
OLOIDES CONSTRUCCIÓN CONVEXA Y PARAMETRIZACIÓN

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor:

Guillermo Muñoz Sánchez

Tutor:

Francisco García Arenas

GRADO EN MATEMÁTICAS



SEPTIEMBRE, 2019
Universidad de Almería

Índice general

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Geometría de Convexos: Hiperplanos Soporte y Envolvertes Convexas | 3 |
| 2.1. | Primeras definiciones y resultados | 3 |
| 2.2. | Envolvertes Convexas | 4 |
| 2.3. | Hiperplanos Soporte | 9 |
| 3 | Construcción del oloide. Parametrización | 15 |
| 3.1. | Premisas: circunferencias generadoras y el oloide | 15 |
| 3.2. | Planos soporte de los discos | 16 |
| 3.3. | Determinación del oloide por medio de coordenadas | 20 |
| 3.4. | El grupo de movimientos invariantes del oloide | 22 |
| 3.5. | El oloide como superficie regular. Parametrizaciones | 25 |
| 3.6. | Homeomorfismo entre el cilindro y el oloide regular | 28 |
| 4 | Construcciones basadas en el oloide | 31 |
| 4.1. | Oloide tras alteración de radios | 31 |
| | Radios r iguales con $r \neq 1$, 31.— Radios distintos, 31. | |
| 4.2. | Aumento de la distancia entre circunferencias | 34 |
| 4.3. | Otras Ideas | 35 |
| 5 | Conclusión (o Sobre Utilidades) | 37 |
| | Bibliografía | 39 |

Abstract in English

The oloid is a geometry object defined as the convex hull of two orthogonal circles such that each one passes through the center of the other. This surface has quite a geometric, phisycal, artistic and egeineering beauty, and its properties are as interesting as useful in those fields.

In this document, a map of the oloid is defined using rules of convex geometry whith the consequences of this map studied later as well. Likewise, it will be demonstrated that the oloid is not a smooth surface at all, so it will be defined an equivalent surface suitable for differential analysis that will also be homeomorphic to the bounded cylinder.

A posterior chapter will be dedicated to define other surfaces similar to the olid, being some of them the convex hulls of two circles separated by a certain distance or two circles with different radius.

Resumen en español

El oloide es un objeto geométrico definido como la envolvente convexa de dos circunferencias ortogonales tales que cada una pasa por el centro de la otra. Tal objeto resulta de una belleza geométrica, física, artística e ingenieril asombrosa, y sus propiedades resultan interesantes y útiles en cualquiera de los ámbitos anteriores.

En este trabajo se define, mediante nociones relacionadas con la geometría convexa, una parametrización para tal superficie a la par que se estudian las consecuencias de su cálculo. Así mismo, se demostrará que, a pesar de que el oloide no puede considerarse una superficie regular, podemos definir (basándonos en las reglas de esta última propiedad) una superficie equivalente al oloide que sí puede considerarse apta para su estudio diferencial y que resulta homeomorfa al cilindro.

Se dedicará posteriormente un capítulo a definir otras superficies similares al oloide, como la envolvente convexa de dos discos separados por cierta distancia o de distinto radio.

Introducción

En cuanto a escribir otro libro sobre geometría en la Edad Media para reemplazar al de Euclides, antes se les hubiera ocurrido componer otro Nuevo Testamento.

Augustus De Morgan

Geometría y topología. Medida de la Tierra y Ciencias de la Forma. Las ramas matemáticas que mejor lucen apellidos tales como algebraica, diferencial, tropical... y que unen y fortifican los resultados de este documento.

Frente a las técnicas puras del análisis vectorial o tensorial o a los resultados altamente aplicables de la estadística y la probabilidad, la geometría y la topología sufren de una identificación nada inmediata en los quehaceres de la ingeniería o la física. Si bien no faltan papeles protagonistas entre los espacios vectoriales, los movimientos afines y los triedros de Frenet, lo cierto es que el estudio de objetos en espacios euclídeos y los resultados sobre su clasificación no responden a primera vista a preguntas más allá de lo intrínseco del asunto. A sabiendas de que no es un pensamiento real, geómetras y topólogos bromean respondiendo un “para nada” a la pregunta “¿y para qué sirve esto?” en referencia a sus juguetes, pero lo cierto es que los resultados geométricos y topológicos obedecen la ley de las matemáticas puras de estar preparados para cualquier necesidad. Teoremas sobre polígonos convexos y vectores permitieron al algoritmo Simplex funcionar como tal era su propósito gracias al hecho de estar preparados para la llegada de la útil idea, y el cálculo de áreas por medio de integración resuelve el problema de las funciones de distribución continuas y su consecuente función de densidad en el cálculo de probabilidades.

La doble justificación del estudio por la simple necesidad del estudio, así como la posibilidad de una aplicación esencial, motiva especialmente el análisis del objeto geométrico que en estas páginas se presenta. El oloide, bautizado así por Paul Schatz en la primera mitad del S. XX, se define como la envolvente convexa de dos circunferencias ortogonales que pasan cada una por el centro respectivo de la otra. Una superficie interesante, de complicado análisis y propiedades geométricas y físicas la mar de impresionantes. Las proposiciones presentadas en este documento se centran en la definición de una parametrización mediante cartas de dicha superficie que permita con ello su estudio desde el punto de vista de la geometría diferencial. El primer capítulo de este trabajo introduce, entonces, las premisas necesarias sobre las que se asienta la construcción de dicha parametrización, siendo estas nociones simples pero útiles de geometría convexa y construcción de objetos convexos (al fin y al cabo, el sintagma **envolvente convexa** resulta una pista demasiado relevante como para enfocarlo de otra forma). Una vez asentadas las premisas, procederemos en el siguiente capítulo a construir y justificar una parametrización mediante cartas del objeto en sí. Por último, serán analizadas algunas propiedades relacionadas con dicha parametrización, tales como la continuidad en puntos concretos o la diferenciabilidad del objeto, permitiéndonos así definir dos oloides “distintos” según el enfoque que queramos dar al estudio del mismo.

Geometría de Convexos: Hiperplanos Soporte y Envolvertes Convexas

Me apresuré a terminar mi trabajo. Con muchos esfuerzos coloqué en su sitio la última piedra y la cubrí con argamasa. Volví a levantar la antigua muralla de huesos contra la nueva pared. Durante medio siglo, nadie los ha tocado...

El Barril de Amontillado - Edgar Allan Poe

En matemáticas, la convexidad es la semejanza visual que presenta un objeto geométrico a la curva, superficie o hipersuperficie esférica de su espacio. Intuitivamente, decimos que un objeto es convexo cuando presenta una inclinación curva hacia el observador en su forma. La caracterización de la convexidad es elegante, pero depende tanto de la naturaleza del conjunto a analizar como de la perspectiva de quien lo observa. Así, decimos que una curva es convexa cuando presenta en su comportamiento geométrico una forma sobresaliente (tal como sería una elevación en el suelo).

Sin embargo, esta resulta, bajo dicha idea, una definición no solo de carácter local, sino también ambigua e interpretable. Al fin y al cabo, un cambio de referencia adecuado puede convertir la convexidad de un sector de curva en concavidad (su concepto opuesto), por lo que resulta más interesante una definición orientada a aquello que determina la curva en su propio espacio. El enfoque es extensible a superficies e incluso a hipersuperficies.

2.1 Primeras definiciones y resultados

Definición 2.1. Sean x, y dos puntos pertenecientes al espacio euclídeo \mathbb{R}^n , se define el **segmento** formado por dichos puntos como el conjunto:

$$\overline{xy} := \{\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda \in [0, 1]\}.$$

Esto es, los puntos posicionados en el camino del vector de origen x y destino y . Lo que da pie a la definición más adecuada:

Definición 2.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, decimos que este es **convexo** si contiene a todos los segmentos formados por cada par de puntos contenido en él.

Tal definición caracteriza el comportamiento del objeto geométrico mediante los dos sectores que determina en el espacio en el cual se define (a un lado y a otro de la curva o superficie), salvando así la ambigüedad que resulta a la hora de tener en cuenta la perspectiva visual.

Proposición 2.1. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos **convexos**, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es **convexo**.

Demostración:

En efecto, sean $x, y \in A \cap B$, por la definición 2.2 se tiene que $\overline{xy} \in A \cap B$



Proposición 2.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto **convexo**, entonces \overline{A} es también **convexo**.*

Demostración:

Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{U}(A, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, A) < \epsilon\}$$

que, suponiendo d la distancia euclídea por ser \mathbb{R}^n espacio euclídeo, recibe el nombre de **entorno tubular abierto de A con radio ϵ** . Demostraremos que este conjunto es convexo. En efecto, supondremos $x, y \in \mathcal{U}(A, \epsilon)$ y supondremos también $a, b \in A$ tales que se cumple $d(x, a), d(x, b) < \epsilon$. Sean entonces $z \in \overline{xy}$ y $c \in \overline{ab}$, se tiene que $c \in A$ por ser A convexo. De aquí se cumple que:

$$d(z, c) = |z - c| = |\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(x - b)| \leq \lambda|x - a| + (1 - \lambda)|y - b| < \lambda\epsilon + (1 - \lambda)\epsilon = \epsilon$$

con $\lambda \in [0, 1]$. Como $z \in \mathcal{U}(A, \epsilon)$, se tiene que tal conjunto es convexo.

Finalmente, como tenemos que $\overline{A} = \{t \in \mathbb{R}^n; d(t, A) = 0\}$, entonces $\overline{A} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{U}(A, \epsilon)$, lo cual es convexo por la definición 2.1. ■

Estas propiedades nos permitirán construir conjuntos convexos mediante las usuales operaciones de conjuntos y sus axiomas topológicos del espacio euclídeo. Antes que nada, es necesario construir un sistema más sencillo de conjuntos convexos que sirvan como ingrediente atómico de lo que esperamos obtener de forma más general con la convexidad.

