Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XIII. Número 1 — 30 de octubre de 2019

Marta Macho Stadler

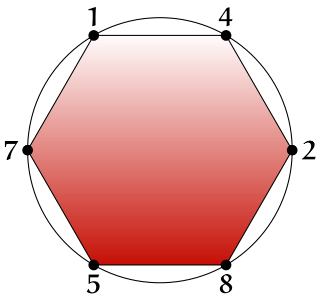
A ellas les diría que nunca pongan en duda sus capacidades

Marta Macho es una persona que no necesita presentación en el mundo de la divulgación científica. Profesora de la *Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea*, acredita una magnífica y dilatada trayectoria divulgadora que le ha hecho merecedora de numerosos premios y reconocimientos.

Marta, que nos ha visitado en múltiples ocasiones, ha tenido la deferencia de concedernos esta entrevista, en la que aborda distintas cuestiones entre las que podemos destacar el tema de la brecha de género existente en el ámbito científico.

(Entrevista completa en la página 2)

Los números cíclicos



Una de las cuestiones que más nos enorgullecen de este Boletín es la participación en su elaboración de todos los colectivos implicados en el proceso educativo, desde la Secundaria, pasando por el Bachillerato y acabando en el ámbito universitario.

En este número presentamos un interesantísimo artículo sobre los *números cíclicos* elaborado por estudiantes del Grado en Ingeniería Mecánica de la UAL.

Estos números cíclicos tiene propiedades interesantes que se desgranan con cierto detalle de forma sencilla en esta contribución.

(Artículo completo en la página 19)

Resumen

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

Editorial: ¿Por qué publicar en el Boletín?

Seguro que la mayoría de vosotros tenéis temas, experiencias o proyectos que son de interés para nuestros lectores. Seguro que alguna vez, o más de una, habéis pensado escribir un artículo para el Boletín, pero el trabajo, la burocracia y los cientos de tareas que van surgiendo en el día a día han hecho que la ejecución de esta idea se vaya retrasando.

No podemos pediros que nos mandéis vuestros trabajos sin antes reflexionar sobre el porqué de publicar en el Boletín.

Porque lo que tú haces es importante y debe contarse; porque tus estudiantes valoran positivamente ser los protagonistas de tu historia; porque otros compañeros y futuros docentes pueden aprender de tu experiencia; porque escribir sobre algo te hace reflexionar, ordenar las ideas y analizarlas; porque contribuyes a divulgar la ciencia y la sociedad lo necesita; porque te obligas a utilizar un lenguaje que sea comprensible para lectores fuera del ámbito docente y/o matemático; porque el Boletín tiene ISSN y tu publicación te puede dar puntos en un concurso de traslados a otros centros y, sobre todo, porque el trabajo bien hecho siempre produce una enorme satisfacción personal.

Por todo ello, y seguro que, por muchas otras razones, te animamos a que colabores con el Boletín.

EDITORES

Juan José Moreno Balcázar
balcazar@ual.es

Isabel María Ortiz Rodríguez
iortiz@ual.es

Fernando Reche Lorite
freche@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

ENTREVISTA

Sin las redes sociales es difícil llegar a un público diverso

Marta Macho Stadler. Profesora y divulgadora de las matemáticas

Juan José Moreno Balcázar
Fernando Reche Lorite
Universidad de Almería

Marta Macho Stadler es doctora en Matemáticas y profesora del Departamento de Matemáticas de la *Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea*, conocida divulgadora científica con diversos premios como la *Medalla de la RSME* 2015 o el *Premio Emakunde a la Igualdad* 2016.

Marta Macho Stadler

Su currículo científico, divulgador y en pro de la igualdad es muy extenso para este breve resumen, pero nos gustaría destacar que siempre se ha mostrado cercana y dispuesta a colaborar en aquellas actividades propuestas por este Boletín y por la *Universidad de Almería* en general. Por tanto, nos es muy grato realizarle esta entrevista.

Marta, ¿en qué momento decidió implicarse en la divulgación científica y, en concreto, a visibilizar el papel de la mujer en la ciencia? ¿Hubo algún hecho concreto que le motivara a ello?

Comencé con la divulgación hacia 1995. Mi amigo y compañero de departamento Raúl Ibáñez empezó a organizar unos seminarios informales para su alumnado. Quería hablarles de esas cosas que no se suelen contar en clase por falta de tiempo, pero que muestran de manera informal la belleza y aplicaciones de las matemáticas. Y me invitó a dar una charla, que creo que fue un tanto densa...

Este seminario se convirtió posteriormente en el ciclo *Un paseo por la geometría* —organizado por Raúl y por mí— que durante quince años siguió invitando a profesionales de las matemáticas, de otras ramas de la ciencia o del arte para hablar de manera asequible de temas relacionados de algún modo con la geometría.

Ese fue mi comienzo, el inicio de una gran actividad divulgativa organizando o impartiendo conferencias en centros sociales y educativos de todos los niveles, con las matemáticas (y la cultura) siempre como base y objetivo.

A partir de 2010 empecé a escribir con frecuencia en el blog *ZTFNews.org* de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU. En 2012 pasé a coordinar las secciones de *Literatura y matemáticas* y de *Teatro y matemáticas* en el portal *Divulgamat*.

Fui consciente de la escasa visibilidad de las mujeres en la ciencia —y sus consecuencias— en los inicios de mi tesis doctoral. Empecé a trabajar en un área muy masculinizada y en un tema muy competitivo, en el que pocas veces me cruzaba con mujeres.

A veces me sentía tratada con paternalismo, otras veces me sentía muy sola... no me gustaba la manera de trabajar. Tuve la suerte de formar parte de la *Comisión de Mujeres y Matemáticas* de la *Real Sociedad Matemática Española* entre 2004 y 2009.

Cada vez más personas se forman en comunicación científica y ayudan a dar difusión a esos avances en investigación.

Allí, aprendí mucho con y de mis compañeras y empecé a trabajar intentando entender el motivo de este desconocimiento de mujeres que han contribuido al avance de las matemáticas... porque las ha habido.

Aunque me he dedicado a ello con mayor y gran intensidad a partir de la creación del blog *Mujeres con ciencia* de la *Cátedra de Cultura Científica* de la UPV/EHU en 2014.

Hasta no hace mucho, dedicarse en nuestro país a la divulgación estaba, por decirlo de alguna manera, «mal visto» por parte de algunos estamentos de la comunidad científica, ¿percibe que este hecho ha cambiado o todavía nota ciertas reticencias? En este sentido, ¿piensa que la actividad divulgativa está suficientemente valorada?

Sí, ha sido hasta hace poco un trabajo subestimado. Más de una vez he tenido que escuchar que las personas que nos dedicábamos a eso lo hacíamos para huir de una investigación mediocre, para justificar nuestra falta de resultados.

Hubo que vencer en esos comienzos muchos obstáculos y desprecios, pero las cosas han mejorado bastante. De hecho, las unidades de cultura científica han empezado a crecer en las universidades.

Supongo que el que la mayoría de las instituciones de prestigio —tanto nacionales como extranjeras— dediquen

 ISSN 1988-5318

parte de sus recursos a la divulgación ha permitido que esta actividad se valore en la medida que lo merece. Aunque aún quedan colegas que piensan que se trata de una pérdida de tiempo. Y desde luego, el reconocimiento oficial es prácticamente nulo.

La investigación es un pilar fundamental para el avance científico y social, ¿cree que los avances en investigación se divulgan suficientemente a través de los medios de comunicación y las redes sociales?

Se ha hecho poco, pero creo que cada vez se hacen más esfuerzos por explicar al público en general lo que se hace en las universidades y los centros de investigación. Y se hace de muchas maneras.

Por ejemplo, a través de las unidades de divulgación científica o de los gabinetes de comunicación se hacen grandes esfuerzos por transmitir los avances en investigación de su personal. Para ello, desde luego, es necesario que las personas implicadas hagan el esfuerzo de contar sin tecnicismos las claves de su trabajo.

No se trata de beneficiar a cualquier científica en cualquier situación. Se trata de intentar paliar la discriminación que sufren las mujeres en la academia debida a estereotipos implícitos.

Cada vez más personas se forman en comunicación científica y ayudan a dar difusión a esos avances en investigación. Un ejemplo que está funcionando muy bien es el espacio digital *The Conversation*, un portal de noticias y análisis escritos por personas pertenecientes a la comunidad académica e investigadora y secundadas —en la edición— por profesionales del periodismo, y dirigido al público en general.

La presencia en medios y redes está mejorando mucho y, además, de maneras muy diversas, lo que ayuda a alcanzar a auditorios variados.

Es indiscutible que las redes sociales juegan actualmente un papel fundamental en la comunicación, usted es muy activa en ellas, ¿cómo valora la incidencia de estas herramientas en la difusión del conocimiento?, ¿qué porcentaje de su tiempo dedica a esta actividad?

Sí es una herramienta esencial, sin las redes sociales es difícil llegar a público diverso. Dedico entre dos y tres horas diarias —casi siempre fuera de las horas de trabajo— a compartir e interactuar en redes (*Facebook* y *Twitter*) los contenidos de los blogs y medios en los que colaboro.

Es un espacio en el que he aprendido a moverme, siempre asesorada por personas que saben del tema y también estando atenta a lo que sucede. El espacio digital *Mujeres con ciencia* es el que al que dedico mayor tiempo en redes. Con algo más de cinco años de andadura, su relevancia se la han dado las redes sociales —y por supuesto la variedad y calidad de los contenidos—. En este momento las visitas que recibimos ya no provienen solo de redes sociales, la mayoría de ellas proceden de búsquedas directas.

Eso significa que *Mujeres con ciencia* es en este momento una referencia en el tema de las mujeres en la ciencia. Pero seguimos compartiendo permanentemente en redes nuestros contenidos; hay que hacerlo con constancia, rigor e ideas nuevas, compartir sin que parezca que lo hace una máquina de manera automática, hay que responder a los mensajes, a las preguntas... y eso lleva su tiempo y requiere mucha paciencia porque no se consigue en semanas... requiere años. Pero funciona y es una manera de dar a conocer contenidos y actividades de ciencia.

Volviendo al tema de la mujer científica, ¿qué opina de la discriminación positiva? Por otra parte, ¿qué cree que deberían promover las instituciones para romper el denominado «techo de cristal»?

Estoy a favor. Creo que en situaciones de desigualdad es necesario apoyar a las personas más desfavorecidas. No se trata —como algunas personas pretenden hacer creer— de beneficiar a cualquier científica en cualquier situación. Se trata de intentar paliar la discriminación que sufren las mujeres en la academia debido a estereotipos implícitos —recordar el *efecto Jennifer y John*, por ejemplo—. Aunque cada vez hay más estudios que demuestran que las científicas lo tienen mucho más difícil para progresar que sus compañeros varones— o a situaciones sexistas.

Ojalá conociera la solución. Es un problema que no sucede solo en la academia, sucede en cualquier ámbito laboral, incluso en los ámbitos muy feminizados, las mujeres alcanzan con dificultad los puestos de liderazgo.

Creo, de cualquier manera, que las instituciones deben ser valientes y apostar por el cambio. Además de las acciones positivas de las que hemos hablado antes, es esencial sancionar los comportamientos machistas sin fisuras, afecten a quien afecten. Es necesario revisar la manera de evaluar, teniendo en cuenta las interrupciones en la vida laboral e investigadora por temas de maternidad, cuidados o similares.

Para ello hay que tener verdadera voluntad de cambio, un cambio que nos beneficiaría a todas... y a todos.

Su labor para visibilizar el trabajo de las científicas es muy relevante y necesario, ¿qué le diría a una chica para animarla a estudiar una titulación científica donde la presencia de mujeres es minoritaria? Esto no suele ocurrir en los grados en Matemáticas

 ISSN 1988-5318

donde el porcentaje de chicas y chicos es similar, ¿a qué cree que es debido?

Con 10–12 años muchas niñas ya han apartado la ciencia y la tecnología de sus intereses, en muchas ocasiones por motivos ajenos a sus capacidades. Las familias, las escuelas o el entorno modela las elecciones de niñas y niños, aunque sea de manera no consciente.

