
SUPERFICIES DE SEIFERT

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor:

Cristina Soto Montes

Tutor:

José Luis Rodríguez Blancas

GRADO EN MATEMÁTICAS



SEPTIEMBRE, 2019
Universidad de Almería

Índice general

1	Introducción	1
1.1.	Objetivos	1
1.2.	Antecedentes	1
2	Marco teórico	5
2.1.	Superficies	5
2.2.	Nudos y enlaces	9
2.3.	Trenzas	10
2.4.	Grupo fundamental	11
2.5.	Homología Y Homotopía	13
2.6.	Otros resultados	15
3	Superficies de Seifert y factorización de nudos	17
4	Grafo y Matriz de Seifert	27
4.1.	Grafo de Seifert	27
4.2.	Matriz de Seifert	27
	Signatura, 30.— Determinante, 31.	
5	Polinomio de Alexander	33
6	Conclusiones	37
	Bibliografía	39

Abstract

This work is mainly focused on the study of compact, connected and orientable surfaces whose boundary is a knot or link, known by the name of Seifert surfaces.

It shows that, from a knot or link, it is always possible to determine a Seifert surface that is unique if we apply the Seifert's algorithm to the diagram of the knot or link. From a Seifert surface it is possible to determine the knot or link which has it by boundary; just draw a line while following the boundary of the surface. However, when manipulating a knot, the resulting Seifert surface may be different. This fact motivates the definition of genus of a knot, as the minimum genus of all possible surfaces with boundary the given knot. The genus of a knot turns out to be an additive invariant regarding to the connected sum, and that becomes to prove that each knot can be decomposed into the connected sum of prime knots in a unique way. Subsequently, we talk about the Seifert graph and it is proved that there exists an equivalence between this and the Seifert surface. Similarly, the Seifert matrix of a knot is introduced, which is also equivalent to the Seifert surface in some sense and, finally, we talk about the Alexander polynomial by providing two methods to get it. We also prove that it is an invariant that allows us to distinguish knots.

Resumen

Este trabajo está enfocado, principalmente, al estudio de superficies compactas, conexas y orientables que tienen por borde un nudo o enlace, conocidas por el nombre de superficies de Seifert.

Se demuestra que, a partir de un nudo o enlace, es posible determinar siempre una superficie de Seifert que es única si aplicamos el algoritmo de Seifert a un diagrama dado del nudo o enlace. Teniendo una superficie de Seifert es posible determinar el nudo o enlace que la tiene por borde; basta con realizar el trazo de su borde. Sin embargo, al manipular un nudo, la superficie de Seifert resultante puede ser distinta. Este hecho motiva la definición de género de un nudo, como el mínimo de los géneros de todas las posibles superficies de Seifert con borde dicho nudo. El género de un nudo resulta ser un invariante aditivo respecto a la suma conexa, y sirve para demostrar que todo nudo descompone como suma conexa de nudos primos de manera única. Posteriormente, se habla del grafo de Seifert y se prueba que existe una equivalencia entre este y la superficie de Seifert. De igual manera, se introduce la matriz de Seifert de un nudo que presenta también cierta equivalencia con respecto a la superficie de Seifert y, finalmente, se habla del polinomio de Alexander proporcionando dos métodos diferentes de obtención y probándose que constituye un invariante que nos permite distinguir nudos.

Introducción

1.1 Objetivos

Este trabajo presenta dos objetivos fundamentales. El primero de ellos es extender la teoría estudiada en el Grado en Matemáticas en cuanto a superficies de Seifert se refiere. Para ello, se requiere realizar una iniciación a la (co)homología celular así como hacer uso de algún software que permita realizar gráficos ilustrativos de los pasos a seguir en cada una de las demostraciones presentadas. En segundo lugar, se pretende aplicar los resultados ya conocidos a la teoría tratada. Uno de dichos resultados es el Teorema de clasificación de superficies.

Una vez tengamos todo lo anterior, seremos conscientes de la importancia que suponen las superficies de Seifert en Topología Algebraica.

1.2 Antecedentes

La Topología Algebraica es una rama de las Matemáticas que trata de estudiar los espacios topológicos haciendo uso del Álgebra. Lo primero que se aborda en los estudios del Grado en Matemáticas relacionado con esta materia es la clasificación de superficies compactas y conexas, tanto con borde como sin borde. Asimismo, también se han tratado con anterioridad los conceptos de nudo, enlace y trenza, así como la relación existente entre ambos. A partir de ahí, surge la cuestión ¿es posible determinar una superficie a partir de un nudo? La respuesta es afirmativa si pensamos en una superficie que tenga a un nudo (o enlace) por borde. Hay una forma sencilla de construir superficies que tengan como borde un cierto nudo (o enlace): colorear las regiones en las que queda dividido \mathbb{R}^2 según el diagrama de un nudo (o enlace), en forma de tablero de ajedrez, y unir las regiones coloreadas a través de tiras “medio torcidas” en los cruces. Es claro que la superficie resultante tiene al nudo (o enlace) como borde. Sin embargo, no toda superficie obtenida a partir de dicho método puede ser clasificada a partir del teorema de clasificación previamente mencionado si bien el resultado no siempre va a llevar consigo una superficie acotada y, por tanto, no compacta, a pesar de que siempre será conexa. Por tanto, surge la necesidad de establecer un procedimiento para, partiendo de un nudo o enlace, obtener una superficie compacta y conexa que podremos clasificar en función de su orientabilidad. Herbert Seifert dio respuesta a dicha cuestión en 1935 con la publicación de su artículo [12]. En concreto, demostró que dado el diagrama de un nudo o enlace, es posible aplicar cierto algoritmo de forma que el resultado sea una superficie compacta, conexa y orientable, conocida, precisamente, con el nombre de superficie de Seifert. Se trata, pues, de un mecanismo de obtención de superficies con ciertas propiedades que el algoritmo de coloreamiento en forma de ajedrez no proporciona. De hecho, para el caso del nudo 4_1 , las dos superficies obtenidas siguiendo el algoritmo explicado anteriormente son no orientables y una de ellas no compacta. Este hecho se puede observar en la Figura 1.1.

Nuestro estudio da comienzo con la teoría preliminar necesaria para llevar a cabo el resto del trabajo. Concretamente, recordamos el término superficie y definimos algunas de las características que nos permiten establecer una clasificación de todas las existentes, como pueden ser la orientabilidad, el género y el borde. Complementamos lo anterior con

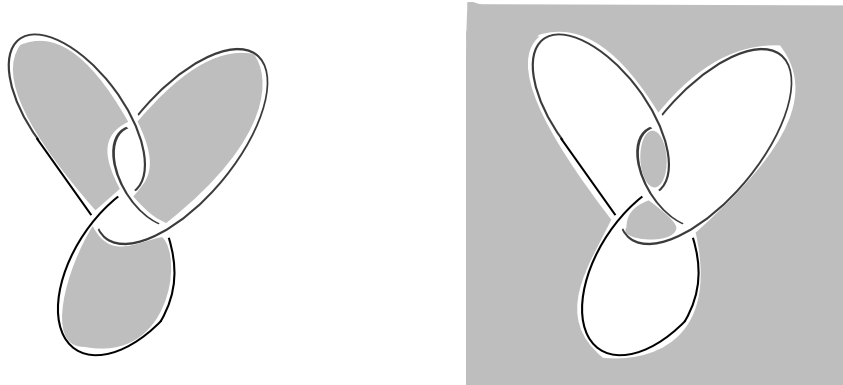


Figura 1.1: Superficies que tienen por borde al nudo 4_1 mediante el método de coloreamiento ajedrez

la definición de característica de Euler en términos de una descomposición en celdas de una superficie. Dicho número resulta ser un invariante que nos permitirá clasificar también las superficies. Como trabajaremos con superficies compactas y conexas, es conveniente recordar los teoremas de clasificación tanto para superficies sin borde como para superficies con borde. Adicionalmente, en este mismo capítulo, recordamos la definición de nudo, enlace y trenza. Dichos conceptos quedan complementados con la definición de suma conexas de nudos, similar a la suma conexas para superficies, y la de ciertos resultados de equivalencia entre nudos (o enlaces) y trenzas. Finalmente, tratamos un poco la homología, que será objeto de estudio en la demostración del que será uno de los principales resultados recogidos en el trabajo.

En el tercer capítulo probaremos que, a partir del diagrama de un nudo (o enlace), siempre es posible determinar una superficie de Seifert que lo tenga como borde y, además, dicha superficie es única. La forma de obtener dicha superficie es a través del algoritmo de Seifert, cuyos pasos a seguir quedarán detallados en esta parte del trabajo. No obstante, cabe la posibilidad de que el diagrama sea manipulado, obteniendo así el diagrama de un nudo equivalente al inicial, cuya superficie de Seifert ya no sea la misma que inicialmente. Este último hecho motiva la definición de género de un nudo (o enlace), el cual resultará ser un operador aditivo, esto es, respeta la suma frente a la suma conexas de nudos o enlaces.

En el capítulo cuarto vemos cómo crear un grafo de Seifert a partir del diagrama de un nudo (o enlace) y de su descomposición en círculos de Seifert. Tratamos además con las matrices de Seifert. Antes de dar la definición de matriz de Seifert necesitamos definir qué es el número de enlace. Las superficies equivalentes nos proporcionarán matrices de Seifert equivalentes. Por último, definimos lo que es la signatura y el determinante de una matriz y mostramos una propiedad que comparten la signatura y el determinante que es la suma conexas.

En el quinto capítulo, ilustraremos dos formas de obtener el polinomio de Alexander, en cualquier caso haciendo uso de las matrices de Seifert que, a su vez, hacen uso del grafo y de la superficie de Seifert. Es más, comprobamos que el polinomio de Alexander es un detector de nudos equivalentes. En este capítulo, también, describimos una forma diferente de obtener las matrices de Seifert y, con ejemplos, veremos que las matrices de Seifert no dependen de la forma en que se calculen y los polinomios de Alexander tampoco, siempre terminan dando el mismo resultado. De hecho, el polinomio de Alexander es el

primer invariante de nudo polinómico descubierto.

En el capítulo 6, último de nuestro trabajo, hablamos sobre las conclusiones obtenidas a lo largo de todo el documento.

Marco teórico

2.1 Superficies

Recordemos, en primer lugar, la definición de superficie topológica.

Definición 2.1. Una **superficie** es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, donde cada punto posee un entorno homeomorfo a $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Igualmente, para el caso en que una superficie posee agujeros, la definición queda como sigue

Definición 2.2. Una **superficie con borde**, S , es un espacio de Hausdorff y segundo numerable, donde cada punto posee un entorno homeomorfo a $B(0, 1)$ o bien al espacio $\{(x, y) \in B(0, 1) : x \geq 0\}$. Los puntos de este último espacio constituyen el denominado borde de la superficie, el cual se denota por ∂S .

Este trabajo estará orientado, principalmente, al tratamiento de superficies compactas y conexas, ya que bajo dichas condiciones disponemos de un teorema de clasificación que recordaremos más adelante. Dicho teorema distingue superficies según su orientabilidad, concepto que definimos a continuación:

Definición 2.3. Una **superficie es orientable** si no contiene una banda de Möbius.

De manera intuitiva, una superficie orientable posee dos lados que pueden ser pintados con dos colores diferentes, de manera que dichos colores no coincidan salvo en el borde de la superficie, en caso de que lo haya.

De cara a clasificar una superficie topológica, el último ingrediente necesario (además de la orientabilidad y el número de componentes del borde) es el género de la superficie. Éste número equivale al número de toros (asas) en las superficies orientables o el número de planos proyectivos en las superficies no orientables. Por ejemplo, consideramos como superficies orientables un toro que dispone de un asa, por lo que su género es 1 o una esfera que no contiene asas por lo que su género es 0; y como superficies no orientables, un plano proyectivo que tiene género 1, o una botella de Klein que tiene género 2.

Es conocido que toda superficie compacta y conexa admite una descomposición celular. En base a dicha descomposición, es posible definir un invariante topológico de la misma (veremos que, efectivamente lo es más adelante) que resultará estar estrechamente relacionado con la orientabilidad, el género y el número de componentes del borde de la superficie.

Si consideramos la descomposición en celdas de una superficie F , vamos a denotar a cada conjunto de i -celdas de tal descomposición como C_i , y el número de i -celdas por $|C_i|$. La característica de Euler de la superficie F queda definida como:

$$\chi(F) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |C_i|.$$

A continuación probamos que la característica de Euler está bien definida, que no depende de la descomposición en celdas particular.

Para ello, necesitamos dos lemas en los que vamos a poder ver cómo modificar esa descomposición en celdas para que, aun así, sigamos teniendo una descomposición en celdas. Estos cambios no afectan a la característica de Euler.

Lema 2.1. *Sea $C = \{C_2, C_1, C_0\}$ la descomposición en celdas de una superficie F . Si tal descomposición tiene dos 1-celdas que se encuentran en una 0-celda, podemos modificar C_1 y C_0 para obtener una nueva descomposición en celdas: $C' = \{C'_2, C'_1, C'_0\}$. Además,*

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i |C_i| = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |C'_i|.$$

Este proceso también se puede reservar para agregar una 0-celda.

Demostración:

Consideramos un diagrama compuesto por dos 1-celdas limitadas por una 0-celda. Eliminamos la 0-celda, uniendo las dos 1-celdas, formando la descomposición C' . Tenemos:

$$|C_2| = |C'_2|, \quad |C_1| = |C'_1| + 1, \quad |C_0| = |C'_0| + 1.$$

Sumando, vemos que ambas descomposiciones celulares dan la misma característica de Euler.



■

A continuación, podemos eliminar o añadir una 1-celda a un conjunto de celdas bajo ciertas condiciones.

