# Comportamiento del consumidor mediante cadenas de Markov

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Emilio Caballero Ontiveros

Tutores:
Alicia María Juan González
José Fulgencio Gálvez Rodríguez

Grado en Matemáticas

Junio, 2019
Universidad de Almería

# Índice general

# Abstract

The main goal of this work is to study consumer purchasing behavior through different mathematical models, whose main protagonists are Markov chains.

First, in Chapter 2, we expose the basis for all the necessary theory to carry out the subsequent application studies. Specifically, we define and classify stochastic processes until we reach the type of process that constitutes the axis around which this work is articulated: the Markov chains. With regard to this last type of stochastic process, we will study in more detail a series of analytical results with special emphasis on finite Markov chains. This will allow us to obtain some results in the field of Markov chains with two states, which will be the origin of the mathematical models developed in a later chapter. Also, this unit ends with a list of concepts related to marketing, which will be useful to make the development and understanding of the models easy.

Chapter 3 discusses finite Markov chains from the point of view of application to marketing. We will begin with the development of a generic homogeneous model with two states of selection and brand exchange, which can be extended naturally to the finite case. This model serves as the basis for other more specific studies, such as the detection of the possible decoy effect, as well as the study of the influence of social effects on consumer purchasing behavior. Additionally, we can study what happens in the long term with the market share of various brands under the assumptions of brand loyalty and purchase pressure. Subsequently, two non-homogeneous models will be presented: one for the case in which the matrix of transition probabilities is variable, and another for when the market share is different. The chapter ends with the application of the previous models to a real case that is believed to be of general interest, known the wide market share it encompasses and the great war between companies in the sector that exists today: companies of mobile telephony in Spain.

The work will culminate with the corresponding conclusions and the appropriate bibliography that has been consulted for its elaboration.

# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el comportamiento de compra del consumidor a través de distintos modelos matemáticos, cuyo protagonista principal son las cadenas de Markov.

Primeramente, en el Capítulo 2 se exponen las bases de toda la teoría necesaria para llevar a cabo los posteriores estudios de aplicación. Concretamente, se comienza con la definición y clasificación de los procesos estocásticos hasta llegar al tipo de proceso que constituye el eje en torno al cual se articula el trabajo: las cadenas de Markov. Con respecto a este último tipo de proceso estocástico, estudiaremos con más detalle toda una serie de resultados analíticos, haciendo especial hincapié en las cadenas de Markov finitas. Lo anterior nos permitirá obtener una serie de resultados en el ámbito de las cadenas de Markov con dos estados, que constituirán el origen de los modelos matemáticos desarrollados en un capítulo posterior. Asimismo, este capítulo culmina con una relación de conceptos relacionados con el marketing, que serán de utilidad para facilitar el desarrollo y comprensión de los modelos.

En el Capítulo 3 se tratan las cadenas de Markov finitas desde el punto de vista de aplicación al marketing. Comenzaremos con el desarrollo de un modelo homogéneo genérico con dos estados de selección e intercambio de marca, el cual se podrá extender de manera natural al caso finito. Este modelo sirve de base para otros estudios más concretos, como pueden ser la detección del posible efecto señuelo, así como el estudio de la influencia de los efectos sociales sobre el comportamiento de compra del consumidor. Adicionalmente, podremos estudiar qué sucede a largo plazo con la cuota de mercado de diversas marcas bajo las hipótesis de lealtad de marca y presión de compra. Posteriormente, se presentarán dos modelos no homogéneos: uno para el caso en que la matriz de probabilidades de transición cambia con el tiempo y otro para cuando la cuota de mercado es la que cambia. El capítulo termina con la aplicación de los modelos anteriores a un caso real y que, se cree, puede resultar de interés general, conocida la gran cuota de mercado que engloba y la fuerte competencia entre empresas del sector que existe hoy en día: las compañías de telefonía móvil en España.

El trabajo termina con las correspondientes conclusiones y la oportuna bibliografía consultada para su elaboración.

# Introducción

1

## 1.1 Objetivos

El presente trabajo tiene dos objetivos fundamentales: en primer lugar, avanzar en el campo de la Teoría de la Probabilidad con respecto a lo estudiado en el grado. Concretamente, utilizando los conocimientos ya adquiridos en el ámbito de la condicionalidad, procedemos al estudio de procesos estocásticos de manera introductoria para, posteriormente, pasar a un estudio profundo de un caso particular, el proceso de Markov, y más concretamente, las cadenas de Markov.

En segundo lugar, se introducen una serie de modelos matemáticos basados en estas cadenas de Markov con el fin de predecir el comportamiento de compra del consumidor bajo ciertas circunstancias. Aunque es cierto que la relación existente entre satisfacción y fidelidad por parte del consumidor no es directamente proporcional, pretendemos estudiar la influencia en el comportamiento del consumidor en distintos contextos, como pueden ser las influencias sociales, o ciertas estrategias de marketing como el efecto señuelo. También se presentan una serie de modelos que están relacionados con la probabilidad de que un consumidor se decante por una u otra marca bajo distintas hipótesis sobre el modelo de Markov empleado. En algunos de estos modelos vamos un paso más allá y añadimos ejemplos de aplicaciones utilizando datos reales.

## 1.2 Antecedentes

Dentro de la teoría de la probabilidad, los modelos de Markov son procesos estocásticos con aplicaciones en multitud de disciplinas científicas y tan variopintas como: *genética*, donde se utilizan para, entre otras cosas, describir cambios de frecuencias génicas en poblaciones pequeñas con generaciones discretas; *meteorología*, campo en el que se han desarrollado modelos climatológicos de recurrencia de lluvias; en *internet*, ya que, por ejemplo, la empresa Google utiliza cadenas de Markov en sus motores de búsqueda; o incluso en *música*, puesto que ciertos programas de composición musical utilizan algoritmos basados en cadenas de Markov.

Nos hemos interesado en su aplicación en los modelos de consumo, y es que, continuamente, las empresas luchan por obtener clientes, por atraer a la mayor porción posible de potenciales consumidores, y el campo de batalla está en las mentes de los propios consumidores. Las distintas marcas envían por todos los medios a su disposición información suya y de sus productos, que consigue influir en el consumidor en mayor o menor medida, eligiendo éste finalmente a uno de ellos. Por tanto, el primer objetivo a perseguir por la empresa es ser la elegida, pero no es más que el principio. Cuando es capaz de hacerse con un determinado porcentaje del mercado, necesita mantener a sus consumidores actuales satisfechos, de manera que no se decanten en algún otro momento por la competencia. De eso se trata la fidelidad del cliente. Y es más, mientras fidelizan a sus clientes, han de trabajar por atraer a los consumidores de las marcas rivales.

Para todo ello, es fundamental conocer qué cualidades concretas buscan los consumidores en los diferentes productos.

Partiendo de este enfoque, se han realizado multitud de estudios para predecir este grado de fidelidad del que hemos hablado y de cambio de marca del consumidor bajo determinadas hipótesis. Algunos de ellos se han estudiado mediante modelos de Markov [6] , [8].

# Marco teórico 2

## 2.1 Procesos estocásticos

Puesto que parte del objetivo de este trabajo es la buena comprensión de las cadenas de Markov, con objeto de utilizarlas para un posterior estudio aplicado, previamente tenemos que desarrollar brevemente la teoría necesaria de procesos estocásticos.

### Definición y descripción

**Definición 2.1.** *Un proceso estocástico es un conjunto arbitrario de variables aleatorias* $\{X_t; t \in T\}$*, definidas sobre un mismo espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, donde el índice* $t$ *representa, por lo general, el tiempo.*

En consecuencia, $X_t$ es la variable aleatoria observada en el instante $t$. El conjunto de índices $T$ se conoce como *espacio paramétrico* y, según sea numerable o no, el proceso estocástico $\{X_t; t \in T\}$ es de parámetro discreto o continuo, respectivamente.

Por otro lado, los valores que toma el proceso $\{X_t\}$ o, lo que es lo mismo, las variables aleatorias que lo forman, son sus estados, de manera que un número real $x$ es un *estado* de un proceso estocástico $X_t$ si, y solo si,

$$\exists t \in T / P[x - h < X_t \leq x + h] > 0, \quad \forall h > 0$$

Si el *espacio de estados*, $E$, es numerable, entonces el proceso se conoce como cadena. El objetivo, entonces, es determinar la ley de probabilidad del proceso estocástico $\{X_t; t \in T\}$ que no es otra que la distribución de probabilidad $P_T$ que induce sobre el espacio de Borel real $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ y que, en virtud del Teorema de Consistencia de Kolmogorov, primeramente, y del Teorema de Correspondencia, en segundo lugar, se corresponde con la familia de funciones de distribución de probabilidad (f.d.p.) finitodimensionales

$$\{F_{T_n}; \forall T_n \subset T, \forall n \,\text{finito}\}$$

donde

$$F_{T_n} = \{F_{t_1,\ldots,t_n}; \forall t_i \in T, i = 1, \ldots, n\}$$

con

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n]$$

Estas f.d.p. finitodimensionales determinan, a su vez, las f.d.p. de transición, dadas por

$$\forall t, \tau \in T \quad \text{con} \quad \tau < t, \qquad F(x, t | y, \tau) = P[X_t \leq x | X_\tau = y], \quad \forall x, y \in E$$

que son las que describen las relaciones de interdependencia entre las v.a. que componen el proceso $\{X_t; t \in T\}$.

Cuando, en particular, se trata de una cadena y, en consecuencia, las v.a. son discretas, entonces las f.d.p. de transición pueden determinarse por sus funciones de masa de probabilidad de transición. Cuando las v.a. son continuas, las f.d.p. de transición vendrán dadas por sus correspondientes densidades de probabilidad de transición.

### *Homogeneidad en el tiempo*

Un proceso estocástico se dice que es *homogéneo en el tiempo* cuando la probabilidad de ocurrencia de cierto suceso en un instante determinado no depende del instante en sí, sino del tiempo transcurrido desde el instante inicial, es decir, si llamamos $t_0$ al instante inicial, la probabilidad de transición

$$F(x,t|y,t_0) = P[X_t \leq x | X_{t_0} = y]$$

no depende directamente de $t$, sino del intervalo de tiempo $t - t_0$, que llamamos *lapso*, con lo cual $F(x,t|y,t_0)$ es realmente una función de tres argumentos: $F(x,t|y,t_0) \equiv g(x,y,t-t_0)$ y así, fijados $x,y \in E$, tendremos que $\forall t,\tau \in T$ con $t > \tau$, y llamando $t - \tau = h > 0$ al lapso, entonces las funciones de distribución de probabilidad de transición, que verifican

$$F(x,t|y,\tau) = F(x,h|y,0)$$

se dice que son *estacionarias*, y se considera la notación

$$\forall t > 0 \quad F(x,t|y) = P[X_t \leq x | X_0 = y], \quad \forall x,y \in E$$

## *Clases de procesos*

Aunque una primera clasificación de los procesos estocásticos surge de la naturaleza, discreta o continua, tanto de su espacio paramétrico $T$ como de su espacio de estados $E$, la clasificación fundamental es la que se deriva de la naturaleza de su ley de probabilidad dando lugar a martingalas, proceso de Poisson, modelos de nacimiento y muerte, proceso de renovación, proceso de ramificación, proceso gaussiano, ruido blanco...

Si de aquí en adelante notamos por $X_t \equiv X(t)$ para describir los modelos continuos, y $X_t \equiv X_n$ en el caso de modelos discretos, nos interesa destacar los siguientes:

***Proceso de incrementos independientes:*** es un proceso $\{X_t; t \in T\}$ tal que para cada conjunto finito de índices $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, los incrementos

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son mutuamente independientes, es decir, los sucesos acontecidos en intervalos de tiempo no solapados son mutuamente independientes.

