\sigma^{l+j} = \eta^{-ji}\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{i(l+j)}\sigma^{l+j} = \eta^{-ji}\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\eta^{il}\sigma^l = \eta^{-ji}e_i.$$

Usando lo anterior,

$$\sum_{i=0}^{m-1}\eta^{-ji}e_i = \sum_{i=0}^{m-1}\sigma^j e_i = \sigma^j\sum_{i=0}^{m-1}e_i = \sigma^j.$$

□

**Proposición 3.2.5.** *Con la notación e hipótesis anteriores, pongamos $B = \Bbbk[\mathbb{Z}_m]$ y tomamos*

$$z = \frac{1}{m}\sum_{i,l=0}^{m-1}\eta^{il}\sigma^l\otimes\sigma^i.$$

*Entonces, $z$ cumple las condiciones ♣.*

*Demostración.* Observemos que, con la definición anterior de $e_i$, podemos escribir $z = \sum_{i=0}^{m-1} e_i\otimes\sigma^i = \sum_{i=0}^{m-1}\sigma^i\otimes e_i$.

(1) Veamos que se cumple $z^k = \sum_{i=0}^{m-1} e_i\otimes\sigma^{ki}$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Por tanto, se tendrá $z^m = 1\otimes 1$ y $z$ será invertible.

$$\begin{aligned}
z^k &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^i\right)^k \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} e_i^k \otimes \sigma^{ik} \qquad \text{(pues los } e_i \text{ son ortogonales)} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^{ik} \qquad \text{(pues los } e_i \text{ son idempotentes).}
\end{aligned}$$

(2) Mostramos ahora $(z \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z) = (1 \otimes z)(id \otimes \Delta_B)(z)$:

$$\begin{aligned}
(z \otimes 1)(\Delta_B \otimes id)(z) &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^i \otimes 1\right)(\Delta_B \otimes id)\left(\sum_{j=0}^{m-1} \sigma^j \otimes e_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^i \otimes 1\right)\left(\sum_{j=0}^{m-1} \sigma^j \otimes \sigma^j \otimes e_j\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{m-1} e_i\sigma^j \otimes \sigma^{i+j} \otimes e_j \\
&= \sum_{i,j=0}^{m-1} \eta^{-ji} e_i \otimes \sigma^{i+j} \otimes e_j \\
&= \sum_{i,j=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^{i+j} \otimes e_j\sigma^i \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m-1} 1 \otimes \sigma^j \otimes e_j\right)\left(\sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^i \otimes \sigma^j\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m-1} 1 \otimes \sigma^j \otimes e_j\right)(id \otimes \Delta_B)\left(\sum_{i=0}^{m-1} e_i \otimes \sigma^i\right) \\
&= (1 \otimes z)(id \otimes \Delta_B)(z).
\end{aligned}$$

(3) Comprobamos que $(\varepsilon_B \otimes id)(z) = (id \otimes \varepsilon_B)(z) = 1$:

$$(\varepsilon_B \otimes id)(z) = (\varepsilon_B \otimes id)\left(\sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i \otimes e_i\right) = \sum_{i=0}^{m-1} e_i = 1.$$

De la misma forma se comprueba que $(id \otimes \varepsilon_B)(z) = 1$.

(4) Por último, $\nabla_B(z)\nabla_B((id\otimes S_B)(z)) = \nabla_B(z)\nabla_B((S_B\otimes id)(z)) = 1$:

$$\begin{aligned}\nabla_B(z)\nabla_B((id\otimes S_B)(z)) &= \sum_{i=0}^{m-1} e_i\sigma^i \sum_{j=0}^{m-1} e_j\sigma^{m-j} = \sum_{i,j=0}^{m-1} e_ie_j\sigma^{i+m-j}\\ &= \sum_{i=0}^{m-1} e_i\sigma^m = \sum_{i=0}^{m-1} e_i = 1.\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba $\nabla_B(z)\nabla_B((S_B\otimes id)(z)) = 1$.

□

De forma idéntica se puede demostrar lo siguiente:

**Proposición 3.2.6.** *Pongamos $B = \Bbbk[\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_m]$. Sean $\sigma,\tau$ generadores tales que $\sigma^m = \tau^m = 1$ y $\sigma\tau = \tau\sigma$. Ponemos*

$$z = \frac{1}{m}\sum_{i,l=0}^{m-1} \eta^{il}\sigma^l\otimes\tau^i.$$

*Entonces, $z$ cumple las condiciones de ♣.*

## 3.3. Futura línea de trabajo

Este trabajo fue iniciado en mi etapa como becaria de colaboración en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería en el curso 2013-14. En él he querido reflejar una buena parte de lo que he aprendido durante estos dos cursos y presentar los primeros resultados obtenidos en mi iniciación a la investigación. Mi intención es realizar una tesis doctoral en este tema bajo la dirección del profesor Juan Cuadra Díaz.