Lema 2.2. *Sea $C = \{C_2, C_1, C_0\}$ una descomposición en celdas de una superficie F . Si modificamos tal descomposición eliminando una 1-celda, bajo ciertas condiciones, obtenemos una nueva descomposición en celdas: $C' = \{C'_2, C'_1, C'_0\}$. Además,*

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i |C_i| = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |C'_i|.$$

Este proceso puede ser invertido, insertando una nueva 1-celda.

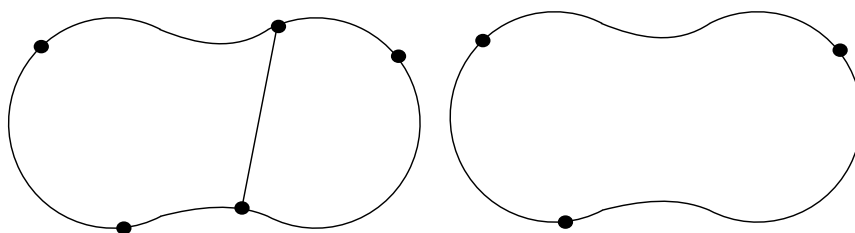
Demostración:

Consideramos que una 1-celda divide una 2-celda. (Tengamos en cuenta que hay otras posibles configuraciones, basadas en si las 1-celdas comparten o no una 0-celda con otra 1-celda). Si eliminamos la 1-celda, se eliminan además dos 0-celdas y se unen dos 1-celdas. La eliminación también une dos 2-celdas, formando la descomposición en celdas C' . Tenemos:

$$|C_2| = |C'_2| + 1, \quad |C_1| = |C'_1| + 3, \quad |C_0| = |C'_0| + 2.$$

Ambas descomposiciones tienen la misma característica de Euler.

■



Teorema 2.1. Para dos descomposiciones en celdas, $C = \{C_2, C_1, C_0\}$ y $C' = \{C'_2, C'_1, C'_0\}$, de una superficie F conexa, cerrada y compacta,

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i |C_i| = \sum_{i=0}^2 (-1)^i |C'_i|.$$

Demostración:

Construimos un nuevo conjunto de celdas $K = \{K_2, K_1, K_0\}$. Comenzamos con el conjunto C e insertamos 0-celdas y 1-celdas para formar el conjunto K como en los lemas anteriores donde podemos identificar un subconjunto de K_1 con cada elemento de C'_1 . Dos 1-celdas adyacentes en K se identifican con 1-celdas adyacentes en C'_1 o se identifican con la misma 1-celda. (Estamos subdividiendo el grafo formado por las 0-celdas y las 1-celdas de C y agregamos 1-celdas adicionales hasta que se pueda identificar un subgrafo con el grafo formado por las 0-celdas y las 1-celdas de C').

Eliminamos 1-celdas y 0-celdas hasta tener el complejo C' . ■

De acuerdo con los resultados anteriores se deduce que la característica de Euler de una superficie es independiente de la descomposición celular:

Corolario 2.1.1. Sea S una superficie compacta y conexa. Entonces $\chi(S)$ es un invariante de la superficie.

Para poder enunciar el teorema de clasificación de superficies sin borde solo nos falta saber antes la definición de suma conexa:

Definición 2.4. La **suma conexa** de dos superficies se obtiene al eliminar una bola abierta en cada superficie y pegarlas por las fronteras que estas producen. Esta operación se denota por \sharp por ejemplo, la suma conexa de S_1 y S_2 se denota por $S_1 \sharp S_2$.

Teorema 2.2. (de clasificación) Toda superficie compacta y conexa S es homeomorfa a una, y solo una de las siguientes superficies:

1. Suma conexa de g toros, $S^2 \sharp T^2 \sharp \dots \sharp T^2$, con $g \geq 0$ si S es orientable.
2. Suma conexa de g planos proyectivos, $P^2 \sharp \dots \sharp P^2$, con $g \geq 0$ si S no es orientable.

en cada caso, g denota el género de la superficie.

A continuación podemos ver la característica de Euler de las superficies compactas y conexas que dan lugar a cualquier otra:

Ejemplo 2.1. Podemos ver los dibujos de las 2-celdas de este ejemplo en la Figura 2.1

Para la esfera S^2 , $\chi(S^2) = 2 - 1 + 1 = 2$.

Para el plano proyectivo P^2 , $\chi(P^2) = 1 - 1 + 1 = 1$.

Para el toro T^2 , $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.

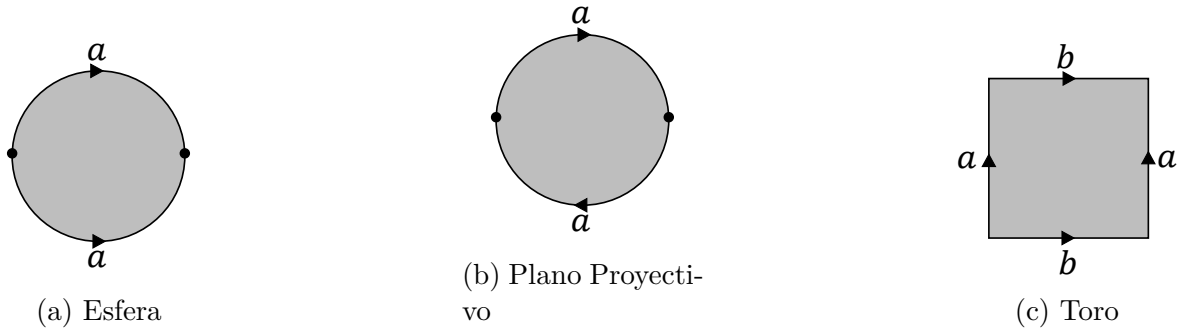


Figura 2.1

Sea S una superficie con borde, conexa y compacta. Diremos que S tiene r agujeros si su borde posee r componentes conexas, lo que equivale a quitar r discos a la superficie de partida. Por tanto, si tapamos dichos agujeros con discos obtendremos una superficie sin borde, S' que podremos clasificar según el Teorema 2.2. Así, dicho teorema se puede reformular para superficies con borde según sigue:

Teorema 2.3. Toda superficie compacta y conexa S con borde es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

1. Suma conexa de g toros con r agujeros, si S es orientable.
2. Suma conexa de g plano proyectivos con r agujeros, si S es no orientable.

en cada caso, g denota el género de la superficie, y r es el número de componentes del borde.

Teorema 2.4. Dos superficies compactas y conexas con borde son homeomorfas si, y solo si, tienen el mismo número de componentes del borde, son ambas orientables o no orientables y tienen la misma característica de Euler.

Proposición 2.1. Dadas dos superficies compactas y conexas, S_1 y S_2 ,

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demostración:

Sea S_1 la superficie con una descomposición C . Asumimos que esta superficie tiene una 1-celda uniendo una 2-celda. Eliminamos la 2-celda delimitada por el círculo para obtener una superficie con borde, S'_1 . Denotamos $\chi(S'_1) = \chi(S_1) - 1$. Si este círculo es parte de la descomposición, el disco está delimitado por una 0-celda y una 1-celda con una aportación neta de 0 para la característica de Euler. Repetimos este proceso con la superficie S_2 , observando que $\chi(S'_2) = \chi(S_2) - 1$. Pegamos S'_1 y S'_2 a lo largo del agujero. Por lo tanto, obtenemos un conjunto de celdas para $S_1 \# S_2$ y

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

■

Corolario 2.4.1. *La característica de Euler de una superficie orientable de género g con r agujeros es $2 - 2g - r$, y para una superficie no orientable sería $2 - g - r$.*

2.2 Nudos y enlaces

Definición 2.5. *Un **nudo** es un embebimiento de la circunferencia unidad, S^1 , en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , es decir, una aplicación continua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$ homeomorfismo.*

Todo nudo admite una representación (que no es única) en el plano, conocida como *diagrama* (o *proyección*) *del nudo*. Los lugares en los que un trozo de cuerda pasa por encima (o debajo) de otra se conocen como *cruces del diagrama del nudo*.

Los matemáticos tratan de clasificar todos los nudos y enlaces según el número de cruces, empleando invariantes de tipo numérico o polinómico (entre otros) y técnicas cada vez más sofisticadas. Los nudos más conocidos se dan a conocer a través de un posible diagrama en la Tabla de Rolfsen (véase [14]). De ellos el más sencillo es el nudo trivial.

Definición 2.6. *El **nudo trivial** se corresponde con el borde de un disco en \mathbb{R}^3 .*

Definición 2.7. *Dos **nudos** K_1 y K_2 son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserve la orientación tal que $h(K_1) = K_2$. La equivalencia de nudos la denotaremos por $K_1 \cong K_2$.*

Dados dos nudos orientados K_1 y K_2 podemos suprimir un intervalo de cuerda en cada uno de ellos y pegarlos a lo largo de dicho tramo de manera que las orientaciones coincidan. Dicha operación es la que se conoce como *suma conexa* de los nudos K_1 y K_2 y se denota por $K_1 \# K_2$ (véase Figura 2.2).

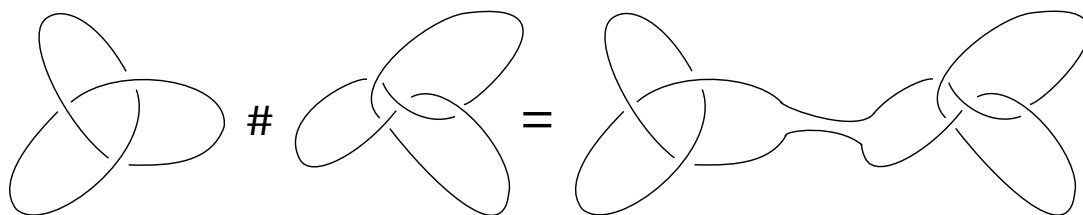


Figura 2.2: Suma conexa nudos

La suma conexa de nudos presenta las siguientes propiedades:

Proposición 2.2. *Sean dos nudos orientados K_1 y K_2 , entonces su suma conexa*

1. *está bien definida salvo equivalencia, es decir, si $K_1 \# K'_1$ y $K_2 \# K'_2$, entonces, $K_1 \# K_2 \cong K'_1 \# K'_2$;*
2. *es asociativa, es decir, $K_1 \# (K_2 \# K_3) \cong (K_1 \# K_2) \# K_3$;*

3. es conmutativa, es decir, $K_1 \# K_2 \cong K_2 \# K_1$.

Definición 2.8. Un **nudo** es **primo** si no es trivial y no se puede expresar como la suma conexa de dos nudos no triviales.

El nudo de trébol (3_1 en la Tabla de Rolfsen) es un ejemplo de nudo primo.

En caso de que dispongamos de nudos con más de una cuerda, estaremos tratando con un enlace. Así, formalmente

Definición 2.9. Un **enlace** es una colección ordenada finita de nudos que no se intersecan entre sí. Cada nudo K_i se dice que es una componente del enlace.

Definición 2.10. Diremos que K es un **enlace dividido** si al menos 2 componentes no se encuentran entrelazadas.

El ejemplo más sencillo de enlace dividido es el enlace trivial, que se define como aquel que es homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 = 1\}$.

Al igual que para los nudos, existe una definición de equivalencia para enlaces:

Definición 2.11. Dos **enlaces** $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ y $L' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ son **equivalentes** si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $m = n$, es decir, L y L' tienen el mismo número de componentes.
2. Existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que preserva la orientación que manda la colección $K_1 \cup \dots \cup K_m$ en la colección $K'_1 \cup \dots \cup K'_n$

Definiremos el diagrama de un enlace de manera análoga al de un nudo.

2.3 Trenzas

Definición 2.12. Una **trenza** es una colección de cuerdas no anudadas que bajan cada una a partir de uno de los puntos considerados en una barra horizontal y llegan cada una a un punto distinto de los puntos presentes en una barra horizontal situada algo más abajo. Dichas cuerdas se van entrelazando a medida que van descendiendo.

En ocasiones, es posible manipular una trenza hasta pasar a otra sin soltar los extremos. En ese caso, diremos que ambas trenzas son equivalentes. Un ejemplo sencillo de ello se puede ver en la Figura 2.3. Con objeto de representarlas usaremos combinaciones de letras mayúsculas y minúsculas. El número de letras presentes en la palabra asociada a una trenza superará siempre en una unidad al número de cuerdas que necesitamos para conformar la trenza. Así, por ejemplo, la palabra $aBcA$ requiere 4 cuerdas y proporciona una presentación de la trenza de la Figura 2.4.

Aclaremos que en el caso de la última trenza puesta como ejemplo, la letra primera es a ya que la primera cuerda cruza “por debajo” de la segunda. Igualmente, la segunda es B porque en el siguiente cruce, la segunda pasa “por encima” de la tercera. Así se determina la palabra asociada a una trenza.

Es más, si disponemos de dos trenzas, podemos colocar una debajo de la otra, para lo cual pondremos una palabra a continuación de otra, de manera similar a la presentación

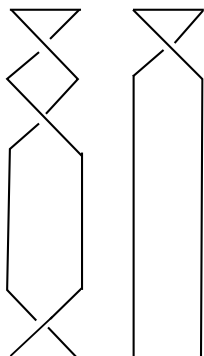
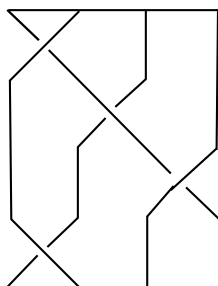


Figura 2.3: Trenzas equivalentes

Figura 2.4: Trenza $aBCA$

de la suma conexa de dos superficies. De hecho, dicha operación define un grupo conocido como el grupo de trenzas o de Artin, generado por las letras minúsculas y mayúsculas.