***Proceso de Markov:*** es un proceso $\{X_t; t \in T\}$ que obedece al principio de Markov según el cual, se puede predecir en términos probabilísticos el estado del fenómeno real descrito por él en un instante $t$, conocido su estado en un instante anterior $\tau$, sin que ello dependa de lo acontecido antes de $\tau$, lo que formalmente significa que, para cualquier conjunto finito de índices $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, las leyes de probabilidad condicionadas

$$\mathcal{L}(X_{t_n}|X_{t_{n-1}}, X_{t_{n-2}}, \ldots, X_{t_1}) \text{ y } \mathcal{L}(X_{t_n}|X_{t_{n-1}})$$

coinciden o, equivalentemente, para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$P[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \ldots, X_{t_1} = x_1] = P[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}]$$

Se demuestra entonces que

**Propiedades 2.1.**

1. *Todo proceso $\{X_t; t \in T\}$ de incrementos independientes es markoviano.*

2. *La ley de probabilidad de un proceso de Markov queda descrita por las distribuciones unidimensionales y las distribuciones de probabilidad de transición.*

## 2.2 Cadenas de Markov

Podemos representar una cadena de Markov de parámetro discreto como una sucesión de variables aleatorias discretas $\{X_n; n \geq 0\}$ siendo el valor de $X_n$ equivalente al estado de la cadena en la $n$-ésima etapa , que satisface la *condición de Markov*, esto es, para un entero cualquiera $k > 2$ y un conjunto qualquiera de etapas $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, la distribución condicionada $X_{n_k}|X_{n_{k-1}}, \ldots, X_{n_1}$ solo depende de $X_{n_k-1}$. En particular,

$$\mathcal{L}(X_n|X_{n-1}, \ldots, X_1) \equiv \mathcal{L}(X_n|X_{n-1})$$

o, equivalentemente, $\forall x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$P[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1] = P[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}] \tag{2.1}$$

siempre que la probabilidad condicionada del miembro izquierdo esté definida. En caso de que

$$P[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1] = P[X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}]$$

decimos que la cadena de Markov es de segundo orden, y de manera análoga podríamos definir una cadena de Markov de orden superior.

### *Comportamiento transitorio*

Partiendo de un espacio de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de una cadena de Markov, su ley de probabilidad queda determinada por la segunda de las propiedades de las cadenas de Markov anteriormente mencionadas, mediante la familia de distribuciones unidimensionales, que notamos por

$$\{\mathbf{p}(n);\, n \geq 0\}$$

siendo $\mathbf{p}(n)$ es la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria $X_n$, representada mediante el vector fila

$$\mathbf{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), p_2(n), \ldots, p_i(n), \ldots) \tag{2.2}$$

donde $p_i(n) = P[X_n = i]$ y la familia de distribuciones de probabilidad de transición, es decir, para cada $n > m \geq 0$,

$$\{p_{i,j}(m, n);\, \forall i, j \in E\}$$

donde $p_{i,j}(m, n) = P[X_n = j|X_m = i]$ son las funciones de probabilidad de transición de la cadena de Markov, y que podemos representar mediante la matriz

$$\mathbf{P}(m,n) = \begin{pmatrix} p_{0,0}(m,n) & p_{0,1}(m,n) & \cdots & P_{0,j}(m,n) & \cdots \\ p_{1,0}(m,n) & p_{1,1}(m,n) & \cdots & P_{1,j}(m,n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i,0}(m,n) & p_{i,1}(m,n) & \cdots & P_{i,j}(m,n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

cuyos términos verifican:

$$p_{i,j}(m,n) \geq 0, \quad \forall i,j \in E$$

$$\sum_{j \in E} p_{i,j}(m,n) = 1, \quad \forall i \in E$$

o, dicho en otras palabras, todos los términos de una misma fila $\{p_{i,j}(m,n); \forall j \in E\}$ suman 1, ya que constituyen una distribución de probabilidad. Se trata, por tanto, de una *matriz estocástica*. No ocurre lo mismo por columnas, pudiendo estas sumar cualquier cantidad.

**Propiedades 2.2** (**de una matriz estocástica**).

1. *Una matriz* $\mathbf{A}$ *de términos no negativos es estocástica si, y solo si admite al vector columna*

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   *como vector propio de autovalor* $\lambda = 1$*, esto es,* $\mathbf{Au} = \mathbf{u}$.

2. *Una matriz estocástica tiene, como mínimo, un valor propio igual a 1. Los demás son de módulo igual o menor que 1, en virtud del Teorema de Perron-Frobenius del álgebra de matrices.*

3. *Si* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos matrices estocásticas del mismo orden, su producto* $\mathbf{AB}$ *conserva ese orden. Una consecuencia particular a destacar es que cada potencia* $\mathbf{A}^n$ *es también una matriz estocástica.*

Podemos definir el producto de matrices infinitas, como es el caso de las matrices de transición cuando el espacio de estados $E$ no es finito, de la misma manera que el de matrices finitas.

### *Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*

Las probabilidades de transición de una cadena de Markov $\{X_n; n \geq 0\}$ satisfacen las llamadas *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*,

$$p_{i,j}(m,n) = \sum_{k \in E} p_{i,k}(m,v) p_{k,j}(v,n) \tag{2.3}$$

para cada $n > v > m \geq 0$ y cada $i,j \in E$. Análogamente,

$$p_j(n) = P[X_n = j] = \sum_{k \in E} p_k(0) p_{k,j}(0,n) \tag{2.4}$$

Puesto que $\{p_{i,k}(m,v); k \in E\}$ en (2.3) es una distribución de probabilidad y $p_{k,j}(v,n)$ es una probabilidad, y por tanto, una cantidad comprendida entre 0 y 1, para cada $k, j \in E$, la serie es absolutamente convergente, lo que garantiza la convergencia de tales ecuaciones, y podemos utilizar un razonamiento similar para (2.4).

Matricialmente, estas ecuaciones pueden expresarse, respectivamente, por

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}(m,v)\mathbf{P}(v,n) \qquad n > v > m \geq 0 \tag{2.5}$$

y

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(0,n) \quad \forall n \geq 0 \tag{2.6}$$

En consecuencia, la ley de probabilidad de la cadena de Markov $\{X_n; n \geq 0\}$ queda determinada por la distribución inicial y la familia de matrices de transición:

$$\mathbf{p}(0) \quad \text{y} \quad \{\mathbf{P}(m,n); n > m \geq 0\} \tag{2.7}$$

Existen procesos, no obstante, cuyas probabilidades de transición satisfacen tales ecuaciones, pero no son markovianos.

### *Matrices de transición*

Aplicando sucesivamente las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov a las probabilidades de transición en (2.5), se deducen las siguientes relaciones recurrentes:

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}(m,n-1)\mathbf{P}(n-1,n) = \mathbf{P}(m,n-2)\mathbf{P}(n-2,n-1)\mathbf{P}(n-1,n) \tag{2.8}$$

y así sucesivamente

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}(m,m+1)\mathbf{P}(m+1,m+2)\ldots\mathbf{P}(n-1,n) \tag{2.9}$$

con lo cual, la familia de matrices de transición $\{\mathbf{P}(m,n); n > m \geq 0\}$ queda determinada, a su vez, por la familia de matrices de transición en una etapa:

$$\{\mathbf{P}(n,n+1); n \geq 0\}$$

Se deduce así que, si $\{X_n; n \geq 0\}$ es una cadena de Markov, su ley de probabilidad queda completamente determinada por la distribución inicial, $\mathbf{p}(0)$, y la familia de distribuciones de probabilidad de transición en una etapa, $\{\mathbf{P}(n,n+1); n \geq 0\}$.

### *Cadenas de Markov homogéneas*

Si la cadena de Markov es homogénea en el tiempo, esto es, sus funciones de probabilidad de transición $p_{i,j}(m,n)$ son estacionarias (dependen del lapso $n-m$),

$$p_{i,j}(m,n) \equiv p_{i,j}(n-m), \quad \forall n > m, \forall i,j \in E$$

entonces estas probabilidades de transición pueden notarse por

$$p_{i,j}(n), \quad \forall i,j \in E \text{ y } n > 0$$

y se conocen como *probabilidades de transición en n etapas*

$$p_{i,j}(n) = P[X_{m+n} = j | X_m = i], \quad \forall i, j \in E \text{ con } n, m \geq 0$$

Matricialmente,

$$\mathbf{P}(m,n) \equiv \mathbf{P}(n-m), \forall n > m \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{P}(n), \forall n \geq 0$$

es la matriz de transición en $n$ etapas. En particular, $\mathbf{P}(1) \equiv \mathbf{P}$.

Ahora, de (2.5) y (2.6), tenemos

$$\mathbf{P}(m,n) = \mathbf{P}^{n-m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(n) \equiv \mathbf{P}^n \tag{2.10}$$

Por tanto,

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n \tag{2.11}$$

donde, para calcular $\mathbf{P}^n$ de manera eficiente, podemos utilizar el teorema de Jordan.

En consecuencia, si $\{X_n; n \geq 0\}$ es una cadena de Markov homogénea en el tiempo, su ley de probabilidad queda completamente determinada por la distribución inicial, $\mathbf{p}(0)$, y la matriz de transición en una etapa $\mathbf{P}$.

Podemos, además, calcular las esperanzas a partir de las probabilidades de transición,

$$E[X_n | X_0 = i] = \sum_{j \in E} j p_{i,j}(n) \tag{2.12}$$

$$E[X_n] = \sum_{j \in E} j p_j(n) = \sum_{j \in E} j \sum_{k \in E} p_k(0) p_{k,j}(n) \tag{2.13}$$

## *Clases de estados*

Una primera clasificación se refiere a la relación entre los estados de una cadena y así, se dice que un estado $k$ es accesible desde $i$ ($i \longrightarrow k$) cuando es probable que la cadena pase por $k$ partiendo de $i$. Formalmente, existe algún $n \geq 0$ tal que $p_{i,k}(n) > 0$.

Cuando dos estados $i, k$ son accesibles entre sí se dice que comunican ($i \longleftrightarrow k$) y cuando un estado $k$ nunca es accesible desde ningún otro estado de la cadena, esto es, $p_{i,k} = 0$ para cada $i \in E$ se dice que es efímero.

Puesto que la comunicación es una relación de equivalencia, los estados de una cadena se agrupan en clases comunicantes.

Una clase $C$ es cerrada cuando cada estado de ella comunica exclusivamente con estados de $C$ y, si la cadena está constituída por una sola clase comunicante se dice que es *irreducible*.

Gráficamente, una cadena de Markov en tiempo discreto con $E$ finito puede representarse mediante un *diagrama de transición*: un grafo dirigido finito, donde cada nodo representa un estado de la cadena, mientras que los arcos representan las posibles transiciones entre estados, y sobre los cuales se indican las probabilidades de transición entre los estados representados por los nodos unidos por cada arco.

Una segunda clasificación, basada en la naturaleza interna de cada estado, utiliza la noción de probabilidad del tiempo de primer paso. Así, por ejemplo, la probabilidad de que, partiendo de $i$, la cadena pase por primera vez por el estado $k$ en la $n$-ésima etapa, lo notamos por $f_{i,k}(n)$, y viene dada por

$$f_{i,k}(n) = P[X_n = k, X_m \neq k, m = 1, 2, \ldots, n-1 | X_0 = i]$$

asumiendo por convención que $f_{i,k}(0) = 0$. Es evidente, desde ahí, que $f_{i,k}(1) = p_{i,k}$.

La probabilidad de pasar alguna vez por $k$, partiendo de $i$, viene dada por

$$f_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,k}(n) \tag{2.14}$$

Cuando $k = i$, entonces $f_{i,i}$ es la probabilidad de recurrencia de $i$. En este sentido, un estado $i$ es *recurrente* cuando $f_{i,i} = 1$. En caso contrario, ($f_{i,i} < 1$) es un estado *transitorio*.