A ellas, sobre todo a ellas, les diría que nunca pongan en duda sus capacidades, que se atrevan a volar, que la ciencia es una actividad apasionante.

Con frecuencia se oyen voces pidiendo que «se deje a las niñas elegir con libertad», que no las «obliguemos» a hacer carreras de ciencia, que si no las eligen será porque no les gustan.

Pero si las elecciones por la informática o el magisterio no dependen de los genes —no, no dependen—, eso significa que las jóvenes eligen con la escasa libertad que poseen tras recibir tanta información sesgada y sexista.

Por cierto, los jóvenes también se ven muy influenciados por su entorno, tampoco eligen con libertad. A ellas, sobre todo a ellas, les diría que nunca pongan en duda sus capacidades, que se atrevan a volar, que la ciencia es una actividad apasionante con la que pueden disfrutar y ayudar a la sociedad. Les diría que no teman equivocarse, que se atrevan a preguntar, que trabajen duro...

Es cierto, en matemáticas no hay brecha de género entre el alumnado. Recuerdo que escuché una vez a una alumna comentar que las «matemáticas le transmitían tranquilidad». Hasta hace poco ha sido una carrera pensada para la docencia, quizás eso haya mantenido el porcentaje de mujeres alto. Aunque ahora que empieza a ser una carrera muy demandada, casualmente está empezando a bajar el porcentaje de mujeres matriculadas...

Muchas gracias por atendernos, ¿le gustaría añadir alguna cosa más?

Solo daros las gracias por apostar por la divulgación desde hace tanto tiempo con este formato que deja espacio a personas tan diversas. Y gracias por dejar un hueco a la situación de las mujeres en la ciencia. Aún queda mucho por hacer, mucho más de lo que se cree. Gracias. ■

Actividades matemáticas

V Concurso IndalMat

Cartel anunciador

El pasado 4 de octubre se celebró en la *Universidad de Almería*, la 5.ª edición del concurso de resolución de problemas de matemáticas *IndalMat*.

El evento tuvo una gran acogida ya que participaron en el mismo alrededor de 425 estudiantes de toda la provincia de Almería de 4.º de ESO a 2.º de Bachillerato.

Tras la realización de los ejercicios del concurso, los asistentes disfrutaron con una magnífica conferencia impartida por el divulgador Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray de la Universidad de la Rioja, ganador de múltiples premios en el ámbito de la divulgación matemática y actualmente presentador del espacio *Órbita Laika* que se emite en *La 2* de Televisión Española.

La entrega de premios se efectuará el próximo 8 de noviembre a las 18 horas en las instalaciones de la *Universidad de Almería*.

Conferencias sobre experiencias docentes

El grupo docente *Aprendizaje cooperativo y gamificación* del *Departamento de Matemáticas* organizó en junio dos interesantes conferencias sobre experiencias docentes, en las que los asistentes tuvieron la ocasión de reflexionar sobre la práctica docente del área de estadística.

La primera, *Ideas y experiencias sobre la enseñanza de la estadística*, estuvo a cargo de Pere Grima del *Departamento de Estadística e Investigación Operativa* de la *Universidad Politécnica de Barcelona* y la segunda, *Un nuevo enfoque metodológico en la Enseñanza de la Estadística*, fue impartida por Sonia Castillo Gutiérrez del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la *Universidad de Jaén*.

Foto de las organizadoras con los conferenciantes: Sonia Castillo (tercera por la izda.) y Pere Grima.

Noche Europea de los investigadores

Como viene siendo ya tradicional, a finales de septiembre, la *Fundación Descubre* en coordinación con las unidades de transferencia de las diferentes universidades organiza la *Noche Europea de los investigadores* con el objeto de mostrar a la sociedad la labor investigadora que se realiza en el ámbito universitario.

ISSN 1988-5318

Este año, concretamente, la fecha de celebración ha sido el 27 de septiembre y, en nuestra ciudad, ha supuesto un éxito espectacular de participación con más de 80 actividades, casi 600 científicos y una estimación de afluencia de público de más de 12 000 personas.

Esta actividad cuenta con el apoyo institucional de la *Universidad de Almería*, cuyo rector visitó las diferentes actividades y estuvo acompañado, entre otras autoridades, por el ministro de cultura José Guirao.

Las autoridades en la actividad matemática con los investigadores

I Escuela de Divulgación de las Matemáticas: Aprender a divulgar

La recientemente creada *Red de Divulgación Matemática* (DiMa) ha organizado en Castro Urdiales (Cantabria) la primera escuela de divulgación de las matemáticas, que se impartió entre los días 25 y 28 de junio.

En esta primera edición, titulada genéricamente *Aprender a divulgar*, se dieron cita estudiantes de matemáticas, profesorado de secundaria y universidad y profesionales de la comunicación científica.

Foto de familia de la actividad

Como ponentes, se contó con los mejores divulgadores nacionales, que aportaron su conocimiento y experiencia en los diferentes cursos que organizó la escuela. En estos se abordaron temas muy variados, tales como la divulgación en las redes sociales y los medios de comunicación, la mejor forma de abordar las exposiciones divulgativas o las técnicas de expresión oral, entre otros.

Se puede acceder a las presentaciones la página web de *DiMa*.

Realidad Virtual

La *spin-off* de la *Universidad de Almería Virtual Dor*, en la que participan investigadores del *Departamento de Matemáticas* y que ha desarrollado *NeoTrie*, un software de realidad virtual, ha organizado varias actividades interesantes estos últimos meses.

Una de las actividades

Entre ellas, cabe destacar el curso de *Unity 3D*, enfocado al diseño de videojuegos «serios» en el ámbito de la educación y de la salud; el taller *NeoTrie: geometría 3D en realidad virtual*, dentro del *II Campus Tecnológico para Chicas* así como un taller de realidad virtual para presos del módulo terapéutico del centro penitenciario *El Acebuche*.

Entrega del premio del Boletín

El alumno ganador con su profesora

El pasado 13 de mayo los editores del Boletín Juan José Moreno e Isabel María Ortiz entregaron, en el *IES Sol de Portocarrero*, el premio del Concurso de Problemas del número anterior a Juan Francisco González Hernández.

El alumnado que llenó el salón de actos pudo disfrutar de la charla sobre las matemáticas en el calendario gregoriano titulada *¿Qué ocurrió el 10 de octubre de 1582?*

Actividades de la SAEM Thales

El pasado 8 de junio tuvo lugar la entrega de los premios a los ganadores del *XII Concurso de Dibujo Matemático*, *XII Concurso de Fotografía Matemática* y el *Desafío* 2019. El acto se celebró en las instalaciones del *Museo de Almería*.

Más información en *thales.cica.es/almeria*.

ISSN 1988-5318

Noticias matemáticas

Stat Wars: el imperio de los datos aterriza en Andalucía

Logo de la actividad

La nave de *Stat Wars: el Imperio de los Datos* hará su parada en Andalucía el 5 de noviembre, a las 10 horas, en el Auditorio de la *Universidad de Almería*.

Este proyecto de divulgación científica que coordina la *Universidad de Santiago de Compostela*, cuenta con la colaboración de la *Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología* del *Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades* y la *Red Nacional de Bioestadística* (BIOSTATNET).

Su misión no es otra que acercar la estadística a los alumnos de ESO y Bachillerato de los centros de enseñanza españoles. Y, para ello, cuenta con un formato muy innovador y atractivo, que les permitirá aprender jugando.

Premio Princesa de Asturias 2019

En esta edición de 2019 el premio *Princesa de Asturias* 2019 de cooperación internacional ha recaído en Salman Khan y la *Khan Academy*.

Salman Khan, nacido en Estados Unidos, pero de padre banglasedí y madre india, es —según se publica en la página del premio—, profesor y licenciado en Matemáticas, Ingeniería y Ciencias Informáticas por el prestigioso MIT (*Instituto Tecnlógico de Massachusetts*).

Según el acta de concesión del premio «*Con una visión pedagógica innovadora, Salman Khan ha ideado un proyecto formativo complementario a partir de su lema "Solo tienes que saber una cosa: puedes aprender cualquier cosa"*».

La academia Khan cuenta con más de sesenta millones de usuarios registrados y se publica en más de treinta idiomas en una metodología que permite a los estudiantes aprender online y al ritmo que estimen adecuado.

Premios Julio Peláez

La *Fundación Tatiana Pérez de Guzmán el Bueno* ha otorgado el *IV Premio Julio Peláez a las Mujeres Pioneras de la Física, la Química y las Matemáticas* a Carme Torras Genís y el *I Premio Joven Científica* a Elisa Lorenzo García, el primero dotado con 12 000 € y el segundo, con 6000.

Esta fundación, que tiene como finalidad *«servir a la sociedad mediante el estudio y cuidado de la naturaleza, el apoyo a la investigación científica y la formación de la juventud»*, convoca anualmente estos premios. La entrega tuvo lugar en la sede de la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* el pasado 4 de junio de mano de los presidentes de ambas entidades.

Carme Torras

Carme Torres, especialista en matemática aplicada, ha ganado este premio por sus aportaciones a la inteligencia artificial y a la robótica. Actualmente es profesora investigadora en el Instituto de Robótica (CSIC–UPC).

Elisa Lorenzo

Elisa Lorenzo es profesora en la *Universidad de Rennes 1* (Francia) y es presidenta de la *Comisión Mujeres y Matemáticas* de la RSME desde 2017, coordinadora española de la *European Women in Mathemtics* desde 2015 y embajadora española del *Committee for Women of International Mathematical Union* desde 2018. Sus intereses investigadores se centran en la frontera de la teoría de números y la geometría aritmética con aplicaciones a la criptografía.

XXX Edición de los Premios Joaquín Guichot y Antonio Domínguez Ortiz

La *Consejería de Educación* de la *Junta de Andalucía* ha otorgado el segundo *Premio Joaquín Guichot y Antonio Domínguez Ortiz* a María Dolores Martínez López, del *IES Guadalmedina* de Málaga, por su trabajo *Flamenco, matemáticas, geometría y modelado.*

El proyecto está dirigido al alumnado de 3.º y 4.º de ESO absentista y desmotivado. Consiste en la organización de un taller de patronaje, desarrollado en horario extraescolar, para la confección de faldas flamencas usando las matemáticas como principal herramienta.

Estos premios valoran la mejora de la práctica docente en las aulas y destacan aquellas experiencias y materiales que contribuyen al tratamiento educativo de los valores propios de nuestra identidad andaluza.

ISSN 1988-5318

Premio ICIAM Su Buchin 2019

Los premios *ICIAM Su Buchin* se conceden a la investigación matemática de alto nivel en regiones en desarrollo.

Giulia Di Nunno

En 2019 ha sido otorgado a Giulia Di Nunno. Nacida en Milán en 1973, es profesora de la *Universidad de Oslo* (Noruega) e investiga en análisis estocástico.

Preside el *Comité de Países en Desarrollo* de la *Sociedad Matemática Europea* y participa en programas para fortalecer las matemáticas en la formación superior en África, como el *EMS–Simons* de estancias en el extranjero para investigadores, con atención a ciertos países y también al equilibrio de género.

Este premio se otorgó por primera vez en 2007 y en 2019 ha sido concedido a Giulia Di Nunno en la ceremonia de apertura del *Congreso Internacional en Matemática Industrial y Aplicada* (ICIAM 2019), celebrado en julio en Valencia.

Dentro de los *Premios ICIAM* también están los premios *Collatz, Lagrange, Maxwell* y *Pioneer*, concedidos en 2019 a Siddhartha Mishra (ETH Zürich, Suiza), George Papanicolaou (Stanford University, EE. UU.), Claude Bardos (Université Paris Denis Diderot, Francia) e Yvon Maday (Sorbonne University, París, Francia), respectivamente.