Los ejemplos de Andruskiewitsch, Cuadra y Etingof son los primeros ejemplos de álgebras de Hopf con integral no conmutativas de dimensión infinita que encajan en una sucesión exacta con núcleo de dimensión finita y conúcleo cosemisimple. Este hecho supone un avance en la comprensión de la estructura de estas álgebras de Hopf, pues los ejemplos no conmutativos conocidos hasta ahora respondían a un patrón diferente: encajaban en sucesiones con núcleo cosemisimple y conúcleo de dimensión finita.

Nuestro objetivo para los próximos años es aplicar el método de estos autores a espacios cuánticos generales, no solo rectas, sobre grupos abelianos y no abelianos. Nos gustaría poder establecer una clasificación para álgebras de Hopf con integral como la dada por Andruskiewitsch y Schneider en [7] para álgebras de Hopf punteadas con elementos de tipo grupo que forman un grupo abeliano. Nuestra idea es producir ejemplos que nos permitan lograr una mayor comprensión de la estructura de las álgebras de Hopf con integral. Concretamente, nos gustaría ser capaces de responder a la siguiente pregunta, sugerida por los ejemplos conocidos hasta el momento: *¿Es toda álgebra de Hopf con integral una extensión, en un «sentido débil», de un álgebra de Hopf cosemisimple y una de dimensión finita?*

Con «sentido débil» queremos expresar:

(1) Quizá alguno de los extremos no es un álgebra de Hopf, sino una subestructura o estructura cociente más débil, como las de subálgebra coideal o módulo coálgebra cociente;

(2) Quizá los extremos no son normales o conormales.

En un lenguaje menos preciso, la pregunta sería: *¿Es cierto que toda álgebra de Hopf con integral se puede construir, de algún modo, a partir de subestructuras y estructuras cocientes cosemisimples y de dimensión finita?*

**Créditos fotográficos**

Pág. 3. Terence Tao. MacTutor History of Mathematics Archive.

Pág. 16. Sophus Lie. MacTutor History of Mathematics Archive.

Pág. 18. Alfréd Haar. MacTutor History of Mathematics Archive.

Pág. 44. Gerhard Hochschild. Oberwolfach Photo Collection.

Pág. 49. Moss E. Sweedler. Fotografía editada de Oberwolfach Photo Collection.

Pág. 62. Heinz Hopf. MacTutor History of Mathematics Archive.

Pág. 65. Earl J. Taft. Rutgers School of Arts and Sciences.

Pág. 87. David E. Radford. University of Illinois at Chicago.

Pág. 91. Irving Kaplansky. MacTutor History of Mathematics Archive.

Pág. 92. Ferdinand G. Frobenius. MacTutor History of Mathematics Archive.

# Bibliografía


[1] H.H. Andersen, P. Polo y K. Wen, *Representations of quantum algebras.* Invent. Math. **104** (1991), 1-59.

[2] N. Andruskiewitsch y J. Cuadra, *On the structure of (co-Frobenius) Hopf algebras.* J. Noncommut. Geom. **7** (2013), 83–104.

[3] N. Andruskiewitsch, J. Cuadra y P. Etingof, *On two finiteness conditions for Hopf algebras with nonzero integral.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XIV No. 2 (2015), 401-440.

[4] N. Andruskiewitsch y S. Dăscălescu, *Co-Frobenius Hopf algebras and the coradical filtration.* Math. Z. **243** (2003), 145-154.

[5] N. Andruskiewitsch y G.A. García, *Quantum subgroups of a simple quantum group at roots of one.* Compos. Math. **145** (2009), 476-500.

[6] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order $p^3$.* J. Algebra **209** (1998), 658-691.

[7] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras.* Ann. of Math. (2) **171** (2010), 375-417.

[8] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *A characterization of quantum groups.* J. Reine Angew. Math. **577** (2004), 81-104.

[9] A. Baker, Matrix Group. An Introduccion to Lie Group Theory. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, 2002.

[10] M. Beattie, D. Bulacu, B. Torrecillas, *Radford's $S^4$ formula for co-Frobenius Hopf algebras.* J. Algebra **307** (2007), 330–342.

[11] M. Beattie, S. Dăscălescu y L. Grünenfelder, *Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions.* J. Algebra **225** (2000), 743-770.

[12] M. Beattie, S. Dăscălescu, L. Grünenfelder y C. Năstăsescu, *Finiteness conditions, co-Frobenius Hopf algebras, and quantum groups.* J. Algebra **200** (1998), 312-333.