La Teoría de Trenzas, la cual fue inventada en 1925 por el geómetra y matemático Emil Artin y se ha venido desarrollando independientemente de la teoría de nudos, pero ambas presentan bastante relación. Por ejemplo, es posible determinar un nudo a partir de una trenza si consideramos el cierre de ésta última. Igualmente, dado un nudo (o enlace) orientado arbitrario, éste será equivalente (con orientación) a un nudo (o enlace) que es el cierre de una trenza. Se deduce, así, que si dos trenzas son equivalentes, entonces sus respectivos cierres son equivalentes como nudos o enlaces. Sin embargo, es posible obtener nudos (o enlaces) equivalentes a partir de dos trenzas que no son equivalentes.

Los Teoremas de Clasificación y lo básico relativo a nudos y trenzas se trata en [3].

2.4 Grupo fundamental

En esta subsección recordamos las nociones básicas de grupo fundamental, homotopía así como la teoría necesaria de homología para probar uno de los resultados principales del trabajo.

Comenzamos recordando la noción de grupo fundamental. Para ello, necesitamos una serie de definiciones previas:

Definición 2.13. *Sea X un espacio topológico. Se dice que un **camino** o arco $f : [0, 1] \rightarrow X$ es **cerrado** si $f(0) = f(1)$. En caso de que $f(0) = f(1) = x$, diremos que f es un lazo de un lazo basado en x .*

Recordamos también la definición de producto de caminos:

Definición 2.14. *[4] Sean $a, b, c \in X$. Sea $f : [0, 1] \rightarrow X$ un camino que une a y b y $g : [0, 1] \rightarrow X$ uno que une b y c . Se define el **producto de caminos** $f * g : [0, 1] \rightarrow X$ de f y g de la siguiente forma:*

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Además, damos la definición de caminos equivalentes, teniendo en cuenta la noción de homotopía relativa:

Definición 2.15. *Dos **caminos** $f_0, f_1 : [0, 1] \rightarrow X$ que unen a con b , se dice que son **homótopos** o **equivalentes**, y escribiremos $f_0 \sim f_1$, si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$, tal que $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$, $F(0, s) = x_0$, $F(1, s) = x_1$. Intuitivamente, dos caminos serán equivalentes si se pueden “deformar” uno en el otro de manera continua, es decir, si existe una familia de caminos f_s que unen x_0 y x_1 , para $0 \leq s \leq 1$, que varía continuamente respecto del parámetro s , y tal que para $s = 0$ vale f_0 y para $s = 1$ vale f_1 .*

Una tal F se dice que es una homotopía o una deformación continua entre f_0 y f_1 , lo denotaremos $f_0 \sim_F f_1$. Naturalmente, la homotopía que relaciona f_0 y f_1 no tiene por qué ser única, pudiendo haber otras maneras de deformar un camino en el otro.

Proposición 2.3. *La relación de homotopía de caminos es una relación de equivalencia.*

Designaremos la clase de equivalencia de f por $[f]$, es decir

$$[f] = \{g : I \rightarrow X \text{ continua, tal que } f \sim g\}.$$

En particular, $[f] = [g]$ si y solo si $f \sim g$.

Proposición 2.4. *El producto de caminos es compatible con la relación de equivalencia dada por la homotopía de caminos. Es decir, si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $f * g \sim f' * g'$.*

Necesitamos ahora considerar solamente lazos basados en un punto para obtener una estructura de grupo, en el sentido estricto.

Teorema 2.5. *[7] El conjunto $\pi(X, x)$ de clases de equivalencia de lazos en X basados en x admite una estructura de grupo, conocido como grupo fundamental.*

Los siguientes grupos fundamentales son bien conocidos.

Proposición 2.5. *([5, Prop. 1A.1] El grupo fundamental de un grafo conexo es el grupo libre con tantos generadores como aristas quedan fuera de un árbol maximal.*

Teorema 2.6. *El grupo fundamental de una superficie compacta, conexa y orientable, de género g es:*

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

2.5 Homología Y Homotopía

Uno de los ingredientes necesarios para demostrar la aditividad del género de un nudo (Teorema 3.2) es la homología que introducimos en esta sección. La homología nos va a detectar cuándo una sucesión es exacta.

Definición 2.16. *Una **sucesión** de homomorfismos de grupos abelianos*

$$\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \rightarrow \dots$$

*se dice que es **exacta** si el $\text{Ker } \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}$ para cada n .*

Definición 2.17. *Una sucesión de homomorfismos de grupos abelianos*

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

*se dice que es un **complejo de cadenas** si $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. En ese caso $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n$ y tiene sentido definir $H_n(C_*) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$. Dicho grupo se llama n -ésimo **grupo de homología**.*

El complejo de cocadenas $\text{Hom}(C_, A)$ con coeficientes en un grupo abeliano A está definido por*

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(C_{n-1}, A) \xrightarrow{\delta_n} \text{Hom}(C_n, A) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \text{Hom}(C_{n-1}, A) \rightarrow \dots$$

*donde $\delta_{n+1}(\varphi) = \varphi \circ \partial_n$. Definimos el n -ésimo **grupo de cohomología** de C_* con coeficientes en A como*

$$H^n(C_*; A) = H_n(\text{Hom}(C_*, A))$$

La cohomología y la homología se relacionan según el resultado siguiente.

Teorema 2.7 (teorema del coeficiente universal para cohomología). *([5, Th. 3.2]) Sea A un grupo abeliano. Si un complejo de cadenas C_* de grupos abelianos presenta grupos de homología $H_n(C_*)$, entonces el n -ésimo grupo de cohomología $H^n(C_*; A)$ del complejo de cocadenas $\text{Hom}(C_*, A)$ está determinado por la sucesión exacta*

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_*), A) \rightarrow H^n(C_*; A) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C_*), A) \rightarrow 0$$

La homología singular $H_n(X)$ de un espacio topológico X está diseñada para detectar huecos n -dimensionales (véase [5, sección 2.1]). En este trabajo nos vamos a centrar en una versión simplificada, homología celular, que vale para los CW -complejos.

El siguiente aspecto a tratar es el concepto de CW -complejo y su homología celular asociada:

Definición 2.18. Un *CW-complejo* o complejo celular de dimensión n es un espacio X que se puede descomponer como sigue:

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X^n = X,$$

donde X^0 es el conjunto formado por las 0-celdas, y X^k se obtiene a partir de X^{k-1} “adjuntando k -celdas”. X^k se llama k -esqueleto de X . Además, se deben satisfacer dos condiciones: la primera de ellas hace referencia a que el cierre de cada celda cortará solo a un número finito de celdas, mientras que la segunda se refiere a la topología débil, esto es, un subespacio de X será cerrado si, y solo si el resultado de cortarlo con cada celda es un cerrado.

En general, adjuntar una k -celda e^k a un espacio Y mediante una aplicación continua $f : S^{k-1} \rightarrow Y$, que llamaremos aplicación de adjunción de la celda, es el espacio cociente

$$Y \cup_f e^k := Y \cup D^k / \sim,$$

por la relación de equivalencia dada por $a \sim f(a)$, para todo $a \in S^{k-1}$.

Por ejemplo, todo grafo es un 1-complejo. Las superficies compactas y conexas admiten una estructura de 2-complejo sencilla dada por un polígono con lados identificados en el borde. Por ejemplo, la suma conexa de g toros está constituida por una 0-celda, $2g$ 1-celdas y 1 2-celda, donde la aplicación de adjunción de la 2-celda viene determinada por la palabra $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

En el caso de un *CW-complejo* X , en general, el grupo fundamental depende sólo del 2-esqueleto de X . Esta limitación a las dimensiones bajas se puede suprimir considerando grupos de homotopía de orden superior, denotados por $\pi_n(X)$, que están dados en términos de funciones definidas del cubo n dimensional, $[0, 1]^n$, en X y las homotopías definidas de $[0, 1]^n \times [0, 1]$ en X . Asimismo, como cabe esperar, el grupo $\pi_n(X)$ depende únicamente del $(n+1)$ -esqueleto de X . Sin embargo, el grupo de homotopía de orden $n > 1$ presenta la desventaja de que es muy difícil de calcular en ciertas ocasiones. Por ejemplo, el cómputo de $\pi_i(S^n)$ para $i > n$ se convierte en un gran problema a resolver. Afortunadamente, existe una alternativa que facilita dichos cálculos: los grupos de homología, $H_i(X)$. Al igual que $\pi_n(X)$, $H_n(X)$ para un *CW-complejo* X depende únicamente del $(n+1)$ -esqueleto. Para las esferas, por ejemplo, $H_i(S^n)$ es isomorfo a $\pi_i(S^n)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sin embargo, $H_i(S^n) = 0$, para todo $i > n$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

La homología celular es una herramienta de la Topología Algebraica que permite calcular fácilmente los grupos de homología de *CW-complejos*, basándose en cálculos de grado. Para ver la definición de homología celular consúltese [5]. Nosotros nos quedaremos con el resultado que figura a continuación y que, en la teoría de homología celular, es sólo un resultado preliminar.

Lema 2.3. ([5, Lemma 2.34]) Si X es un *CW-complejo*, entonces:

1. $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$, para $k \neq n$ y es un grupo abeliano libre para $k = n$, con una base en correspondencia uno a uno con las n -celdas de X .
2. $H_k(X^n) = 0$, para $k > n$. En particular, si X es finito dimensional, entonces $H_k(X) = 0$, para $k > \dim X$.
3. La función $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ inducida por la inclusión de X^n en X es un isomorfismo para $k < n$ y sobreyectiva para $k = n$.

Proposición 2.6. *Si X es arco-conexo, entonces $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. En general, para un espacio X cualquiera, $H_0(X)$ es una suma directa de \mathbb{Z} 's, una por cada componente arco-conexa de X .*

Existe una estrecha relación entre homología y grupo fundamental. Ello se debe al hecho de que una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ puede ser vista como un camino o como un CW-complejo de dimensión 1. En caso de que f sea un camino cerrado, el complejo celular puede verse como un ciclo ya que $\partial f = f(1) - f(0)$.

Teorema 2.8. *([5, Th. 2A.1]) Al considerar los caminos cerrados como ciclos, obtenemos un homomorfismo $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Si X es conexo por arcos entonces h es sobreyectiva y tiene por núcleo el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$, por lo que h induce un isomorfismo que va desde el abelianizado de $\pi_1(X)$ hasta $H_1(X)$.*

Ejemplo 2.2. *Sea M_g la superficie orientable de género g con su estructura CW habitual que consiste en una 0-celda, $2g$ 1-celdas y una 2-celda unidas por el producto de conmutadores $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. El complejo de cadenas celulares asociado es:*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

d_1 debe ser 0 ya que solo hay una 0-celda. Además, cada a_i o b_i aparece con su inverso en $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$, luego al abelianizar se anulan y por tanto, $d_2 = 0$. Dado que d_1 y d_2 son ambos cero, los grupos de homología de M_g son los mismos que los grupos de la cadena celular, a saber, \mathbb{Z} en las dimensiones 0 y 2, y \mathbb{Z}^{2g} en dimensión 1.

Teorema 2.9 (dualidad de Alexander). *([5, Cor. 3.45]) Si K es un subespacio de \mathbb{R}^3 compacto, localmente contráctil, no vacío, entonces $\widetilde{H}_i(\mathbb{R}^3 \setminus K; \mathbb{Z}) \sim \widetilde{H}^{n-i-1}(K; \mathbb{Z})$, para todo i .*

Teorema 2.10. *([5]) Si K es un subespacio de \mathbb{R}^3 compacto, localmente contráctil, no vacío, entonces $\widetilde{H}(\mathbb{R}^3 \setminus K; \mathbb{Z}) \sim \widetilde{H}^{n-i-1}(K; \mathbb{Z})$, para cada i .*

El siguiente resultado es el análogo al Teorema de Seifert-Van Kampen.

Teorema 2.11. *(Mayer-Vietoris([5])) Para un par de subespacios $U, V \subset X$ tal que X es la unión de los interiores de U y V , existe una sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris que tiene la forma*

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\Phi} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X) \rightarrow 0$$

Además de su utilidad para los cálculos, la sucesión de Mayer-Vietoris también se aplica con frecuencia en los argumentos de inducción, donde uno podría saber que cierta afirmación es verdadera para U , V y $U \cap V$ por inducción y luego deducir que es verdadera para $U \cup V$ por la sucesión exacta.

2.6 Otros resultados

El siguiente resultado, que usaremos en la demostración del Teorema 3.2, es una generalización del Teorema de la curva de Jordan:

Teorema 2.12. de Schönflies *Si J es una curva cerrada y simple en \mathbb{R}^2 , el cierre de una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus J$ es homeomorfa al disco unidad.*

Superficies de Seifert y factorización de nudos

En este capítulo se verá que cualquier nudo (o enlace) que consideremos en \mathbb{R}^3 se corresponde con el borde de alguna superficie en \mathbb{R}^3 . Más concretamente, existirá una superficie orientable que tenga al nudo (o enlace) como borde, conocida como superficie de Seifert. Tales superficies constituyen una herramienta fundamental para estudiar el nudo (o enlace) de diferentes maneras. Una de sus aplicaciones fundamentales consiste en usarlas para probar que los nudos se pueden descomponer como suma conexa de nudos primos, lo que veremos en esta parte del trabajo.

La definición de superficie de Seifert es la siguiente.

Definición 3.1. Una **superficie de Seifert** para un nudo (o enlace) orientado L en \mathbb{R}^3 es una superficie conexa, compacta y orientable contenida en \mathbb{R}^3 cuyo borde orientado es L .

Claramente, cualquier superficie compacta, conexa y orientable en \mathbb{R}^3 con un borde no vacío nos proporciona un ejemplo de enlace equipado con una superficie de Seifert.

Por lo tanto, aunque el método anterior puede proporcionar una superficie de Seifert para algunos nudos (o enlaces), se necesita un método general para obtener una superficie orientable a partir de cualquier nudo (o enlace).