Las relaciones entre las probabilidades de transición, de recurrencia y del tiempo de primer paso vienen dadas por

**Teorema 2.1.**

$$p_{i,k}(n) = \sum_{m=0}^{n} f_{i,k}(m) p_{k,k}(n-m), \qquad n \geq 1 \tag{2.15}$$

$$p_{i,i}(n) = \sum_{m=0}^{n} f_{i,i}(m) p_{i,i}(n-m), \qquad n \geq 1 \tag{2.16}$$

**Corolario 2.1.1** (Criterio de recurrencia)**.**

$$f_{i,i} \begin{cases} < 1 & \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(n) < \infty \\ = 1 & \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty \end{cases}$$

**Corolario 2.1.2.** *Si dos estados comunican, $i \longleftrightarrow k$, entonces, o son ambos recurrentes, o son ambos transitorios*

$$f_{i,i} = 1 \quad \text{y} \quad i \longleftrightarrow k \qquad \Rightarrow \qquad f_{k,k} = 1$$

*En consecuencia, los estados de una misma clase comunicante, o son todos recurrentes o todos transitorios.*

Por otra parte, cuando un estado $i$ es recurrente, se define la variable aleatoria $T_i$ que describe el número de etapas necesarias para que la cadena vuelva a pasar por dicho estado, cuya función de masa de probabilidad es $\{f_{i,i}(n); n \geq 0\}$, y notaremos por $\mu_i$ al *tiempo medio de recurrencia*,

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,i}(n) \tag{2.17}$$

En este sentido, un estado recurrente se llama *recurrente positivo* cuando $\mu_i < \infty$; y *recurrente nulo*, cuando $\mu_i = \infty$.

Un estado $i$ es *absorbente* cuando ningún otro estado de la cadena es accesible desde él, es decir, $p_{i,i} = 1$.

Se demuestran, entonces, los siguientes resultados:

**Teorema 2.2.**

1. *$i \longrightarrow k \quad \leftrightarrow \quad f_{i,k} > 0$. Como consecuencia,*

$$i \longleftrightarrow k \quad \Leftrightarrow \quad f_{i,k} > 0 \text{ y } f_{k,i} > 0$$

2. *Si $i$ es transitorio y $k$ recurrente, entonces $f_{k,i} = 0$, es decir, los estados transitorios no son accesibles desde los recurrentes.*

3. *Si $k$ es recurrente y $k \longrightarrow i$, entonces $f_{i,k} = f_{k,i} = 1$.*

4. *La recurrencia nula solo es posible en cadenas de Markov infinitas.*

5. ***Recurrencia positiva como propiedad de clase:** Si dos estados recurrentes $i, k$ de una cadena de Markov comunican, o bien son ambos recurrentes positivos o son ambos recurrentes nulos.*

6. *Todo estado absorbente es recurrente positivo.*

7. *En toda cadena de Markov homogénea finita con algún estado absorbente y accesible desde algún estado no absorbente, la absorción es segura.*

Un estado $i$ es *periódico*, y de periodo $n$ ($n > 1$), cuando la cadena únicamente puede pasar por él en las etapas $n, 2n, 3n, \ldots$. Cuando el periodo es 1 se dice que el estado es *aperiódico*. La periodicidad, al igual que la recurrencia, es una propiedad de clase. Por tanto, el periodo de una clase comunicante es el periodo común a todos los estados de la misma. Si su periodo es 1, la clase es aperiódica.

Finalmente, un estado *ergódico* es un estado recurrente positivo y aperiódico y, en consecuencia, es suficiente que una cadena de Markov irreducible posea un estado ergódico para que la cadena sea ergódica.

Como consecuencia del teorema anterior, el espacio de estados $E$ de una cadena de Markov puede dividirse en dos subespacios disjuntos: el constituido por los estados recurrentes $R$ y el formado por los estados transitorios $T$: $E = R + T$.

Los estados transitorios son inaccesibles desde los recurrentes. Los recurrentes pueden agruparse, a su vez, de manera única en clases comunicantes "cerradas", de tal manera que si dos estados $i, k$ están en la misma clase, entonces $f_{i,k} = f_{k,i} = 1$ y, si están en clases distintas, entonces $f_{i,k} = f_{k,i} = 0$. Cada vez que una cadena de Markov entra en una clase cerrada, permanece en ella. Por esta razón, las clases comunicantes cerradas se llaman también *subcadenas*.

Cuando esta descomposición del espacio $E$ se refleja en la matriz de transición, obtenemos su "forma canónica".

### *Forma canónica de la matriz de transición*

Las filas y columnas de la matriz de transición **P** pueden reordenarse de tal forma que colocaremos los estados transitorios al final, y agruparemos los recurrentes por clases comunicantes. Así, si las clases recurrentes son $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ y las transitorias son $\{T_{k+1}, \ldots, T_n\}$, entonces

$$E = R + T = R_1 + R_2 + \ldots + R_k + T_{k+1} + T_{k+2} + \ldots + T_n$$

siendo

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_{k+1}, \mathbf{Q}_{k+2}, \ldots, \mathbf{Q}_n$$

sus respectivas submatrices de transición, de manera que la matriz de transición $\mathbf{P}$ puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
\mathbf{P}_1 & & & & & & & \\
 & \mathbf{P}_2 & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \mathbf{P}_k & & & & \\
\hline
 & & & & \mathbf{Q}_{k+1} & & & \\
 & \mathbf{A} & & & & \mathbf{Q}_{k+2} & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \mathbf{Q}_n
\end{array}\right)$$

Si la cadena es finita, el siguiente resultado tiene consecuencias importantes:

**Teorema 2.3.** *Si la forma canónica de la matriz de transición* $\mathbf{P}$ *de una cadena de Markov finita es:*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_R^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_n & \mathbf{Q}^n \end{pmatrix}$$

*donde*

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{P}_R + \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{A}$$

*con lo cual, para* $n \longrightarrow \infty$*, se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_R^\infty & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_\infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

**Consecuencias:**

1. A la larga, la probabilidad de que una cadena se encuentre en algún estado transitorio es nula ($\mathbf{Q}^\infty = 0$).

2. El hecho de que $\mathbf{P}^n$ sea una matriz estocástica, para cada $n$, implica que no todos los estados de una cadena de Markov pueden ser transitorios, es decir

$$E \neq T \quad \Leftrightarrow \quad R \neq \emptyset$$

## *Comportamiento estacionario*

Un aspecto interesante se refiere a la convergencia de las matrices de transición $\mathbf{P}^n$, cuando $n$ tiende a infinito, conocido como "comportamiento límite, a largo plazo, o estacionario" de la cadena.

**Distribución límite:** Es la distribución de probabilidad $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots)$ sobre el espacio de estados E tal que

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_n \mathbf{p}(n) = \lim_n \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0)\lim_n \mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0)\boldsymbol{\Pi} \qquad (2.18)$$

Dicha distribución puede no existir y, cuando existe, puede no ser única, porque depende de la distribución inicial. Se introduce así el concepto de

**Distribución de equilibrio:** Cuando $\mathbf{P}^n$ y $\mathbf{p}(n)$ convergen a $\mathbf{\Pi}$ y $\boldsymbol{\pi}$, respectivamente, independientemente de la distribución inicial $\mathbf{p}(0)$, y además,

$$\pi_i > 0, \quad \forall i \in E \qquad \text{con} \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \tag{2.19}$$

se dice que $\boldsymbol{\pi}$ es la única distribución de equilibrio de la cadena.

**Distribución estacionaria:** Es la distribución de probabilidad $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \ldots)$ sobre el espacio de estados E que permanece invariable ante cualquier transición de la cadena según la matriz $\mathbf{P}$, es decir

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{P} \tag{2.20}$$

En otras palabras, $\hat{\mathbf{p}}$ es el vector invariante por la izquierda de la matriz $\mathbf{P}$ tal que

$$\sum_{i \in E} \hat{p}_i = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{\mathbf{p}}\mathbf{1}^T = 1 \tag{2.21}$$

Como consecuencia, si la cadena comienza en la distribución estacionaria, entonces nunca sale de ella,

$$\mathbf{p}(0) = \hat{\mathbf{p}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}(n) = \hat{\mathbf{p}} \qquad n \geq 0 \tag{2.22}$$

Eventualmente, las probabilidades límite llegan a ser independientes del paso del tiempo, es decir, una vez alcanzada la distribución límite $\boldsymbol{\pi}$, futuras transiciones de la cadena no cambian el vector $\boldsymbol{\pi}$, es decir, es estacionario. Sin embargo, esto no ocurre en todas las cadenas.

Si la ecuación (2.18) tiene solución y $\boldsymbol{\pi}$ es independiente de $\mathbf{p}(0)$, entonces el límite $\mathbf{\Pi}$ de $\mathbf{P}^n$ es independiente de $n$ y del estado $i$, es decir, todas las filas de $\mathbf{\Pi}$ deberían ser idénticas

$$\mathbf{\Pi} = \lim_n \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si existe la única distribución de equilibrio, puede obtenerse a partir de la solución del sistema de ecuaciones lineales (2.20), sujeto a la condición (2.21), con lo que $\mathbf{\Pi}$ no necesita calcularse explícitamente, pues dado que

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi} = \lim_n \mathbf{p}(n) = \lim_n \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

lo que significa que, cuando existe la única distribución de equilibrio $\boldsymbol{\pi}$, coincide con la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi} = \hat{\mathbf{p}}$.

Algunas consideraciones sobre las probabilidades de transición límite según la naturaleza de los estados de la cadena son:

1. Si $j$ es absorbente, entonces

$$\lim_{n \to \infty} p_{j,k}(n) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \tag{2.23}$$

2. Si $j$ es un estado transitorio, entonces $\lim_n p_{i,j}(n) = 0$ para cada $i \in E$, en virtud del *Teorema 2.3*.

Si la cadena de Markov homogénea en el tiempo tiene un espacio de estados $E$ finito, y dado que $E = R + T$ con $R \neq \emptyset$, pueden darse dos situaciones:

$$T \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad T = \emptyset \ (\Rightarrow E = R)$$

Nosotros nos centraremos en el segundo caso, $E = R$, en base a los modelos que analizaremos del comportamiento del consumidor.

## 2.3 Cadenas irreducibles y ergódicas

Si una cadena de Markov homogénea en el tiempo es finita e irreducible, entonces es recurrente positiva. Si suponemos, además, que es aperiódica, es ergódica.

**Lema 2.1.** *En toda cadena de Markov finita, irreducible y aperiódica, con matriz de transición* $\mathbf{P}$*, existe* $N$ *tal que* $\forall n \geq N$*, la matriz* $\mathbf{P}^n$ *no contiene ceros, esto es,*

$$\mathbf{P}^n > \mathbf{0}, \qquad \forall n \geq N \tag{2.24}$$

*lo que significa que, después de* $N$ *etapas, cada estado tiene una probabilidad no nula de ser ocupado, cualquier que sea el estado inicial.*

Se tiene, por tanto, que la matriz de transición $\mathbf{P}$ es regular, y esta es la razón por la cual estas cadenas de Markov se llamen también cadenas regulares. Como consecuencia directa de las propiedades de las matrices regulares, se deduce el siguiente

**Teorema 2.4 (Comportamiento estacionario).** *Si* $\{X_n; n \geq 0\}$ *es una cadena de Markov homogénea, finita, irreducible y ergódica con matriz de transición* $\mathbf{P}$*, entonces existe*

1. $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}$$

   *y las filas de* $\mathbf{\Pi}$ *son una distribución de probabilidad* $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$.

2. *La distribución de probabilidad* $\boldsymbol{\pi}$ *es la única distribución estacionaria de la cadena.*

3. *Cualquiera que sea la distribución inicial de la cadena,* $\mathbf{p}(0)$*, existe*

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n = \boldsymbol{\pi} \tag{2.25}$$

   *y, dado que* $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$*, existe y es única la distribución de equilibrio.*

Así pues, en toda cadena de Markov homogénea, finita, irreducible y ergódica con matriz de transición $\mathbf{P}$, la distribución de equilibrio existe, es única y coincide con la distribución estacionaria. En consecuencia, puede determinarse como solución única del sistema

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \tag{2.26}$$

sujeto a las condiciones

$$\pi_j > 0, \forall j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = \pi \mathbf{1}^T = 1$$

No obstante, otra forma de obtener $\boldsymbol{\pi}$ es la siguiente: si $\mathbf{U}$ es una matriz cuadrada cuyo orden coincide con el número $m$ de estados de la cadena y cuyos términos son todos iguales a 1, entonces $\boldsymbol{\pi}_{1\times m} \times \mathbf{U}_{m\times m} = \mathbf{1}_{1\times m}$, con lo cual,

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}) + \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{P}-\mathbf{I}+\mathbf{U}) = \mathbf{1}$$

y, dado que puede demostrarse que la matriz $\mathbf{P}-\mathbf{I}+\mathbf{U}$ es inversible, entonces

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{1}(\mathbf{P}-\mathbf{I}+\mathbf{U})^{-1} \tag{2.27}$$

La solución de esta ecuación satisface automáticamente la condición de normalización ($\boldsymbol{\pi}\mathbf{1}^T = 1$).