Presentación del libro *Investigación sobre Matemáticas Elementales*

Portada del libro

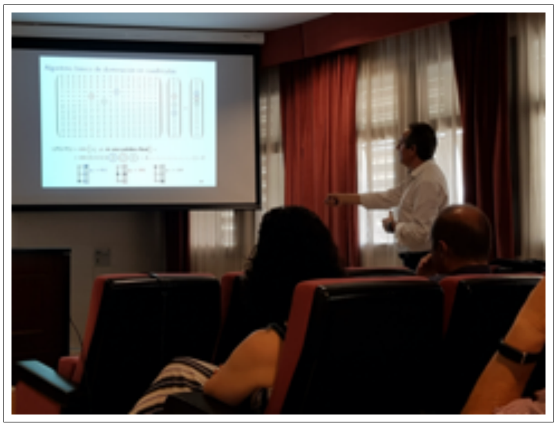
El pasado 30 de abril se presentó el libro *Investigación sobre Matemáticas Elementales. Sistemas de numeración, operaciones y fracciones*, escrito por Rafael Jiménez Pozo.

En él se recoge una investigación sobre cómo tienen adquiridos los conocimientos básicos de matemáticas elementales el alumnado de los últimos cursos de Educación Primaria y de primer ciclo de ESO, así como los estudiantes universitarios que están terminando el Grado en Educación Primaria.

Lectura de tesis doctorales

Es estos últimos meses se han leído dos tesis doctorales en el *Departamento de Matemáticas*.

La primera, titulada *Dominación en grafos cilíndricos*, fue defendida por José Juan Carreño Carreño el 23 de junio y sus directores han sido María Luz Puertas González del *Departamento de Matemáticas* y José Antonio Martínez García del *Departamento de Informática*, ambos de la *Universidad de Almería*.



José Juan Carreño defendiendo su tesis doctoral

La segunda, titulada *Dualidad para ideales de operadores Lipschitz*, fue defendida por María Gádor Cabrera Padilla el 6 de septiembre, dirigida por Antonio Jiménez Vargas, profesor del *Departamento de Matemáticas* de la *Universidad de Almería*.

María Gádor Cabrera con su director y el tribunal

Nos visitaron...

En el transcurso de estos meses nos han visitado investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a: Sonia Castillo Gutiérrez, de la Universidad de Jaén; Villő Csiszár, Jozsef Garay y Tamás F. Móri, de la Eötvös Loránd University, Budapest (Hungría); Pere Grima, de la Universidad Politécnica de Barcelona; Mostafa Mbekhta, de la Universidad de Lille (Francia); Antonio Peralta, de la Universidad de Granada, Moisés Villegas, de la Universidad de Cádiz y Zoltán Varga, de la Universidad Szent István, Gödöllő (Hungría).

ISSN 1988-5318

Preguntas frecuentes

¿Existe algún tipo de ayuda económica para que los estudiantes del Grado en Matemáticas realicen actividades relacionadas con las matemáticas?

Efectivamente, el *Departamento de Matemáticas* de la *Universidad de Almería* lleva varios años convocando ayudas para la realización de actividades por parte del alumnado del departamento.

Se convocan en régimen de concurrencia competitiva con objeto de sufragar los gastos ocasionados por la participación y/u organización de actividades realizadas durante el año de la convocatoria.

Deben ser actividades de interés para la comunidad universitaria relacionadas con las matemáticas, o que sirvan para la proyección del departamento en la sociedad.

Pueden solicitar estas ayudas los estudiantes que, en el momento de realizar la actividad, estén adscritos al censo del *Departamento de Matemáticas* de la UAL, es decir, estén matriculados en enseñanzas oficiales que imparta el departamento, pudiendo solicitar cada estudiante una única ayuda.

En la solicitud, que irá dirigida al *Departamento de Matemáticas* por email, se debe adjuntar una memoria sobre la actividad para la que se solicita la ayuda, en donde se debe justificar el interés de la actividad así como el detalle de gastos realizados. Además es imprescindible la presentación de certificado de asistencia/participación en la actividad y las facturas que acrediten el gasto realizado (inscripción, alojamiento, manutención, etc). Será competencia de la *Comisión de Docencia e Investigación* del *Departamento de Matemáticas* el estudio, evaluación y selección de las solicitudes presentadas.

A título de ejemplo, en la convocatoria para las actividades realizadas en 2019 se estableció un presupuesto de 6000 € siendo la cuantía máxima a conceder por cada ayuda de 400 €.

¿Qué representación tienen los estudiantes en los órganos de gobierno y gestión del Departamento de Matemáticas?

El órgano colegiado de gobierno del departamento es el *Consejo de Departamento*. Los órganos unipersonales de gobierno son el Director/a y el Secretario/a. Además, el Departamento cuenta con una *Junta de Dirección* y dos comisiones permanentes, la *Comisión de Docencia e Investigación* y la *Comisión de Asuntos Económicos e Infraestructura*.

Según el Reglamento de Régimen Interno del Departamento, aprobado en Consejo de Gobierno el 26 de julio de 2019, en el *Consejo de Departamento* la representación de los estudiantes matriculados en titulaciones en las que el Departamento desarrolle actividad docente, es equivalente al 30 % del número total que resulta de sumar todos los doctores del departamento y el profesorado adscrito al departamento a tiempo completo. En la actualidad hay dos estudiantes que forman parte del *Consejo de Departamento*.

Tanto en la *Junta de Dirección* como en las dos citadas comisiones permanentes los estudiantes están representados de forma similar, por un estudiante en cada una de ellas, elegido por y entre los que pertenezcan al *Consejo de Departamento*.

EXPERIENCIA DOCENTE

PROBOCA

Una forma divertida de evaluar para aprender Probabilidad en el primer ciclo de ESO

José Francisco García Hita
IES Santa María del Águila (El Ejido, Almería)

En la sociedad actual se plantean infinidad de situaciones en la que aparece el azar, fenómenos que afectan a los individuos, a la naturaleza, a la sociedad, y cuyo desenlace no puede ser predeterminado más allá de un grupo de posibles resultados con mayor o menor certeza de ocurrencia.

Los conceptos de probabilidad y azar son tan antiguos como el propio ser humano. Tenemos constancia de que estos conceptos han estado presentes en antiguas civilizaciones; sumerios y asirios extraían huesos del talón de cabras, ovejas, ciervos o caballos y los tallaban hasta conseguir *astrágalos* o *talus*, algo parecido a un dado; en las tumbas de los faraones han aparecido pinturas de astrágalos y tableros de registro; los romanos utilizaban juegos con dados cuyas reglas son poco conocidas, entre ellos cabe destacar uno denominado *hazard* que significa riesgo o peligro y sus raíces etimológicas provienen del árabe *al-azar*, que quiere decir dado. Probablemente el nombre de azar que se ha utilizado hasta ahora se deba a que en la mayoría de los dados de la época utilizaban la flor de azahar.

Actualmente, los juegos de azar, las predicciones meteorológicas, la economía global, las competiciones deportivas, la medicina, etc, manifiestan el interés e importancia que presta el hombre por situaciones en las que aparece el azar.

PROBOCA surgió tras un curso de formación sobre juegos matemáticos en el CEP de Almería, en mayo de

 ISSN 1988-5318

2006.

Me planteé repasar y evaluar la probabilidad con el alumnado de primer ciclo de ESO de forma diferente. Justifica esta decisión, el hecho de que normalmente los temas de Estadística y Probabilidad aparecen al final de un denso temario, cuando el alumnado está más fatigado y las altas temperaturas van dificultando el proceso de enseñanza–aprendizaje.

Por otra parte, como observamos con preocupación, la ludopatía está cada vez más presente en nuestro alumnado, así que estos contenidos, acompañados de un pensamiento crítico, no pueden descolgarse de la propuesta didáctica de ningún departamento. Además, el planteamiento metodológico de este juego permite la incorporación de estructuras cooperativas en el marco de una escuela inclusiva.

Criterios de evaluación

- Conocer el concepto de suceso aleatorio, espacio muestral, suceso seguro e imposible, sucesos compatibles e incompatibles, suceso contrario.
- Utilizar la notación adecuada.
- Calcular la probabilidad o posibilidad de un suceso aplicando la regla de Laplace.
- Reconocer y valorar la utilidad del lenguaje probabilístico para interpretar y describir situaciones de incertidumbre.
- Valorar los beneficios del trabajo en equipo.

Cómo fabricar un PROBOCA

Este recurso basado en el tradicional juego de la oca, es fácil de elaborar y no requiere de medios tecnológicos en el caso de carecer de ellos, como sucede aún en algunos centros. El juego en sí, de forma intrínseca, utiliza el azar ($X=$«Lanzamiento un dado cúbico»).

Material

- Una copia impresa en color sobre A4 (calidad fotográfica), o transparencia del tablero de juego, si juega toda la clase en grupos.
- Una copia impresa en color sobre A4 (calidad fotográfica) de cada uno de los experimentos aleatorios (6 experimentos aleatorios asociados a cada color).
- Una copia impresa en color sobre cartulina blanca A4 de las tarjetas-pregunta.
- Seis fichas de diferentes colores o formas geométricas de fabricación propia sobre cartulina o transparencia, o bien, compradas.
- Ficha registro de preguntas acertadas y realizadas a cada grupo.
- Un dado cúbico numerado del 1 al 6.
- Cronómetro.
- Pegamento y tijeras.
- Plastificadora y plásticos.
- Retroproyector, si utilizamos el tablero en transparencia.
- Ordenador y cañón, (opcional).

Elaboración

- Plastificar el tablero de juego o utilizar la transparencia.
- Plastificar los experimentos aleatorios.
- Recortar primero las tarjetas y a continuación pegarlas según colores, de forma que cada tarjeta tenga en una cara una estrella y por la otra una pregunta con marco, ambas del mismo color (24 tarjetas de cada color).
- Plastificar las tarjetas.
- Preparar un archivo de Word o programa similar con el tablero y fichas móviles.

Desarrollo

- Jugadores/as: De 2 a 6.
- En grupos: De 2 a 6 grupos, con un máximo de 5 jugadores. Si juega toda la clase en grupos se utilizará el cañón para que todos puedan ver cómo se va desarrollando el juego.

ISSN 1988-5318

El lanzamiento del dado se hará siempre por un representante del grupo en la mesa del profesor o profesora y las fichas se irán moviendo sobre la transparencia, por ello es aconsejable hacer fichas en transparencias de diferentes colores o formas geométricas. Si se utiliza el cañón, las fichas las moverá el docente con el ratón.

El tablero consta de 31 casillas sin contar la salida y la meta. Cada casilla tiene un fondo de color: 5 rosas, 5 azules, 5 verdes, 5 moradas, 5 naranjas, 5 amarillas y 1 casilla roja.

Cada participante o grupo lanza el dado, el que obtenga el mayor número (a veces es necesario desempatar) lanzará en primer lugar. Los turnos irán en el sentido de las agujas del reloj.

Cada jugador o jugadora lanza el dado y avanza con su ficha tantas casillas como indique el número obtenido; nos fijamos en el color de la casilla donde se ha situado, y el docente o estudiante lanzador cogerá una tarjeta del mismo color (previamente las tarjetas estarán barajadas y en montones por color, 6 montones de 24) y se hará una pregunta con un tiempo máximo para contestarla de 30 segundos.

Si la acierta continúa tirando; si falla o no contesta en el tiempo establecido, pasa su turno y hay rebote hasta que se conteste correctamente, lo que posibilita lanzar el dado o saltar un turno completo sin contestar correctamente, en este caso, la pregunta vuelve al final del montón correspondiente y se contabiliza como pregunta realizada para esos grupos.

El turno es para el jugador o grupo siguiente al que se le hizo la pregunta inicialmente. Las preguntas respondidas correctamente se sitúan en un montón aparte según el grupo. Si cae en la casilla roja se vuelve a la salida y pasa su turno.

Para ganar hay que llegar a la meta de forma directa y responder correctamente a una batería de preguntas, una de cada color; si se falla alguna hay que esperar en la meta el turno para intentarlo otra vez y hay rebote.

La nota se asignará en función de las preguntas acertadas sobre las realizadas a cada grupo, además el ganador recibirá 2 puntos adicionales y se otorgará 1 punto adicional también al segundo clasificado.

Valoración

Se incrementan la motivación y las interacciones entre los estudiantes. Colaboran y aprenden unos de otros, equilibrándose el ritmo cuando intentan dar lo mejor de sí para contribuir a los éxitos del equipo, ayudando a mejorar, de esta manera, las relaciones interpersonales en un clima de respeto, tolerancia y flexibilidad hacia los demás.