Teorema 3.1. *Cualquier nudo o enlace orientado en \mathbb{R}^3 tiene una superficie Seifert.*

Demostración:

Sea D un diagrama de un enlace orientado L . Ahora transformemos los cruces tal y como muestra la Figura 3.1. Dicha transformación equivale a cambiar la dirección en cada cruce continuando hacia dónde nos indique la flecha de la cuerda del nudo con la que nos encontramos. El diagrama resultante, al que denotaremos por \hat{D} , consiste en la unión disjunta de curvas cerradas simples orientadas.

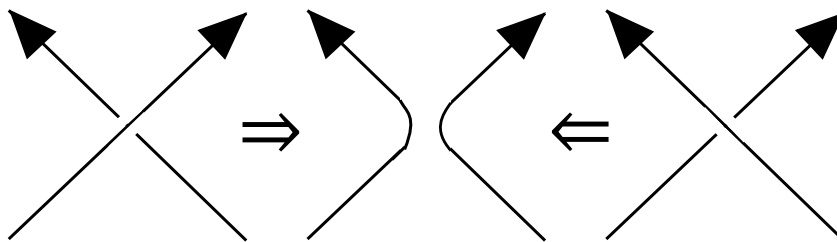


Figura 3.1: Transformación de cruces en el algoritmo de Seifert

Los círculos disjuntos dados por la región del plano comprendida dentro de las curvas cerradas de \hat{D} son llamados *discos de Seifert* del diagrama D .

Podría suceder que dos o más círculos de Seifert apareciesen anidados en \hat{D} . Nótese que un cruce en el diagrama del nudo (o enlace) llevará consigo la existencia de dos discos de Seifert. Sin embargo, dos discos de Seifert podrían estar conectados mediante más de un cruce.

Una vez que tenemos el diagrama \hat{D} , el siguiente paso es conectar los discos de Seifert a través de bandas (espacios homeomorfos a un cuadrado) medio giradas y colocadas en los antiguos cruces de forma que “respeten” la orientación original del enlace en el cruce correspondiente. No obstante, cabe la posibilidad de que, tras aplicar el procedimiento anterior, dos discos de Seifert pertenezcan a componentes conexas diferentes. En ese caso, suprimiremos un disco de un disco de Seifert de cada una de las componentes y conectaremos un tubo largo y fino con borde los agujeros resultantes de extraer los discos, de forma que se conserve la orientabilidad.

Por construcción, la superficie resultante es claramente compacta. En efecto, se puede construir a partir de la unión de los discos de Seifert y las bandas colocadas en los cruces, por lo que consiste en la unión finita de conjuntos compactos y, por ello, la superficie es compacta. Igualmente, la superficie es conexa según ha sido definida, ya que todos los discos de Seifert aparecerán conectados entre sí a través de las bandas colocadas en los cruces o bien a través de tubos largos y finos. Veamos ahora, pues, que es también orientable. Denotemos por S a la superficie de Seifert recién construida por el procedimiento explicado anteriormente. Dada la forma en que han sido unidos los discos de Seifert a través de las bandas, podrán darse las dos posibles situaciones de la Figura 3.2. En vista de ello, es clara la orientabilidad que presentará toda superficie de Seifert por el hecho de poder colorear siempre dos caras con colores diferentes.

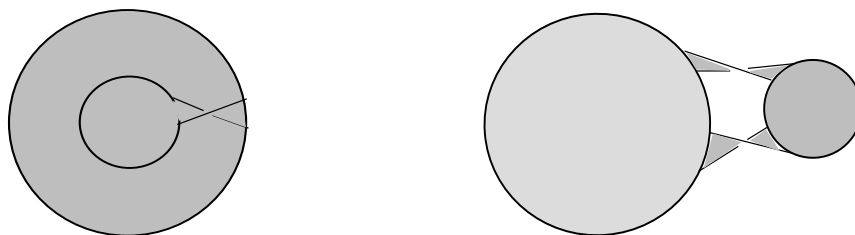


Figura 3.2: Posibles situaciones entre dos discos de Seifert

El procedimiento explicado en la definición del Teorema 3.1 es lo que se conoce como *Algoritmo de Seifert*. Para hallar la superficie de Seifert de una trenza se puede usar el mismo algoritmo, y además, en este caso, los círculos de Seifert son concéntricos. Por ejemplo, una superficie de Seifert para el nudo 4_1 se construye agregando tres discos mediante cuatro tiras semi-torcidas cerca de los cruces para unir los discos, tal y como se detalla a continuación:

Ejemplo 3.1. *Consideremos el nudo 4_1 de la Tabla de Rolfsen. Aplicamos el algoritmo de Seifert y la superficie orientable que tiene como borde a este nudo y el resultado puede verse en la Figura 3.3.*

La demostración del teorema anterior proporciona una forma de construir una superficie Seifert a partir de un diagrama del enlace. Sin embargo, la superficie resultante puede no ser la más fácil para algún uso específico. Una superficie proveniente de la técnica de coloración del tablero de ajedrez, o de un uso parcial de ella, puede parecer más simple.

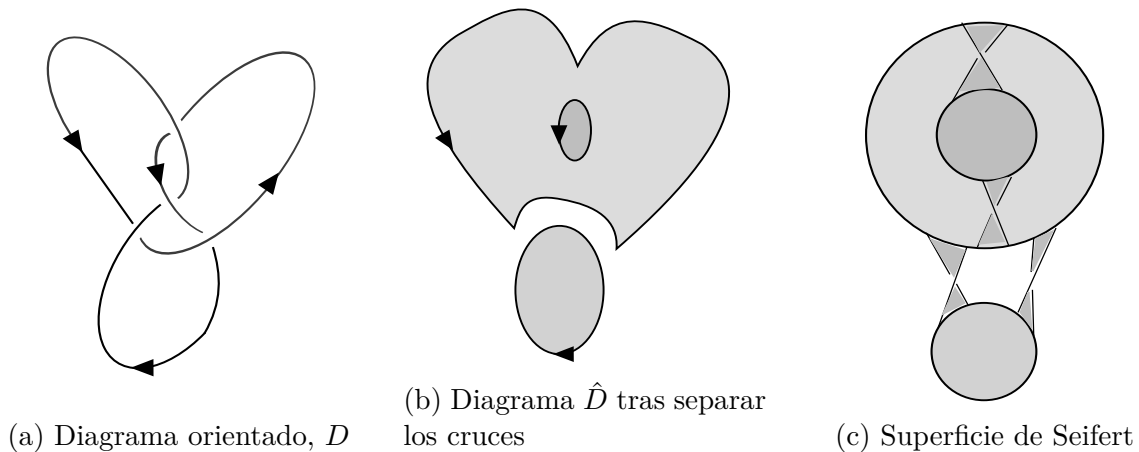


Figura 3.3: Algoritmo de Seifert aplicado al nudo 4_1 de la Tabla de Rolfsen

Una vez que dispongamos de la superficie de Seifert de un nudo (o enlace) dado tras aplicar el algoritmo de obtención de la misma, cabe preguntarse con qué superficie se corresponde concretamente. Tal y como vimos en el capítulo primero del trabajo, el Teorema de Clasificación de superficies nos garantiza que toda superficie orientable se corresponde con la suma conexa de un cierto número de toros, el cual viene dado por el género de la superficie. El siguiente resultado pone de manifiesto que el género de una superficie de Seifert guarda una estrecha relación el número de discos de Seifert y de cruces del diagrama del nudo (o enlace) en cuestión.

Proposición 3.1. *Sea K el diagrama de un nudo o un enlace no dividido. Si denotamos por d al número de discos de Seifert, c al número de cruces en su diagrama y r el número de componentes del mismo, entonces el género de la superficie de Seifert de K viene dado por $\frac{2-d+c+r}{2}$.*

Demostración:

Sea K un nudo (o enlace) y consideremos una triangulación de la superficie resultante de aplicar el algoritmo de Seifert sobre K , de manera que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. Solo hay un vértice de la triangulación en el interior de cada círculo de Seifert y n vértices en el borde de dicho círculo. Así, también debe haber n aristas que conectan cada uno de los vértices del borde del disco de Seifert con el vértice del interior.
2. Cada cruce se sustituye por dos triángulos pegados de forma que la arista que cruza diagonalmente se corresponde con la diagonal del cuadrilátero formado por los dos triángulos

Bajo las condiciones anteriores, cada círculo de Seifert aportará $n + 1$ vértices a la característica de Euler. Por su parte, aportará $2n$ aristas (con signo negativo) y n caras. Así, pues, la característica de Euler de un disco de Seifert será $n + 1 - 2n + n = 1$.

Por su parte, cada cruce aportará 2 caras (los dos triángulos), tres aristas y ningún vértice. Luego, tendremos una aportación global de $0 - 3 + 2 = -1$ por parte de cada cruce.

En definitiva, la característica de Euler será $\chi = 1.d + (-1).c = d - c$.

Ahora bien, el Teorema de clasificación de superficies (con borde) nos permite afirmar que $\chi = 2 - 2g - r$ por ser dicha superficie orientable en cualquier caso, siendo g el género de la superficie. Así pues, despejando, tenemos $g = \frac{2-d+c+r}{2}$.

■

Corolario 3.1.1. *Sea K un enlace dividido, entonces el género de la superficie de Seifert de F es $\frac{2-d+c+r}{2} + n$ siendo n el número de tubos a añadir en el Algoritmo de Seifert.*

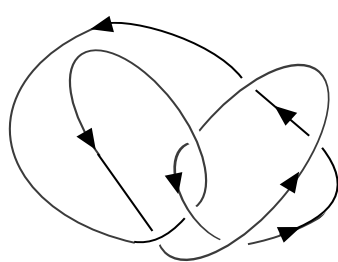
Demostración:

Sea K un enlace dividido con n tubos en su superficie de Seifert, F . Si denotamos a los enlaces no divididos que conforman K por F_1, \dots, F_{n+1} , entonces $F = F_1 \# S^2 \# F_2 \# \dots \# F_n \# S^2 \# F_{n+1}$. Equivalentemente, $F = F_1 \# F_2 \# \dots \# F_n \# F_{n+1} \# S^2 \cdot n$. $\# S^2$ por la conmutatividad de la suma conexa de superficies. Así pues, la característica de Euler será la suma de las características de Euler de cada una de las superficies de Seifert F_1, \dots, F_{n+1} , a la que hemos restar dos unidades por tubo añadido (véase la Proposición 2.1). Con otras palabras, $\chi = d - c - 2n$ con d y c las sumas de discos y cruces de Seifert respectivamente. Despejando el género teniendo en cuenta el Teorema de Clasificación de superficies con borde es $\frac{2-d+c+r}{2} + n$.

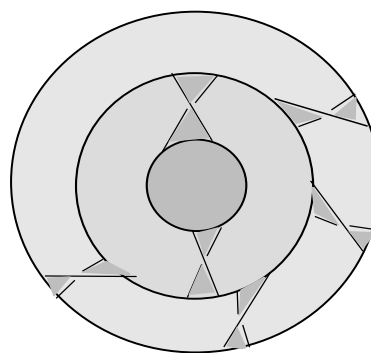
■

Ejemplo 3.2. *La superficie de Seifert de nudo 4_1 (véase Ejemplo 3.1), la cual puede verse en la Figura 3.3, posee 3 discos y 4 cruces, por lo que su género es 2 y, por tanto, al disponer de 1 componente en el borde, se trata de la suma conexa de 2 toros con 1 agujero.*

Ya que sabemos clasificar las superficies de Seifert de un nudo (o enlace) cabe preguntarse si hay unicidad. En efecto, dada una superficie de Seifert, existe un único nudo (o enlace) que da como resultado dicha superficie tras aplicar el Algoritmo de Seifert; bastaría con repasar el borde de la misma para obtener el nudo (o enlace) correspondiente. Sin embargo, el recíproco no es cierto, es decir, dado un nudo (o enlace) la superficie de Seifert resultante no es única. Este hecho puede darse, por ejemplo, al manipular el nudo y obtener otro equivalente, tal y como queda reflejado en la Figura 3.4. La superficie de Seifert resultante para el nudo manipulado resulta disponer de tres discos de Seifert y 6 bandas mientras que la obtenida en el Ejemplo 3.1 tenía 4 bandas.



(a) Diagrama orientado, D



(b) Superficie de Seifert

Figura 3.4: Algoritmo de Seifert aplicado al nudo 4_1 manipulado

Por el contrario, elegir una orientación u otra no influye sobre la superficie de Seifert resultante para un diagrama dado del nudo (o enlace) en cuestión.

El hecho de que para un nudo (o enlace) no exista una única superficie de Seifert, motiva la definición de género de un nudo.

Definición 3.2. El *género*, $g(K)$, de un nudo K se define como:

$$g(K) = \min\{\text{género}(F) : F \text{ superficie de Seifert de } K\}$$

El género de una superficie de Seifert, F , es, como ya hemos visto anteriormente, $\frac{1}{2}(1 - \chi(F))$, donde $\chi(F)$ es la característica de Euler de F . La característica de Euler, a su vez, se puede definir como el número de vértices menos el de aristas más el de triángulos en cualquier triangulación de F (o a partir de una descomposición celular, como en la Sección 2.1).

En primer lugar, ofrecemos una caracterización del nudo trivial en términos de su género:

Proposición 3.2. Sea K un nudo. Entonces K es trivial si, y solo si su género es 0.

Demostración:

\Rightarrow) Esta implicación es clara si aplicamos el algoritmo de Seifert y observamos que la superficie resultante se compone de un solo disco -el cierre de S^1 -, con lo cual el género de la superficie, en virtud de la Proposición 3.1, es 0. Dado que el género siempre es mayor o igual que 0 para una superficie orientable, se deduce que dicho valor es el género del nudo.