**Teorema 2.5** (**Tiempos medios de recurrencia**). *Si $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ es la distribución de equilibrio de una cadena de Markov homogénea, finita, irreducible y aperiódica con matriz de transición* $\mathbf{P}$, *entonces*

$$\mu_j = \frac{1}{\pi_j} \tag{2.28}$$

### *Tiempos de ocupación*

Dado un intervalo de tiempo, el tiempo de ocupación de cierto estado es el tiempo (o número de etapas) que la cadena ocupa o pasa por dicho estado durante el intervalo considerado.

Así, si notamos por $N_{i,j}(n)$ a la variable aleatoria que describe el tiempo de ocupación del estado $j$ durante $n$ etapas, es decir, el número de veces que la cadena pasa por $j$ durante $n$ etapas, supuesto que parte de $i$, entonces $N_{i,j}(n)$ puede representarse como suma de variables aleatorias indicadoras de la forma

$$Z_{i,j}(k) = \begin{cases} 1 & X_k = j, \text{ dado } X_0 = i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.29}$$

para $k = 1, \ldots, n$ con funciones de masa de probabilidad dadas por

$$P[Z_{i,j}(k) = 1] = p_{i,j}(k) \quad \text{y} \quad P[Z_{i,j}(k) = 0] = 1 - p_{i,j}(k)$$

con lo cual

$$N_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} Z_{i,j}(k) \quad \Rightarrow \quad E[N_{i,j}(n)] = \sum_{k=1}^{n} p_{i,j}(k)$$

y, para

$$\frac{N_{i,j}(n)}{n}$$

que representa a fracción o proporción del tiempo de ocupación del estado $j$ durante las $n$ primeras etapas, cuando la cadena parte de $i$, se verifica

$$E\left[\frac{N_{i,j}(n)}{n}\right] = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{i,j}(k)}{n}$$

**Teorema 2.6.** *Si $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ es la distribución de equilibrio de una cadena de Markov homogénea, finita, irreducible y aperiódica con matriz de transición* **P**, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{N_{i,j}(n)}{n}\right] = \pi_j \tag{2.30}$$

Así pues, la distribución de equilibrio es también la que nos indica la proporción promedio del tiempo de ocupación de cada estado a largo plazo.

*Tiempo de permanencia en un estado*

Supongamos que la cadena pasa por el estado $i$ en alguna etapa. Si $Y_i$ es la variable aleatoria que describe el número de etapas o tiempo de permanencia en el estado $i$ hasta abandonarlo, su distribución de probabilidad puede determinarse teniendo en cuenta que las transiciones son pruebas repetidas con dos posibles resultados:

1. $i \longrightarrow i$, con probabilidad $p_{i,i}$, o
2. $i \longrightarrow j$, con $(j \neq i)$, de probabilidad $1 - p_{i,i}$.

Con lo cual, la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria $Y_i$ viene dada por

$$P[Y_i = n] = p_{i,i}^n(1 - p_{i,i}), \qquad n \geq 0$$

y

$$E[Y_i] = \frac{p_{i,i}}{1 - p_{i,i}}, \qquad Var[Y_i] = \frac{p_{i,i}}{(1 - p_{i,i})^2}$$

## 2.4 Cadenas de Markov con dos estados

El papel que representa una cadena de Markov con dos estados en la Teoría de los Procesos Estocásticos es análogo al fenómeno del lanzamiento de una moneda en el Cálculo de Probabilidades. Es un modelo matemático simple que sirve como punto de partida para modelizar situaciones más generales.

Dada una cadena de Markov homogénea con dos estados, notados por 0 y 1, supondremos que la matriz de transición **P** está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_{0,1} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & 1 - p_{1,0} \end{pmatrix}$$

con $0 \leq p_{0,1}, p_{1,0} \leq 1$. Si aplicamos las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov a las probabilidades de transición en $n$ etapas y las resolvemos recursivamente, obtenemos las expresionas explícitas de las probabilidades de transición en $n$ etapas:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{1,0}}{p_{0,1}+p_{1,0}} + p_{0,1}c(n) & \frac{p_{0,1}}{p_{0,1}+p_{1,0}} - p_{0,1}c(n) \\ \frac{p_{1,0}}{p_{0,1}+p_{1,0}} - p_{1,0}c(n) & \frac{p_{0,1}}{p_{0,1}+p_{1,0}} + p_{1,0}c(n) \end{pmatrix}$$

donde

$$c(n) = \frac{(1 - p_{0,1} - p_{1,0})^n}{p_{0,1} + p_{1,0}}$$

con lo cual, la distribución de la cadena en la $n$-ésima etapa, esto es, la distribución $\mathbf{p}(n)$ de la v.a $X_n$ se determinará por

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n$$

- **Distribución estacionaria.** Si $|1 - p_{0,1} - p_{1,0}| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} c(n) = 0$ y la distribución estacionaria $\boldsymbol{\pi}(\pi_0, \pi_1)$ viene dada por

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \pi_0 = \frac{p_{1,0}}{p_{0,1} + p_{1,0}} \text{ y } \pi_1 = \frac{p_{0,1}}{p_{0,1} + p_{1,0}}$$

o puede determinarse como solución única del sistema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{P}$ tal que $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

- **Tiempos de ocupación.** Si notamos por$\mu_{i,j}(n) = E[N_{i,j}(n)]$ con $i, j = 0, 1$, sabemos que

$$\mu_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{i,j}(k)$$

obteniéndose, en forma matricial,

$$\boldsymbol{\mu}(n) = \begin{pmatrix} \mu_{0,0}(n) & \mu_{0,1}(n) \\ \mu_{1,0}(n) & \mu_{1,1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{np_{1,0}}{p_{0,1}+p_{1,0}} + p_{0,1}d(n) & \frac{np_{0,1}}{p_{0,1}+p_{1,0}} - p_{0,1}d(n) \\ \frac{np_{1,0}}{p_{0,1}+p_{1,0}} - p_{1,0}d(n) & \frac{np_{0,1}}{p_{0,1}+p_{1,0}} + p_{1,0}d(n) \end{pmatrix}$$

donde

$$d(n) = \frac{1 - p_{0,1} - p_{1,0}}{(p_{0,1} + p_{1,0})^2}[1 - (1 - p_{0,1} - p_{1,0})^n]$$

verificándose

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{0,0}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{1,0}(n)}{n} = \frac{p_{1,0}}{p_{0,1} + p_{1,0}} = \pi_0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{0,1}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{1,1}(n)}{n} = \frac{p_{0,1}}{p_{0,1} + p_{1,0}} = \pi_1$$

- **Tiempo de permanencia en cada estado.** Las distribuciones de probabilidad de los tiempos de permanencia de la cadena en cada uno de sus estados son

$$P[Y_0 = n] = p_{0,0}^n(1 - p_{0,0}) = (1 - p_{0,1})^n p_{0,1} \quad n \geq 0 \Rightarrow E[Y_0] = \frac{1 - p_{0,1}}{p_{0,1}} \tag{2.31}$$

y

$$P[Y_1 = n] = p_{1,1}^n(1 - p_{1,1}) = (1 - p_{1,0})^n p_{1,0} \quad n \geq 0 \Rightarrow E[Y_1] = \frac{1 - p_{1,0}}{p_{1,0}} \tag{2.32}$$

## 2.5 Conceptos de Marketing

El concepto de mercadotecnia, o como es más conocido, marketing, engloba el conjunto de técnicas y estudios que tienen como objetivo mejorar la comercialización de un producto. En este apartado, introducimos una serie de nociones utilizadas en marketing que nos permitan comprender mejor el posterior trabajo desarrollado.

***Lealtad de marca:*** También conocida como fidelidad de marca, es la compra repetida de un producto o servicio como resultado del valor percibido, la confianza y el vínculo generado entre el consumidor y la empresa

***Aspecto sociológico***: Se refiere a la influencia que tienen los demás en la elección del consumidor por determinado producto. Si esta influencia es fuerte, se pueden dar casos de "fijación", en los que un producto domina el mercado habiendo alternativas mejores. Tanto la fijación como su caso opuesto, la tendencia a cambiar de producto, son aspectos sociológicos a tener en cuenta en numerosas ocasiones al construir modelos de mercado

***Factor psicológico:*** Bajo este término englobamos a las características de los objetos en los estantes que provocan que la gente tome unas decisiones u otras respecto a su compra, y a cómo influyen en esta compra, instándote a comprar, por ejemplo, algo diferente a lo que compras habitualmente.

***Efecto Señuelo:*** Es el que ocurre cuando, a la hora de hacer una elección entre varios productos, se añade un producto de valor inferior que cambia el orden de preferencia del resto de productos. Por ejemplo, supongamos que una editorial ofrece unos modelos de suscripción anual a una revista, de manera que por 50 euros puedes leerla online y por 80 euros, además de permitirte leerla online, te la envían en formato físico. Probablemente la mayoría de la gente interesada decida decantarse por la suscripción online, puesto que es más barata y no necesitan que les envíen ninguna revista en formato papel, la pueden leer en sus ordenadores o tablets. Sin embargo, si apareciese un tercer estilo de suscripción, la suscripción a la revista física exclusivamente, y costase 80 euros, al igual que la suscripción “física + online”, la percepción de la clientela puede que cambie, considerando un “chollo” la suscripción doble, puesto que se siente como si te regalasen los 50 euros de la suscripción online. Se dice entonces que esta tarcera opcion actúa como un señuelo, modificando la percepción que la clientela tiene de las otras dos opciones y convenciendola de que adquiera la que originalmente descartaron, que era la “física + online”.

# 3 Aplicaciones

La aplicación de las cadenas de Markov a modelos de selección e intercambio de marca por parte del consumidor se basa en el principio de Markov y, por tanto, la probabilidad de elegir/comprar una marca cualquiera i en la etapa n + 1 depende únicamente de la marca elegida/comprada en la etapa anterior. Este modelo es adecuado para elecciones de baja frecuencia, como puede ser, por ejemplo, la suscripción a una compañía telefónica y, además, nos permite conocer la evolución en el tiempo de las cuotas de mercado de las empresas que compiten en el mercado, así como, además, conseguir un diagnóstico de la dinámica del mercado y el análisis del grado de fidelidad y de cambio de marca. Para utilizar este modelo, se parte de una serie de hipótesis:

1. El tamaño del mercado es constante.
2. No existen nuevas entradas ni salidas de empresas en el mercado.
3. Todos los consumidores compran el producto.
4. Las frecuencias de compra son regulares.
5. Los consumidores compran la misma cantidad de producto.
6. Los compradores siguen los mismos patrones de fidelidad y de cambio de marca.
7. Los patrones de compra se mantienen en el tiempo.

La cuota de mercado y la probabilidad de comprar una marca en un periodo determinado son función de la compra anterior y de las probabilidades de cambio de marca. Estas son las probabilidades que existen de que, habiendo comprado una determinada marca en una etapa $n$, se vuelva a comprar en $n+1$ (tasas de fidelidad a una marca) o se cambie y se compre otra marca (tasas de evasión de una marca a otra). Estas probabilidades corresponden, en la matriz de transición $\mathbf{P}$, a los elementos de la diagonal principal en el caso de las tasas de fidelidad de marca, mientras que cada $p_{i,j}$ con $i \neq j$ corresponde a la tasa de evasión de la marca $i$ a la marca $j$. Los productos serán, entonces, equivalentes a los estados de la cadena, por lo que el espacio de estados $E = \{0, \dots, k\}$ incluirá todas las marcas consideradas.

De esta manera, podemos aplicar el modelo de Markov para calcular la cuota de mercado que tendrá una marca en el siguiente periodo, y para calcular la cuota de mercado en el equilibrio, o cuando los clientes que gana una marca frente a otra se estabilizan.