2.2 Envoltentes Convexas

Definición 2.3. *Sean $x, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ puntos del espacio euclídeo, decimos que x es **combinación lineal convexa** de x_1, \dots, x_n si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tales que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.*

Lema 2.1. *El conjunto de las combinaciones lineales convexas de n puntos de un espacio euclídeo es un conjunto convexo.*

Demostración:

Podemos suponer que dichos puntos no están alineados de ninguna forma. De existir en nuestro conjunto, digamos, tres puntos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tales que están alineados, podemos suponer que y se encuentra entre x y z . Esto es, y es combinación lineal convexa de sendos puntos y podemos descartarlo. Suponiéndolos entonces no alineados, sean a, b puntos del conjunto del lema y sea $c \in \overline{ab}$, es claro que c puede escribirse como combinación lineal convexa de los puntos definidos en el lema. Esto es, el conjunto es convexo. ■

Llamaremos a este conjunto **envolvente convexa** de la familia de puntos dada. En general, llamaremos **envolvente convexa de A** al conjunto de todas las combinaciones convexas que puedan hacerse con familias finitas de puntos de A . Lo denotaremos como $C(A)$. Las envolventes convexas en los espacios euclídeos forman polígonos, poliedros e hiperobjetos en dimensiones mayores conocidos como polítopos.

Podemos demostrar que dicho conjunto es equivalente a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A . En efecto, demostrando que $C(A)$ es convexo, dicha intersección queda incluida dentro de la propia envoltente. Resulta inmediato ver que si $A \subset B$ entonces $C(A) \subseteq C(B)$, por lo que si supusiéramos B convexo, nos faltaría un último resultado para demostrar la premisa.

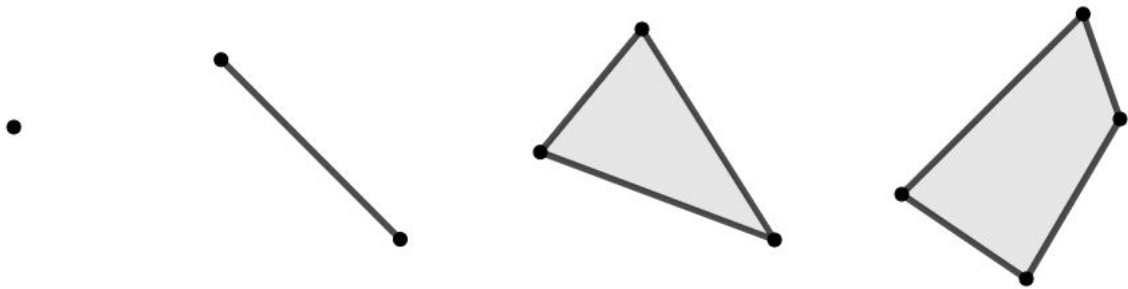


Figura 2.1: Envoltentes convexas de 1, 2, 3 y 4 puntos no alineados en el plano euclídeo

Proposición 2.3. *Sea A un conjunto convexo, entonces $C(A) = A$.*

Demostración:

En efecto, $A \subseteq C(A)$. Supongamos pues $x \in C(A)$, entonces x es combinación lineal convexa de un número k finito de puntos de A . Supongamos $k = 2$ y llamemos a, b a dichos puntos, entonces $x \in \overline{ab}$ y por lo tanto $x \in A$.

Construimos entonces la hipótesis de inducción suponiendo cierta esta pertenencia para un número k de puntos. Demostraremos entonces que ocurre lo mismo para $k+1$ puntos. En efecto, para $\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subseteq A$ sea $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Si suponemos que ningún $\lambda_i = 0, 1$ (resulta inmediato entonces), se tiene que si llamamos a cada $\lambda_i = (1 - \lambda_{k+1}) \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}$, entonces:

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1}x_{k+1}$$

Donde y es un punto combinación lineal convexa de k elementos, y por lo tanto $y \in A$. Así, x es también combinación lineal convexa de, concretamente, 2 puntos de A . Luego $x \in A$. ■

Podemos considerar entonces nuestra premisa inicial, si definimos el conjunto convexo B como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A , como un:

Corolario 2.0.1. *$C(A)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A .*

Demostración:

En efecto, Sea B la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A , es claro que B es convexo y que $A \subseteq B$. Luego $C(A) \subseteq C(B) = B$, que es la inclusión que faltaba para obtener el resultado.

Presentaremos ahora dos resultados realmente importantes. Serán necesarios para demostrar ciertas nociones a su vez imprescindibles. ■

Lema 2.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $x \in A^\circ$ e $y \in \bar{A}$, entonces $\overline{xy} - \{y\} \subseteq A^\circ$.*

Demostración:

Distinguiremos dos casos. Supongamos en primer lugar que $y \in A$. Sea $z \in \overline{xy}$ con $z \neq y$ y sea $\lambda \in [0, 1)$ tal que $z = (1 - \lambda)y + \lambda x$. Como x es punto interior de A , existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$. Comprobamos entonces que $B(z, \lambda\epsilon) \subset A$.

Sea $w \in B(z, \lambda\epsilon)$. Entonces podemos escribir $w = z + \lambda u$ con u un vector de la hipersfera de radio ϵ propia del espacio \mathbb{R}^n . Se cumple pues:

$$w = (1 - \lambda)y + \lambda(x + u)$$

Y al ser $x + u \in B(x, \epsilon)$ y ser A convexo, se tiene que $w \in A$ y $B(z, \lambda\epsilon) \subset A$, lo que demuestra que z pertenece al interior de A (es decir, $z \in A^\circ$).

Queda ver que se cumple el teorema para $y \in \bar{A} - A$. Con demostrar que $\overline{xy} - \{y\} \subset A^\circ$ quedará probado (ya que, por lo demostrado anteriormente, sería $\overline{xy} - \{y\} \subset A^\circ$). Supongamos pues $z \neq y, x$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que $z = (1 - \lambda)y + \lambda x$. Supongamos a su vez $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$ y consideremos la bola $B(y, \lambda \frac{\epsilon}{(1-\lambda)})$. Al ser y un punto del cierre de A , existe un punto $w \in A \cap B(y, \lambda \frac{\epsilon}{(1-\lambda)})$, por lo que $w = y + \lambda \frac{1}{(1-\lambda)}u$ con u un vector de la hipersfera de radio ϵ propia del espacio \mathbb{R}^n . Así:

$$z = (1 - \lambda)w + \lambda(x - u)$$

Quedando demostrado el resultado, pues $x - u \in B(x, \epsilon) \subset A$ con A convexo. ■

Definición 2.4. *Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ puntos de \mathbb{R}^n , se dice que son **afínmente independientes** si los vectores que forma uno de los puntos fijados dos a dos con el resto (esto son los vectores de la forma $\overrightarrow{x_1 x_i}$) son linealmente independientes.*

Teorema 2.1 (de Caratheodory). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in C(A)$, entonces x es combinación lineal de finitos puntos afínmente independientes de A . Estos serán, a lo sumo, $n + 1$ puntos.*

Demostración:

La demostración se realizará por reducción a lo absurdo. Podemos decir que existe $\{x_1, \dots, x_n\} \in A$ y $\lambda_i \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Podemos elegir una combinación que obligue a k a ser el menor número posible sin alterar las premisas (lo que obligará a que $\lambda \neq 0$). Así mismo, podemos suponer que $k \leq n + 1$, pues de no ocurrir, no serían puntos afínmente independientes por generar dos a dos más de n vectores.

Supongamos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ no son afínmente independientes. Entonces podemos formar el vector nulo $\vec{0}$ como combinación lineal de sus vectores (y en esencia de ellos) respondiendo a:

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$$

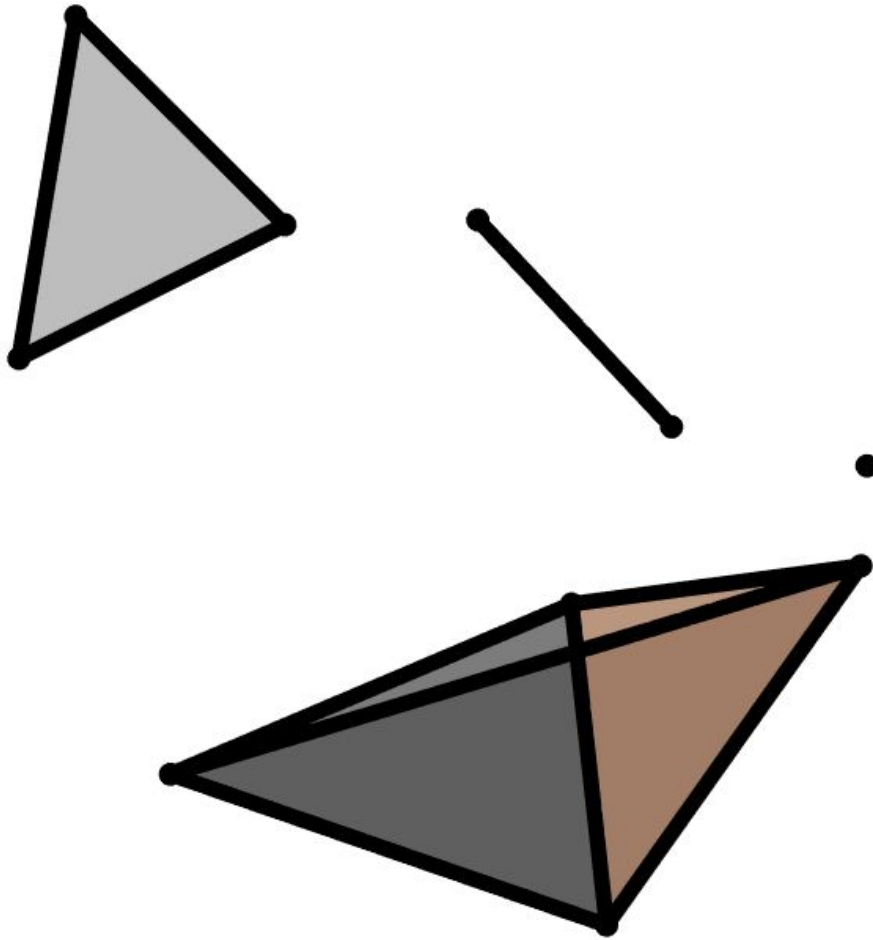


Figura 2.2: Envoltentes convexas de 1, 2, 3 y 4 puntos no alineados en el espacio euclídeo. Aunque las envoltentes de 1, 2 y 3 puntos son lugares geométricos equivalentes a los del plano, la envoltente de 4 puntos puede formar un tetraedro en \mathbb{R}^3

Con no todo α_i igual a 0 y además $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$. Supongamos $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}$ el más pequeño de los $\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ con $\alpha_i > 0$ y $1 \leq m \leq k$. Entonces:

$$x = \sum_{i=1, i \neq m}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right) x_i$$

y además:

$$\sum_{i=1, i \neq m}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right) x_i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right) x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

De aquí se obtiene que, como $\left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right)$ siempre es mayor o igual a 0, x es combinación lineal convexa de, como mucho, $k - 1$ puntos. Esto contradice la elección de

k como menor número de puntos que permite dicha combinación. Lo que demuestra, con ello, que nuestra premisa debe ser cierta. ■

Usaremos estas dos nuevas proposiciones para demostrar una serie de comportamientos de carácter topológico. Las recogeremos todas en el siguiente:

Teorema 2.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple:*

1. *Si A es convexo, entonces A^o y \overline{A} también lo son.*
2. *Si A es abierto, acotado y/o compacto, entonces $C(A)$ es abierto, acotado y/o compacto respectivamente.*
3. *Si A es convexo y $A^o \neq \emptyset$ entonces $A^o = \overline{A^o}$ y $\overline{A^o} = \overline{A}$*

Demostración:

Demostremos únicamente la segunda, pues la primera se obtiene invocando lemas anteriores a modo de corolario y el último no es un resultado tan importante para nuestro objetivo.