\Leftarrow) Sea K un nudo con $g(K) = 0$ y sea S la superficie de Seifert asociada a K . Por ser S compacta, orientable con una componente en el borde, el Teorema de clasificación de superficies con borde nos da que S es una esfera con un agujero, que es homeomorfa a un disco en \mathbb{R}^3 . Así pues, K es el nudo trivial. ■

De hecho, el género es un invariante de los nudos tal y como indica la siguiente proposición:

Proposición 3.3. Sean K_1 y K_2 dos nudos equivalentes. Entonces $g(K_1) = g(K_2)$.

Demostración:

En efecto, si consideramos dos nudos K_1 y K_2 con $K_1 \cong K_2$, por la definición de nudos equivalentes, existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva la orientación de forma que $h(K_1) = K_2$. Es más, si F_1 es una superficie de Seifert de género mínimo para K_1 , $h(F_1)$ es una superficie de Seifert para el nudo K_2 con el mismo género que K_1 (véase el Teorema 2.4), lo que prueba que $g(K_2) \leq g(K_1)$. La desigualdad contraria se puede probar intercambiando el papel de K_1 y K_2 en el razonamiento anterior. ■

El género de un nudo tiene una utilidad que surge del siguiente resultado que establece que el género de un nudo es aditivo.

Teorema 3.2. Para dos nudos K_1 y K_2 ,

$$g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2).$$

Demostración:

Sean K_1 y K_2 dos nudos.

Veamos, en primer lugar, que $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$. Sean F_1 y F_2 las superficies de Seifert de género mínimo de K_1 y K_2 respectivamente. Supongamos que F_1 y F_2 son disjuntas, lo cual puede darse si consideramos los nudos lo suficientemente espaciados en \mathbb{R}^3 . Adicionalmente, consideremos una 2-esfera, S , en \mathbb{R}^3 que separe a K_1 de K_2 .

Comprobemos ahora que $\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)$ es arcoconexo. Para ello, pongamos que F es una de las dos superficies, F_1 o F_2 . Por ser F una superficie de Seifert, ésta será compacta, conexa y orientable con una componente en el borde. Es más, el Teorema 2.4 nos permite afirmar que F es homeomorfa a una superficie orientable \tilde{F} con el mismo género que la anterior y con un agujero. Además, la superficie \tilde{F} es del mismo tipo de homotopía que su 1-esqueleto o, equivalentemente, homotópicamente equivalente a un grafo, G . Sea ahora \tilde{H} la (co)homología singular reducida. Aplicando ahora la dualidad de Alexander para cohomología (véase Teorema 2.10) se tiene la siguiente cadena:

$$\tilde{H}_0(\mathbb{R}^3 \setminus F) \simeq \tilde{H}^2(F) \simeq \tilde{H}^2(\tilde{F}) \simeq \tilde{H}^2(G) = H^2(G) = 0,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que G es un CW-complejo de dimensión 1, es decir, $H_2(G) = 0$ y del hecho de que todo primer grupo de homotopía para un grafo es un grupo libre (siendo el abelianizado del grupo fundamental, que es un grupo libre de k copias de \mathbb{Z} , donde k es el número de aristas de G que quedan fuera de un árbol maximal en G), entonces $H^2(G) = \text{Hom}(H_2(G), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(0, \mathbb{Z}) = 0$ (observar que el grupo $\text{Ext}(H_1(G), \mathbb{Z}) = 0$ pues $H_1(G)$ es libre). La referencias que han de tenerse en cuenta para la cadena de igualdades anterior son la Proposición 2.5, el Lema 2.3 y los Teoremas 2.8 y 2.7. Dado que $\tilde{H}_0(\mathbb{R}^3 \setminus F) = 0$, el espacio $\mathbb{R}^3 \setminus F$ resulta ser arcoconexo y, por ello, conexo.

Podemos entonces, haciendo uso de la sucesión de Mayer-Vietoris (véase el Teorema 2.11) aplicada al par $(\mathbb{R}^3 \setminus F_1, \mathbb{R}^3 \setminus F_2)$, probar que $\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)$ es conexo. La sucesión queda como

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^3 \setminus F_1) \oplus H_0(\mathbb{R}^3 \setminus F_2) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^3) \rightarrow 0$$

De hecho, $H_1(\mathbb{R}^3) = 0$, y $H_0(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{Z}$ y acabamos de argumentar que $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus F_1) \oplus H_0(\mathbb{R}^3 \setminus F_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, por lo que sucesión anterior queda como

$$0 \rightarrow H_0(\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

La sucesión se divide por lo que $\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)$ es arcoconexo.

Otra forma de garantizar la arcoconexión de $\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)$ es teniendo en cuenta que la unión de conjuntos arcoconexos con intersección no vacía es un conjunto arcoconexo.

Por tanto, dado un punto en el borde de una de las superficies, pongamos $p \in K_1 = \partial F_1$, podemos definir una curva (continua) que lo una con algún punto en el borde de la otra, pongamos $q \in K_2 = \partial F_2$. Es más, dicha elección podrá hacerse de forma que todos los puntos del grafo de la curva, excepto los puntos inicial y final, de α , estén contenidos en $\mathbb{R}^3 \setminus (F_1 \cup F_2)$.

Podríamos, adicionalmente, suponer que la curva α interseca una sólo vez a la 2-esfera S . En efecto, si el grafo de α cortara dos veces (al menos) a la esfera S , podríamos sustituir la parte del grafo que queda en el interior de la misma por un trozo de camino en la frontera de la misma, como podría ser la geodésica más con menor longitud de arco entre ambos puntos de corte. Una vez hecho esto último podríamos encoger la esfera para asegurarnos de que existe un sólo punto de corte entre el grafo de la curva y S , tal y como se aprecia en la Figura 3.5.

Consideremos ahora una banda delgada alrededor de α , de forma que corte a S sólo en el punto en el que el grafo de α corta a S y, si es necesario, giremos dicha banda con el fin de mantener la orientación con respecto a las dos superficies F_1 y F_2 . El borde de $F_1 \cup F_2$ junto con la banda anterior es el nudo $K_1 \sharp K_2$, ya que S interseca a transversalmente en los dos puntos y por ser S una 2-esfera que separa K_1 de K_2 . La superficie $F_1 \cup F_2$ unida a la

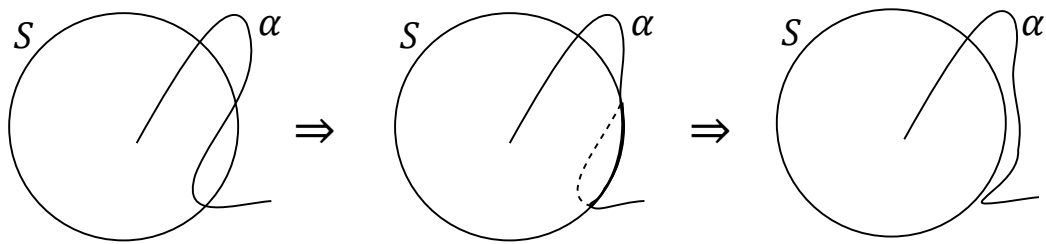


Figura 3.5

banda anterior es una superficie de Seifert para la suma $K_1 \# K_2$ y su género es claramente la suma de los géneros de F_1 y F_2 . Como F_1 y F_2 son superficies de Seifert de género mínimo, tenemos probada la desigualdad $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$.

Para la otra desigualdad, supongamos que F es una superficie de Seifert con mínimo género para el nudo $K_1 \# K_2$ y sea S una 2-esfera que sirva para expresar el nudo $K_1 \# K_2$ como la suma de K_1 y K_2 , es decir, S separa a K_1 de K_2 cortando con su borde a $K_1 \# K_2$ en dos puntos transversalmente. Dicho corte genera un trozo de nudo contenido dentro de S al que llamaremos α_1 y otro fuera de S al que denotaremos por α_2 . También, dado que S corta en dos puntos a $K_1 \# K_2$, trazaremos un camino entre ambos al que llamaremos β , según puede verse en la Figura 3.6.

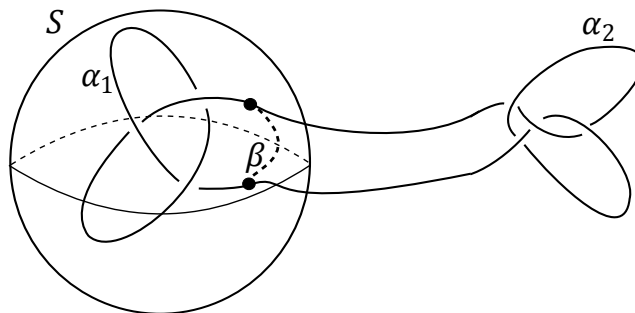


Figura 3.6

Ahora podemos suponer que la inclusión de las dos superficies S y F que se hace en \mathbb{R}^3 es lineal a trozos. De hecho, al tener F a $K_1 \# K_2$ como borde, la esfera S corta al borde de F sólo en dos lugares. Concretamente, lo hace en aquellos puntos en los que el nudo deja de pertenecer a S y, por lo general, la intersección de S con F consistirá, por tanto, en una colección finita de curvas cerradas y simples (es decir, que no se autointersecan) junto con el arco β que une los dos puntos en los que $K_1 \# K_2$ corta a S . En la Figura 3.7 aparece un ejemplo de las curvas cerradas y simples que da como resultado una intersección de S y F . La idea, ahora, es suprimir cada una de dichas curvas cerradas y simples, lo cual se podrá hacer cambiando F .

Por el Teorema 2.12, toda curva cerrada y simple de $F \cap S$ separa S en dos componentes de las cuales, solo una, contiene al arco β . Ahora, definiremos el *interior* de una curva cerrada y simple, C , perteneciente a $F \cap S$, como la componente de $S \setminus C$ que no contiene al arco β .

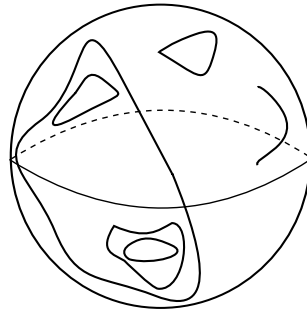


Figura 3.7

Elijamos ahora una curva cerrada y simple, C' , de la intersección $S \cap F$ de forma que su interior no contenga ninguna de las otras curvas cerradas y simples que forman parte de $F \cap S$. Nótese que esto es posible hacerlo ya que hay un número finito de curvas cerradas y simples en $F \cap S$. A continuación, manipulamos la superficie F suprimiendo de F un subespacio homeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$ y tapando los agujeros resultantes con dos discos. La superficie resultante la denotaremos por \hat{F} . Este procedimiento puede verse en la Figura 3.8.

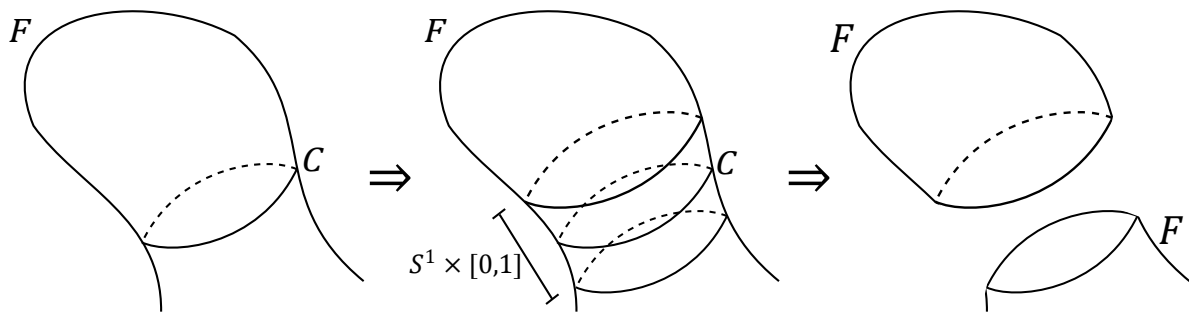


Figura 3.8

Nótese que lo que acabamos de hacer no afecta al resto de círculos en $S \cap F$. Es más, en caso de que sea necesario, elegiremos el subespacio homeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$ en F tan pequeño que no corte a las otras curvas de $F \cap S$, por lo que su eliminación no afectará al resto de círculos de $F \cap S$. Además, obsérvese que la superficie \hat{F} no es conexa ya que, si lo fuera, la manipulación de F llevada a cabo anteriormente conllevaría, como consecuencia, la reducción del género de F . Adicionalmente, \hat{F} también posee al nudo $K_1 \# K_2$ por borde, por lo que \hat{F} también sería conexa, compacta y orientable, siendo pues una superficie de Seifert para el nudo $K_1 \# K_2$ con menor género que F , lo cual es una contradicción con la elección llevada a cabo para F . Por tanto, \hat{F} no es conexa. Por ello, descartaremos la parte de \hat{F} que no contiene al nudo $K_1 \# K_2$, y repetimos el proceso anterior hasta que hayamos eliminado todos los círculos de $F \cap S$, pero en esta ocasión con \hat{F} en lugar de F y así sucesivamente.