El interés y la implicación favorecieron la disminución del sentimiento de aislamiento de un alumno en particular. Los errores se convierten en oportunidades de aprendizaje y aprenden a desarrollar estrategias, lo que favorece el autoaprendizaje.

En resumen, la interdependencia positiva que se genera en un espacio de gamificación y competición favorece el rendimiento y el desarrollo de valores en el alumnado.

La evaluación, por tanto, resultó positiva y se ha propuesto al Departamento de Matemáticas para que este recurso, sujeto a mejoras, pueda ser utilizado en el centro.

Entre estas mejoras, destaco la posibilidad de introducir estructuras cooperativas, (por ejemplo, 1–2–4) y la posibilidad de contextualizar los experimentos aleatorios mostrando así a nuestro alumnado la utilidad de las matemáticas para entender nuestro mundo y para afrontar y resolver problemas reales. ■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

Multidisciplinary activities at IES Los Ángeles

José Ramón Sánchez García
IES Los Ángeles (Almería)

In the school year 2017/18, after several attempts, *IES Los Ángeles* became a bilingual centre. It was then that we started a hard walk, mainly due to some difficulties, such as a lack of experience in the teachers and the fact that our students didn't come from bilingual schools.

Since then, we have been working on several projects during these two courses, among which I would point out the *Integrated Didactic Units*, a group of multidisciplinary activities involving not only all the teachers of the Bilingual Project, but occasionally some others as well. The subject of each unit was chosen at the beginning of the term, and each teacher had to design the activities related to it.

In the first course, the units were called *Ancient Greece week*, *Across the Universe* and *Environmental issues*; and in the second one (the last course 18/19), they were *At the movies*, *We are what we eat* and *My neighbourhood*.

Ancient Greece week

In this unit, one of the activities made by the Math teachers was *Living Eratosthenes*, whose object was to make a living sieve of numbers. Firstly, we placed all the 1^{st} ESO students on the playground, each one with a number from 2 to 100, arranged as a table; secondly, the conversation assistant, disguised as the ancient Greek mathematician, began to order: *"Multiples of 2, out!"*, *"Multiples of 3, out!"*, and so on. Finally, of course, we got an Eratosthenes' sieve made of kids, showing the prime numbers under 100.

Another activity was a material proof of the *Pythagoras' theorem* with graph paper.

Across the Universe

In this case, the aim we proposed was to build on the court a scale Solar System with students. We started doing previous activities in the classroom, so that the kids calculated all the distances, using scientific notation, proportionality and change of units.

After that, we took them out and placed them so that each planet was made of people, depending on the size of the planet. Also, each group had to rotate on itself according to the real movement of the planet (Uranus was really fun, with the kids turning somersaults).

Environmental issues

The activities we designed in this term were several assorted problems related to the increasing size of the ozone hole, the benefits of recycling (with exercises and examples from daily life) and how to save energy or water.

At the movies

Hidden figures

The first unit of the second course was about the world of cinema. We called our section *M&M (Maths & Movies)*, in which the students researched about connections between our science and cinema, from many points of view.

For instance, movies with mathematical background (*Fermat's Room*, *The Oxford Murders*); biopics of mathematicians (*The Imitation Game*, *Hidden Figures*); short biographies of films directors or actors with scientific or mathematical education (Hedy Lamarr, Sofía Nieto, Rowan Atkinson); and pieces of dialogues with mathematical contents in every sort of movies.

In addition, other pupils made works about numbers and quantities in several movies: How many Oscars did this movie win? How many extras participated in this film?, or questions related to budgets, raised money. . .

We are what we eat

The relation between Maths and food really has so many faces that we had to select carefully what of them our students would be interested in.

Finally, in our section (Maths and food, obviously) we developed these activities: changing of units (Metric and Imperial System, measurements of spoons, cups, etc.); how to design a fruit smoothie considering weights and ingredients; adjusting recipes changing number of people it was indicated for; calculating calories we need to live, regarding to the metabolism, physical exercise, height, weight, age, etc.

My neighbourhood

Last but not least, in the third term we decided to work about the streets our kids are living in. Relating it to Maths, they used maps, scales and plans to calculate distances and areas; besides that, they took mathematical photos of many places and corners (*Maths is all around*).

Apart from the *Integrated Didactic Units* previously seen, there are some other projects that could be mentioned.

For example, we made a *Trivial Game* in the playground, with the respective sets of questions about all the

ISSN 1988-5318

subjects. Or, finally, last year we converted a piece of a wall in a place to divulgate Maths, creating a zone called *Fun Maths*, with the following sections: *Pictures*, *Jokes*, *Riddles*, *Problem of the week*, *Did you know. . . ?* and *Recreational Maths*, whose contents are changed every two or three weeks.

Fun Maths is a place where students (and other teachers too!) can see Maths in a different way than they usually do inside a classroom, further than the prizes they can get by submitting the right answers of the sections.

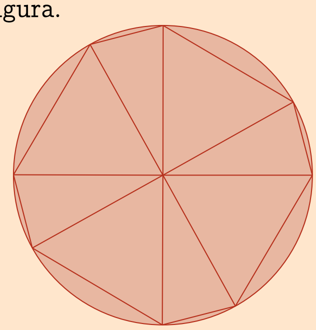
It is fair to finish this article by acknowledging the work of our conversation assistants, Liam McMahon in the first year and Yuriko Hoshino in the second one. We sincerely thank them their collaboration in every requested work.

■

Concurso de problemas

Problema propuesto

Dos amigas se compran una pizza para cenar. Como no le gustan los filos se los cortan quedando un octógono con 4 lados de 20 cm y otros 4 de 10 cm, como muestra la figura.



Los ingredientes están uniformemente repartidos, por lo que las 8 cuñas resultantes tienen el mismo sabor, aunque su tamaño sea diferente. Cada chica se come 4 trozos.

a) ¿Qué área ocupa la pizza que se comen?

b) ¿Qué superficie desperdician?

c) ¿Qué diámetro tiene la pizza?

d) ¿De cuántas formas pueden repartirse las cuñas? En cada caso, ¿qué proporción se come cada una?

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un estupendo ***reloj inteligente (smartwatch)*** y un regalo relacionado con las matemáticas.
¡La solución más elegante u original tiene premio!
Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico `bmatema@ual.es` ***antes del 15 de enero***.
Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.
Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

ISSN 1988-5318

Resultado del concurso del número anterior

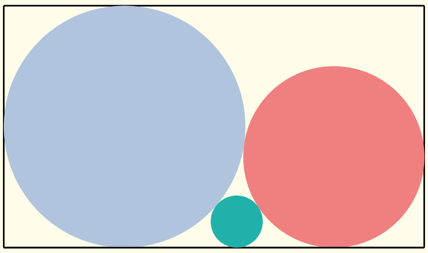
Ángela Otero

En esta edición el jurado ha decidido otorgar el premio a la solución enviada por Ángeles Otero Sánchez, estudiante de 1.º de Bachillerato del *IES Aguadulce* (Aguadulce, Almería).

Nuestra más sincera enhorabuena a la ganadora.

Problema propuesto en el número anterior

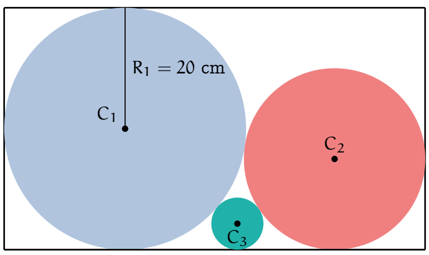
Las bandejas de un comedor escolar miden 70 cm de largo por 40 de ancho, ¿cuánto miden los radios de los dos platos y del vaso que se incluyen en la bandeja colocados tal y como aparecen en el dibujo?



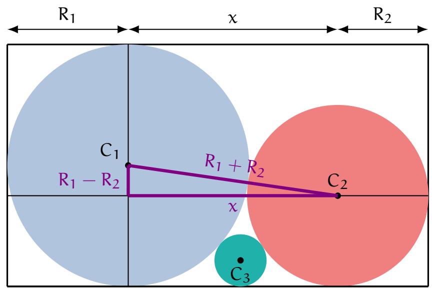
Solución del problema propuesto:

Podemos observar que el diámetro del plato mayor (con centro en C_1) mide lo mismo que el lado menor de la bandeja, es decir, 40 cm. Por lo tanto

$$2R_1 = 40 \Rightarrow R_1 = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}.$$



Para calcular el radio del plato con centro en C_2 trazamos una recta desde C_1 a C_2. A continuación, trazamos la línea paralela a la base de la bandeja pasando por C_2 y una perpendicular a esta última recta pasando por C_1.



Gracias a estas rectas, formamos un tiángulo rectángulo de hipotenusa $R_1 + R_2$ y de catetos $R_1 - R_2$ y x, siendo R_2 el radio del plato con centro en C_2.

Sabemos que el lado mayor de la bandeja mide 70 cm por lo que $R_1 + x + R_2 = 70\,\text{cm}$.

Además, si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo tenemos que

$$(R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + x^2.$$

Puesto que $R_1 = 20$, despejando x obtenemos que,

$$x = \sqrt{(20 + R_2)^2 - (20 - R_2)^2} = \sqrt{80R_2}.$$

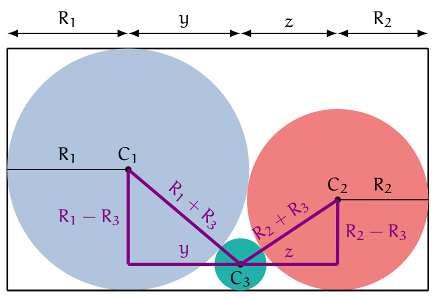
Puesto que $R_1 + x + R_2 = 70$, sustituyendo los valores obtenidos en esta igualdad, tenemos que

$$70 = 20 + \sqrt{80R_2} + R_2 \Rightarrow R_2 + \sqrt{80R_2} - 50 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación —que podemos transformar fácilmente en una de segundo grado— tenemos que $R_2 = (\sqrt{70} - 2\sqrt{5})^2 \approx 15{,}17$ cm, desechándose la otra solución (164,83 cm) puesto que es mayor que las dimensiones de la bandeja.

Para los siguientes cálculos consideraremos que $R_2 = 15{,}17$ cm.

De manera análoga, vamos a hallar el radio del vaso cuyo centro es C_3. El siguiente gráfico es ilustrativo de las relaciones entre las cantidades que buscamos, siendo R_i el radio del objeto con centro en C_i, con $i = 1, 2, 3$.



Aplicando otra vez el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos resultantes obtenemos, sabiendo

ISSN 1988-5318

que $R_1 = 20$ y $R_2 = 15{,}17$, las siguientes igualdades:

$$(R_1 + R_3)^2 = (R_1 - R_3)^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{80R_3},$$
$$(R_2 + R_3)^2 = (R_2 - R_3)^2 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{60{,}68R_3}.$$

Sabemos que $R_1 + y + z + R_2 = 70$. Sustituyendo los valores que hemos obtenido en esta igualdad tenemos:

$$20 + \sqrt{80R_3} + \sqrt{60{,}68R_3} + 15{,}17 = 70.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos que

$$\sqrt{R_3} = \frac{34{,}83}{\sqrt{80} + \sqrt{60{,}68}} \Rightarrow R_3 = 4{,}33.$$

Por lo tanto, el radio del plato grande es 20 cm; el del pequeño, 15,17 cm y el del vaso, 4,33 cm.

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

Lloyd S. Shapley

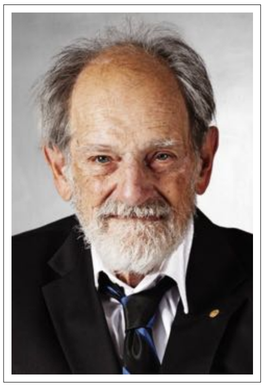
Un gigante de la teoría de juegos cooperativos

Florencio Castaño Iglesias
Universidad de Almería

Lloyd Shapley en 1943

La teoría de juegos estudia modelos matemáticos que permiten la toma de decisiones en aquellas situaciones de conflicto entre varios agentes (jugadores) con diferentes preferencias.