Supongamos A abierto y $z \in C(A)$. Podemos asegurar entonces que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_i, \epsilon) \subset A$ para todo x_i partícipe de la combinación lineal que forma z . Demostremos que, entonces, la bola $B(z, \epsilon) \subset C(A)$. En efecto, si $y \in B(z, \epsilon)$, se tiene que $y = z + u$ con u un vector de la hiperesfera de radio ϵ propia del espacio \mathbb{R}^n en el que nos encontremos. Entonces:

$$y = z + u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right) u = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_i + u)$$

Lo que demuestra la inclusión. Así mismo, también podemos concluir que:

$$B\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \epsilon\right) \subseteq \sum_{i=1}^k \lambda_i B(x_i, \epsilon)$$

El resultado referido a la acotación es inmediato si tenemos en cuenta que debe cumplirse $A \subseteq B(0, M)$ para algún $M > 0$ e invocando que $C(B(0, M)) = B(0, M)$ y que $A \subseteq B \rightarrow C(A) \subseteq C(B)$. Para la conservación de la compacidad, usaremos el Teorema de Caratheodory (2.1). Dado el conjunto siguiente:

$$\Lambda := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}); \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Y supongamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Definimos la aplicación:

$$\mathcal{F} : \Lambda \times A^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{F}((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}), x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

Esta aplicación es evidentemente continua por ser una función polinómica. Por el Teorema de Caratheodory, tiene como imagen el propio $C(A)$. Se tiene que como las aplicaciones continuas transforman compactos en compactos, $C(A)$ es un compacto. ■

Finalizaremos la sección enunciando un famoso teorema.

Teorema 2.3 (de Bunt-Motzkin). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado, este es convexo si y solo si para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único punto $p(x) \in A$ tal que $d(x, p(x))$ es mínima.*

2.3 Hiperplanos Soporte

Los hiperplanos soporte nos permitirán saltar la dificultad de definir envolventes convexas mediante colecciones de puntos finitos. Al fin y al cabo, la inmensa mayoría de construcciones que se pueden pretender con esta geometría obedecerán una ley que englobará infinitos puntos, intervalos y otros conjuntos de carácter "denso". Adelantando acontecimientos, el oloide se ve involucrado en un cálculo de envolventes convexas de conjuntos con infinitos puntos, por lo que estos resultados serán cruciales para avanzar.

Definición 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano. Sean H^+ y H^- los semiespacios que determina el propio H , diremos que H es un **hiperplano soporte** de A en $a \in A$ si $a \in A \cap H$ y A queda contenido en H^+ o en H^-*

Podemos idear una definición un tanto más algebraica con las herramientas del espacio euclídeo:

Definición 2.6. *Sea H un **hiperplano soporte** de A en un punto a y sea $A \subset H^-$ (resp. H^+), llamamos a H^- (resp. H^+) un **semiespacio soporte** de A . Sea $H_{u,k} := \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot u = k\}$ y sea $H_{u,k}^- := \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot u \leq k\}$, si se tiene que $H_{u,k}$ es hiperplano soporte de A en a con $A \subset H_{u,k}^-$, entonces decimos que u es un **vector ortogonal exterior** a A en a .*

Con una definición adicional, veremos que determinar planos soporte es extremadamente sencillo.

Definición 2.7. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, llamaremos $p(x) \in A$ al punto de A tal que $d(x, p(x))$ es mínima. Existe pues $u(x) = \frac{x-p(x)}{|x-p(x)|}$ vector tal que $p(x) + u(x) = x$.*

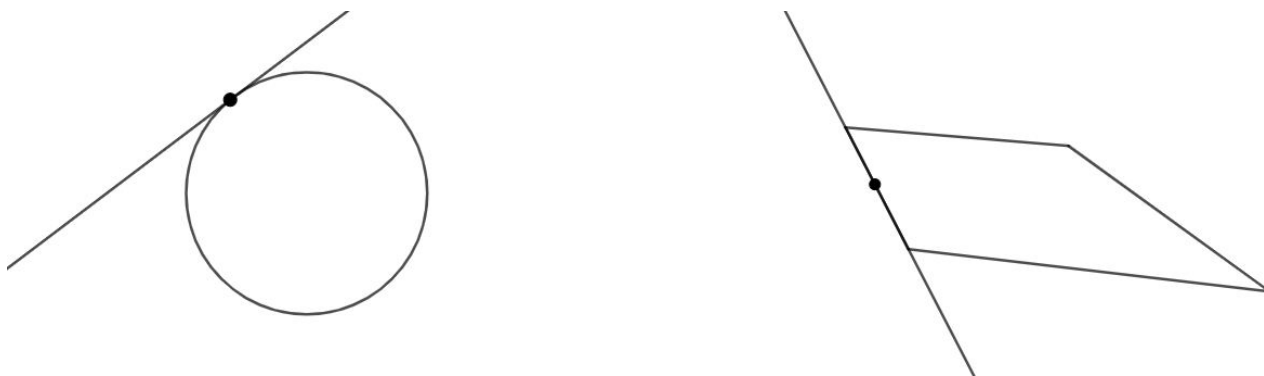


Figura 2.3: Hiperplanos soporte en conjuntos de \mathbb{R}^2 (rectas). Se ve cómo no necesariamente debe haber un único hiperplano para cada punto. En el polígono de la derecha es claro que dicha recta es también la recta soporte de cualquier punto de esa arista.

Teorema 2.4. *Sea A convexo y cerrado:*

1. *Existe un único $p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *$x \in A$ si y solo si $p(x) = x$.*
3. *Si $x \in \mathbb{R}^n - A$ y se tiene $y \in r_a(x)$ con $r_a(x)$ la semirrecta de vector director $u(x)$ con origen en $p(x)$, entonces $p(x) = p(y)$.*
4. *Si $x \in \mathbb{R}^n - A$, el hiperplano H que pasa por $p(x)$ y que es ortogonal a $r_a(x)$ es también el hiperplano soporte de A en $p(x)$. El vector $u(x)$ director de la semirrecta es, en sí, un vector normal exterior a A en $p(x)$.*

Demostración:

El primer enunciado es el recíproco de 2.3 y resulta de suponer que existen dos puntos $z, w \in A$ tales que $d(z, x) = d(w, x) = d(x, A)$. Al ser A convexo, se tiene que $m(w, z) = \frac{1}{2}(w + z)$ también pertenece a A . De aquí:

$$(z - w) \cdot \left(x - \frac{1}{2}(z + w) \right) = \frac{1}{2}((x - w) - (x - z)) \cdot ((x - z) + (x - w)) = \frac{1}{2}(|x - z|^2 - |x - w|^2) = 0,$$

Y por el teorema de Pitágoras:

$$|x - m(w, z)|^2 + |m(w, z) - w|^2 = |x - w|^2$$

$$|x - m(w, z)|^2 \leq |x - w|^2$$

Como la distancia de x a w es mínima, se debe cumplir la igualdad, siendo solo posible cuando $m(w, z) = w$. Esto es $z = w$.

El segundo enunciado es inmediato por ser A cerrado (ergo, su propio cierre) y de que $x \in A$ si y solo si $d(x, A) = 0$ (que es la definición de cierre). Demostraremos directamente el cuarto resultado, pues resulta más importante. En efecto, podemos definir $H := p(x) + \bar{\lambda}u(x)^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n; (y - p(x)) \cdot u(x) = 0\}$ así como definimos el semiespacio $H^- = \{y \in \mathbb{R}^n; (y - p(x)) \cdot u(x) \leq 0\}$.

Se tiene que $A \subset H^-$, ya que de no ser cierto, suponiendo $z \in A$ tal que $(z - p(x)) \cdot u(x) \geq 0$ y definiendo la función:

$$f(t) = d^2(x, z_t)$$

tenemos que:

$$z_t := p(x) + t(z - p(x)) \rightarrow f'(0) = -2(d(x, A)u(x) \cdot (z - p(x))) < 0$$

Lo que nos dice que f es estrictamente decreciente en 0. Esto implica, por continuidad de la función distancia, que $d^2(x, p(x)) > d^2(x, z_t)$. Como $z_t \in A$ y alineado con x y con $p(x)$, esto no puede ser. ■

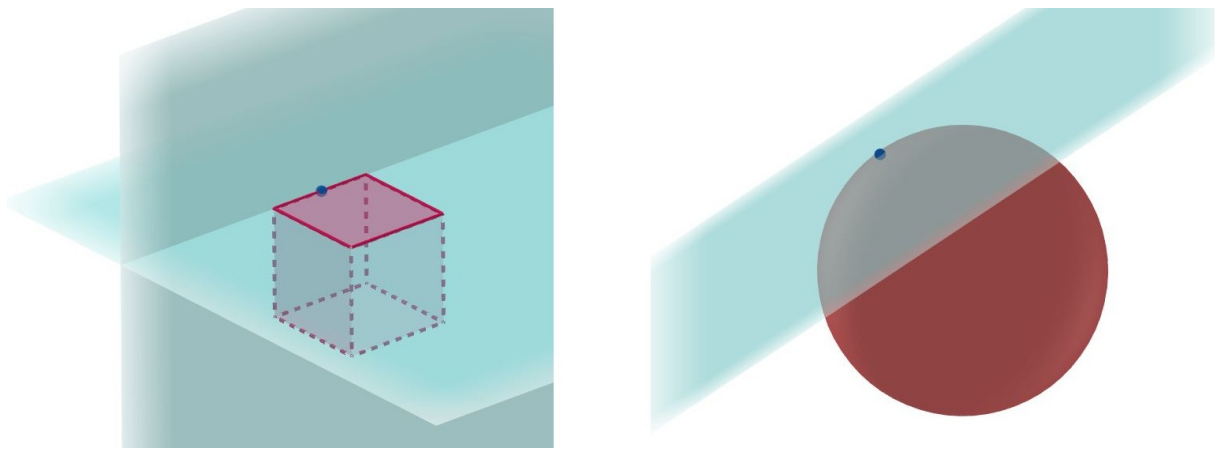


Figura 2.4: Hiperplanos soporte en conjuntos de \mathbb{R}^3 (planos). El punto de la arista del cubo posee más de un plano soporte. En el caso de la esfera, como en las superficies regulares solo existe un único plano tangente, este es también el único plano soporte.