Finalmente, terminaremos con una superficie de Seifert, F' , para $K_1 \# K_2$ con el mismo género que F , y con la propiedad de que la intersección de ella con S se corresponda con el arco β . Dado que $\alpha_1 \cup \beta \cong K_1$ y $\alpha_2 \cup \beta \cong K_2$, S separa a F en dos piezas, F'_1 y F'_2 que son superficies de Seifert para K_1 y K_2 respectivamente. Como la suma de los géneros de F'_1 y F'_2 es igual al género de F' y, puesto que, F'_1 y F'_2 son superficies de Seifert para K_1 y K_2

con género no necesariamente mínimo, llegamos a que $g(K_1) + g(K_2) \leq g(F'_1) + g(F'_2) = g(F') = g(K_1 + K_2)$, lo que culmina la prueba. ■

Corolario 3.2.1. *El nudo trivial es el único que posee inverso aditivo. Esto es, si $K_1 + K_2$ es el nudo trivial, entonces K_1 y K_2 están sin anudar.*

Demostración:

Sea K el nudo trivial y supongamos que podemos escribir $K = K_1 \# K_2$ siendo K_1 y K_2 dos nudos. Por la Proposición 3.2 tenemos que $0 = g(K)$ y, por el teorema anterior, $g(K) = g(K_1) + g(K_2)$. Así pues, $g(K_1) = g(K_2) = 0$, de donde se sigue, por la Proposición 3.2 que $K_1 = K_2 = K$. ■

Los dos resultados que figuran a continuación son consecuencia inmediata de lo anterior:

Corolario 3.2.2. *Sea K un nudo no trivial. Entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ la suma conexa de n copias del nudo K será distinta a la suma conexa de m copias del mismo. En particular, un nudo no trivial genera infinitos nudos a partir de la suma conexa consigo mismo.*

Demostración:

Sea K un nudo no trivial y consideremos dos naturales n y m distintos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $n < m$. Supongamos que la suma conexa de n veces K coincide con la suma conexa de m veces el nudo consigo mismo, entonces por el teorema anterior, $g(K) = 0$, una contradicción con que K sea no trivial (véase Proposición 3.2). ■

Corolario 3.2.3. *Todo nudo de género 1 es primo.*

Demostración:

Sea K un nudo con $g(K) = 1$. Supongamos que no es primo, entonces $K = K_1 \# K_2$ para dos nudos K_1 y K_2 no triviales. Ahora, por el teorema anterior es $g(K) = g(K_1) + g(K_2)$, de donde se sigue que $g(K_1) = 0$ o bien $g(K_2) = 0$ ya que $g(K) = 1$ y el género de un nudo es siempre mayor o igual que 0. En consecuencia o K_1 es trivial o lo es K_2 , una contradicción con que K no sea primo. ■

La última consecuencia se refiere a la descomposición de nudos como suma conexa de nudos primos.

Corolario 3.2.4. *Todo nudo puede expresarse como la suma conexa finita de nudos primos.*

Demostración:

Sea K un nudo. Emplearemos inducción sobre el género de K . Ya hemos visto que el nudo trivial no se corresponde con una suma de nudos no triviales y que los nudos con género 1 son primos. Así, supondremos que $g(K) > 1$ para abordar la demostración. Supongamos, además, que este resultado es cierto para nudos con menor género. Si K es primo ya hemos terminado. En caso de que no lo sea, factorizamos K como suma de dos nudos no triviales que, por la aditividad del género (Teorema 3.2), tendrán género estrictamente inferior al de

K . Por inducción, podemos factorizar los dos sumandos en nudos primos, lo que concluye la demostración. ■

Ya tenemos uno de los resultados principales del trabajo que se desprende del estudio previo de las superficies de Seifert pero cabe preguntarse si la descomposición de un nudo como suma de nudos primos es única. En efecto, dicho resultado es cierto y su prueba se basa en el Teorema 2.12:

Teorema 3.3. *Sea K un nudo tal que $K = P\#Q$, con P un nudo primo y K un nudo tal que $K = K_1\#K_2$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1. $K_1 = P\#K'_1$ para algún K'_1 y $Q = K'_1\#K_2$.
2. $K_2 = P\#K'_2$ para algún K'_2 y $Q = K_1\#K'_2$.

Demostración:

La demostración puede consultarse con todo detalle en [6, Th. 7]. ■

El teorema anterior conlleva la siguiente consecuencia:

Corolario 3.3.1. *Si P es un nudo primo de forma que $P + Q = K_1 + K_2$ y $P = K_1$, entonces $Q = K_2$.*

Demostración:

En efecto, por el teorema anterior, tenemos dos posibilidades: que $P\#K'_1 = K_1 = P$ y $Q = K'_1\#K_2$ para algún K'_1 o bien que $K_2 = P\#K'_2$ y $Q = K'_2\#K_1$ para algún K'_2 . En el primero de los casos el género de K'_1 debe ser 0, por lo que K'_1 es el nudo trivial y $Q = K_2$. En el segundo caso es $Q = K'_2\#P = K_2$. ■

Ya podemos pues probar el resultado que justifica la unicidad de la factorización de nudos.

Teorema 3.4. *La descomposición de un nudo como suma conexa de nudos primos es única.*

Demostración:

Supongamos que K puede escribirse como dos sumas conexas diferentes de nudos primos. Podemos, pues, escribir $K = P_1\#\dots\#P_m = Q_1\#\dots\#Q_n$, donde P_i y Q_j son nudos primos para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1, \dots, n$. En virtud del Teorema 3.3, P_1 forma parte de la suma conexa en la que consiste Q_j para algún $j = 1, \dots, n$ o bien de la suma conexa restante de Q_j . En caso de que forme parte de la suma conexa restante de los $n - 1$ Q_j , podemos aplicar el mismo razonamiento que anteriormente y tener que estará presente en Q_j para algún j o bien en la suma de los $n - 2$ Q_j restantes. Por inducción sobre n se llega a que P_1 estará, sin falta, en la suma de algún Q_j pero como Q_j es primo, no puede escribirse como suma de nudos no triviales. Así, existe $j = 1, \dots, n$ de manera que $P_1 = Q_j$ por lo que los podemos cancelar en la suma. Siguiendo dicho procedimiento mediante inducción sobre m se llega a que todas las descomposiciones son iguales y se tiene la unicidad. De hecho, nótese que $n = m$ en la demostración anterior, ya que si no es así algún P_i sería igual a una suma de Q_j lo que es una contradicción con que P_i sea primo. ■

Grafo y Matriz de Seifert

4.1 Grafo de Seifert

En esta sección, vamos a ver cómo se crea un grafo de Seifert a partir de un diagrama de nudo y de su descomposición en círculos de Seifert. En este grafo, cada círculo en nuestro conjunto de círculos de Seifert está representado por un vértice. Dos vértices están conectados por una arista si, y solo si sus correspondientes círculos de Seifert estuvieran originalmente conectados por un cruce en el diagrama de Seifert. Por ejemplo, el grafo de Seifert para el nudo 4_1 , es el siguiente:

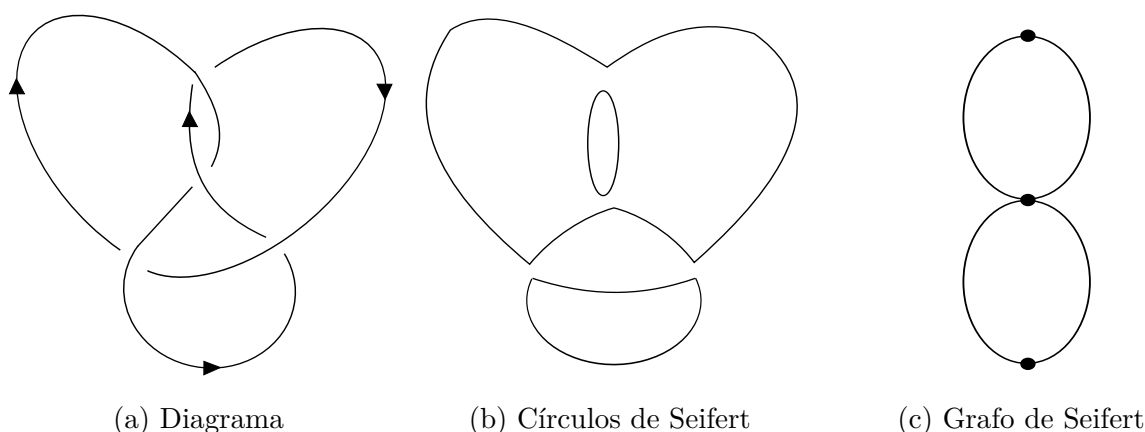


Figura 4.1: Nudo 4_1

Si tenemos el grafo de Seifert y eliminamos las aristas, creamos un grafo conexo sin ciclos, llamado árbol maximal. Al volver a agregar cualquier arista que se haya eliminado, se crea un ciclo en el grafo de Seifert. Este ciclo en el grafo corresponde a un bucle en la superficie de Seifert del nudo.

Teorema 4.1. [2] *El conjunto de bucles en la superficie de Seifert obtenido de los ciclos en el grafo de Seifert por el método descrito anteriormente forma una base para el primer grupo de homología para la superficie de Seifert del nudo.*

Continuando con el ejemplo del nudo 4_1 , encontramos que cuando eliminamos las aristas del grafo de Seifert, nuestro árbol maximal consiste en tres vértices alineados. Agregar las aristas eliminadas una a una nos da dos ciclos: uno entre los dos vértices superiores y otro entre los dos vértices inferiores. Estos corresponden a un bucle a entre el nivel superior y el principal de la superficie de Seifert, y un bucle b entre el nivel de la base y el principal de la superficie de Seifert (Figura 4.2).

4.2 Matriz de Seifert

Como las superficies de Seifert para nudos y enlaces son orientables por construcción, éstas dispondrán de dos lados que podemos considerar como lados positivo y negativo. Podemos hacer que estos lados sean distinguibles al engordar la superficie con algún $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para no variar la homología de la superficie. Entonces, si

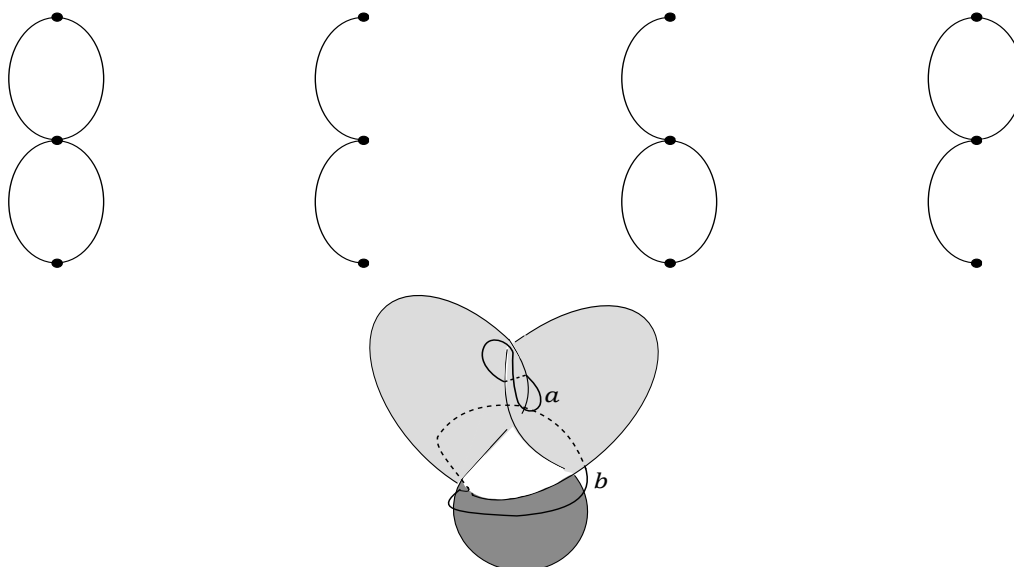


Figura 4.2: Aquí podemos ver la obtención de los bucles base del grafo de Seifert. Arriba: De izquierda a derecha, primero vemos el grafo Seifert de la figura 4.1. El segundo es este grafo con algunos bordes eliminados para crear el árbol maximal. Estos bordes se agregan individualmente para crear los siguientes dos grafos representados (Ciclo 1 y Ciclo 2). Abajo: Podemos ver los bucles obtenidos al agregar bordes que corresponden a una base para el primer grupo de homología en la superficie de Seifert.

nuestra superficie original es F , $F \times \{0\}$ ahora representa el lado negativo de F y $F \times \{\epsilon\}$ representa el lado positivo. Para cualquier bucle l de nuestra superficie F , denotamos por l^+ al bucle l que se encuentra en el lado positivo de F , es decir, l^+ será el bucle de l que se sitúa en $F \times \{\epsilon\}$. Para poder definir la matriz de Seifert solo nos falta definir antes qué es el número de enlace.

Definición 4.1. *Considere un diagrama de un enlace orientado de 2 componentes, L , con componentes del enlace K_1 y K_2 . De los cruces donde K_1 cruza K_2 o K_2 cruza K_1 , hay dos tipos como se muestra en la Figura 4.3.*

*Para cada cruce, c entre K_1 y K_2 , sea $\epsilon(c)$ el número asignado al cruce de su tipo como se muestra en la Figura 4.3. Entonces el **número de enlace** de nuestro enlace L es*

$$lk(K_1, K_2) = \sum_c \epsilon(c)$$

Ya estamos en condiciones de dar una definición de matriz de Seifert.

Definición 4.2. *Sea F la superficie de Seifert de un nudo con n bucles l_1, l_2, \dots, l_n que forman una base para el primer grupo de homología de F . Entonces la **matriz de Seifert** es una matriz $n \times n$, donde los elementos de M son los dados por $a_{ij} = lk(l_i, l_j^+)$.*

Definición 4.3. *Sea M una matriz de Seifert. Entonces la **matriz** M es **S-equivalente** a cada una de las siguientes matrices*



Figura 4.3: Izquierda: un cruce con la fecha que cruza por encima hacia la izquierda contribuye -1 a la suma utilizada para calcular los números de enlace. Derecha: un cruce con la flecha que cruza por encima hacia la derecha contribuye $+1$ a la suma utilizada para calcular los números de enlace

$$\left[\begin{array}{cccc} & & * & 0 \\ & M & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] y \left[\begin{array}{ccc} & & 0 & 0 \\ & M & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Téngase en cuenta que aunque solo hemos definido una forma de ampliar matrices, esto define automáticamente una forma de reducir matrices, ya que cada una de estas matrices más grandes es S -equivalente a la matriz reducida M .