Aunque hubo contribuciones anteriores, los fundamentos de la teoría se afianzan en el año 1944 con la publicación *Theory of Games and Economic Behavior* por John von Neumann y Oskar Morgensten siendo ampliamente estudiada durante las últimas décadas y aplicada a la economía, la ciencia militar, la teoría política, la sociología, etc.



Shapley en 2012

A aquellos juegos o escenarios donde los jugadores pueden beneficiarse al colaborar con acuerdos vinculantes, se les conoce como juegos cooperativos. Pueden ser personas que negocien por un objetivo común o un grupo de empresas que buscan ampliar sus cuotas de mercado. Este es el caso de los juegos políticos, donde los partidos o los individuos pueden formar coaliciones para mejorar su poder de voto.

En esa cooperación se conoce lo que aporta cada jugador a cada posible coalición así como la utilidad total obtenida (dinero, poder, satisfacción, capacidad de acción o de decisión, etc.) pero, ¿cómo transferir esa utilidad a los distintos agentes del juego?, es decir, ¿cuál debe ser el reparto más justo de los beneficios cooperativos obtenidos?

El matemático que en 1953 dio respuesta a la cuestión anterior fue el estadounidense Lloyd Stowell Shapley [2] estableciendo un «valor» para juegos cooperativos de n personas que empezaría a conocerse como «valor de Shapley» en juegos cooperativos con transferencia de utilidad. Este valor tendría un fuerte impacto en el desarrollo de la teoría de juegos y su posterior aplicación a la teoría económica. Sin embargo, su cálculo es de complejidad combinatoria y por eso en los últimos años se han desarrollado numerosos algoritmos para obtener soluciones en tiempos computacionales razonables.

En marzo de 2016 fallecía Shapley, pionero en la teoría de juegos y coetáneo de John Nash (el matemático de la «mente maravillosa»). Sirva este breve resumen como recuerdo a este gigante de la teoría de juegos [3].

Lloyd S. Shapley nace en Cambridge, Massachusetts, hijo de un reconocido astrónomo. Pasó su infancia en el Observatorio de Harvard, siendo su padre director. Empieza a estudiar matemáticas en la Universidad de Harvard y en 1943, a mediados de su tercer año, debe suspender sus estudios por ser reclutado para el ejército durante la Segunda Guerra Mundial.

Fue destinado a una base aérea secreta en el oeste de China y por sus conocimientos matemáticos estuvo en una estación meteorológica donde se hacían observaciones para predecir el tiempo y también se interceptaban transmisiones. Estos datos meteorológicos eran muy importantes para la llegada y salida rápida de aviones.

Usando criptoanálisis logró romper el código meteorológico soviético, obteniendo mucha información meteorológica de la zona. Esto le sirvió para obtener una estrella de bronce, el ascenso a cabo y un aumento de cuatro dólares al mes.

Terminada la guerra, regresa a Harvard, graduándose en 1948. Obtiene su doctorado en 1953 en la Universidad de Princeton bajo la supervisión de Albert W. Tucker

 ISSN 1988-5318

(quien también supervisaría la tesis de John F. Nash, defendida en 1950).

Empieza a trabajar para la organización de investigación *RAND Corporation* en Santa Mónica, California, donde conoció a la matemática y compañera de trabajo Marian Ludolph, con la que se casaría en 1955.

RAND fue creado por la Fuerza Aérea estadounidense después de la II Guerra Mundial, tratando de mantenerse en contacto con la comunidad científica, facilitando contratos a científicos que estuviesen dispuestos a pensar en algunos problemas e intentar dar soluciones.

En 1962, Shapley usa la teoría de juegos cooperativos en modelos de «emparejamiento» desarrollando, junto con David Gale, un algoritmo que permite obtener emparejamientos estables [1]. Lo aplican al caso de matrimonios y admisiones universitarias.

Lloyd Shapley y Alvin Roth en la entrega del premio Nobel

Shapley fue miembro de la *Econometric Society* y de la *American Academy of Arts and Sciences* desde 1967 y 1974, respectivamente. En 1981 fue galardonado con el premio John von Neumann en investigación de operaciones y ciencias de administración. Ese año deja la organización *RAND Corporation* y obtiene una plaza de profesor en la Universidad de California, Los Ángeles.

Su reconocimiento mundial llega en el año 2012 cuando recibe el premio Nobel en Economía junto con Alvin E. Roth (profesor de economía de Stanford) por *«sus contribuciones a la teoría de las asignaciones estables y su aplicación al diseño de mercados»*.

El profesor Roth supo ver que los resultados teóricos de Shapley podían clarificar el funcionamiento de los llamados «mercados de emparejamiento» y así, tomando como base el algoritmo de Gale–Shapley, rediseñó con éxito los métodos usados por distintas instituciones para emparejar, por ejemplo, a médicos con hospitales, estudiantes con escuelas o donantes de órganos con pacientes necesitados de un trasplante.

Terminaré indicando que Lloyd Shapley ha sido el sexto alumno de aquella clase de Harvard de 1943 en obtener un premio Nobel.

Referencias

[1] Gale, D. y Shapley L.S., College admissions and the estability of marriage, *American Mathematical Monthly* 69 (1962), 9 – 15.

[2] Shapley, L.S., A value for n-person games, *Contributions to the Theory of Games II*. Editores: Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker. Princeton University Press (1953).

[3] *Nota biográfica del premio Nobel Lloyd S. Shapley*.

■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

Las matemáticas que rigen nuestras cuentas personales

Antonio Salmerón Cerdán
Universidad de Almería

Casi todos nosotros nos hemos visto, o nos veremos, en la necesidad de recurrir a un banco para obtener un crédito que nos permita adquirir algo que, por su elevado valor, supera el límite de nuestros ahorros en un momento dado. Esto ocurre no solamente a la hora de hacer grandes compras, como una casa o un coche, sino también en situaciones más cotidianas como al hacer uso de una tarjeta de crédito en una compra online.

En cualquier caso, en el momento en que hemos tomado dinero prestado de un banco, éste pasa a tener un gran interés en conocer nuestra situación financiera de la forma más precisa posible. De hecho, antes de conceder el crédito, el banco tiene que decidir de una manera bien fundamentada si es viable concedernos ese crédito o no. En definitiva, se trata de determinar si lo devolveremos o no.

Thomas Bayes (1702–1761)

Esto se hace a través de modelos matemáticos que tratan de predecir cuál es la probabilidad de que devolvamos el crédito. Una posibilidad comúnmente empleada para resolver la tarea es la determinación de dicha probabilidad de ser un buen pagador mediante los llamados modelos de regresión logística, donde la probabilidad se modela como una función logística de ciertas variables relevantes, como nuestros ingresos, situación laboral, historial de pagos, etc.

Estos modelos logísticos dependen de una serie de parámetros que pueden ser estimados mediante procedimien-

 ISSN 1988-5318

tos de inferencia estadística a partir de una muestra (un registro histórico) de créditos anteriores concedidos a otros clientes.

Una vez concedido el crédito, el banco se preocupará también por saber con la mayor antelación posible si en el futuro vamos a tener algún problema para pagar las cuotas.

Para ello, se pueden emplear modelos logísticos también. Sin embargo, la situación ahora es más dinámica, y puede interesar que los modelos que se usan para predecir tengan sus parámetros actualizados con la última información disponible.

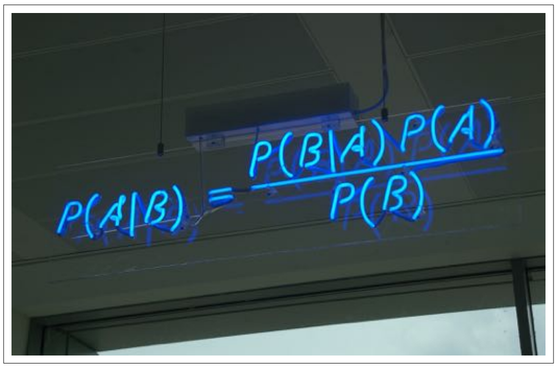
Actualmente, cuando los volúmenes de datos disponibles son tan enormes, es importante que la actualización de las estimaciones de los parámetros sea viable, por ejemplo reutilizando los cálculos que ya se hubieran hecho en estimaciones anteriores.

Una solución muy extendida consiste en emplear técnicas bayesianas, donde la base es el archiconocido y antiguo *teorema de Bayes*.

Este teorema nos dice cómo actualizar la probabilidad de un determinado suceso A ante la llegada de nueva información B, simplemente como

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

donde aprovechamos el conocimiento que ya teníamos sobre A, es decir, $P(A)$. Sin duda, una antigua fórmula con un impacto muy actual.



Letrero de neón mostrando el teorema de Bayes (Fuente: Wikimedia)

■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

Cristales, cuasicristales, simetrías, difracción y realidad virtual

José Luis Rodríguez Blancas
Universidad de Almería

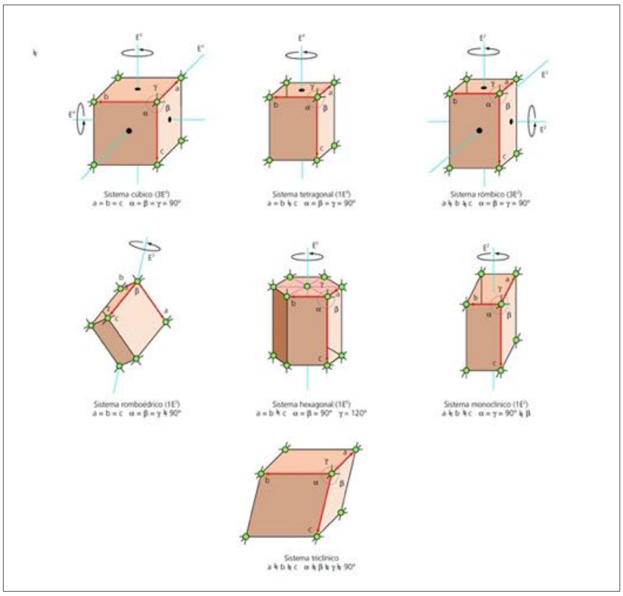
Los *cristales* se distinguen por presentar una estructura geométrica ordenada y periódica a nivel atómico. Un vaso de cristal por ejemplo, no es propiamente «cristal» sino vidrio, no existe orden en los átomos. Sin embargo, la cáscara de huevo sí que es un cristal, más precisamente, policristal, al estar formada por pequeños cristales de calcita pegados entre si.

El hielo es otro ejemplo de cristal («cristal» procede de la palabra griega *krystallos*, siglo I a. C., significa «hielo»). El grafito de la punta de un lápiz o el diamante, el hierro, el cobre, o la sal común son otros ejemplos más que usamos cotidianamente.

La *cristalografía* como rama de la ciencia que estudia sistemáticamente los cristales surgió de mineralogos como Maurice Antoine Capeller (1685–1769) o Jean-Baptiste Louis Romé de L'Isle (1736-1790).

En 1801, René Just Haüy (1743–1822) se percató de que el cristal de calcita ($CaCO_3$) tenía la misma forma geométrica que sus trozos cortados, lo que le hizo pensar en una estructura periódica.

Se avanza en esta línea, hasta que en 1848, Auguste Bravais (1811–1863) da con una clasificación completa de las estructuras cristalinas (periódicas), en total 14, obtenidas a partir de 7 sistemas cristalinos, y con órdenes de simetría rotacionales 2, 3, 4 o 6. Cada una de estas estructuras está generada por una «celda unitaria», determinada por sus longitudes a, b y c, y ángulos α, β y γ.



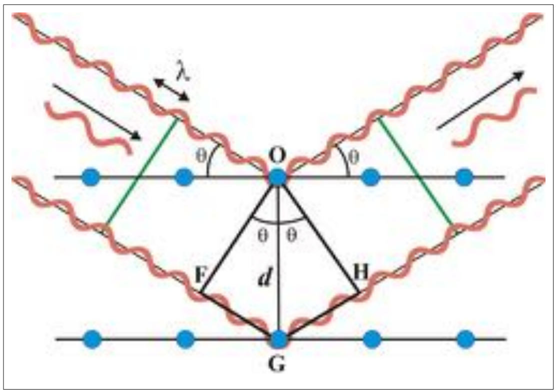
Los 7 sistemas cristalinos y sus simetrías. Las 14 redes de Bravais se obtienen a partir de estos, añadiendo vértices centrados en la celda, centrados en las bases o centrados en las caras. (Fuente: dimetilsulfuro.es).