De aquí sale el resultado más importante de esta sección, en forma de:

Corolario 2.4.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado, entonces A es la intersección de sus semiespacios soporte.*

Demostración:

La demostración es inmediata si tenemos en cuenta el cuarto punto del teorema 2.4 anterior. En efecto, es claro que A pertenece a dicha intersección por lo demostrado en él. Si suponemos que existe un punto $x \notin A$ de dicha intersección, ese punto posee un hiperplano soporte asociado que pasa por $p(x)$. Esto es, el punto no está contenido en el semiespacio soporte que determina dicho hiperplano. Contradicción que indica que A es, exclusivamente, igual a la intersección. ■

Este último corolario será el primer resultado que invoquemos cuando queramos construir el oloide. Más aún, veremos que con esta construcción podremos llegar a la envolvente convexa de un conjunto. Existe, sin embargo, una dificultad a salvar, y es que la intersección de semiespacios soporte es cerrada por ser, por supuesto, la intersección de conjuntos cerrados. Por lo general, la envolvente convexa de un conjunto cerrado no tiene por qué ser cerrada, lo cuál convierte en inverosímil la intención de

definir las envolventes mediante hiperplanos soportes y la intersección de sus semiespacios. Salvamos ese problema usando los siguientes conceptos:

Definición 2.8. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos, decimos que están **separados**, si existe un hiperplano H tal que $A \subseteq (H^+)^o$ y $B \subseteq (H^-)^o$ o viceversa. Concretamente, decimos que H **separa a los conjuntos** A y B . Decimos que A y B están **fuertemente separados** por el hiperplano $H = H_{u,k}$ si existe $\epsilon > 0$ tal que existen sendos semiespacios cerrados disjuntos $H_{u,k+\epsilon}^+$ y $H_{u,k-\epsilon}^-$ que cumplen $A \subset H_{u,k-\epsilon}^-$ y $B \subset H_{u,k+\epsilon}^+$

Intuitivamente, la separación fuerte es la propiedad de dos objetos en un espacio euclídeo de poder “introducir” más de un hiperplano entre ellos, siendo estos paralelos pero no coincidentes. Esta propiedad nos permitirá imitar la demostración del corolario 2.4.1 y relacionar así los semiespacios que contienen conjuntos con la determinación de sus envolventes convexas.

Lema 2.3. Sean A, B conjuntos convexos disjuntos. Sea A **compacto** y B cerrado. Se tiene entonces que A y B se pueden **separar fuertemente** por un hiperplano.

Teorema 2.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ **compacto**, entonces $C(A)$ es la intersección de los **semiespacios cerrados** que contienen al subconjunto.

La demostración de este teorema es realmente similar a la del corolario 2.4.1, pero hace uso del resultado 2.2 sobre compactos.

Demostración:

Supongamos \mathcal{S} el conjunto formado por los semiespacios cerrados que contienen a A . Se cumple entonces que $A \subset S \in \mathcal{S}$, y como $S = C(S)$, se tiene que $C(A) \subseteq \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$ por la proposición 2.3. Suponemos ahora $x \notin C(A)$. Se tiene que $C(A)$ es compacto y que existe un hiperplano tal que $C(A)$ se encuentra en el semiespacio cerrado que forma dicho hiperplano en el cual no está contenido x . Esto se debe a que $C(A)$ es compacto por 2.2 y el punto x es cerrado, por lo que podemos aplicar el lema 2.3 anterior. Esto último implica $x \notin \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$. ■

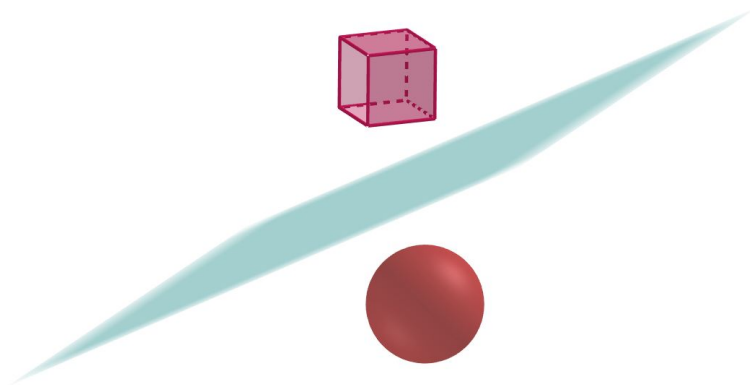


Figura 2.5: Idea de separación mediante un hiperplano. Observemos que estos objetos en el espacio \mathbb{R}^3 están **separados fuertemente**, ya que podemos introducir en cada semiespacio determinado por el plano de la imagen dos nuevos planos (paralelos al original) tal que los objetos queden incluidos en sendos semiespacios superior e inferior de los nuevos planos.

Con este último resultado, podremos al fin el capítulo siguiente definir el oloide. Comenzaremos por enfocarlo como un objeto propio de lo aprendido sobre convexidad y luego obtendremos mediante cálculos una expresión satisfactoria de la superficie.

Construcción del oloide. Parametrización

Las primeras formas polisomáticas - [...] el oloide entre otros - se presentan como elementos de carácter novedoso en la ingeniería mecánica. Los nuevos descubrimientos y conceptos del movimiento geométrico condujeron a una expansión de las nociones más básicas de la cinemática, y de allí a nuevas creaciones técnicas que, lejos de destruir la naturaleza, se someten a sus leyes.

Paul Schatz

Lo que Paul Schatz definió como **geometría** o **forma polisomática** se caracterizaba por su peculiar origen: a saber, todas ellas están generadas por medio del movimiento de las aristas, los vértices o las diagonales de hexaedros. Sin entrar mucho en este campo, tales sólidos caracterizan en sí la geometría de la inversión. Esto es, como su propio nombre indica, la geometría de volver del revés las cosas. El oloide nace, precisamente, del acto de invertir el objeto geométrico conocido como **Cubo de Schatz**. Sin embargo, apoyándonos en las nociones estudiadas en el capítulo anterior, nos conviene una definición del oloide en términos de geometría convexa en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

Se define el oloide (superficie) como la frontera de la envolvente convexa de dos discos de mismo radio los cuales pasa la curva de cada uno por el centro del otro y los planos determinados por los puntos de cada disco resultan ortogonales entre sí.

Esta definición permite dos cosas: la primera es utilizar todo lo recopilado en el capítulo anterior para trabajar con nuestro objeto. La segunda, construir una razón entre puntos de sendas circunferencias que forme la superficie, permita calcular los planos soporte y nos de una parametrización dependiente de dos variables. Definamos pues dos circunferencias de radio 1 en un sistema de referencia sencillo. Esto generalizará el cálculo desde una perspectiva afín.

3.1 Premisas: circunferencias generadoras y el oloide

El “esqueleto” de nuestro oloide vendrá dado por las dos ecuaciones siguientes, que representarán las **circunferencias generadoras**:

$$S_h = \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_v = \left. \begin{array}{l} (x-1)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Concretamente, el conjunto sobre el que vamos a construir la envolvente convexa será el conjunto $S_h \cup S_v$. Observemos que se trata de dos discos de radio 1. El primero está contenido en el plano XY y tiene de centro el origen $(0,0,0)$. El segundo está contenido en el plano XZ y tiene de centro el punto $(1,0,0)$. Se cumplen entonces las premisas de planos contenedores ortogonales y que cada circunferencia pase por el centro de la otra. Llamaremos a este conjunto $S_h \cup S_v = (Ol)^*$. Si definimos el oloide como la envolvente convexa de $(Ol)^*$, (esto es $C((Ol)^*)$), a esta la llamaremos Ol .

Proposición 3.1. *El conjunto $(Ol)^*$ es compacto.*

Demostración:

Es inmediato si tenemos en cuenta que es la unión de dos conjuntos sabidos cerrados, y por lo tanto cerrado. Es también acotado por ser la unión finita de conjuntos acotados, por lo que al encontrarnos en \mathbb{R}^3 , es trivialmente compacto. ■

Esto es lo único necesario para justificar la construcción del oloide. Se tiene entonces el siguiente:

Corolario 3.0.1. *El oloide es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a sus dos circunferencias generadoras a la vez. Esto es, siendo \mathcal{H}^- la familia de semiespacios cerrados de \mathbb{R}^3 , $Ol = \{\cap_{H^- \in \mathcal{H}^-} H \mid (Ol)^* \subset H^- \in \mathcal{H}^-\}$*

Demostración:

Se tiene de aplicar 2.5 a las circunferencias. ■

Por supuesto, este resultado no nos deja un buen pronóstico sobre el cálculo práctico de nuestra figura. Facilitaremos esto con un par de añadidos geométricos.