## 3.1 Modelos homogéneos

Lograr una clientela fiel a una marca, producto a servicio que una empresa o persona provee es uno de los objetivos que deben buscarse sin escatimar en recursos. Es evidente que, cuanto mayor sea la participación del mercado que una firma posea, mayores serán las probabilidades de éxito de la misma. Y la participación en el mercado se obtiene atrayendo consumidores.

Tal como se señala en [7], las empresas pelean entre sí por obtener clientes, por atraer para sí la mayor porción posible de los potenciales consmidores. Estas peleas, según ellos, tienen lugar en la mente de los consumidores. Un consumidor recibe información de distinto tipo y de diferentes medios acerca de marcas y productos, el consumidor elige uno entre todos. El objetivo que debe perseguir una empresa es ser la elegida por el consumidor, obtener la victoria en esa batalla librada en la mente de los consumidores.

Ahora bien, el éxito no acaba aquí. Que una marca consiga ser elegida por los consumidores es solo el primer paso. Una vez que se obtiene un determinado porcentaje del mercado, lo que sigue es mantener a los consumidores actuales satisfechos, para que no sean absorbidos por la competencia. De eso se trata la fidelidad de la clientela.

Además de conservar a la clientela, logrando su fidelidad, también es importante atraer consumidores de marcas rivales. El acento debe ponerse, entonces, en incrementar la participación del mercado, atrayendo consumidores de la competencia y conservando a los propios. Para lograr esto, es fundamental conocer las cualidades buscadas por los consumidores para el bien o servicio que se ofrece.

En el presente apartado del trabajo desarrollamos un modelo simple basado en los procesos de Markov para conocer la tendencia que tendrá la participación del mercado de una determinada marca, en función de la fidelidad de la clientela de la misma y de la competencia.

Posteriormente completamos el desarrollo del tópico, analizando cuál es el proceso interno de selección de una marca por parte de los consumidores, para conocer las cualidades que se buscan y las características donde la empresa tiene que poner el acento a fin de incrementar su participación en el mercado.

## *Fidelidad a la marca con modelo de Markov*

La fidelidad que la clientela puede tener hacia una determinada marca implica que los consumidores adquirirán el producto de una misma marca, compra tras compra, y que no la preemplazarán por otra. Si consideramos un producto determinado, la clientela tiene la opción de comprar siempre la misma marca, caso en el cual la fidelidad sería total, o cambiar la marca a comprar a través del tiempo. Lógicamente, cuanto menor sea la probabilidad de que los consumidores modifiquen su opción de marca al comprar un producto, mayor será la lealtad que la clientela tenga a la misma.

En principio, podríamos pensar que, cuanto mayor sea la satisfacción que el consumidor obtenga con la compra de una determinada marca, mayor va a ser su fidelidad hacia ella. Sin embargo, dichas probabilidades pueden verse afectadas por múltiples factores, tales como la publicidad que desarrolle la competencia, cambos en los precios relativos entre las marcas, cambos en los gustos de la clientela, etc.

A partir de esta situación, lo que resultaría de mucha utilidad a la hora de tomar decisiones es conocer la fidelidad que tenga la clientela a la marca, para así conocer la tendencia del mercado y conocer quiénes serán los ganadores y los perdedores en términos de la porción del mercado que cada marca conseguirá. Una vez conocida dicha tendencia, que se calculará suponiendo que no se introducirán cambios, se estará en una mejor posición para evaluar estrategias a seguir, que uncluirán pautas publicitarias, cambio del producto, cambios de precios, promociones, etc.

Para efectuar un análisis preliminar, que es el objeto de este trabajo, utilizaremos como herramientas a los procesos markovianos de primer orden. Esto implica que supondremos la dependencia de un solo periodo, es decir, los cambios que la clientela haga de una marca a otra dependen solo de la última compra, sin considerar las compras anteriores ni el aprendizaje. También se supondrá que las probabilidades de transiciones, esto es, las probabilidades de que el consumidor cambie de una marca a otra, permanecen constantes en el tiempo.

Lo primero entonces que hay que conocer son las probabilidades de transición, es decir, la probabilidad de que el cliente que compró la marca $A$ repita su elección en la próxima compra, la probabilidad de que cambie a la marca $B$, o a la $C$, etc. La obtención empírica de las probabilidades de transición puede derivar de la realización de un panel de consumidores o de otra técnica de investigación de mercados. En términos generales, y considerando solo dos marcas para simplificar, se tendría la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{pmatrix}$$

Las filas de esta matriz suman la unidad, es decir, si en el periodo $n$ se adquirió la marca $A$, en el periodo $n+1$ solo existe la posibilidad de adquirir la marca $A$ o la $B$, lo que ocurre de manera análoga si en el periodo $n$ se adquirió la marca $B$.

Las probabilidades de la diagonal principal de la matriz indican la lealtad de la clientela a cada una de las marcas, esto es, cuanto más cercano a la unidad esté el valor $p_{AA}$, mayor va a ser la lealtad de la que goce la marca $A$. Ídem para $p_{BB}$.

Por su parte las otras dos probabilidades indican la transición de la clientela de una marca hacia la otra. La marca $A$ tendrá que intentar que la probabilidad $p_{BA}$ sea lo mayor posible, porque indica que le está ganando clientes a la marca $B$, siempre y cuando conserve el valor de la probabilidad $p_{AA}$ alto.

Debido a que las filas de la matriz suman la unidad, si ambas probabilidades de transición son elevadas, resultará que las probabilidades de lealtad de ambas marcas son escasas, por lo que las empresas no tienen que centrar su interés en ganar clientes a la competencia, sino en cuidar a su propia clientela. Un ejemplo de este caso se da en telefonía, donde las grandes compañías ofrecen buenos descuentos a los clientes de la competencia, elevando las probabilidades de transición a costa de disminuir las lealtades hacia la marca (lo que es lógico, ya que si un cliente cambia de la marca $A$ hacia la $B$ es porque no le era fiel a la primera).

Para conocer la evolución del mercado y su influencia en las participaciones de ambas marcas, podemos decir que, partiendo de una situación inicial en la que la marca $A$ tenga una cuota de mercado que notaremos por $p_A(0)$, y que la marca $B$ tendrá, por tanto, una cuota de participación $p_B(0) = 1 - p_A(0)$, entonces las cuotas de mercado en la siguiente etapa vendrían dadas por

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} \Leftrightarrow$$

$$(p_A(1), p_B(1)) = (p_A(0), p_B(0)) \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{pmatrix}$$

$$p_A(1) = p_A(0)p_{AA} + p_B(0)p_{BA} \tag{3.1}$$

$$p_B(1) = p_A(0)p_{AB} + p_B(0)p_{BB} \tag{3.2}$$

esto es, la participación de la marca $A$ en el mercado en la etapa siguiente dependerá de su capacidad de retener a la clientela que tenía en el momento anterior (representado por $p_{AA}$) y de su capacidad para ganarle clientes a la competencia (representado por $p_{BA}$).

Los sumandos $p_A(0)p_{AA}$ en (3.1) y $p_B(0)p_{BB}$ en (3.2) medirán la clientela que cada marca logra mantener, mientras que los sumandos $p_B(0)p_{BA}$ en (3.1) y $p_A(0)p_{AB}$ en (3.2) representan la clientela que se gana a la competencia.

El análisis a largo plazo de la fidelidad, dado por la distribución estacionaria, da lugar a

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P} \quad \text{con} \quad \pi_A + \pi_B = 1$$
$$\pi_A = \frac{p_{BA}}{p_{AB} + p_{BA}} \qquad \pi_B = \frac{p_{AB}}{p_{AB} + p_{BA}}$$

supuesto que $|1 - p_{AB} - p_{BA}| < 1$.

*Ejemplo: Fidelidad al tipo de carburante*

Vamos a considerar el siguiente caso basado en datos reales. Se trata de analizar la evolución del número de vehículos diésel o gasolina del parque móvil español. Para ello, partiremos de los siguientes supuestos:

1. Dado que actualmente el volumen de vehículos que utilizan otro tipo de carburante / energía no es significativo, podemos utilizar una cadena de Markov con dos estados: diésel o gasolina.

2. Para simplificar nuestro modelo matemático supondremos, además, que cada vez que un usuario adquiere un vehículo, se deshace o abandona el antiguo en caso de que ya tuviese uno.

3. La vida media de un coche, dada la obsolescencia programada, es de 11 años. Por tanto, nuestro estudio parte de los datos relativos a los años comprendidos entre 2007 y 2018.

Definamos los sucesos $G_1 \equiv$ vehículo de gasolina en 2007, $G_2 \equiv$ vehículo de gasolina en 2018, $D_1 \equiv$ vehículo de diésel en 2007, $D_2 \equiv$ vehículo de diésel en 2018. Entonces, en base a los datos de [2], tenemos el diagrama de probabilidades de la Figura 3.1 con probabilidades asociadas:

$$P(G_1) = 0,29; \quad P(D_1) = 0,71; \quad P(G_2) = 0,61; \quad P(D_2) = 0,39$$

En virtud del Teorema de la probabilidad total, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$P(G_2) = P(G_1)P(G_2|G_1) + P(D_1)P(G_2|D_1)$$

$$P(D_2) = P(G_1)P(D_2|G_1) + P(D_1)P(D_2|D_1)$$

y, dado que

$$P(G_2|G_1) + P(D_2|G_1) = 1; \quad P(D_2|D_1) + P(G_2|D_1) = 1$$

para poder obtener los valores de $P(G_2|G_1)$, $P(G_2|D_1)$, $P(D_2|G_1)$ y $P(D_2|D_1)$, que son, precisamente, las probabilidades de la matriz de transición de la cadena, requerimos

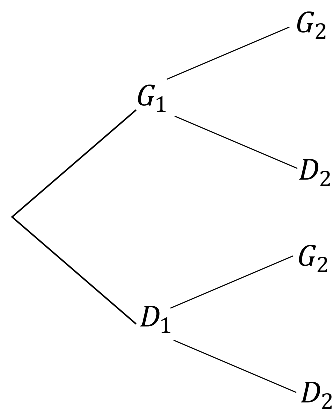


Figura 3.1: Árbol de probabilidades

al menos conocer uno de los cuatro valores, lo que nos obliga a establecer la hipótesis adicional:

4. En una encuesta efectuada a 100 conductores que en el año 2007 conducían un vehículo de diésel y han comprado posteriormente otro vehículo, 51 de los mismos se han decantado por un modelo que funcione con gasolina.

Esta encuesta ficticia nos proporciona el valor de $P(G_2|D_1) = 0{,}51$, que nos permite resolver el sistema anterior y obtener los valores de la matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(G_2|G_1) & P(D_2|G_1) \\ P(G_2|D_1) & P(D_2|D_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{GG} & p_{GD} \\ p_{DG} & p_{DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}51 & 0{,}49 \end{pmatrix}$$

Nótese que es suficiente hacer la encuesta a antiguos usuarios de un solo tipo de carburante, ya que nuestro modelo proporciona el resto de probabilidades de la matriz. Con esto quiero resaltar que los datos de los que partimos son todos reales, en cuanto a los porcentajes de los turismos de los años 2007 y 2018, y con una encuesta de este tipo podríamos desarrollar una matriz de transición que prediga la proporción de coches de diésel o gasolina en un futuro, teniendo en cuenta que la duración media de un vehículo en la actualidad es de 11 años.

Considerando como distribución inicial las cuotas de mercado de 2018

$$\mathbf{p}(0) = (P(G_2)\ P(D_2)) = (0{,}61\ \ 0{,}39)$$

deducimos que, al cabo de los próximos 11 años, la participación de cada tipo de carburante en el mercado será de:

$$\mathbf{p}(1) = (0{,}72\ \ 0{,}28)$$

Por tanto, la predicción para 2029 es que un 72 % de los vehículos serán de gasolina, mientras que un 28 % serán de diésel.