A principios del siglo XX se logra un gran avance en cristalografía, gracias al descubrimiento primero de los rayos X por Wilhelm Röntgen (1845–1923), y más tarde de los rayos X por cristales o difracción por Max von Laue

 ISSN 1988-5318

(1879– 1960), quien obtuvo por ello el premio Nobel de Física en 1914.

Al año siguiente, lo recibieron William Lawrence Bragg (1890–1971) y su padre Henry Bragg (1862-1942) por descubrir una fórmula (Ley de Bragg) que debía satisfacer la difracción de rayos X, la cuál permitía interpretar las imágenes obtenidas para identificar la estructura de un cristal (disposición de los átomos, distancias y ángulos que separan la celda unitaria). Dicha técnica se utilizó también en otros campos como la geología o la biología. Por ejemplo, la estructura de doble hélice del ADN se pudo descubrir mediante esta técnica en 1953 por F. Crick, J. Watson y M. Wilkins.



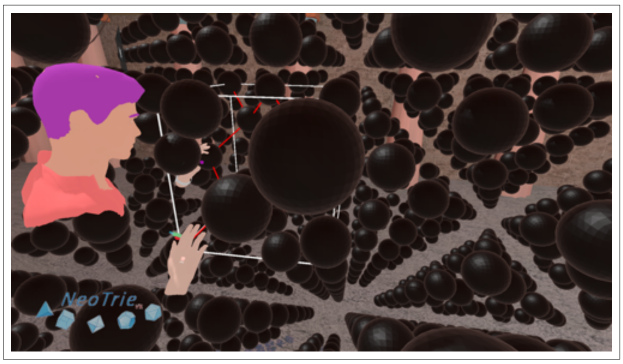
Ley de Bragg ($n\lambda = 2d \operatorname{sen}\theta$). Esta ley asegura que para que se detecte la difracción de rayos X, dos ondas del mismo que incidan sobre átomos alineados en distintos planos del cristal, deben estar en fase para que la onda resultante se marque con claridad en una pantalla. En otro caso, se vería un halo difuso. La diferencia del recorrido entre las ondas es $FG + GH = 2d \operatorname{sen}\theta$ que debe ser un múltiplo entero $n\lambda$ de la longitud de onda λ. Fuente: www.xtal.iqfr.csic.es

En 1984, Dan Shechtman, Ilan Blech, Denis Gratias y John Werner Cahn, encontraron una estructura ordenada nueva no periódica, que más tarde se denominaría cuasicristales. Observaron a través de un microscopio electrónico una aleación de aluminio y manganeso cuyo diagrama de difracción revelaba una simetría rotacional de orden 5, pero no periódica, (hasta ahora, los cristales admitían simetrías rotacionales de órdenes 2, 3, 4 o 6). En 2011 Shechtman sería merecedor del premio Nobel de Química por su hallazgo.

Hasta aquí una pequeña introducción histórica a la cristalografía. Lo cierto es que nos hemos adentrado en este maravilloso mundo gracias a que los pasados 5 y 6 de octubre tuvimos la oportunidad de participar en unos talleres interdisciplinares sobre cristalografía, en el Palacio del Descubrimiento de París, con motivo de la Fiesta de la Ciencia nacional.

Diagrama de difracción electrónica de un cuasicristal icosaédrico de AlPdMn, con simetría rotacional de orden 5. (Fuente: Programa ICO de D. Gratias et M. Quiquandon).

El público pudo construir en realidad virtual en *Neotrie VR* (virtualdor.com/NeoTrie-VR) varias redes cristalinas a partir de sus celdas unitarias, visualizar distintas proyecciones sobre una pantalla (simulando la difracción de rayos X), identificar sus simetrías con la herramienta de rotación del software, e incluso volar por dentro para ver sus alineamientos y planos de fractura.



En el interior de la estructura cristalina del diamante donde se aprecian alineamientos y planos de corte.

La realidad virtual nos abre una nueva manera de ver todo lo que nos rodea, desde lo más grande a lo más pequeño, y especialmente nos puede ayudar a comprender mejor las matemáticas que lo describen.

Referencias

[1] Fournier, L. (2014), année internationale de la cristallographie. Un siècle au coeur des cristaux. Revus Découverte 393.

■

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Antonia Ferrín Moreiras

De Maestra Nacional y licenciada en Química a Farmacéutica y doctora en Matemáticas

Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla

Isabel María Ortiz Rodríguez
Universidad de Almería

La proliferación de másteres propuestos por las universidades hace posible que en la actualidad sea frecuente que una persona presente en su currículum varios de ellos. Sin embargo, un máster no es equiparable a una carrera universitaria y, por descontado, los tiempos actuales no son equiparables a los de hace algo más de un siglo, sobre todo en lo que se refiere al acceso de la mujer a los estudios universitarios.

Antonia Ferrín

En aquellos tiempos, el hecho de que una mujer finalizase una carrera universitaria era inusual y que finalizase más de una era prácticamente imposible. Sin embargo, tenemos un ejemplo fehaciente de esto último en la gallega Antonia Ferrín Moreiras, maestra nacional y licenciada, por este orden, en Química, Farmacia y Matemáticas (también doctora en esta especialidad) en las primeras décadas del siglo pasado.

Antonia en el observatorio

Antonia nació en Orense el 13 de mayo de 1914, siendo la tercera hermana de una familia que, a pesar de disponer de pocos recursos económicos, deseaba que sus cuatro hijas tuviesen estudios superiores, expectativa totalmente poco habitual para las mujeres en aquel tiempo (Liste y Pintos, 2010).

Cuando Antonia tenía seis años, la familia se trasladó a Santiago de Compostela, donde ella empezó a ir al colegio con siete años. Allí estudió el Bachillerato en el Instituto Nacional de Secundaria *Arcebispo Xelmirez*, junto con doce niñas más.

Licenciada en Química

En 1930, con 16 años, Antonia comenzó sus estudios universitarios en la Facultad de Ciencias de la *Universidad de Santiago de Compostela* (USC), matriculándose en Química (única especialidad que por aquel entonces existía en esa universidad) y licenciándose en mayo de 1935. También obtuvo el título de Maestra Nacional.

Tras terminar Química, Antonia trabajó como docente universitaria, aunque sin ninguna remuneración, desde 1934 hasta 1936, al tiempo que empezó a estudiar la carrera de Farmacia y a realizar también los dos únicos cursos de Ciencias Exactas que se impartían en la USC. Tras la Guerra Civil fue expedientada por su ideología política, siendo después rehabilitada en 1940.

Licenciada en Farmacia y primera mujer astrónoma gallega

En el curso 1939-1940 aprobó las asignaturas que le faltaban para licenciarse en Farmacia y, a su vez, conoció al profesor de Matemáticas Enrique Vidal Abascal, para el que trabajó como ayudante en su cátedra de la Facultad de Ciencias de la USC.

Vidal presentó a Antonia al sacerdote católico Ramón María Aller Ulloa, profesor de la universidad, astrónomo y matemático, quien la introdujo en el mundo de la Astronomía, lo que posibilitó convertirse más tarde en la primera mujer astrónoma gallega.

Junto a Aller en el Observatorio Astronómico de Santiago, Antonia se familiarizó con el uso de instrumentos astronómicos que le permitieron llevar a cabo estudios, tanto sobre ocultaciones de estrellas por la luna, como sobre pasos de estrellas por dos verticales o medidas micrométricas de estrellas dobles.

Ramón María Aller y Antonia en el Observatorio Astronómico de Santiago

Una antigua alumna de Antonia recuerda una anécdota que ella misma contaba sobre el frío que pasaba bajo la cúpula del observatorio en las noches de invierno (Montesinos, 2009): *«Las noches de observación supusieron horas de intenso frío, porque no podía vestir pantalones en un tiempo en el que esta prenda no se toleraba en las mujeres... [esa prenda] no se consideraba femenina y solamente las actrices de cine más atrevidas osaban lucirla en la gran pantalla.»*

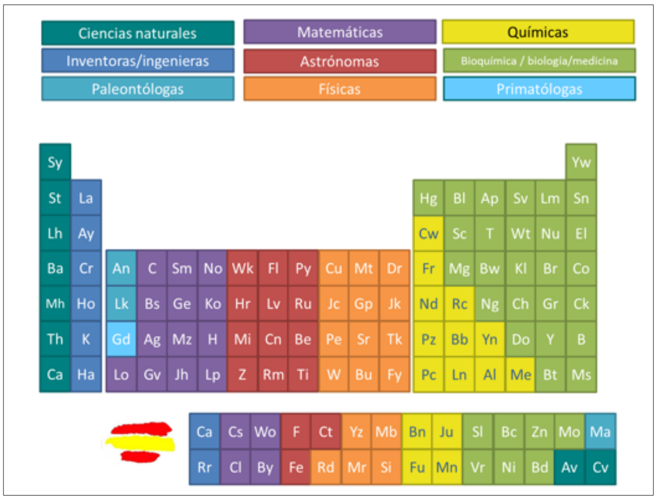
Licenciada y doctora en Matemáticas

Antonia obtuvo la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad Central de Madrid en 1950, estudiando como alumna libre los tres últimos años de la carrera. En 1963, ya en Santiago, defendió su Tesis doctoral, realizada bajo

 ISSN 1988-5318

la dirección de Aller, siendo la primera tesis que se leyó en la Facultad de Matemáticas de la USC y la primera sobre Astronomía realizada en España por una mujer.

También en 1963, Antonia fue nombrada Catedrática Numeraria de Matemáticas en la *Escuela de Magisterio Santa María* de la *Universidad Central de Madrid*, trasladándose a vivir a esta ciudad, donde permaneció hasta su jubilación en 1984. Tras alternar después su residencia entre Madrid y Santiago durante unos veinte años, Antonia falleció el 6 de agosto de 2009 en Santiago de Compostela, a los 95 años.



La Tabla Periódica de las Científicas (Fuente: naukas.com)

Tabla Periódica de las Científicas

Como honores más relevantes, en 2008, con motivo de la celebración del 50 aniversario de la creación de la Facultad de Matemáticas de la USC, Antonia fue elegida madrina de esa efeméride y se le puso su nombre a un aula de la Facultad. En 2013 se creó el *Premio de creación de materiales y recursos docentes con perspectiva de género de la Universidad de Vigo ANTONIA FERRÍN MOREIRAS*.

En 2018 fue incluida en la **Tabla Periódica de las Científicas**, en el grupo de astrónomas, con símbolo **Fe** y ocupando la posición del Uranio en el Sistema periódico de los elementos.

Excluida en una oposición a la Cátedra de Astronomía

A pesar de su gran carrera profesional, el hecho de ser mujer dificultó grandemente sus aspiraciones en muchas ocasiones, por ejemplo, cuando su mentor Ramón María Aller enfermó en 1964 y había que encontrar un sustituto para que continuase su cátedra de Astronomía en el Observatorio. Aunque Antonia, ya doctora, se presentó a la oposición que se convocó para ello, fue excluida. Sin embargo, tras una queja, fue admitida como aspirante, pero la cátedra quedó declarada desierta y el Observatorio decayó durante años.

Referencias

[1] Liste López, S. y Pintos Barral, X. (2010). Abatendo muros. As primeiras docentes na Universidade de Santiago. Boletín das ciencias 71, 155-156.

[2] Mato, M. (2013). Medio siglo de la primera astrónoma gallega. Diario Faro de Vigo, 20 de enero de 2013.

[3] Montesinos, B. (2009). Fallece Antonia Ferrín Moreiras, primera astrónoma gallega. Diario El País, 10 de agosto de 2009.