3.2 Planos soporte de los discos

Si parametrizamos de forma usual la circunferencia vertical de nuestro conjunto, nos encontramos con la siguiente función:

$$\begin{aligned} \alpha &: [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha(t) &= (1 + \cos t, 0, \sin t) \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha'(t) = (-\sin t, 0, \cos t)$, de donde tenemos que, si deseamos determinar la recta tangente a la parte superior de su curva que pase por, digamos, el punto $P_1 = (-1, 0, 0)$ de la circunferencia horizontal, plantearemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (-1, 0, 0) + \lambda(-\sin t, 0, \cos t) &= (1 + \cos t, 0, \sin t) \\ (-1 - \lambda \sin t, 0, \lambda \cos t) &= (1 + \cos t, 0, \sin t) \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} -1 - \lambda \sin t &= 1 + \cos t \\ \lambda \cos t &= \sin t \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que $\cos t = \frac{-2}{1+\lambda^2}$ y que por lo tanto $\sin t = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$. Como tales valores deben cumplir la ecuación de la circunferencia:

$$\left(\frac{-2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2 = 1 \longrightarrow \lambda = -\sqrt{3} \quad (3.1)$$

ya que $\cos t < 0$ por encontrarse el punto P_1 a la izquierda y por debajo del punto máximo de la circunferencia S_v y $\sin t > 0$ por puro objetivo. De aquí nos queda que el

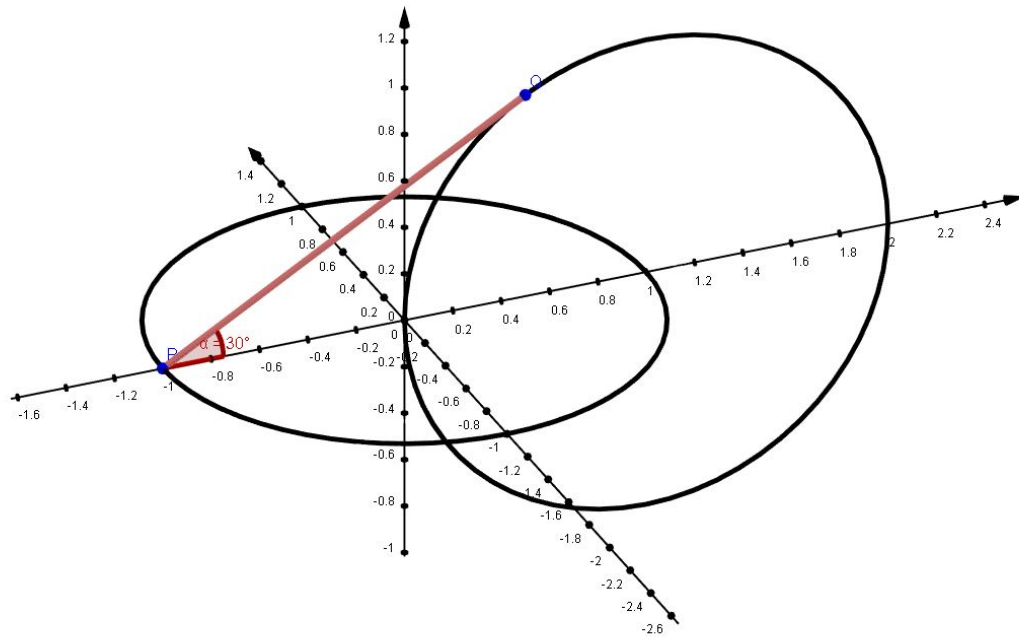


Figura 3.1: Las circunferencias generadoras y el segmento que determinan el punto P_1 y el punto Q_1 cuya recta tangente pasa por P_1 . Dicho segmento posee una longitud de $\sqrt{3}$ y será el punto de partida para nuestro desarrollo.

único punto posible de S_v que cumple las condiciones es $Q_1 = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$, y que el módulo del segmento que une los dos puntos es $\sqrt{3}$.

Del mismo modo, el segmento de iguales características que pasa por el punto $P_2 = (2, 0, 0)$ y es tangente a S_h será su equivalente afín. El punto tangente en tal caso será $Q_2 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Ocurre que también existe un equivalente simétrico a estos segmentos con respecto a los planos XY y XZ que unen respectivamente P_1 con $Q'_1 = (1/2, 0, -\sqrt{3}/2)$ y P_2 con $Q'_2 = (1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$. Estos cuatro segmentos tienen igual longitud, lo que inspira el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Para todo $t \in (\pi/3, \pi]$ y todo punto $P_t = (\cos t, \sin t, 0) \in S_h$ se tiene que existen dos únicos puntos $Q_t, Q'_t \in S_v$ simétricos respecto a XY tales que los segmentos que unen cada punto P_t con Q_t y Q'_t miden $\sqrt{3}$.*

En consecuencia, los puntos de S_v cumplen equivalentemente el mismo lema con respecto a S_h . Así mismo, los puntos dados por ángulos entre π y $5\pi/3$ poseerán los mismos puntos que sus simétricos con respecto a XZ .

Demostración:

Supongamos un punto P_t como el descrito en el enunciado y supongamos un vector $\bar{v} = (x, y, z)$ unitario. Se tiene que:

$$P_t + \sqrt{3}\bar{v} = Q_t$$

O equivalentemente:

$$(\cos t, \sin t, 0) + \sqrt{3}(x, y, z) = (1 + \cos u, 0, \sin u)$$

De aquí obtenemos que $\|(1 + \cos u - \cos t, -\sin t, \sin u)\| = \sqrt{3}$. Esto es:

$$((1 + \cos u) - \cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (\sin u)^2 = 3$$

Entonces:

$$\begin{aligned} ((1 + \cos u) - \cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (\sin u)^2 &= 3 \\ \cos^2 u + \cos^2 t + 1 - 2 \cos t - 2 \cos u \cos t - \cos t + \sin^2 t + \sin^2 u &= 3 \\ 2 \cos t - 2 \cos u \cos t - \cos u &= 0 \\ \cos u(2 \cos t - 1) &= -2 \cos t \end{aligned}$$

Es decir, los puntos tales que se cumple dicho lema vendrán dados por:

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{-2 \cos t}{(2 \cos t - 1)} \rightarrow 1 + \cos u = \frac{-1}{(2 \cos t - 1)} \\ \sin u &= \sqrt{1 - \left(\frac{4 \cos^2 t}{(2 \cos t - 1)^2}\right)} \end{aligned}$$

Por construcción, este punto resulta único salvo por lo siguiente. Observemos que el valor $-\sin u$ también cumple las condiciones requeridas y determina a su vez el punto simétrico por XY del correspondiente a la coordenada $\sin u$. Esto es, existen dos y solo dos puntos de la circunferencia vertical tales que fijado un punto de la horizontal (de aquellos que estipula el lema), estos se unen mediante un segmento de longitud $\sqrt{3}$. ■

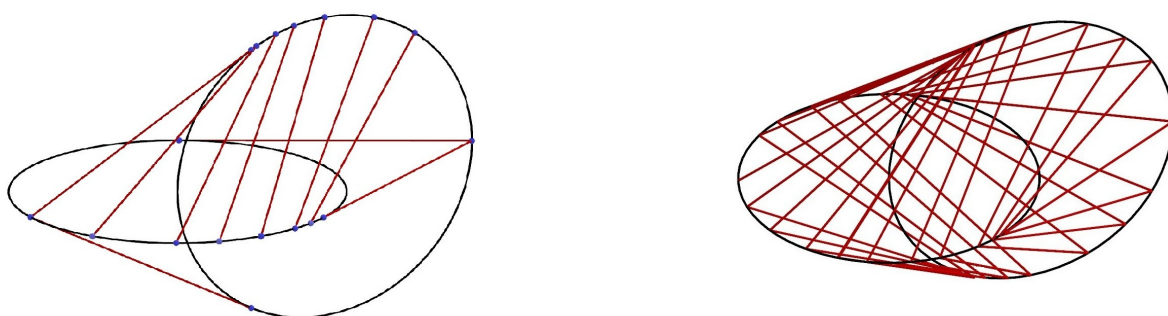


Figura 3.2: A la izquierda, las circunferencias generadoras, los cuatro segmentos mencionados previo lema y algunos de los puntos y segmentos cuya existencia demuestra dicho resultado. A la derecha, una “malla” formada por una mayor cantidad de segmentos, incluyendo las correspondencias simétricas de ambos planos.

Es fácil ver que estos segmentos forman parte, por definición, de la **envolvente convexa** de $S_h \cup S_v$. Concretamente, dichos segmentos formarán parte de cualquier conjunto de **combinaciones lineales convexas** de n puntos en los cuales estén incluidos

los dos puntos que lo forman. Cabe preguntarse si la unión de estos segmentos forma la superficie del oloide. La condición de que los puntos se encuentren únicamente en el arco de circunferencia dado se debe a que no es posible encontrar un punto como el descrito en el lema para tales ángulos.

Definición 3.1. Definimos la función **coordenada oloidal superior** que asigna a cada ángulo del sector de circunferencia horizontal (desde $\pi/3$ hasta $5\pi/3$) un ángulo del hemisferio superior de la circunferencia vertical tal que sus puntos forman el segmento de longitud $\sqrt{3}$ del siguiente modo:

$$a_{O1} : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \longrightarrow \left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$a_{O1}(\theta) = \phi$$

Donde $\cos \phi = \frac{-2 \cos t}{(2 \cos t - 1)}$.

Así mismo, definimos la función **coordenada oloidal inferior** como la que asigna el ángulo equivalente del hemisferio inferior. Esto es:

$$a_{O2} : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \longrightarrow \left[\frac{-2\pi}{3}, 0 \right]$$

$$a_{O2}(\theta) = \phi$$

Donde $\cos \phi = \frac{-2 \cos t}{(2 \cos t - 1)}$.

Proposición 3.2. Sea $u = a_{O1}(t)$ o bien $u = a_{O2}(t)$ con $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$ y sea π_t el plano que pasa por el punto $(\cos t, \sin t, 0)$ de vectores directores $(-\sin t, \cos t, 0)$ y $(1 + \cos u - \cos t, -\sin t, \sin u)$, entonces π_t soporta a las circunferencias generadoras y por tanto a los discos que forman $(Ol)^*$. Concretamente, π_t soporta a $(Ol)^*$.

Demostración:

La ecuación de dicho plano vendrá dada por:

$$n(\pi_t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 1 + \cos u - \cos t & -\sin t & \sin u \end{vmatrix} = (\cos t \sin u, \sin u \sin t, \sin^2 t - \cos t(1 + \cos u - \cos t)).$$

Es decir:

$$\pi_t \equiv (\cos t \sin u)x + (\sin u \sin t)y - (\sin^2 t - \cos t(1 + \cos u - \cos t))z = \sin u$$

Es claro que dicho plano corta a las dos circunferencias tanto en el punto $(\cos t, \sin t, 0)$ como en su equivalente de coordenadas oloidales (Resultará análogo si tomamos la función $a_{O2}(t)$, de hecho). Supongamos que el plano no soporta a las circunferencias. Se tendrá entonces que cierto sector de una de las circunferencias quedará contenido en un semiespacio y el otro en el opuesto, o bien el plano no cortará a las circunferencias. Nos enfocaremos en el primero ya que el segundo no puede darse por definición.

En efecto, de ocurrir que una de las circunferencias quede separada por un plano, se tendría que dicho plano contiene dos puntos de alguna de las circunferencias. Sin embargo, esto es absurdo por ser sus vectores directores o bien cada uno el vector tangente a cada circunferencia, o bien ser uno tangente a la circunferencia horizontal y no pertenecer el otro a XZ . Esto es, el plano es tangente en un solo punto a cada circunferencia, por lo que debe ser plano soporte. ■

De aquí sacamos no solo que cada par de puntos en la correspondencia oloidal tiene un plano soporte, sino la posibilidad de definir finalmente la parametrización deseada.