Definición 4.4. Sean S_1 y S_2 dos superficies. La **operación de tubería** consiste en eliminar un disco de cada superficie y agregamos un “tubo” entre esos bucles, creando así una nueva superficie.

Teorema 4.2. [11] Operando superficies equivalentes dan matrices S -equivalentes.

Demostración:

Para demostrar que la operación de superficies equivalentes da matrices S -equivalentes, es suficiente demostrar que las matrices formadas a partir de superficies que difieren por una operación de tubería son S -equivalentes. Sea M la matriz de Seifert de la superficie F y sea \hat{F} la superficie bajo una operación de tubería. Luego hay una base para el primer grupo de homología de \hat{F} que contiene la base para $H_1(F)$ como un subconjunto. Sea m el meridiano del tubo y l un bucle en \hat{F} que corre a lo largo de la longitud del tubo. Luego, la base de $H_1(F)$ junto con los bucles l y m forman una base para el primer grupo de homología de \hat{F} . Luego, la nueva matriz de Seifert permanecerá sin cambios aparte de dos filas y columnas adicionales debido a los números de enlace de los bucles con los nuevos elementos de la base.

Para calcular estos números de enlace, primero veamos cómo nuestros nuevos bucles m y l se enlazan entre sí. Tomamos el exterior del tubo como el lado positivo de la superficie, entonces es obvio que $lk(m, m^+) = 0$ y $lk(m, l^+) = 0$. Como el enlace l, m^+ tiene el bucle longitudinal que atraviesa el centro de m^+ podemos ver que $lk(l, m^+) = 1$. El número de enlace de l, l^+ depende de nuestra elección de l , ya que un bucle que gira muchas veces alrededor del tubo tendrá un número de enlace diferente al de uno que no. Esto también es complicado ya que no sabemos cómo se comporta l fuera del tubo. Sin embargo, podemos elegir un bucle l tal que $lk(l, l^+) = 0$ por lo siguiente: elegimos un bucle inicial l y suponemos que $lk(l, l^+) = \lambda$. Luego, el circuito $l - \lambda m$ también recorre la longitud del tubo y, además,

$$\begin{aligned}
 lk(l - \lambda m, (l - \lambda m)^+) &= lk(l, (l - \lambda m)^+) - lk(\lambda m, (l - \lambda m)^+) \\
 &= lk(l, (l - \lambda m)^+) - \lambda lk(m, (l - \lambda m)^+) \\
 &= lk(l, l) - \lambda lk(l, m^+) - \lambda lk(m, l) - \lambda^2 lk(m, m^+) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Entonces podemos reemplazar nuestro bucle original l con el nuevo bucle $l - \lambda m$ para obtener nuestro número de enlace deseado.

Tomamos a_1, \dots, a_n como la base de $H_1(F)$. Entonces, como el bucle m no está en F , $lk(a_i, m^+) = 0$ y de manera similar $lk(m, a_i^+) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Sin embargo, como no sabemos cómo se encuentran los elementos básicos a_i en F , no podemos saber $lk(a_i, l^+)$ o $lk(l, a_i^+)$. Sea $lk(l, a_i^+) = \lambda_i$, entonces tenemos la siguiente matriz de Seifert para \hat{F} :

$$\begin{bmatrix}
 & & & * & 0 \\
 & M & & \vdots & \vdots \\
 & & & * & 0 \\
 \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & 0 & 1 \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, podemos hacer un cambio de base para reemplazar todo λ_i por cero. Para nuestro cambio de base reemplazamos cada generador a_i por $b_i = a_i - \lambda_i m$. Esto no cambia el número de enlace de los generadores $lk(b_i, b_j^+)$ el cual es cero, pero da que $lk(l, b_i^+) = 0$ (que puede encontrarse mediante un cálculo similar al anterior). Esto nos da la siguiente nueva matriz de Seifert:

$$\begin{bmatrix}
 & & & * & 0 \\
 & M & & \vdots & \vdots \\
 & & & * & 0 \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

que es una de nuestras matrices S -equivalentes agrandadas. De ello se deduce que las matrices logradas a través de la compresión de una superficie también son S -equivalentes. ■

El teorema anterior indica que los nudos equivalentes tienen matrices equivalentes, por lo que parece natural aplicar invariantes de matriz a la matriz de Seifert. Esto nos permite extraer información esencial de la matriz para comparar sin intentar comparar sus matrices directamente. Ahora nos centraremos en algunos invariantes conocidos de la matrices: *signatura* y *determinante*.

Signatura

Sea K un nudo, entonces la *signatura* de K , denotada como $\sigma(K)$ es $\sigma(M + M^T)$ donde M es cualquier matriz de Seifert para K .

Usando álgebra lineal básica, la *signatura* nos proporciona un invariante de nudo, ya que las matrices de Seifert equivalentes producirán la misma *signatura*.

Ejemplo 4.1. Vamos a calcular la signatura del nudo 4_1 . Para hacer esto, primero debemos encontrar su matriz de Seifert. Hemos encontrado una base para este grupo de homología, y estos bucles se muestran en la superficie de Seifert para el nudo 4_1 en la Figura 4.2. Así, para calcular la matriz de Seifert para el nudo 4_1 , solo necesitamos encontrar cómo estos dos bucles de base se enlazan entre sí cada uno. Como tenemos dos bucles básicos, nuestra matriz Seifert es una matriz de 2×2 . De la Figura 4.2 encontramos que los enlaces en cuestión son los siguientes en la Figura 4.4, resultando la matriz de Seifert siguiente:

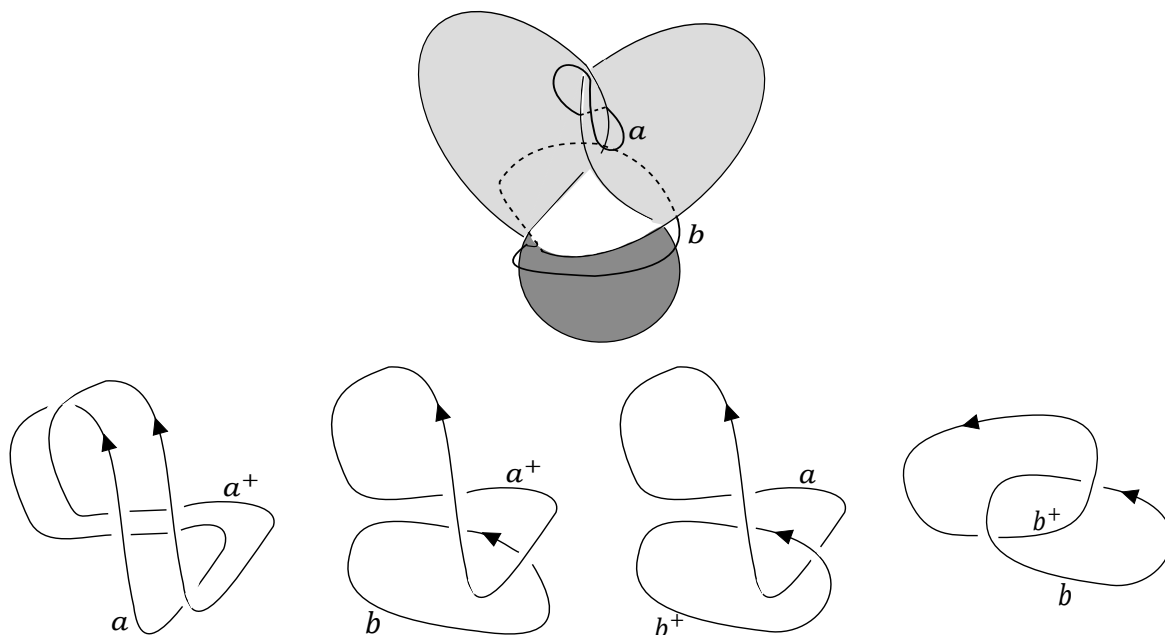


Figura 4.4: Arriba: la superficie de Seifert con bucles de base. Abajo: enlaces con componentes de bucle base utilizados para calcular la matriz de Seifert para el nudo 4_1 . Tenga en cuenta que el bucle a corresponde al bucle superior en la Figura 4.2, mientras que el bucle b corresponde al bucle inferior.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La signatura del nudo 4_1 es la signatura de $M + M^T$ donde M es la anterior matriz de Seifert. Así que:

$$\begin{aligned} \sigma(K) &= \sigma \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \sigma \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Determinante

Definición 4.5. Sea K un nudo, entonces el **determinante** de K , denotado $\det(K)$ es $|\det(M + M^T)|$ donde M es cualquier matriz de Seifert para K .

Esto define otro invariante de nudo, pues, por álgebra lineal básica, matrices equivalentes producen el mismo determinante.

Ejemplo 4.2. Usaremos el cálculo de la matriz de Seifert anterior para calcular el determinante del nudo 4_1 . Como determinamos en el ejemplo de la signatura, la matriz de Seifert, M para el nudo 4_1 es la siguiente.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces el determinante de nuestro nudo es:

$$\begin{aligned} |\det(M + M^T)| &= \left| \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| \end{aligned}$$

y así $\det(K) = 5$.

Al igual que pasaba con el género de un nudo, la signatura y el determinante son invariantes aditivos con respecto a la suma conexa de nudos.

Teorema 4.3. Sean K_1 y K_2 nudos, entonces:

1. $\sigma(K_1 \# K_2) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$
2. $\det(K_1 \# K_2) = \det(K_1) + \det(K_2)$

Demostración:

Probamos ambas partes de este teorema al mostrar un hecho simple acerca de la matriz de Seifert para una suma conexa de nudos.

Sean F_1 y F_2 superficies de Seifert de K_1 y K_2 , respectivamente, con género mínimo, y M_1 y M_2 sus correspondientes matrices de Seifert. Sea F la superficie de Seifert de la suma conexa de $K_1 \# K_2$, obtenida mediante la adición de un borde de un disco rectangular a cada F_1 y F_2 , de modo que el disco intersecte estas superficies solo en su límite. Entonces, una base para el primer grupo de homología de F es una unión de las bases para F_1 y F_2 . De esta unión obtenemos la siguiente matriz de Seifert, M para $K_1 \# K_2$:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Tomando la signatura y determinante M da el resultado deseado. ■

Polinomio de Alexander

En este capítulo vamos a dar una introducción al polinomio de Alexander. Utilizaremos las herramientas proporcionadas en las secciones anteriores para dar nuestra primera definición del polinomio de Alexander.

Definición 5.1. Dado el nudo K , el **polinomio de Alexander**, denotado por $\Delta(K)$ viene dado por $\Delta(K) = \det(t^{1/2}M - t^{-1/2}M^T)$ donde M es la matriz de Seifert del nudo K .

El polinomio de Alexander es un invariante de nudo, ya que nudos equivalentes producen el mismo polinomio.

Ejemplo 5.1. Vamos a calcular el polinomio de Alexander del nudo 4_1 .

Como hemos visto antes, la matriz de Seifert para el nudo 4_1 es

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

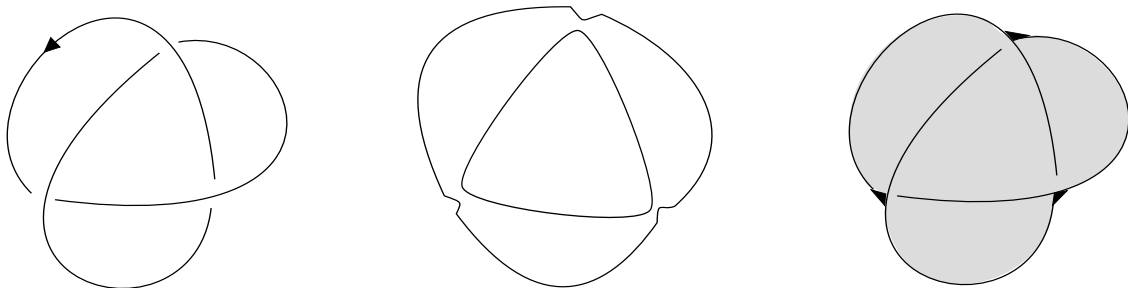
Entonces vemos que el determinante es

$$\begin{aligned} \det(t^{1/2}M - t^{-1/2}M^T) &= \det\left(t^{1/2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - t^{-1/2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} -t^{1/2} + t^{-1/2} & t^{1/2} \\ -t^{-1/2} & t^{1/2} - t^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, nuestro polinomio de Alexander será

$$\Delta(4_1) = (-t^{1/2} + t^{-1/2})(t^{1/2} - t^{-1/2}) + (t^{1/2}t^{-1/2}) = -t + 1 + 1 - t^{-1} + 1 = -t + 3 - t^{-1}.$$

Ejemplo 5.2. (Nudo de trébol) Empezando con el diagrama del nudo, construimos el diagrama de Seifert y después la superficie de Seifert.



A continuación, encontramos los ciclos del grafo de Seifert correspondientes a los elementos básicos del primer grupo de homología. Esto se puede ver en la Figura 5.3.