[4] Verdejo, A. Breve biografía de Antonia Ferrín Moreiras en MATEMÁTICAS en pie de Igualdad en la Universidad de Vigo. (http://igualmat.uvigo.es)

■

PASATIEMPOS Y CURIOSIDADES

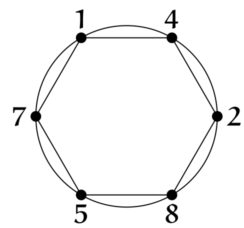
Los números cíclicos

Rubén Avelino González Morales
Adrián Giménez Miralles
Francisco Román López Expósito
Eusebio Răzvan Rat
Estudiantes del Grado en Ingeniería Mecánica de la UAL

En este artículo pretendemos que el lector conozca las fascinantes propiedades de unos números tan peculiares que podrían dejar boquiabierto a cualquiera. En primer lugar, daremos una definición general de estos números.

Los *números cíclicos* son números enteros positivos de n cifras que, al multiplicarlos por un número entero perteneciente al intervalo $[1, n]$, resultan en otro número que tiene las mismas cifras que el número original, permutados cíclicamente. El número cíclico más pequeño es el 142857, cuyas propiedades podemos observar a continuación, para n igual a 6:

$$
\begin{aligned}
1 \times 142857 &= 142857\\
2 \times 142857 &= 285714\\
3 \times 142857 &= 428571\\
4 \times 142857 &= 571428\\
5 \times 142857 &= 714285\\
6 \times 142857 &= 857142
\end{aligned}
$$



ISSN 1988-5318

Obsérvese que si escogemos cualquier vértice del hexágono inscrito en el círculo de la figura, y avanzamos en el sentido de las agujas del reloj, se obtendrá siempre uno de los números listados anteriormente, de ahí viene la expresión «permutados cíclicamente».

Esto puede resultar interesante, pero aún no hemos vislumbrado la razón de la ciclicidad de estos números.

Bien, consideremos una fracción a/p, donde a y p son enteros positivos. Al obtener su expresión decimal, podemos demostrar que la longitud del período es como máximo de $p-1$ cifras. Esto es debido a que al realizar la división a/p, el número de restos posibles distintos de 0 es $p-1$ (los números enteros comprendidos entre 1 y $p-1$), ya que si el resto es 0 no sería un número periódico. Se puede demostrar también que, para obtener un período de longitud máxima, es condición necesaria pero no suficiente que p sea un número primo.

A continuación, observemos una propiedad que tienen estos períodos de longitud máxima. Veamos como ejemplo el período de $1/7$: 142857 (ilustración 1).

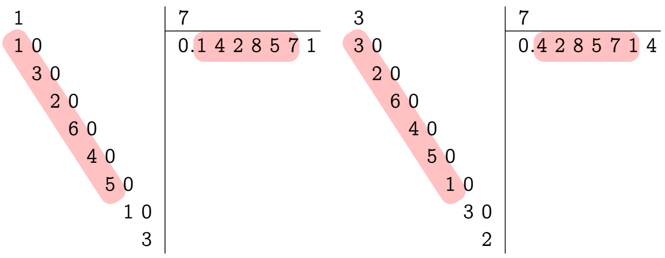


Ilustración 1. Fracciones 1/7 y 3/7

Si multiplicamos por $n = 3$ dicha fracción, solo variamos la posición de inicio del proceso cíclico, pero las cifras del período son las mismas.

Esta propiedad se cumple para todo entero positivo n que no sea múltiplo de p, ya que al dividir $(k \cdot p)/p$, el resultado es k.

En el caso $n > p$, cambiará el valor de la cifra de las unidades, pero el período seguirá siendo el mismo. Al período de estas fracciones es lo que hemos llamado un número cíclico. Algunas consideraciones más sobre los números cíclicos son:

- Se consideran generados por las fracciones cuyo numerador es 1, para simplificar su definición.
- Al número primo p que genera un número cíclico mediante la fracción $1/p$ se le conoce como *numero primo largo*.

En resumen, los números cíclicos son los períodos de longitud máxima de las fracciones recíprocas de ciertos números primos conocidos como números primos largos.

Veamos a continuación una forma de encontrar más números cíclicos. Supongamos que un número primo p genera un número cíclico $a_1 a_2 \ldots a_{p-2} a_{p-1}$, esto es,

$$\frac{1}{p} = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_{p-2} a_{p-1}}.$$

Si multiplicamos ambos términos por 10^{p-1} obtenemos

$$\frac{10^{p-1}}{p} = a_1 a_2 \ldots a_{p-2} a_{p-1}, \overline{a_1 a_2 \ldots a_{p-2} a_{p-1}}.$$

Y restando la fracción generatriz queda:

$$\frac{10^{p-1}}{p} - \frac{1}{p} = a_1 a_2 \ldots a_{p-2} a_{p-1}.$$

Es decir, podemos obtener números cíclicos a partir de algunos números primos mediante la siguiente expresión:

$$\frac{10^{p-1} - 1}{p}. \tag{1}$$

De la expresión (1), podemos observar que si multiplicamos el número cíclico por su primo generador p, obtenemos una hilera de $p-1$ nueves: $10^{p-1} - 1$.

De esta manera, si conocemos un número primo largo, podemos hallar el número cíclico que engendra, añadiendo a la expresión (1) tantos ceros a la izquierda como cifras hagan falta para completar $p-1$ cifras (puesto que suele ocurrir que el período comienza por uno o varios ceros: se sabe que el único número cíclico que no comienza por 0 es el 142857).

Se piensa que existen infinitos números primos largos y que, además, estos son aproximadamente un 37,4 % de todos los números primos (concretamente, la conjetura afirma que la proporción de primos largos entre todos los primos viene dada por la *constante de Artin*, dada por $\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{p_k(p_k-1)}\right]$, donde p_k es el k-ésimo primo).

Los primeros números primos largos son

$$7, 17, 19, 23, 29, 47 \ldots$$

según la OEIS (enciclopedia online de las secuencias de números enteros). Veamos, a modo de ejemplo, cuál es el número cíclico que genera el 23. Por lo que sabemos, debe tener 22 cifras. Aplicando la expresión (1) obtenemos:

$$\frac{10^{23-1} - 1}{23} = 434\,782\,608\,695\,652\,173\,913.$$

Podemos observar que tiene 21 cifras, por lo tanto, hay que añadirle un 0 al inicio. El número cíclico engendrado por el 23 será el **0 434 782 608 695 652 173 913**.

Otra propiedad de los números cíclicos puede ser explicada mediante el *teorema de Midy*. En dicho teorema se afirma *«toda fracción cuyo denominador sea un número primo mayor que 5 y su valor un número decimal periódico puro con una cantidad par de dígitos en el período, verifica que, si dividimos el período en dos mitades, la suma de la primera y segunda mitad es siempre igual a un número cuyos dígitos son todos iguales a 9»*. Podemos observar el siguiente ejemplo:

Tenemos la fracción $1/7$, cuyo valor decimal sería de 0.**142 857** 142 857 ... La parte periódica de dicho decimal es 142857.

Midy afirma que, dividiendo dicho número en dos mitades, la suma de la mitad izquierda más la mitad derecha

 ISSN 1988-5318

nos dará un número (en este caso de 3 cifras) compuesto únicamente de nueves, comprobamos que esto es cierto para el ejemplo propuesto:

$$142 + 857 = 999.$$

Esta propiedad es aplicable a todos los números cíclicos ya que el menor número primo largo es 7 (mayor que 5) y como todos los números primos son impares, las cifras de todos los números cíclicos son pares.

Esta propiedad del *teorema de Midy* puede extenderse a números cíclicos cuyo número de cifras sea divisible entre 3, sumando las tres partes obtenidas al dividir dicho número en tres bloques con igual número de dígitos.

De esta manera, volvemos a obtener una hilera de nueves. Por ejemplo, para la fracción $1/7$, podemos comprobar que $14+28+57 = 99$ y para el primo largo 19, obtenemos el número **052 631 578 947 368 421** y, de nuevo,

$$052631 + 578947 + 368421 = 999999.$$

Algunos números cíclicos no son cíclicos en sentido estricto tal como los hemos visto hasta ahora. Tengamos en mente el período de $1/13$ que es 076923.

Si lo multiplicamos por cualquier número entero perteneciente al intervalo $[1, 12]$, se puede observar que la mitad de los productos corresponden a las cifras del número original y la otra mitad corresponden al doble (153846).

Si al multiplicar un número de n cifras por números comprendidos entre 1 y $2n$, obtenemos productos que contienen los mismos dígitos que el número de n cifras o que el doble de dicho número, se dice que dicho número es cíclico de segundo orden.

Al igual que el 142857, el 076923 no se ha escogido por casualidad, sino que se trata del obtenido mediante el número 13, que es el número primo menor con el cual se puede obtener un número cíclico de orden 2. Otros números como este serían el 31, el 43 y el 67.

Para generar números cíclicos de tercer orden tenemos que irnos al número 103 con el que haciendo la fracción $1/103$ obtenemos tres tipos de productos, y el de orden 4 corresponde al de la fracción $1/53$.

Generalizando, podemos afirmar que cuando la fracción recíproca de un número primo p da un período de longitud $\frac{p-1}{n}$, el período es cíclico de orden n.

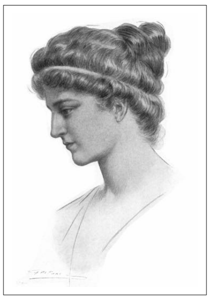
Referencias

[1] Gardner, M. (1995) *Circo matemático*. Capítulo 10 pp. 108–120. Madrid. Alianza Editorial.

■

Citas Matemáticas

«Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá.»



Hipatia de Alejandría
(350–415 a. C.), matemática, filósofa, astrónoma, escritora e inventora.

«Aquel que concibe, que aporta una idea sublime, no está limitado por una restricción pueril; sino que es alguien que la adopta y ve más allá de los prejuicios de su tiempo.»

Sophie Germain
(1776–1831), matemática, física y filósofa francesa.

Acertijos

Un día de playa

El contacto con el aire, tras aguantar la respiración, resultó tan estimulante como la imagen del cabo al otro lado de la bahía. Mientras observaba el espectáculo, con la mirada perfectamente horizontal, percibí el destello de algún objeto reflectante (a 20 kilómetros de distancia en línea recta). Me preguntaba si estaría flotando o a cierta altura sobre el nivel del mar.

¿Podrías razonar la respuesta?

(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

Teníamos que numerar, si era posible, las 16 casillas de una tabla 4×4 de acuerdo con las siguientes premisas:

 ISSN 1988-5318

- Se puede elegir libremente la primera celda.
- Para la selección de las celdas subsiguientes solo se admiten desplazamientos de:
  - Una única casilla en dirección diagonal.
  - Dos casillas en dirección horizontal o vertical.
- No se puede volver a ninguna celda ya numerada.

Si elegimos una celda blanca como punto de partida, los movimientos permitidos nos llevarán irremediablemente a otra celda blanca. Algo similar ocurre si partimos de una celda gris. Por tanto, no es posible numerar las 16 celdas siguiendo las citadas prescripciones. Podemos consignar, como máximo, las 8 celdas blancas o las 8 grises. He aquí una muestra:

1		2	
	3		4
6		5	
	7		8

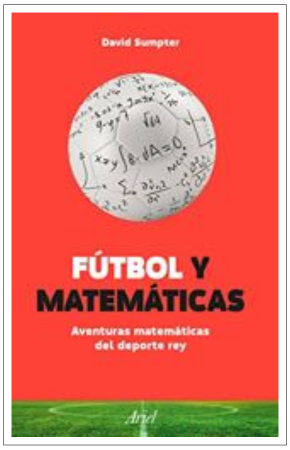
	3		8
2		5	
	4		7
1		6	

Bajo las condiciones citadas, puede observarse además que el número de celdas numeradas no puede ser inferior a cuatro.

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Fútbol y matemáticas. Aventuras matemáticas del deporte rey

David Sumpter.



Ficha Técnica
Editorial: Ariel.
328 páginas.
ISBN: 978-84-3442-384-8.
Año: 2016.

David Sumpter es profesor de matemáticas aplicadas en la universidad de Uppsala (Suecia) y un reconocido investigador de modelos matemáticos aplicados a la biología y a la sociología. En este libro aborda las sorprendentes relaciones existentes entre dos de sus grandes pasiones, el fútbol y las matemáticas.

A lo largo del libro veremos, por un lado, que el fútbol sirve para plantear algunos interesantes modelos matemáticos y, por otro, que las matemáticas sirven para entender mejor el mundo del fútbol.