3.3 Determinación del oloide por medio de coordenadas

Proposición 3.3. *La intersección $\bigcap_{t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]}$ π_t^- de semiespacios soporte forman el oloide.*

Demostración:

Basta con ver que $Ol = C((Ol)^*) = \bigcap_{t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]} \pi_t^-$. En efecto, $Ol = \bigcap_{s \in S} \pi_s^- \subseteq \bigcap_{t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]} \pi_t^-$ por 3.1, donde π_s^- es cada semiespacio cerrado que contiene a $(Ol)^*$. Para demostrar la otra implicación, supongamos $x \in \bigcap_{t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]} \pi_t^-$ y supongamos que x no pertenece ni a $(Ol)^*$ ni a ninguno de los segmentos definidos en 3.1 (de ocurrir, la premisa sería inmediata). Podemos determinar afinmente ¹ este punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ de la siguiente forma:

$$x = (\cos t, \sin t, 0) + \lambda_1(1 + \cos u - \cos t, -\sin t, \sin u) + \lambda_2(0, 1, 0); \lambda_1 \in (0, 1), \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Así como podemos suponer que $(\cos t, \sin t, 0) \neq (-1, 0, 0)$, también podemos suponer que $\sin u > 0$ (el resultado resultará análogo para $\sin u \leq 0$). Si construimos entonces la recta $x + \mu(0, 1, 0)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos que esta recta corta tanto al punto $P = (\cos t, \sin t, 0) + \lambda_1(1 + \cos u - \cos t, -\sin t, \sin u)$ como a su simétrico por medio del plano XZ . Esto es, si definimos:

$$x = (\cos t, -\sin t, 0) + \lambda'_1(1 + \cos u - \cos t, \sin t, \sin u) + \lambda'_2(0, 1, 0); \lambda'_1 \in (0, 1), \lambda'_2 \in \mathbb{R}$$

Se tiene que $P' = (\cos t, -\sin t, 0) + \lambda'_1(1 + \cos u - \cos t, \sin t, \sin u)$ es simétrico por XY a P y además $x \in \overline{PP'}$ (se cumple que λ'_2 y λ_2 se relacionan en proporción $\alpha, (1-\alpha)$ para con $d(P, P')$ con $\alpha \in [0, 1]$). Esto es, $x \in Ol$ y por lo tanto $\bigcap_{t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]} \pi_t^- \subset Ol$, quedando demostrada la igualdad. ■

Proposición 3.4. *Los segmentos generados por los pares de puntos de $(Ol)^*$ dados $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ y $a_{O_1}(t)$ (así como $a_{O_2}(t)$) forman la frontera topológica $\delta(Ol)$ de Ol y, por lo tanto, su superficie.*

¹Esto se debe a que podemos garantizar que el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ debe cumplir $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ o $(x_1 - 1)^2 + x_3^2 \leq 1$ y respectivamente z e y deben encontrarse entre los pares de planos simétricos definidos mediante el método descrito para los cuatro puntos dados previamente al lema 3.1

Demostración:

Es claro que $Ol = \overline{Ol}$ por ser este compacto. Calculemos su interior. Se tiene que cualquier punto de los segmentos generados por los puntos del arco de circunferencia para $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ no está contenido en $(Ol)^o$ (esto incluye a los puntos que se encuentran también en la circunferencia), pues toda esfera de radio $\epsilon > 0$ corta al semiespacio en el cual no está incluido Ol por encontrarse tal punto en un plano soporte.

Supongamos entonces un punto $x \in Ol$ pero $x \notin \overline{P_t P_u}$, con $\overline{P_t P_u}$ cualquier segmento construido mediante puntos de estas con la función coordenada oloidal 3.1. Entonces existe un $\overline{P_a P_b}$ tal que $0 < d(x, \overline{P_a P_b})$ con $d(x, \overline{P_a P_b}) = \min d(x, \overline{P_t P_u})$ para $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Tomando $\epsilon < d(x, \overline{P_a P_b})$, se tiene que $B(x, \epsilon) \subset Ol$ pero $B(x, \epsilon)$ no corta ningún segmento ni ningún punto de las circunferencias (salvo, quizás, algún punto para el cual no estén definidas las funciones coordenada oloidal o no sean imagen de esta). Por topología, se tiene que $\delta(Ol) = Ol - (Ol)^o$ con $(Ol)^o$ los puntos del oloide que no pertenecen a algún segmento $\overline{P_t P_u}$. Esta frontera es, entonces, los propios segmentos $\overline{P_t P_u}$. ■

Teorema 3.1 (Parametrización del oloide). Sea $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ y sea $\lambda \in [0, 1]$, entonces la función:

$$\alpha_o : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_o(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, \lambda \sin u)$$

Definiendo $u = a_{O_1}(t)$ y $u = a_{O_2}(t)$, determina el **oloide**. En esencia, las funciones:

$$\alpha_s : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_s(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, \lambda \sin u)$$

$$\alpha_i : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_i(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, -\lambda \sin u)$$

Definiendo $u = a_{O_1}(t)$ determinan el **oloide**.

Demostración:

Basta con ver que la función α tiene como imagen los segmentos definidos al comienzo del capítulo y aplicar la proposición 3.4 anterior. ■

Aunque esto último no se puede considerar una parametrización de **superficie regular** como tal (no parte de un conjunto abierto y no puede considerarse diferenciable en las circunferencias), esta construcción nos permite obtener de forma sencilla resultados de carácter afín en relación al oloide y representarlo correctamente.

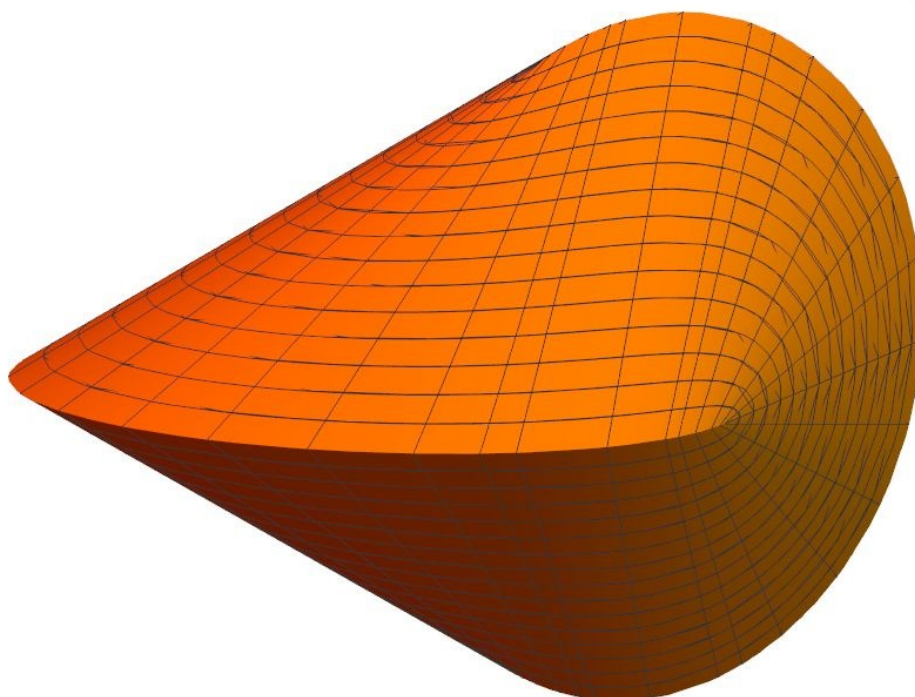


Figura 3.3: El oloide construido mediante el teorema 3.1

3.4 El grupo de movimientos invariantes del oloide

Teorema 3.2. *El oloide:*

1. Resulta invariante ante **la identidad** de movimientos en el espacio, con el propio oloide como puntos fijos.
2. Resulta invariante ante la **composición de giro y simetría** $G_{OX}^{90} \circ S_{mYZ}$ con G_{OX}^{90} el giro de eje OX y 90° y S_{mYZ} la simetría del plano YZ que pasa por el punto $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ (el punto medio entre los centros de la circunferencia). El oloide no presenta puntos fijos con este movimiento.
3. Resulta invariante ante el **giro** G_{OX}^{180} , siendo este el de eje OX y 180° . Los puntos de corte del eje OX con el oloide son sus puntos fijos.
4. Resulta invariante ante la **composición de giro y simetría** $G_{OX}^{270} \circ S_{mYZ}$ con G_{OX}^{270} el giro de eje OX y 270° . El oloide no presenta puntos fijos con este movimiento.
5. Resulta invariante ante la **composición de simetrías** $S_{ob1} \circ S_{mYZ}$, siendo S_{ob1} la simetría con respecto al plano oblicuo que pasa por el origen de vectores directores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Sus puntos fijos son los puntos del oloide contenidos en la recta intersección de ambos planos.
6. Resulta invariante ante la **composición de simetrías** $S_{ob2} \circ S_{mYZ}$, siendo S_{ob2} la simetría con respecto al plano oblicuo que pasa por el origen de vectores directores

$(1, 0, 0)$ y $(0, 1, -1)$. Sus puntos fijos son los puntos del oloide contenidos en la recta intersección de ambos planos.