Usando los números de enlace de los bucles de la Figura 5.4 obtenemos la siguiente matriz de Seifert para el nudo de trébol

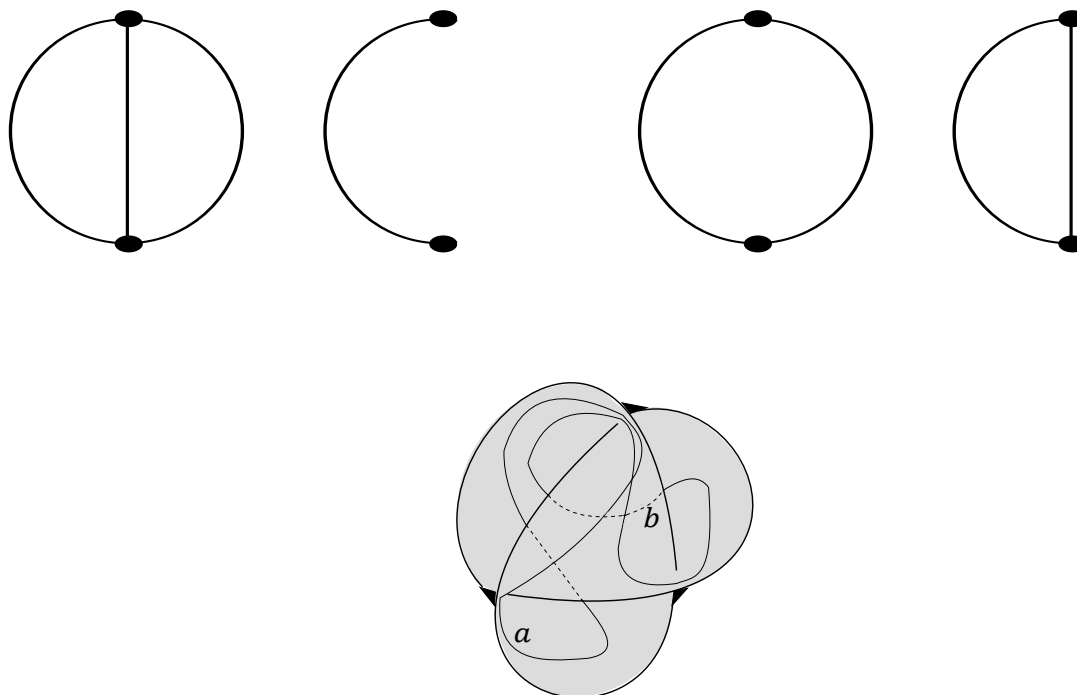


Figura 5.3: Aquí podemos ver la obtención de los bucles base del grafo de Seifert del nudo trébol. Arriba: De izquierda a derecha, primero vemos el grafo de Seifert del nudo trébol. El segundo es este grafo con algunos bordes eliminados creando así el árbol maximal. Estos bordes se agregan individualmente para crear los siguientes dos grafos representados. Abajo: Vemos los ciclos obtenidos de la adición de bordes corresponden a bucles base para el primer grupo de homología de la superficie de Seifert.

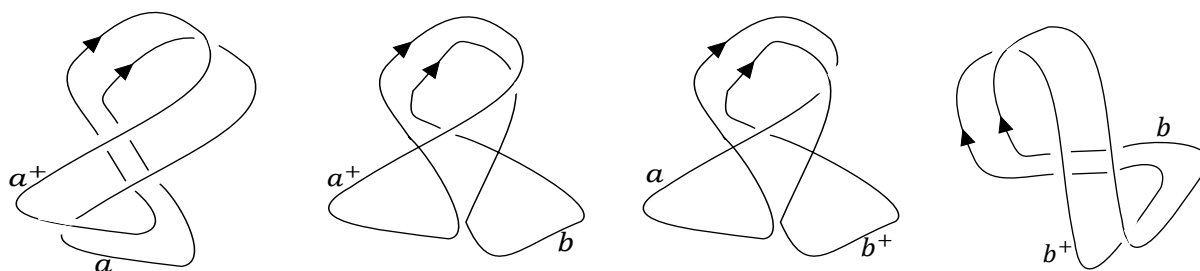


Figura 5.4: Estos son los bucles de base para el primer grupo de homología de una superficie de Seifert para el nudo trébol, con los que calculamos los números de enlace para la matriz de Seifert.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego encontramos el polinomio de Alexander calculando $\det(t^{1/2}M - t^{-1/2}M^T)$ para nuestra matriz de Seifert M .

$$\begin{aligned} \det(t^{1/2}M - t^{-1/2}M^T) &= \det\left(t^{1/2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - t^{-1/2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} -t^{1/2} + t^{-1/2} & -t^{1/2} \\ t^{-1/2} & -t^{1/2} + t^{-1/2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces el polinomio de Alexander del nudo de trébol es:

$$\Delta(3_1) = (-t^{1/2} + t^{-1/2})^2 - (-t^{1/2})(t^{-1/2}) = t + t^{-1} - 2 + 1 = t - 1 + t^{-1}.$$

Podemos ver que los dos polinomios de Alexander obtenidos en estos ejemplos son distintos. Esto muestra que los dos nudos 3_1 y 4_1 son diferentes.

Vamos a hallar ahora el polinomio de Alexander de una manera distinta, a partir de la matriz de Seifert, que la calcularemos también de forma diferente.

Para hallar la matriz de Seifert, comenzamos con una superficie orientable, de esta forma, cada banda tiene que tener un número par de giros.

Etiquetamos las bandas unidas al disco base con la notación a_1, \dots, a_n . Creamos una matriz $n \times n$ que llamaremos V en la que cada fila y columna estarán etiquetadas con a_1, \dots, a_n . El número de giros completos de cada banda determina a diagonal principal de la matriz, es decir, si la línea que representa la banda a_1 tiene orden $+6$, entonces el elemento v_{11} de V será 3.

El número de veces que una banda cruza a otra determina los otros elementos de la matriz, es decir, a medida que nos alejamos del disco base, si la banda a_1 cruza la banda a_2 de izquierda a derecha m veces, entonces el elemento v_{12} de V será m . Si cruza de derecha a izquierda m veces, entonces v_{12} será $-m$.

Si una banda pasa solo por debajo de otra banda, o si las bandas no se cruzan entre sí, entonces los elementos correspondientes de la matriz son cero.

Definición 5.2. Una matriz con sus entradas rellenas de la manera descrita anteriormente se denomina **matriz de Seifert** para una superficie Seifert dada F .

Teorema 5.1. [9] Si V es una matriz Seifert para una superficie Seifert de un nudo K , entonces podemos obtener su polinomio Alexander mediante la fórmula:

$$\Delta_K(t) = \det(V - tV^T)$$

(V^T denota la traspuesta de la matriz V)

Para familiarizarnos un poco con este otro método de cálculo, vamos a aplicarlo al nudo 4_1 .

Ejemplo 5.3. Polinomio de Alexander para el nudo 4_1 .

La superficie de Seifert del diagrama del nudo 4_1 consiste en tres discos y cuatro bandas. Uno de los discos está unido al otro por dos bandas con un giro a la izquierda cada una y el otro disco está unido a uno de los anteriores por dos bandas con un giro a la derecha cada una. Nivelamos la superficie. Representamos esto por tres círculos, unidos dos a dos por dos líneas cada uno, dos de orden -1 y las otras dos de orden $+1$.

Elegimos el círculo de la izquierda como nuestra base. Llamamos a al círculo superior y b al inferior. Los dos círculos unidos al círculo base se pueden suprimir y agregar los

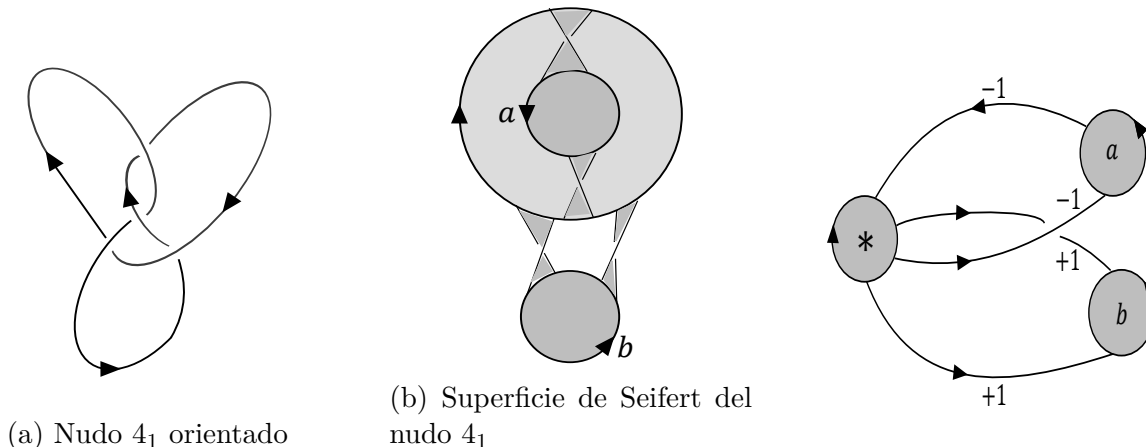


Figura 5.5

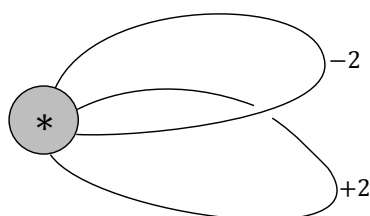


Figura 5.6

órdenes de las líneas para dejar que dos líneas vuelvan al círculo base de orden -2 y $+2$ (Figura 5.6).

Si existiese una línea central se reemplazaría por dos líneas cruzadas de orden $+1$.

Como a pasa sobre b de derecha a izquierda el elemento v_{12} de la matriz V es 1 . Como cada banda tiene un bucle completo, uno negativo y otro positivo, tenemos $v_{11} = -1$ y $v_{22} = 1$. Por lo tanto la matriz de Seifert es:

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, el polinomio de Alexander usando el Teorema 5.1 es:

$$\begin{aligned} \Delta_{4_1}(t) = \det(V - tV^T) &= \det \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{vmatrix} -1+t & 1 \\ -t & 1-t \end{vmatrix} \\ &= -t^2 + 3t - 1. \end{aligned}$$

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado las superficies de Seifert de un nudo, así como algunos de los invariantes de nudo derivados de las mismas.

Si bien el método de coloreamiento en forma de ajedrez constituye una forma sencilla de determinar una superficie que posea por borde a un nudo o enlace, este no garantiza ciertas propiedades de la superficie obtenida. Por ejemplo, puede suceder que la superficie resultante no sea compacta, lo cual hace imposible aplicar el Teorema de clasificación de superficies para determinar ante qué superficie estamos exactamente. Surge, así, la necesidad de dar con un procedimiento que construya superficies con ciertas propiedades, como es el caso de la compacidad. Concretamente, es el algoritmo de Seifert el que nos permite la construcción de superficies compactas, conexas que, además, son orientables. Además, proporcionamos resultados que, apoyándose en el Teorema de clasificación de superficies, nos proporcionan una clasificación de cualquier superficie de Seifert, tanto si procede de un nudo, como si viene dada por un enlace dividido o no. El siguiente paso es preguntarse sobre la unicidad de la superficie de Seifert de un nudo o enlace. Resulta que dada una superficie de Seifert sí que es único el nudo o enlace que proporciona dicha superficie a partir del algoritmo previamente citado. Sin embargo, para un mismo nudo puede haber varias superficies de Seifert; basta con manipularlo hasta obtener otro equivalente. Este último hecho motiva el hecho de la definición de género de un nudo (o enlace). Dicho número resulta ser un invariante, es decir, distingue dos nudos que tengan distinto género. Además, respeta la suma en el sentido de que el género de la suma conexas de nudos es la suma de los géneros de ambos nudos. Esta línea de trabajo culmina con la prueba de que todo nudo descompone de manera única como suma conexas finita de nudos primos.

Tal y como se ha indicado anteriormente, es posible obtener una superficie de Seifert a partir del diagrama de un nudo o enlace y, generar un grafo de Seifert sustituyendo los círculos de Seifert por puntos y añadiéndole aristas si esos círculos de Seifert estuvieran conectados en el diagrama. De esta forma presentamos cierta equivalencia entre superficies de Seifert y grafos. La orientabilidad de una superficie de Seifert nos permite calcular la matriz de Seifert, y se puede demostrar que nudos equivalentes poseen matrices equivalentes. Por tanto, podemos aplicar invariantes de la matriz a la matriz de Seifert. En nuestro caso hemos aplicado la signatura y el determinante y podemos ver que, al igual que el género de un nudo, ambas resultan ser un operador aditivo.

Finalmente, definimos el polinomio de Alexander a partir de las matrices de Seifert, y aplicamos dos métodos distintos para calcular el del nudo 3_1 y 4_1 . Al ser estos polinomios distintos, llegamos a que los nudos no son equivalentes.

Bibliografía

- [1] C.C. Adams, *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, American Mathematical Soc., 2004.
- [2] P. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] J.F. Gálvez Rodríguez, J.L. Rodríguez Blancas, *Manipulación y clasificación de superficies compactas*, Bubok Publishing S.L., 2019.
- [4] J.F. Gálvez Rodríguez, M.A. Sánchez Granero, *Topología resuelta*, Bubok Publishing S.L., 2016.
- [5] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001, <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [6] R. Hedegaard, *Existence and Uniqueness of Knot Factorizations*, <https://www.math.ku.dk/english/research/tfa/top/paststudents/ms-projects/heedegaard.MS-project.2009.pdf>.
- [7] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Reverté S.A., 1986.
- [8] W.R. Lickorish, *An introduction to knot theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] E. Long, *Topological invariants of knots: three routes to the Alexander Polynomial*, Manchester University, 2005.
- [10] M.M. Stadler, *Topología Algebraica*, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 2015.
- [11] R.T. McNeill, *Knot Theory and the Alexander Polynomial*, (Doctoral dissertation, Smith College, Northampton, Mass.), 2008.
- [12] H. Seifert, *Über das geschlecht von knoten*, Mathematische Annalen, **110** (1935), 571-592.
- [13] M. Wang, *Introduction to Seifert surfaces and their properties*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.639.3970&rep=rep1&type=pdf>.
- [14] *Encyclopedia of Mathematics*, https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Knot_table