Supuesto que las condiciones se mantienen en el tiempo y, dado que $|1 - p_{GD} - p_{DG}| = 0{,}34 < 1$, podemos calcular las cuotas de mercado a largo plazo, que resultarán ser de:

$$\pi_G = \frac{0{,}51}{0{,}51 + 0{,}15} = 0{,}773 \quad (77{,}3\,\%)$$
$$\pi_D = \frac{0{,}15}{0{,}51 + 0{,}15} = 0{,}227 \quad (22{,}7\,\%)$$

Por otra parte, los tiempos de permanencia en un estado, dados por las ecuaciones (2.31) y (2.32), resultan ser

$$E[Y_G] = \frac{1 - p_{GD}}{p_{GD}} = \frac{1 - 0{,}15}{0{,}15} = 5{,}67$$

$$E[Y_D] = \frac{1 - p_{DG}}{p_{DG}} = \frac{1 - 0{,}51}{0{,}51} = 0{,}96$$

Se deduce que, en ambos casos los conductores diésel cambiarán, por término medio, cada periodo de 11 años a un modelo de gasolina. Sin embargo, en el caso de los conductores de gasolina, el tiempo medio de permanencia nos indica que repetirán el tipo de carburante casi 6 veces, es decir, casi 66 años, antes de cambiarse a un modelo diésel.

## *Efecto señuelo en un modelo de Markov*

Esta aplicación de las cadenas de Markov se basa en el artículo [6]. Empezamos considerando un modelo probabilístico simple, sin aspectos sociológicos, con la intención de examinar la posibilidad del efecto señuelo. Consideramos primero dos productos A y B tal y como muestra el diagrama de la izquierda de la figura siguiente,

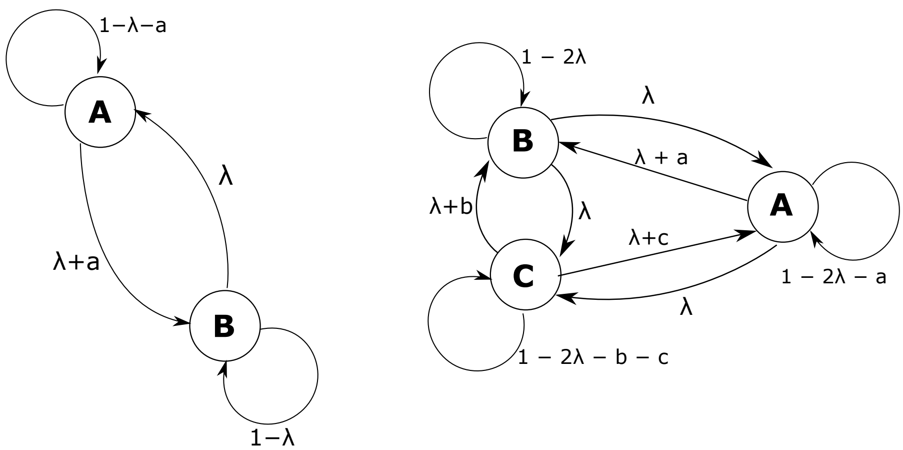


Figura 3.2: Diagramas de transición sin y con efecto señuelo

cuya matriz de transición viene dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda - a & \lambda + a \\ \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

donde $\lambda$ representa la *tasa de cambio o cancelación* natural, es decir, la probabilidad de que un cliente cambie de producto simplemente por no ser capaz de decidirse racionalmente entre uno y otro; la constante $a$ representa la probabilidad por la que un consumidor deje el producto A por el B, porque B es, en general, de mejor calidad. La distribución de equilibrio $\boldsymbol{\pi}$, ya vista en el apartado refequi (esto es, el vector de probabilidades de equilibrio tal que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$), resulta ser

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{\lambda}{2\lambda + a}, \frac{\lambda + a}{2\lambda + a} \right)$$

Si introducimos ahora un tercer producto $C$, que será nuestro señuelo, con la misma tasa de cancelación pero con tendencias adicionales $b$ y $c$, como muestra el diagrama derecho de la figura anterior, obtenemos la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda - a & \lambda + a & \lambda \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ \lambda + c & \lambda + b & 1 - 2\lambda - b - c \end{pmatrix}$$

con una distribución de equilibrio

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{\lambda(3\lambda + b + 2c)}{(3\lambda + a)(3\lambda + b + c)}, \frac{3\lambda^2 + \lambda(2a + 2b + c) + a(b + c)}{(3\lambda + a)(3\lambda + a + c)}, \frac{\lambda}{3\lambda + b + c} \right).$$

Para potenciar el efecto del señuelo, imponemos, en primer lugar, la condición de que la imagen del producto $A$ se vea beneficiada en presencia del señuelo $C$. En otras palabras:

$$\frac{\lambda(3\lambda + b + 2c)}{(3\lambda + a)(3\lambda + b + c)} > \frac{\lambda}{2\lambda + a} \tag{3.3}$$

o, equivalentemente,

$$\alpha\gamma - \beta + \gamma > 3, \quad \text{con } \alpha = \frac{a}{\lambda}, \ \beta = \frac{b}{\lambda}, \ \gamma = \frac{c}{\lambda} \tag{3.4}$$

y en segundo lugar, exigiremos

$$\gamma > \beta > \alpha \geq 0 \tag{3.5}$$

con objeto de que las ventas de $A$ inicialmente sean menores que las de $B$, que la relación entre el señuelo y $B$ sea más fuerte que la de $A$ y $B$, y que la relación entre el señuelo y $A$ sea aún más fuerte.

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) definen una región de interés en el espacio $(\alpha, \beta, \gamma)$. El incremento fraccional de la cuota de mercado del producto $A$ mediante la introducción del producto señuelo $C$ es

$$\frac{\lambda(3\lambda + b + 2c)}{(3\lambda + a)(3\lambda + b + c)} > \frac{\lambda}{2\lambda + a} \Leftrightarrow \frac{(2\lambda + a)(3\lambda + b + 2c)}{(3\lambda + a)(3\lambda + b + c)} > 1$$

y dividiendo por $\lambda$, nos queda

$$\frac{(2 + \alpha)(3 + \beta + 2\gamma)}{(3 + \alpha)(3 + \beta + \gamma)} > 1 \tag{3.6}$$

No dejemos pasar el hecho de que, para conseguir que todas las probabilidades de la matriz de transición $\mathbf{P}$ permanezcan dentro del intervalo $[0, 1]$, debemos exigir que tanto $1-2\lambda-a$ como $1-2\lambda-b-c$ sean no negativos. Entonces, dados los valores de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ tales que cumplen (3.5), se deduce un valor máximo para la tasa de cancelación

$$\left.\begin{array}{lll} 1-2\lambda-a\geq 0 & \Leftrightarrow 2\lambda+a\leq 1 & \Leftrightarrow 2+\alpha\leq \frac{1}{\lambda} \\ 1-2\lambda-b-c\geq 0 & \Leftrightarrow 2\lambda+b+c\leq 1 & \Leftrightarrow 2+\beta+\gamma\leq \frac{1}{\lambda} \\ & \alpha<\beta<\gamma & \Rightarrow \alpha<\beta+\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\alpha<2+\beta+\gamma\leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda \leq \frac{1}{2+\beta+\gamma}, \tag{3.7}$$

El efecto señuelo se observa mejor cuando $\gamma$ es grande, lo que implica una relación alta entre el señuelo $C$ y $A$, o bien cuando hay una tasa de cancelación baja, lo que a su vez limita el tamaño de $\beta$.

### *Un caso especial: cuotas de mercado iniciales iguales*

Si los dos productos $A$ y $B$ se introducen en el mercado de forma idéntica, entonces tomamos $a=0$, para que cada uno tenga un 50 % de cuota de mercado antes de la introducción del producto señuelo. Así, (3.4) y (3.5) se reducen a la condición de que

$$\gamma > 3+\beta$$

Esto es difícil de conseguir en la práctica, ya que requiere que la predisposición en torno a $A$ sea significativamente mayor que la predisposición en torno a $B$, a no ser que la tasa de cambio $\lambda$ sea pequeña (en cuyo caso $b$ y $c$ pueden ser ambos pequeñas también mientras difieran en más de $3\lambda$). El incremento fraccional en la cuota de mercado de $A$, puesto que $\alpha=0$, sería de

$$\frac{2(3+\beta+2\gamma)}{3(3+\beta+\gamma)} > 1$$

Si $\beta$ y $\gamma$ son grandes pero de tamaño similar, el incremento en la cuota de mercado es inevitable; luego simplemente tan solo tomando $\lambda$ pequeño no es suficiente para que el efecto señuelo sea siquiera apreciable, y deberán diseñarse con más cuidado valores apropiados.

## *Efectos sociales en un modelo de Markov de dos productos*

Volvemos ahora a tan solo dos productos, tal como se ve en la Figura 3.1(izda), pero introducimos un efecto psicológico según el cual los consumidores tienden preferir el producto que otros ya compran. Supongamos que tenemos un total de $N$ consumidores, $n$ de los cuales en un momento particular compran el producto $A$, y el resto $N-n$ compran el producto $B$. El efecto sociológico se describe cambiando la probabilidad de transición $p_{BA}$ de $\lambda$ a

$$\lambda+\mu_1\frac{n}{N}$$

y la probabilidad de transición $p_{AB}$ de $\lambda+a$ por

$$\lambda+a+\mu_2\frac{N-n}{N}$$

donde $\mu_1$ y $\mu_2$ son constantes que representan la influencia de los efectos sociales. En un modelo más avanzado, $\mu_1$ y $\mu_2$ podrían variar dependiendo del consumidor.

Cada uno de los $N$ consumidores tendría su propia cadena de Markov y así, para cada cadena tendríamos una distribución de equilibrio $\boldsymbol{\pi}$.

Si la probabilidad de que el número de consumidores $n$ que compran $A$ se incrementa en una unidad ($n \to n+1$) durante un intervalo de tiempo infinitesimal $\delta t$, lo notamos por $q_{n,n+1}(\delta t)$, entonces

$$q_{n,n+1}(\delta t) = (N-n)\left(\lambda + \mu_1 \frac{n}{N}\right)\delta t$$

porque los $N-n$ compradores actuales de $B$ son los que pueden cambiar y comprar $A$ en dicho intervalo de tiempo. Análogamente,

$$q_{n,n-1}(\delta t) = n\left(\lambda + a + \mu_2 \frac{N-n}{N}\right)\delta t$$

En equilibrio, debe haber un balance entre los números pasando del estado $n$ al $n+1$ y viceversa. Esto es,

$$\pi_n q_{n,n+1} = \pi_{n+1} q_{n+1,n}$$

$$\pi_n(N-n)\left(\lambda + \frac{\mu_1 n}{N}\right) = \pi_{n+1}(n+1)\left(\lambda + a + \frac{\mu_2(N-n-1)}{N}\right) \tag{3.8}$$

Esta relación de recurrencia permite que cada $\pi_n$ puede ser definido en función de $\pi_0$, al contar con la condición de normalización $\sum_n \pi_n = 1$.

$$\pi_n = \pi_0 \binom{N}{n} \frac{\lambda\left(\lambda + \mu_1 \frac{1}{N}\right)\cdots\left(\lambda + \mu_1 \frac{n-1}{N}\right)}{\left(\lambda + a + \mu_2 \frac{N-1}{N}\right)\left(\lambda + a + \mu_2 \frac{N-2}{N}\right)\cdots\left(\lambda + a + \mu_2 \frac{N-n}{N}\right)} =$$

$$= \pi_0 \binom{N}{n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\lambda + \mu_1 \frac{k}{N}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left[\lambda + a + \mu_2\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right]}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\lambda + \mu_1 \frac{k}{N}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left[\lambda + a + \mu_2\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right]} =$$

$$= \pi_0\, {}_2F_1\left(-N, \frac{N\lambda}{\mu_1}; 1 - N - \frac{aN}{\mu_2} - \frac{N\lambda}{\mu_2}; \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica. Esto implica que

$$\sum_{n=0}^{N} \pi_n = 1 \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{{}_2F_1(-N, \frac{N\lambda}{\mu_1}; 1 - N - \frac{aN}{\mu_2} - \frac{N\lambda}{\mu_2}; \frac{\mu_1}{\mu_2})}$$

La cuota de mercado esperada para el producto $A$ viene entonces dada por $\sum_n n\pi_n$.