7. Resulta invariante ante **la simetría** S_{XZ} con respecto al plano XZ , Siendo la curva composición $(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3)$ su variedad de puntos fijos con:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(\lambda) &= \alpha_s(\lambda, \pi) \\ \alpha_2(t) &= (1 + \cos(-t), 0, \sin t) \\ \alpha_3(\lambda) &= \alpha_i(1 - \lambda, \pi) \end{aligned} \right\}$$

Con $\lambda \in [0, 1]$ y $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

8. Resulta invariante ante **la simetría** S_{XY} con respecto al plano XY , Siendo la curva composición $(\beta_1 \circ \beta_2 \circ \beta_3)$ su variedad de puntos fijos con:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(\lambda) &= \alpha_s(1 - \lambda, \frac{\pi}{3}) \\ \beta_2(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \\ \beta_3(\lambda) &= \alpha_s(\lambda, \frac{5\pi}{3}) \end{aligned} \right\}$$

Con $\lambda \in [0, 1]$ y $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Teorema realmente denso pero sencillo de demostrar. Se puede comprobar de forma análoga para cada movimiento que aplicar tales a segmentos del oloide dan como resultado otros segmentos del mismo, usando la biyectividad de los movimientos para garantizar el hecho. También es sencillo demostrar que no hay ninguno más, pues si caracterizamos los movimientos mediante los cuatro puntos diametrales del oloide (estos son $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, -1)$) y su posición al realizarlos, veremos que no es posible encontrar un noveno. Más interesante resulta este enfoque:

Teorema 3.3. *El conjunto de los **movimientos que dejan invariante al oloide** forma un **grupo** con la composición que es isomorfo al **Grupo diédrico del cuadrado** D_4*

Teorema que explica la obviedad necesaria de incluir el movimiento identidad en el teorema 3.2 anterior.

| | I | A | 2A | 3A | B | A*B | 2A*B | 3A*B |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| I | I | A | 2A | 3A | B | A*B | 2A*B | 3A*B |
| A | A | 2A | 3A | I | A*B | 2A*B | 3A*B | B |
| 2A | 2A | 3A | I | A | 2A*B | 3A*B | B | A*B |
| 3A | 3A | I | A | 2A | 3A*B | B | A*B | 2A*B |
| B | B | 3A*B | 2A*B | A*B | I | 3A | 2A | A |
| A*B | A*B | B | 3A*B | 2A*B | A | I | 3A | 2A |
| 2A*B | 2A*B | A*B | B | 3A*B | 2A | A | I | 3A |
| 3A*B | 3A*B | 2A*B | A*B | B | 3A | 2A | A | I |

Figura 3.4: Tabla del grupo diédrico D_4 con A el giro de 90 grados y B la simetría horizontal en el cuadrado

Demostración:

La correspondencia biyectiva buscada en el teorema es asignar los movimientos de invariación a los de D_4 de forma que se imiten las estructuras de las figuras 3.4 y 3.5²

| | I | G(90) - SM | G(180) | G(270) - SM | SOB1-SM | SXY | SOB2-SM | SXZ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| I | I | G(90) - SM | G(180) | G(270) - SM | SOB1-SM | SXY | SOB2-SM | SXZ |
| G(90) - SM | G(90) - SM | G(180) | G(270) - SM | I | SXY | SOB2-SM | SXZ | SOB1-SM |
| G(180) | G(180) | G(270) - SM | I | G(90) - SM | SOB2-SM | SXZ | SOB1-SM | SXY |
| G(270) - SM | G(270) - SM | I | G(90) - SM | G(180) | SXZ | SOB1-SM | SXY | SOB2-SM |
| SOB1-SM | SOB1-SM | SXZ | SOB2-SM | SXY | I | G(270) - SM | G(180) | G(90) - SM |
| SXY | SXY | SOB1-SM | SXZ | SOB2-SM | G(90) - SM | I | G(270) - SM | G(180) |
| SOB2-SM | SOB2-SM | SXY | SOB1-SM | SXZ | G(180) | G(90) - SM | I | G(270) - SM |
| SXZ | SXZ | SOB2-SM | SXY | SOB1-SM | G(270) - SM | G(180) | G(90) - SM | I |

Figura 3.5: Tabla de los movimientos invariantes del oloide y su composición, relacionando cada movimiento de D_4 con la imagen pretendida en el isomorfismo.

Demostrar que los movimientos invariantes forman un grupo es sencillo si utilizamos que la composición de movimientos en el espacio siempre es un movimiento y que, siendo f_1, f_2 dos movimientos invariantes del oloide entonces se tiene que $f_1(f_2(Ol)) = f_1(Ol) = Ol$. Como por 3.2 sabemos que solo existen esos 8 movimientos que cumplen tal cosa, se tiene que $f_1 \circ f_2$ es uno de esos movimientos invariantes.

Se ve, además, la siguiente correspondencia de inversos:

$$\begin{aligned}
 (G_{OX}^{90} \circ S_{mYZ})^{-1} &= G_{OX}^{270} \circ S_{mYZ} \\
 (G_{OX}^{180})^{-1} &= G_{OX}^{180} \\
 (S_{ob1} \circ S_{mYZ})^{-1} &= S_{ob1} \circ S_{mYZ} \\
 (S_{ob2} \circ S_{mYZ})^{-1} &= S_{ob2} \circ S_{mYZ} \\
 (S_{XZ})^{-1} &= S_{XZ} \\
 (S_{XY})^{-1} &= S_{XY}
 \end{aligned}$$

Y como es inmediata la existencia del elemento neutro I , esto es suficiente para demostrar que el conjunto de estos movimientos es grupo.

Los resultados sobre estructura y clasificación de grupos finitos sugieren entonces esta isomorfía, pues nos encontramos ante un grupo finito de orden 8 no abeliano. Para ver que es correcta, no hay más que comprobar sus subgrupos de orden 2. Esto se debe a que los únicos grupos de orden 8 no abelianos son el **grupo diédrico del cuadrado**, que posee 5 subgrupos de orden 2, y el **grupo de los cuaterniones**,

²Nomenclatura: G(K) = Giro de K grados. G(K)-SM = Giro de K grados con simetría de plano que pasa por el punto medio de los centros. SOBx-SM = Simetría del plano oblicuo X con simetría de plano que pasa por el punto medio de los centros. SIJ = Simetría del plano IJ.

que posee nada más que 1. Como todos los elementos que son su propio inverso forman un subgrupo de orden 2 con I , se tiene por la correspondencia de inversos vista anteriormente que hay exactamente 5 subgrupos de orden 2, demostrando el resultado (Se han dado por hecho ciertos resultados en esta demostración que, aunque no se ha mostrado en este documento su veracidad, pueden ser comprobados en las referencias de bibliografía).

■

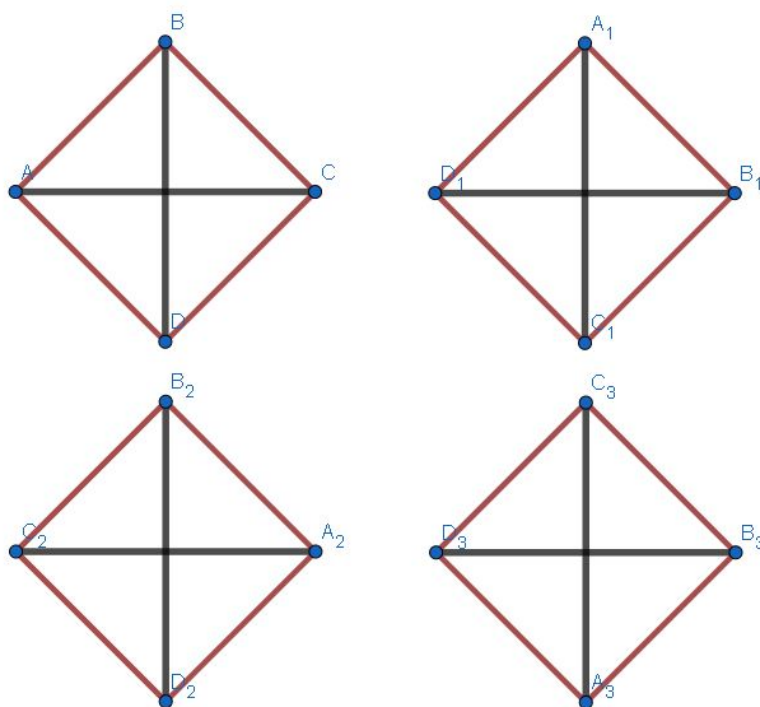


Figura 3.6: Cuatro proyecciones del oloide (marcados sus puntos diametrales) en el plano YZ tras serle aplicado cuatro movimientos invariantes (I , $G_O^{90}X$, S_{XZ} y $S_{ob2} \circ S_{mYZ}$). Se observa que el resultado son cuatro posiciones del grupo D_4 .

3.5 El oloide como superficie regular. Parametrizaciones

Ocurre que el oloide, definido mediante la parametrización 3.1, no es una superficie regular. Recordemos que una **superficie regular** es aquella superficie que **puede ser descrita localmente mediante una familia de parametrizaciones biyectivas y diferenciables definidas en abiertos y de aplicación diferencial asociada inyectiva**, a las que llamaríamos cartas. Antes que nada invocaremos un resultado sobre geometría diferencial para verlo:

Lema 3.2. *Sea S una superficie regular y sea $P \in S$, entonces existe $V \subset S$ un entorno de P tal que dicho entorno es la imagen de una función diferenciable y biyectiva de la forma $z = f(x, y)$ (o bien $y = f(x, z)$, $x = f(y, z)$). En consecuencia, la función proyección en el plano XY (respectivamente, XZ o YZ) es biyectiva.*

De aquí podemos sacar que el oloide, tal y como lo definimos, no es superficie regular. Suponiendo que podamos construir una parametrización mediante cartas que envíen abiertos a abiertos, este lema nos muestra la imposibilidad con un sencillo cálculo.

Corolario 3.3.1. *El oloide definido en 3.1 no es regular.*

Demostración:

En efecto, sea $V \subset S$ un entorno del punto $(1, 0, 0)$, por ejemplo, se tiene que en dicho entorno hay incluidos puntos de la forma $(x, y, z), (x, -y, z)$ así como puntos de la forma $(x_1, 0, z), (x_2, 0, z)$ que condicionan a las proyecciones hacia XZ e YZ a ser no inyectivas. En cuanto a la proyección en XY , podemos construir la función $f(x, y)$ que asigne a cada punto (x, y) el valor z tal que (x, y, z) pertenezca a algún plano soporte. Sin embargo aunque esta función sea continua en el punto $P = (1, 0, 1)$, no es diferenciable en dicho punto. Observamos que las siguientes curvas:

$$\alpha(t) = (t, 1 - t, t)$$

$$\beta(t) = (t, t - 1, t)$$

Representan ambas los dos segmentos del oloide que pasan por el punto P con $t \in [0, 1]$. En efecto, es claro que para $t = 0$ se tienen dos puntos de la circunferencia horizontal S_h (estos son $P_1 = (0, 1, 0)$ y $P_1 = (0, -1, 0)$) y para $t = 1$ se tiene el propio punto P . Ambos segmentos tienen módulo $\sqrt{3}$. Se tiene entonces que los vectores tangentes en cualquier punto de esas curvas siempre son respectivamente:

$$\alpha'(t) = (1, -1, 1)$$

$$\beta'(t) = (1, 1, 1)$$

Lo cual demuestra la no diferenciableidad en el punto P en cuestión, pues, junto al vector tangente de la circunferencia en P , estos vectores forman dos planos tangentes en P no coincidentes. Esto es, la **aplicación diferencial en ese punto no es inyectiva.** ■

Aunque problemático, este resultado no nos impide definir algunas cartas útiles para investigar las propiedades diferenciales del oloide. En primer lugar, definimos la siguiente parametrización en forma de:

Teorema 3.4 (Parametrización primigenia del oloide regular). *Sea $t \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[$ y sea $\lambda \in]0, 1[$, entonces la función:*

$$\alpha_o^p : \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_o^p(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, \lambda \sin u)$$

Definiendo $u = a_{O_1}(t)$ y $u = a_{O_2}(t)$, determina el **oloide sin incluir las dos circunferencias generadoras ni la curva intersección con el plano horizontal**. Llamaremos a esta superficie **oloide regular primigenio**. En esencia, las funciones:

$$\alpha_s^p : \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[\times]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_s^p(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, \lambda \sin u)$$

$$\alpha_i^p : \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[\times]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_i^p(\lambda, t) = ((1 - \lambda) \cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda) \sin t, -\lambda \sin u)$$

Definiendo $u = a_{O1}(t)$ determinan las dos superficies separadas que forman el **oloide regular primigenio**. Cada “hoja” de este oloide es una **superficie regular**.