[13] D. Bump, Lie groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics **225**. Springer, 2013.

[14] C. Calinescu, *On the bijectivity of the antipode in a co-Frobenius Hopf algebra.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **44(92)** No. 1 (2001), 59-62.

[15] J. Cuadra, *On Hopf algebras with nonzero integral.* Comm. Algebra **34** (2006), 2143-2156.

[16] F. Castaño Iglesias, S. Dăscălescu y C. Năstăsescu, *Symmetric coalgebras.* J. Algebra **279** (2004), 326-344.

[17] S. Dăscălescu y C. Năstăsescu, *Coactions on spaces of morphisms.* Algebr. Represent. Theory **12** (2009), 193-198.

[18] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu y B. Toader, *On the dimension of the space of integrals on coalgebras.* J. Algebra **324** (2010), 1625-1635.

[19] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu y B. Torrecillas, *Co-Frobenius Hopf algebras: integrals, Doi-Koppinen modules and injective objects.* J. Algebra **220** (1999), 542-560.

[20] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu y B. Torrecillas, *Involutory Hopf algebras with non-zero integrals.* Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 33-36.

[21] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu y Ş. Raianu, Hopf algebras. An introduction. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **235**. Marcel-Dekker, 2001.

[22] C. De Concini y V. Lyubashenko, *Quantum function algebra at roots of 1.* Adv. Math. **108** (1994), 205-262.

[23] S. Donkin, *On projective modules for algebraic groups.* J. London Math. Soc. (2) **54** (1996), 75-88.

[24] S. Donkin, *On the existence of Auslander-Reiten sequences of group representations II.* Algebr. Represent. Theory **1** (1998), 215-253.

[25] P. Etingof y S. Gelaki, *On finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic.* Internat. Math. Res. Notices 1998, No. 16, 851-864.

[26] G.A. García, *Quantum subgroups of $GL_{\alpha,\beta}(n)$.* J. Algebra **324** (2010), 1392-1428.

[27] J. Gómez Torrecillas, C. Manu y C. Năstăsescu, *Quasi-co-Frobenius coalgebras II.* Comm. Algebra **31** (2003), 5169-5177.

[28] J. Gómez Torrecillas y C. Năstăsescu, *Quasi-co-Frobenius coalgebras*. J. Algebra **174** (1995), 909-923.

[29] P.H. Hai, *Splitting Comodules over Hopf Algebras and Applications to Representation Theory of Quantum Groups of Type* $A_{0|0}$. J. Algebra **245** (2001), 20-41.

[30] P.H. Hai y N.H. Hung, *The uniqueness of integrals on Hopf algebras: a categorical approach.* Arxiv:math.QA/0305117v1.

[31] B. I-Peng Lin, *Semiperfect coalgebras*. J. Algebra **49** (1977), 357-373.

[32] G. Hochschild, The Structure of Lie Groups. Holden-Day, 1965.

[33] G. Hochschild, Basic Theory of Algebraic Group and Lie Algebras. Graduate Texts in Mathematics **75**. Springer-Verlag, 1981.

[34] M.C. Iovanov, *Co-Frobenius coalgebras*. J. Algebra **303** (2006), 146–153.

[35] M.C. Iovanov, *Abstract algebraic integrals and Frobenius categories*. Internat. J. Math. **24** No. 10 (2013), 1350081, 36pp.

[36] M.C. Iovanov, *Generalized Frobenius algebras and Hopf algebras*. Canad. J. Math. **66** (2014), 205-240.

[37] M.C. Iovanov y S. Raianu, *The bijectivity of the antipode revisited*. Comm. Algebra **39** (2011), 4662-4668.

[38] S. Lang, Algebra. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics **211**. Springer-Verlag, 2002.

[39] R. Larson y D.E. Radford, *Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic* 0 *are semisimple*. J. Algebra **117** (1988), 267-289.

[40] R.G. Larson y M. Sweedler, *An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras*. Amer. J. Math. **91** (1969), 75-94.

[41] J.A. López Ramos, C. Năstăsescu y B. Torrecillas, *Minimal projective resolutions for comodules.* K-Theory **32** (2004), 357-364.

[42] W. Michaelis, *Coassociative coalgebras*. Handbook of algebra, Vol. **3**, 587–788. North-Holland, 2003.

[43] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **82**, Amer. Math. Soc., 1993.

[44] L. Nachbin, The Haar Integral. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, 1965.

[45] C. Procesi, Lie groups. An approach through invariants and representations. Universitext. Springer, 2007.

[46] D.E. Radford, *The antipode of a finite-dimensional Hopf algebra over a field has finite order*. Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 1103-1105.