### *Lealtad de marca y presión de compra*

Supongamos que disponemos de $M$ marcas de un cierto producto compitiendo en un mercado, y queremos saber con qué probabilidad, a largo plazo, el cliente se decantará por una u otra marca, partiendo de las hipótesis de lealtad de marca y presión de compra. Para la $i$-ésima marca (siendo $i = 1,...,M$) definimos $d_i$ $(0 \leq d_i \leq 1)$ como el coeficiente de lealtad de marca, es decir, la proporción de consumidores que volverán a comprar la marca $i$ sin ser persuadidos, y $w_j$ $(0 \leq w_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{M} w_j = 1)$ como la cuota de presión de compra, es decir, la proporción de consumidores que se convencen de comprar la $j$-ésima marca en la siguiente ocasión.

Los elementos de la matriz de transición de cambio de marca $\mathbf{P}$ son:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= d_i + (1-d_i)w_j & & i = 1,2,...,M \\ a_{ij} &= (1-d_i)w_j & j \neq i \quad & i,j = 1,2,...,M \end{aligned}$$

donde

$$0 \leq d_i \leq 1,\ 0 \leq w_j \leq 1 \text{ y } \sum_{j=1}^{M} w_j = 1$$

de manera que la distribución límite $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_M)$ se obtiene como

$$\pi_j = \frac{\frac{w_j}{1-d_j}}{\sum_{i=1}^{M} \frac{w_i}{1-d_i}}$$

para $0 \leq d_i < 1, i = 1,2,...,M$, como podemos ver en [11].

En caso de $d_i = d\ \forall i$, esto es, que todas las marcas tengan el mismo coeficiente de lealtad, cada uno de los términos de la distribución límite será

$$\pi_j = \frac{\frac{w_j}{1-d}}{\sum_{i=1}^{M} \frac{w_i}{1-d}} = \frac{\frac{w_j}{1-d}}{\frac{1}{1-d}\sum_{i=1}^{M} w_i} = w_j$$

Luego $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_M) = (w_1, w_2, ..., w_M)$, la distribución límite coincidirá con las cuotas de presión de compra de cada marca.

## 3.2 Modelos no homogéneos

Supongamos un modelo de cambio de marca en el que los individuos o consumidores eligen entre un conjunto de proveedores, que compiten entre sí, y constituyen el espacio de estados $S = \{s_1, ..., s_M\}$ con $M$ finito, de un proceso o cadena estocásticos $\{X_n\}$ donde $X_n$ es el proveedor (o marca) elegida en la $n$-ésima etapa.

Si la cadena es markoviana, su familia de matrices de transición $\{P(m,n); n > m \geq 0\}$ que, en general, serán estimadas en base a datos históricos, queda determinada, como ya vimos, por la familia de matrices de transición en una etapa $\{P(n,n+1); n \geq 0\}$. Dicha familia, junto con la distribución inicial $\mathbf{p}(0)$, determinan la ley de probabilidad de la cadena, cuyas distribuciones unidimensionales, $\{\mathbf{p}(n), n \geq 0\}$ se calculan así:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(0,1)\mathbf{P}(1,2)...\mathbf{P}(n-1,n) \tag{3.9}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P}(n-1,n) \tag{3.10}$$

y proporcionan las cuotas de mercado de cada proveedor en la $n$-ésima etapa.

$$\mathbf{p}(n) = (p_{s_1}(n), \dots, p_{s_M}(n))$$

Si notamos, para mayor comodidad, a la matriz de transición $\mathbf{P}(n,n+1)$ por $\mathbf{P}_n$, las ecuaciones (3.9) y (3.10) nos quedan como:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{n-1} \tag{3.11}$$

o

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P}_{n-1} \tag{3.12}$$

Estamos entonces ante una cadena de Markov no homogénea. Si, además, consideramos el vector de población $\mathbf{Q}_n$ que representa el número de consumidores para todos los proveedores en la $n$-ésima etapa, entonces

$$\mathbf{Q}_n = M_n \mathbf{p}(n)$$

donde $M_n$ es el tamaño del mercado, esto es, el total de consumidores de todos los proveedores en la $n$-ésima etapa. Este modelo nos permite predecir los clientes que consigue un proveedor.

Podemos además obtener un vector $\mathbf{G} = (g_1 \dots g_M)$ de factores de crecimiento del tamaño de mercado a partir de los datos disponibles, de manera que el vector de población del instante $n+1$ pueda estimarse de la siguiente manera,

$$\mathbf{Q}_{n+1} = (g_1 q_n(s_1) \dots g_M q_n(s_M))\mathbf{P}_n \tag{3.13}$$

La ecuación logra dos propósitos. El primero es el de ajustar el tamaño de mercado de cada proveedor $s_i$ multiplicando $q_n(s_i)$ por un factor de crecimiento $g_i$; el segundo es que considera los cambios de los consumidores, al multiplicar por la matriz de probabilidad de transición tiempo-dependiente $\mathbf{P}_n$. Los factores de crecimiento, $g_i$, son estimados en base a datos ya obtenidos.

## 3.3 Ejemplo con datos reales: portabilidad telefónica en España

Presentamos un ejemplo de suscriptores que cambian de proveedores en la industria de las telecomunicaciones, una aplicación típica de cadenas de Markov al problema de cambio de marca, utilizando los tres modelos estudiados: el modelo de Markov homogéneo y los dos que acabamos de presentar.

Los datos proceden de la Comisión Nacional de los Mercados y la Competencia (CNMC) [12]. Más concretamente, hemos tomado datos de las proporciones de clientes que al principio de los meses de Marzo y Abril de 2018 se mueven de una compañía de telefonía a otra. Hemos englobado los operadores en 5 grandes grupos: *Movistar*, *Orange*, *Vodafone*, *Masmov!l* y *OMV* (los operadores móviles virtuales). La proporción de suscriptores cambiando de proveedor o no en los meses de Marzo y Abril de 2018 vienen dados en los Cuadros 3.1 y 3.2, respectivamente.

| Marzo 2018 | Movistar | Vodafone | Orange | MASMOV!L | OMV |
|---|---|---|---|---|---|
| **Movistar** | 0,9913 | 0,0022 | 0,0026 | 0,0026 | 0,0013 |
| **Vodafone** | 0,0030 | 0,9878 | 0,0036 | 0,0037 | 0,0019 |
| **Orange** | 0,0034 | 0,0036 | 0,9868 | 0,0041 | 0,0021 |
| **MASMOV!L** | 0,0037 | 0,0039 | 0,0045 | 0,9856 | 0,0023 |
| **OMV** | 0,0023 | 0,0025 | 0,0028 | 0,0028 | 0,9896 |
| **Cuota de Mercado** | 0,3015 | 0,2680 | 0,2460 | 0,1009 | 0,0836 |

Cuadro 3.1: Proporción de suscriptores en marzo de 2018

| Abril 2018 | Movistar | Vodafone | Orange | Masmov!l | OMV |
|---|---|---|---|---|---|
| **Movistar** | 0,9917 | 0,0021 | 0,0026 | 0,0023 | 0,0013 |
| **Vodafone** | 0,0029 | 0,9876 | 0,0039 | 0,0036 | 0,0020 |
| **Orange** | 0,0033 | 0,0037 | 0,9866 | 0,0041 | 0,0023 |
| **Masmov!l** | 0,0034 | 0,0038 | 0,0046 | 0,9859 | 0,0023 |
| **OMV** | 0,0018 | 0,0020 | 0,0024 | 0,0022 | 0,9916 |
| **Cuota de Mercado** | 0,3002 | 0,2669 | 0,2451 | 0,1037 | 0,0841 |

Cuadro 3.2: Proporción de suscriptores en abril de 2018

Interpretamos esta tabla de la siguiente manera: durante el mes de marzo de 2018, la compañía $Movistar$, del total de sus suscriptores en febrero del mismo año, retuvo al 99,13 % de su clientela, mientras que un 0,22 % se pasó a $Orange$, un 0,26 % realizó una portabilidad a $Vodafone$ y así sucesivamente. Son matrices estocásticas, lo que confirma que estas probabilidades dan lugar al total de clientes que cada compañía tenía en el mes anterior.

Con estos datos pretendo ilustrar diferencias de los tres modelos predictivos, y ver qué tal se comportan al manejar datos reales.

## *Resolución con el modelo de Markov homogéneo*

En el modelo de Markov homogéneo, asumimos que la matriz de transición de probabilidad **P** es constante en el tiempo. Por tanto, tomaremos medias para estimar $p_{i,j}$ en base al número de clientes de los meses de marzo y abril de 2018. Por ejemplo, $p_{2,1}$ se puede calcular como:

$$p_{2,1} = \frac{0,0030 + 0,0029}{2} = 0{,}00295$$

La matriz completa es:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}99150 & 0{,}00215 & 0{,}00260 & 0{,}00245 & 0{,}00130 \\ 0{,}00295 & 0{,}98770 & 0{,}00375 & 0{,}00365 & 0{,}00195 \\ 0{,}00335 & 0{,}00365 & 0{,}98670 & 0{,}00410 & 0{,}00220 \\ 0{,}00355 & 0{,}00385 & 0{,}00455 & 0{,}98575 & 0{,}00230 \\ 0{,}00205 & 0{,}00225 & 0{,}00260 & 0{,}00240 & 0{,}99050 \end{pmatrix}$$

Partiendo esta matriz $\mathbf{P}$ y considerando como distribución inicial

$$\mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} 0,3002 & 0,2669 & 0,2451 & 0,1037 & 0,0842 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

las cuotas de mercado en abril de 2018, y utilizando la ecuación (2.11), podemos predecir las cuotas de mercado de los próximos meses. Los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro siguiente.

| **Mes** | **Movistar** | **Orange** | **Vodafone** | **Masmov!l** | **OMV** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Mayo* | 0,2998 | 0,2657 | 0,2443 | 0,1051 | 0,0851 |
| *Junio* | 0,2994 | 0,2646 | 0,2435 | 0,1066 | 0,0860 |
| *Julio* | 0,2990 | 0,2635 | 0,2428 | 0,1079 | 0,0868 |
| *Agosto* | 0,2986 | 0,2624 | 0,2420 | 0,1093 | 0,0877 |
| *Septiembre* | 0,2982 | 0,2613 | 0,2413 | 0,1106 | 0,0885 |
| *Octubre* | 0,2978 | 0,2602 | 0,2406 | 0,1119 | 0,0894 |

Cuadro 3.3: Predicciones por modelo de Markov homogéneo (meses de 2018)

Este primer modelo, ampliamente aplicado a muchos problemas, permite predecir las cuotas de mercado de todos los competidores pero tiene sus limitaciones, puesto que no puede predecir el número de consumidores. En otras palabras, esta aproximación no nos puede indicar cómo evoluciona el mercado total ni el número total de consumidores por proveedor.