Hay muchas cuestiones futbolísticas que se pueden responder con la ayuda de las matemáticas, por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de marcar un gol en los últimos minutos de un partido?, ¿por qué es más efectivo un sistema de juego que otro?, ¿por qué se dan tres puntos por una victoria en los partidos de liga?...

Aunque en este libro el punto de partida es siempre el fútbol, en cada capítulo aparecen algunas de las muchas analogías existentes entre este deporte y ciertas áreas del conocimiento como la sociología o la biología.

Observar estas analogías es posible gracias a la elaboración de modelos matemáticos que permiten visibilizar las conexiones existentes entre hechos que aparentemente no tienen nada que ver. Por ejemplo, las matemáticas ponen de manifiesto ciertas similitudes en las estrategias de ataque de los jugadores en el terreno de juego y las de algunos depredadores durante una cacería. Desde este punto de vista el fútbol también tiene algo que ofrecer a las matemáticas.

Otro aspecto de esta obra a destacar es que sus lectores no necesitan grandes conocimientos de fútbol. Tampoco necesita grandes conocimientos de matemáticas ya que no se han incluido grandes desarrollos matemáticos.

Los modelos que aparecen son explicados mayormente a través de palabras, simulaciones de ordenador, histogramas y diagramas explicativos. No obstante, si se quiere profundizar en el aspecto matemático de los modelos y en los detalles de los temas tratados, se pueden consultar las notas incluidas a pie de página.

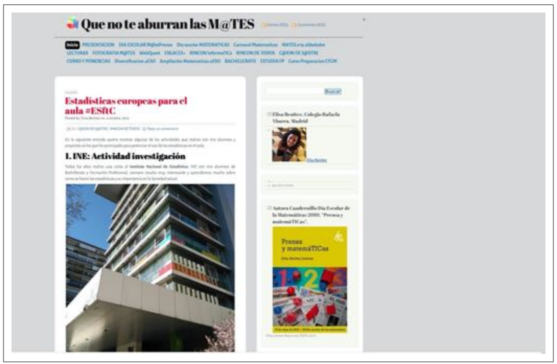
Por todo lo dicho, este libro puede interesar a un número amplio de lectores, no sólo a los aficionados al fútbol, sino también a aquellos matemáticos que quieran conocer cómo las matemáticas pueden ayudar a comprender mejor el mundo que nos rodea.

Antonio Morales Campoy
Universidad de Almería

 ISSN 1988-5318

Páginas web de interés

Que no te aburran las Mates



https://matesnoaburridas.wordpress.com

Elisa Benítez fue profesora universitaria y después, profesora de ESO y bachillerato en Madrid. En *matesnoaburridas.wordpress.com* demuestra que las Matemáticas no tienen por qué ser aburridas.

La página tiene actividades ya realizadas por varios profesores, en su mayoría de ESO y bachillerato, que exponen no solo la actividad en sí, sino su concepción, objetivos, rúbricas para evaluación y posible implementación en otros cursos. Por tanto, las explicaciones son aprovechables tanto para alumnos como para profesores.

Aparecen varias secciones donde se relacionan las matemáticas con materias tan dispares como Química, Economía o Fotografía. Se dedica un espacio concreto a comentar y exponer las matemáticas que nos rodean. La página es interactiva y dinámica y, en cualquier momento, cualquier visitante puede comentar aquello que desee.

Para alumnos y profesores puede ser muy útil la revisión de algunos de mapas conceptuales expuestos que versan sobre diversos temas matemáticos tales como Geometría o Trigonometría.

También tienen cabida las noticias de prensa relacionadas con «La Reina de las Ciencias», como dijo Gauss y hay un apartado de frases célebres. Se aconsejan lecturas y enlaces web de contenido matemático, ordenados por temas.

Se comentan eventos matemáticos periódicos organizados en parte por el centro de la responsable de la página y por otros centros tales como un *Carnaval Matemático* o la *Celebración del Día de las Matemáticas*.

Algunas aplicaciones informáticas con alto contenido matemático son mostradas en esta web.

Por otro lado, existen los tradicionales apuntes sobre bachillerato, FP y ESO y se puede acceder a materiales, proyectos y talleres educativos realizados por la profesora Benítez, algunos de los cuáles merecieron premios en diversos certámenes.

Se tratan, principalmente, temas afines a la Estadística y a la Probabilidad Por toda esta variedad y utilidad en los contenidos y su ambivalencia tanto para profesores como para alumnos, la consideramos una página muy interesante para visitar.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

Infinitesimales

Joaquín Porcel Maleno
Paula Ortega Trigo
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Hoy en día nadie pone en duda la importancia del concepto del infinito en una lección de matemáticas. Para Cantor ningún otro concepto matemático ha fascinado tanto al hombre como el de la infinitud. Pese a su importancia, hay un elemento estrechamente ligado a él que fue desterrado de las matemáticas durante siglos; el infinitésimo.

Entendiendo el infinito como una cantidad mayor que cualquier número finito, ¿se podría tomar un elemento opuesto? No en un sentido aritmético tomando el menos infinito, sino en la cantidad positiva más pequeña que pudiera llegar a existir. Así se define un infinitésimo, como una magnitud mayor que cero pero menor que cualquier otro número positivo.

En un ejemplo práctico ¿cómo se habría calculado la pendiente de una curva en un punto, antes de los conceptos modernos de derivada? Sea e una cantidad infinitesimal, $y = x^2$ nuestra curva y $x = c$ el punto en el que queremos conocer la pendiente. Se va a aproximar encontrando la pendiente entre $x = c$ y $x = c + e$, un punto infinitamente cercano.

El cambio en y será $y(c+e) - y(c) = (c+e)^2 - c^2$. El cambio en x es $(c+e) - c = e$. Dividiendo y simplificando:

$$\frac{(c+e)^2 - c^2}{e} = \frac{c^2 + 2ce + e^2 - c^2}{e} = \frac{2ce + e^2}{e} = 2c + e$$

Como e es infinitamente pequeño en comparación con $2c$, podemos desecharlo obteniendo así el resultado esperado.

Para Newton esta e era una cantidad naciente, pues dejaban de ser cero pero no llegaban a tomar un valor; para Leibniz un diferencial y para Berkeley «un fantasma de cantidades difuntas».

Pese a los avances conseguidos mediante el uso de los infinitesimales no se libraron de las críticas, ¿cómo po-

 ISSN 1988-5318

dría aceptarse una cantidad como distinta de cero pero ser desechada de una ecuación por no tener valor?

Los infinitesimales eran usados como una mera herramienta más. Leibniz asegura que «no cree en magnitudes verdaderamente infinitas o verdaderamente infinitesimales» pero reconoce su necesidad y Newton, en uno de sus últimos trabajos intentó desechar la idea de infinitesimal para evitar contradicciones sin mucho éxito.

Pese a haber sido utilizado durante siglos, desde la escuela griega hasta Euler, fue un concepto finalmente abandonado en el siglo XIX por su falta de rigor. Es en este siglo donde trabajos como los de Weierstraß definen una nueva tendencia por el rigor matemático, donde los infinitésimos son cambiados por las cuidadas definiciones de límite épsilon-delta.

Karl Weierstraß

Pero, ¿es el concepto de infinitesimal algo erróneo y sin rigor cuando intuitivamente se ha utilizado durante siglos?

Abraham Robinson

A esta pregunta le daría respuesta Abraham Robinson en 1970 recurriendo a las matemáticas desarrolladas durante el siglo XX. Robinson creó un conjunto de números, los números hiperreales $^*\mathbb{R}$, donde es posible utilizar los infinitesimales de forma rigurosa. El análisis no estándar pretende, y logra, darle cabida en las matemáticas modernas al concepto de infinitésimo.

El precio de este rigor fue un formalismo pesado y poco intuitivo donde en un principio se intentó añadir estos elementos aún mal definidos al conjunto de los números reales con la finalidad de estudiar si se mantenían en este nuevo conjunto las propiedades y teoremas existentes en el sistema de los números reales. Sin embargo, añadir los infinitesimales a los números reales no terminaba de funcionar, es ahí donde entran nuevos axiomas y matemáticas más complejas.

Para ver el beneficio que se puede sacar del análisis no estándar, comparemos la expresión de la continuidad de una función f en el punto x. Mediante la definición clásica épsilon-delta:

$$\forall y > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

Mientras que usando el análisis no estándar:

$$\forall y : y \simeq x \Rightarrow f(y) \simeq f(x)$$

A simple vista la notación no estándar resulta más intuitiva, sin ser por ello menos formal. Pese a los trabajos de Robinson, y todos los matemáticos que le siguieron, hoy en día es una rama de la que no se habla. Y no porque no tenga valor en sí misma, se ha comparado su impacto en las aulas frente a un curso estándar de análisis y los resultados apuntaron a que los estudiantes que tomaron análisis no estándar les resultaba más fácil comprender el lenguaje formal. Pese a ello, recurrir a un sistema más completo como los hiperreales no termina de compensar únicamente por de dejar usar el concepto de límite actual.

Referencias

[1] Campistrous, L., Cabrera, C. y Fernández, J. (2011). Las ventajas didácticas del cálculo no estándar: una experiencia para compartir. 10.13140/RG.2.1.4017.8089.

[2] González, K. G. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía*, 15 (35), 27–36.

[3] Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. Princeton University Press.

[4] Tropp, J. A. (2002). *Infinitesimals: History & Application*. University of Texas, Texas, Austin.

■

ISSN 1988-5318

Responsables de las secciones

- Actividad Matemática en la UAL
  - *Actividades organizadas*: Isabel Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Entrevistas e investigación*: Juan José Moreno Balcázar (balcazar@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Foro abierto y preguntas frecuentes*: Inmaculada López García (milopez@ual.es).
- De la Enseñanza Media a la Enseñanza Universitaria
  - *Experiencias docentes*: David Crespo Casteleiro (davidcasteleiro@hotmail.com) y Nuria Pardo Vidal (penuria@gmail.com).
  - *Enseñanza bilingüe*: Jesús Pérez Castaño (jesus.perez.edu@juntadeandalucia.es).
- Divulgación Matemática
  - *La Historia y sus personajes*: Enrique de Amo Artero (edeamo@ual.es), Florencio Castaño Iglesias (fci@ual.es) y Blas Torrecillas Jover (btorreci@ual.es).
  - *Concurso de problemas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es), Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es) y Miguel Ángel Sánchez Granero (misanche@ual.es).
  - *Las Matemáticas aplicadas en otros campos*: Manuel Gámez Cámara (mgamez@ual.es), Juan Antonio López Ramos (jlopez@ual.es), Francisco Luzón Martínez (fluzon@ual.es) y Antonio Salmerón Cerdán (asalmero@ual.es).
  - *Mujeres y matemáticas*: Isabel María Ortiz Rodríguez (iortiz@ual.es) y Maribel Ramírez Álvarez (mramirez@ual.es).
  - *Cultura y matemáticas*: José Luis Rodríguez Blancas (jlrodri@ual.es) y José Ramón Sánchez García (jramon_sg@hotmail.com).
  - *Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática*: Antonio Morales Campoy (amorales@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Páginas web de interés*: José Carmona Tapia (jcarmona@ual.es) y José Escoriza López (jescoriz@ual.es).
  - *Citas matemáticas*: Alicia María Juan González (ajuan@ual.es) y Fernando Reche Lorite (freche@ual.es).
  - *Pasatiempos y curiosidades*: Juan Ramón García Rozas (jrgrozas@ual.es) y José Antonio Rodríguez Lallena (jarodrig@ual.es).
  - *Acertijos*: Juan Carlos Navarro Pascual (jcnav@ual.es).
- Territorio Estudiante: Natalia Expósito Salmerón (naexsal@gmail.com), Antonio Jesús Martínez Aparicio (angema8@gmail.com), Miguel Martínez Teruel (mglmtztrl@gmail.com), Paula Ortega Trigo (ortegatrigo612@gmail.com), Joaquín Porcel Maleno (j.porcelmaleno@gmail.com) y Álvaro Videgain Barranco (alvarovidegain4@gmail.com).

ISSN 1988-5318