[47] D.E. Radford, *The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite*. Amer. J. Math. **98** (1976), 333–355.

[48] D.E. Radford, *Finiteness conditions for a Hopf algebra with a nonzero integral.* J. Algebra **46** (1977), 189-195.

[49] D.E. Radford, Hopf algebras. Series on Knots and Everything Vol. 49. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, New Jersey, 2012.

[50] Ş. Raianu, *An easy proof for the uniqueness of integrals.* Actas del congreso *Hopf algebras and quantum groups (Brussels, 1998)*, 237–240. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **209**. Dekker, 2000.

[51] J.P. Serre, Linear Representations of finite Groups. Graduate Texts in Mathematics **42**. Springer-Verlag, 1977.

[52] M. Stroppel, Locally Compact Groups. EMS Textbooks in Mathematics. EMS Publishing House, 2006.

[53] H.-J. Schneider, Lectures on Hopf algebras. Apuntes de Sonia Natale. Trabajos de Matemática 31/95. Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), Facultad de Matemática, Astronomía y Física, 1995. 58pp.

[54] Y. Sommerhäuser, *On Kaplansky's fifth conjecture*. J. Algebra **204** (1998), 202-224.

[55] Y. Sommerhäuser, *On Kaplansky's conjectures.* Actas del congreso *Interactions between ring theory and representations of algebras (Murcia)*, 393–412. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **210**. Dekker, 2000.

[56] D. Ştefan, *The uniqueness of integrals (a homological approach)*. Comm. Algebra **23** (1995), 1657-1662.

[57] J.B. Sullivan, *The uniqueness of integrals for Hopf algebras and some existence theorems of integrals for commutative Hopf algebras.* J. Algebra **19** (1971), 426-440.

[58] J.B. Sullivan, *Affine group schemes with integrals.* J. Algebra **22** (1972), 546-558.

[59] M.E. Sweedler, *Integrals for Hopf algebras.* Ann. of Math. (2) **89** (1969), 323-335.

[60] E.J. Taft, *The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra.* Proc. Nat. Acad. Sci USA **68** (1971), 2631-2633.

[61] M. Takeuchi, *On the dimension of the space of integrals of Hopf algebras.* J. Algebra **21** (1972), 174-177.

[62] T. Tao, *Supercommutative gaussian integration, and the gaussian unitary ensemble.* Blog *What's new.* http://terrytao.wordpress.com/

[63] C.B. Thomas, Representations of Finite and Lie Groups. Imperial College Press, 2004.

[64] S. Tornier, *Haar measures.* Apuntes en página web: `https://people.math.ethz.ch/~torniers/download/2014/haar_measures.pdf.`

[65] A. Van Daele, *An algebraic framework for group duality.* Adv. Math. **140** (1998), 323-366.

[66] A. Van Daele, *Quantum groups with invariant integrals.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **97** (2000), 541-546.

# Índice de términos


álgebra, 48
- conmutativa, 48
- de potencias divididas, 69
- de Taft, 65
- dual, 52

álgebra de Hopf, 62
- counimodular, 83
- de funciones representativas, 40
- integral en, 70
- integral sobre, 68
- unimodular, 80

antípoda, 39, 62
- biyectividad, 77

automorfismo de Nakayama, 84

coálgebra, 48
- coconmutativa, 49
- cosemisimple, 89
- dual, 54
- simple, 89

comódulo, 56
- cubierta proyectiva, 95
- envolvente inyectiva, 94
- inyectivo, 94
- proyectivo, 94
- semisimple, 89
- simple, 89

comultiplicación, 38, 48
counidad, 39, 48

elemento
- coinvariante, 71
- de tipo grupo, 51
- modular, 80
- racional, 58

espacio topológico
- compacto, 13
- hausdorff, 13
- localmente compacto, 13
- normal, 13

Fórmula de Radford, 87
función
- modular, 28
- representativa, 35
- uniformemente continua, 16

grupo
- compacto, 15
- de Lie, 16
- localmente compacto, 15
- topológico, 14
- unimodular, 32

homomorfismo de
- álgebras, 50
- álgebras de Hopf, 66
- coálgebras, 50
- comódulos, 57
- módulos, 57

integral de Haar, 18
- teorema de existencia, 19
- teorema de unicidad, 24

módulo, 56
- localmente finito, 59
- racional, 59

módulo de Hopf, 71
- Teorema Fundamental de, 72

Maschke, Teorema de, 89, 91

Partición de la unidad, 14

producto convolución, 52, 63

submódulo racional, 58, 74
Sweedler, notación de, 49, 57

Tychonoff, Teorema de, 14

Unicidad de la Integral, Teorema de, 78
Urysohn, Lema de, 14