## *Resolución con el modelo de Markov no homogéneo*

Si las probabilidades de que los suscriptores cambien de proveedor varían, o siguen ciertas tendencias en vez de mantenerse constantes, es más apropiado realizar las predicciones usando cadenas de Markov no homogéneas. Definimos la matriz de diferencias $\Delta\mathbf{P}$, donde

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + \Delta\mathbf{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P}$$

y

$$\Delta\mathbf{P} = \left(\delta_{i,j}\right) \tag{3.15}$$

Ahora bien, como todos los términos de $\mathbf{P}_n$ han de ser no negativos, cuando

$$p_{i,j}(n) + \delta_{i,j} < 0 \Rightarrow p_{i,j}(n+1) = 0$$

y las probabilidades de dicha fila

$$p_{i,k}(n+1) \quad \forall k \neq j$$

tendrán que ajustarse de forma que la matriz resultante siga siendo estocástica. Así, si $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ son las matrices de transición de marzo y abril de 2018, respectivamente, entonces $\Delta\mathbf{P}$ viene dada por

$$\Delta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}0004 & -0{,}0001 & 0 & -0{,}0003 & 0 \\ -0{,}0001 & -0{,}0002 & 0{,}0003 & -0{,}0001 & 0{,}0001 \\ -0{,}0001 & 0{,}0001 & -0{,}0002 & 0 & 0{,}0002 \\ -0{,}0003 & -0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0003 & 0 \\ -0{,}0005 & -0{,}0005 & -0{,}0004 & -0{,}0006 & 0{,}0020 \end{pmatrix}$$

y la matriz de mayo de 2018 será entonces

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9921 & 0{,}0020 & 0{,}0026 & 0{,}0020 & 0{,}0013 \\ 0{,}0028 & 0{,}9874 & 0{,}0042 & 0{,}0035 & 0{,}0021 \\ 0{,}0032 & 0{,}0038 & 0{,}9864 & 0{,}0041 & 0{,}0025 \\ 0{,}0031 & 0{,}0037 & 0{,}0047 & 0{,}9862 & 0{,}0023 \\ 0{,}0013 & 0{,}0015 & 0{,}0020 & 0{,}0016 & 0{,}9936 \end{pmatrix}$$

La de junio de 2018:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \Delta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9925 & 0{,}0019 & 0{,}0026 & 0{,}0017 & 0{,}0013 \\ 0{,}0027 & 0{,}9872 & 0{,}0045 & 0{,}0034 & 0{,}0022 \\ 0{,}0031 & 0{,}0039 & 0{,}9862 & 0{,}0041 & 0{,}0027 \\ 0{,}0028 & 0{,}0036 & 0{,}0048 & 0{,}9865 & 0{,}0023 \\ 0{,}0006 & 0{,}0010 & 0{,}0016 & 0{,}0010 & 0{,}9956 \end{pmatrix}$$

y así hasta la de octubre de 2018

$$\mathbf{P}_6 = \mathbf{P}_5 + \Delta\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9941 & 0{,}0015 & 0{,}0026 & 0{,}005 & 0{,}0013 \\ 0{,}0023 & 0{,}9864 & 0{,}0057 & 0{,}0030 & 0{,}0026 \\ 0{,}0027 & 0{,}0043 & 0{,}9854 & 0{,}0041 & 0{,}0035 \\ 0{,}0016 & 0{,}0032 & 0{,}0052 & 0{,}9877 & 0{,}0023 \\ 0 & 0 & 0{,}0002 & 0 & 0{,}9998 \end{pmatrix}$$

Si tomamos como distribución inicial de cuotas de mercado $\mathbf{p}(0)$ la dada por (3.14), entonces la distribución de cuotas de mercado al cabo de 7 meses, en octubre de 2018 será

$$\mathbf{p}(7) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 ... \mathbf{P}_6 = \begin{pmatrix} 0{,}2988 & 0{,}2577 & 0{,}2407 & 0{,}1090 & 0{,}0949 \end{pmatrix}$$

Si comparamos los resultados con los del modelo homogéneo, los cambios en Movistar y Vodafone no son significativos, mientras que Orange y Masmov!l pierden algo de cuota de mercado, frente a la OMV, que sube.

Aunque este modelo parece más adecuado que el anterior porque tiene en cuenta la variación que existe entre las tablas de marzo y abril, sigue sin proporcionarnos información alguna acerca del número total de clientes.

### *Resolución con el Modelo de Markov con variaciones en la cuota de mercado*

En este tercer caso incorporamos el número total de clientes de marzo y abril de 2018 [12],dados en el Cuadro 3.4. Siguiente la metodología de Chan [1]

| **Clientes** | **Movistar** | **Orange** | **Vodafone** | **Masmov!l** | **OMV** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Marzo* | 15792644 | 14042009 | 12891159 | 5283748 | 4377391 |
| *Abril* | 15762470 | 14013305 | 12867225 | 5442761 | 4420254 |

Cuadro 3.4: Clientes por compañía de los meses de marzo y abril de 2018

estimamos el crecimiento **G** por

$$\mathbf{G} = \left( \frac{15762470}{15792644} \; \frac{14013305}{14042009} \; \frac{12867225}{12891159} \; \frac{5442761}{5283748} \; \frac{4420254}{4377391} \right) =$$

$$= (0{,}9981 \;\; 0{,}9980 \;\; 0{,}9981 \;\; 1{,}0301 \;\; 1{,}0098)$$

y obtenemos cada una de las componentes del vector escalado **H** como

$$H_i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^{5} G_i} * 5$$

quedándonos

$$\mathbf{H} = (0{,}9914 \;\; 0{,}9912 \;\; 0{,}9914 \;\; 1{,}0231 \;\; 1{,}0029)$$

Obtendremos los resultados utilizando las matrices $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_6\}$ del caso anterior, con la siguiente modificacion:

$$p_i(n+1) = (\mathbf{p}(n)\mathbf{P}_n)_i H_i$$

Además,

$$\overline{G} = \frac{\sum_{i=1}^{5} G_i}{5} = 1{,}0068$$

será la tasa de crecimiento total del número de suscriptores cada mes, de manera que, tomando $Q_0 = 52506015$ como la cantidad total de suscriptores en el mes de abril de 2018, podemos estimar el número total de suscriptores al cabo de $n$ meses como

$$Q_n = Q_0 \overline{G}^n$$

lo que, unido a las cuotas de mercado obtenidas, nos permitirá obtener una estimación, ahora sí, del número de clientes que tendrá cada empresa mensualmente. Los datos se muestran en el siguiente cuadro.

| **Mes** | **Movistar** | **Orange** | **Vodafone** | **Masmov!l** | **OMV** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Mayo* | 0,2972 | 0,2632 | 0,2422 | 0,1074 | 0,0857 | 52863056 |
| *Junio* | 0,2942 | 0,2595 | 0,2394 | 0,1109 | 0,0875 | 53222525 |
| *Julio* | 0,2913 | 0,2558 | 0,2366 | 0,1143 | 0,0895 | 53584438 |
| *Agosto* | 0,2883 | 0,2521 | 0,2339 | 0,1176 | 0,0916 | 53948812 |
| *Septiembre* | 0,2855 | 0,2483 | 0,2312 | 0,1209 | 0,0939 | 54315664 |
| *Octubre* | 0,2827 | 0,2446 | 0,2286 | 0,1240 | 0,0963 | 54685010 |

Cuadro 3.5: Predicciones por modelo de Markov con variaciones en la cuota de mercado (meses de 2018)

### *Comparación con resultados reales*

Los valores reales de cuota de mercado que se obtuvieron en octubre de 2018, según la CNMC, fue de un 30,11 % de cuota de mercado para Movistar, de un 26,00 % para Orange, un 23,63 % para Vodafone, un 11,40 % para el grupo Masmov!l y para los OMV un 8,86 %. Podemos ver en el Cuadro 3.6 las cuotas de mercado reales junto con las predichas por cada uno de los modelos.

| **Modelo** | **Movistar** | **Orange** | **Vodafone** | **Masmov!l** | **OMV** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Homogéneo* | 0,2978 | 0,2602 | 0,2443 | 0,1119 | 0,0894 |
| *No Homogéneo* | 0,2988 | 0,2577 | 0,2407 | 0,1090 | 0,0949 |
| *Variaciones cuota* | 0,2827 | 0,2446 | 0,2286 | 0,1240 | 0,0963 |
| *Resultados reales* | 0,3011 | 0,2600 | 0,2363 | 0,1140 | 0,0886 |

Cuadro 3.6: Comparativa predicciones de octubre 2018

Vemos que tanto el modelo homogéneo como el no homogéneo han realizado predicciones bastante aproximadas al valor real de octubre, siendo en algunos casos, como en la predicción de cuota de mercado de Orange, el modelo homogéneo el que más se ha acercado, mientras que en otros, como en la predicción de la cuota de mercado de Movistar, ha sido el modelo no homogéneo quien más se ha acercado al valor real con su predicción.

El que menos se ha acercado, en cualquier caso, ha sido el modelo de Markov con variaciones en la cuota de mercado, por lo que podemos concluir que estamos ante un caso en el que la adquisición de nuevos clientes es lo suficientemente poco significativa como para que, en última instancia, no sea más que ruido que altere nuestras predicciones.

# 4 Conclusiones

Una vez aplicados los modelos de Markov al comportamiento del consumidor en distintos contextos, se puede concluir que:

• En el caso de la *fidelidad de marca*, el modelo de Markov nos permite cuantificar de manera razonable aspectos como la lealtad del consumidor y la capacidad de un determinado producto para atraer clientes, así como la evolución futura de las cuotas de mercado. En el ejemplo sobre el tipo de carburante, en el que el 51 % de los conductores diésel se pasan a gasolina, se augura un futuro bastante nefasto para los coches diésel, que perderían en los próximos 11 años parte de su cuota de mercado, pasando de un 39 % en 2018 a un 28 % en 2029.

Las interpretaciones sobre las causas pueden ser diversas. Probablemente, entre ellas, la mala publicidad sobre emisiones pesadas sobre este tipo de carburante.

• El modelo con *efecto señuelo* es más complejo que el anterior al valorar aspectos como la tasa de cambio o cancelación y la probabilidad de que un consumidor se pase de un producto a otro porque reconozca la mejor calidad de este último. Sin embargo, hempos podido establecer resultados generales y hacer predicciones sobre las cuotas de mercado.

• La incorporación del *efecto sociológico* en un modelo de Markov de dos productos, utilizando las mismas premisas que las del modelo anterior, nos permite obtener la distribución de equilibrio, que viene dada en términos de una función hipergeométrica, y en base a ella la cuota de mercado esperada para cada producto.

• Posteriormente, hemos tratado la *lealtad de marca y presión de compra* con una cadena de Markov homogénea para $M$ elementos que compiten en un mercado, y nos ha proporcionado una distribución límite que, en particular, cuando todas las marcas tienen el mismo nivel de lealtad, coincide con la distribución que describe la presión de compra.

• Finalmente, hemos presentado los *modelos no homogéneos* y los hemos aplicado a un caso real con datos de suscripciones a compañías de telefonía móvil.

Con cada uno de los dos modelos no homogéneos hemos realizado una predicción para octubre de 2018, predicciones que pueden ser más acertadas o no dependiendo de la idoneidad de las hipótesis consideradas.

Hemos empezado con el modelo homogéneo, que nos sirve de guía, y hemos pasado, en un primer caso, a un modelo en el que la propensión observada del cambio de la matriz de transición del mes de marzo al mes de abril se ha conservado con el paso de los meses hasta octubre. En un segundo caso, hemos considerado un modelo con variaciones de la cuota de mercado, con el que la bondad de sus predicciones depende de si realmente el número de nuevos clientes sigue una tendencia que se mantiene a lo largo de los meses.

# *Bibliografía*


[1] K.C. Chan, *Market share modelling and forecasting using Markov chains and alternative models*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, **11** (2015), 1205-1218.

[2] M.V. Gómez, M. Planelles, *La venta de coches de gasolina supera al diésel por primera vez en 20 años*, https://elpais.com/economia/2018/07/07/actualidad/1530981615_595673.html, El País, 2018.

[3] A.M. Juan-González, *Cadenas de Markov*, Curso de Modelos Estocásticos, 2010-2011.

[4] P.E. Mallo, M.A. Artola, M.J. Galante, M. Morettini, M.E. Pascual, A.R. Busetto, *Análisis de la fidelidad de la clientela mediante lógica difusa y herramientas estadísticas*, VI Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística (CLATSE); XXXII Coloquio de Sociedad Argentina de Estadística y XXXI Jornadas Nacionales de Estadística, 2004, 1-9.

[5] U. Narayan Bhat, *Elements of applied stochastic processes*, John Wiley, 1984.

[6] S. Patel, A. Schlijper, *Models of Consumer Behaviour*, 49th European Study Group with Industry, **29** (2004), 1-62.

[7] A. Ries, J.Trout *Posicionamiento*, McGraw Hill, 1989.

[8] S.M. Ross, *Introduction to probability models*, Elsevier, 2014.

[9] S. San Martín, *Prácticas de Marketing, ejercicios y supuestos*, ESIC Editorial, 2008.

[10] J.E. Slaughter, E.F. Sinar, S. Highhouse, *Decoy Effects and Attribute-Level Inferences*, Journal of Applied Psychology, **84** (1999), 823-888.

[11] D. Whitaker, *The Derivation of a Measure of Brand Loyalty Using a Markov Brand Switching Model*, Journal of the operational research society, **29** (1978), 959-970.

[12] Página web de la Comisión Nacional de los Mercados y la Competencia, http://data.cnmc.es.