Demostración:

Resulta inmediato al tratarse de la misma construcción que 3.1 definida sobre un abierto que excluye las curvas contenidas en los planos contenedores por las circunferencias generadoras. Es claro por 3.2 que las dos superficies son regulares, siendo las funciones requeridas una familia de ecuaciones de planos despejadas. ■

Este resultado es una excelente herramienta, pues si tomamos en cuenta que α_s^p y α_i^p son simétricas con respecto al plano XY (esto es $S_{XY}(\alpha_s^p) = (\alpha_i^p)$ con S_{XY} la matriz de simetría correspondiente), podemos aplicar uno de los giros con simetría descritos en los movimientos invariante, por ejemplo $G_{OX}^{90} \circ S_{mYZ}$, a dichas parametrizaciones. El resultado es, de forma inmediata, una familia de cartas que cubre la superficie del oloide **salvo las circunferencias generadoras**. Este objeto es homeomorfo al cilindro hueco y acotado sin incluir las circunferencias de los extremos.³

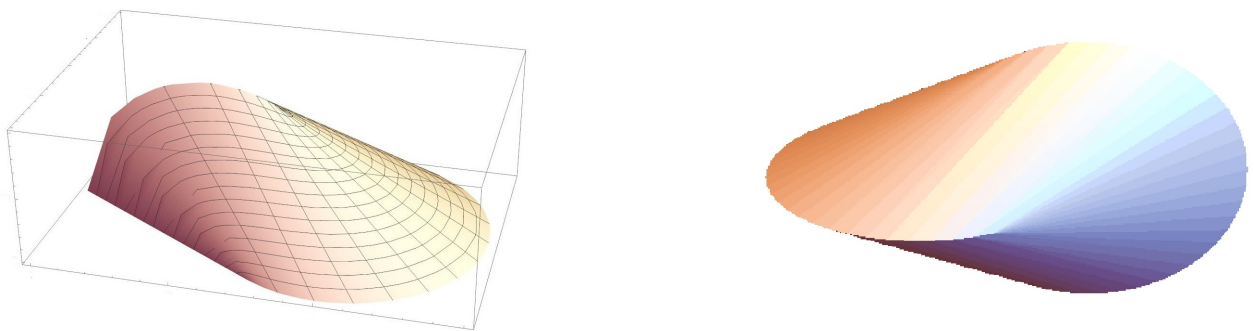


Figura 3.7: A la izquierda, la parametrización de una de las “hojas” del oloide primigenio. A la derecha, el oloide formado mediante cartas afines a esta hoja. La simetría del objeto permite utilizar esta misma parametrización movida de forma conveniente para cubrir todas las zonas de la superficie salvo las **circunferencias generadoras**

³Intuitivamente, se lograría proyectando cada mitad horizontal de una de las “circunferencias” del cilindro hacia un plano y cada mitad vertical de la otra a su ortogonal, alterando la longitud del arco que formaría tal proyección. Por último, haríamos coincidir cada segmento del cilindro con uno de los del oloide. Podemos ver una correspondencia en la figura 3.8 y el homeomorfismo en la siguiente sección

Este “nuevo oloide” es, precisamente, la versión regular de nuestra construcción y lo que llamaremos **oloide regular** u **oloide cilíndrico**. Las cartas que definen el objeto quedan recogidas en el siguiente:

Teorema 3.5 (Parametrización del oloide cilíndrico o regular). *La superficie conocida como **oloide regular** viene dada por la siguiente colección de cartas:*

$$\gamma(\lambda, t) = \left. \begin{array}{l} \gamma_1(\lambda, t) = \alpha_s^p(\lambda, t) \\ \gamma_2(\lambda, t) = \alpha_i^p(\lambda, t) \\ \gamma_3(\lambda, t) = (G_{OX}^{90} \circ S_{mYZ})\alpha_s^p(\lambda, t) \\ \gamma_4(\lambda, t) = (G_{OX}^{270} \circ S_{mYZ})\alpha_s^p(\lambda, t) \end{array} \right\}$$

$$\text{Con } \lambda \in]0, 1[\text{ y } t \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[$$

Demostración:

Por ser esta colección de cartas un conjunto de movimientos aplicados en sí a la parametrización primigenia, serán conservadas mediante estas transformaciones las propiedades que la caracterizan de homeomorfismo diferenciable. Aparte, como hemos demostrado en la sección anterior, estos movimientos desplazan puntos del oloide a otros puntos del oloide, por lo que sus intersecciones coinciden tal y como se espera de la parametrización mediante cartas. Por lo que resulta inmediato por 3.4 que definen una superficie regular. ■

3.6 Homeomorfismo entre el cilindro y el oloide regular

Para definir este homeomorfismo tan interesante utilizaremos un cilindro acotado de longitud y radio 1 cuyo eje sea el OX y su altura viaje desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el $(1, 0, 0)$. Las ecuaciones de este cilindro vendrán dadas por:

$$C_0 = \left. \begin{array}{l} y^2 + z^2 = 1 \\ 0 < x < 1 \end{array} \right\}$$

Con parametrización dada mediante:

$$C(\lambda, t) = (\lambda, \cos t, \sin t)$$

Cumpléndose $\lambda \in]0, 1[$ y $t \in [0, 2\pi[$. Concretamente vamos a utilizar la mitad superior abierta del cilindro. Esto es, el conjunto restringido únicamente al intervalo $[0, \pi[$. Primero definiremos la función:

$$\delta_1 : C_0^\pi \longrightarrow Ol$$

$$\delta_1(\lambda, \cos t, \sin t) = \left((1 - \lambda) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}t \right) + \lambda \cos u(t), (1 - \lambda) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}t \right), \lambda \sin u(t) \right)$$

Donde C_0^π es el semicilindro superior abierto antes definido y $u(t) = a_{O1} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}t \right)$. Se tiene que la función δ es homeomorfismo, pues es composición de funciones claramente continuas en todas sus componentes. Es sobreyectiva si vemos la aplicación delta como una composición entre la parametrización inversa del semicilindro C^{-1} , la

aplicación $f(\lambda, t) = \left(\lambda, \frac{4}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$ y la parametrización α_s , todas biyectivas y bien definidas. Podemos, entonces definir su inversa tal que:

$$\delta_1^{-1} : Ol \longrightarrow C_0^\pi$$

$$\delta_1^{-1}((1 - \lambda)\cos t + \lambda(1 + \cos u), (1 - \lambda)\sin t, \lambda \sin u) = \left(\lambda, \cos\left(\frac{3}{4}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right), \sin\left(\frac{3}{4}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$

Que no es más que la composición al revés de las inversas de la terna antes dada. Esto garantiza el homeomorfismo entre el semicilindro y una de las hojas del oloide.

Del mismo modo, podemos garantizar el homeomorfismo entre el semicilindro inferior y la hoja inferior del oloide. Tan solo haría falta tomar $t \in [-\pi, 0[$ y definir la siguiente función δ :

$$\delta_2 : C_{-\pi}^0 \longrightarrow Ol$$

$$\delta_2(\lambda, \cos t, \sin t) = \left((1 - \lambda)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}t\right) + \lambda \cos u(t), (1 - \lambda)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}t\right), \lambda \sin u(t)\right)$$

Con $u(t) = a_{O2}\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}t\right)$. Tenemos perfectamente definidos, entonces, dos homeomorfismos. La continuidad en los puntos de la forma $(\lambda, 1, 0)$ se obtiene inmediatamente tomando límites en cualquiera ellos y viendo que coinciden en ambas funciones δ_1, δ_2 . Ocurre análogamente para los de la forma $(\lambda, -1, 0)$. Todas estas nociones se pueden resumir (y a la vez servir de demostración) en el siguiente:

Lema 3.3. *El oloide regular $Ol - (S_h \cup S_v)$ es homeomorfo a cualquier cilindro acotado sin extremos.*



Figura 3.8: A la derecha, el cilindro sin las circunferencias delimitadoras. A la izquierda, su correspondencia con el oloide regular cilíndrico. Nótese que las curvas no rectas no están incluidas en los conjuntos.

Construcciones basadas en el oloide

Recuerdo claramente que acababa de llegar a Inglaterra para estudiar. Era la hora del té y habían servido pan. Me daba demasiada vergüenza admitir que nunca había untado un pan. Lo intenté. No fue tan difícil.

Paul Erdős

Dedicaremos este último capítulo a manipular el esqueleto original del oloide con el fin de obtener otras construcciones similares. Realizaremos, de forma un poco menos rigurosa por el bien de la apreciación del resultado, los cálculos necesarios para determinar qué punto de cada circunferencia generadora coincide exclusivamente con otro (salvo en perspectiva de ciertos movimientos invariantes del oloide ya estudiados, claro).

4.1 Oloide tras alteración de radios

Radios r iguales con $r \neq 1$

Este caso resulta trivial si tenemos en cuenta que el objeto formado por dos circunferencias ortogonales que pasan por el mismo centro con radio r , no es más que el resultado de aplicar **una homotecia de centro el punto medio de los dos centros** de las circunferencias. Concretamente, **una homotecia de razón r** . Así, la envolvente convexa resultará ser **un nuevo oloide**¹ formado por segmentos de longitud $\sqrt{3}r^2$

Radios distintos

Supongamos, sin pérdida de generalidad por afinidades, que $r_1 = 1$ es el radio de la circunferencia horizontal y $r_2 \neq 1$ el de la vertical. Suponer radios r, r' distintos a estos será el equivalente a homoteciar desde el punto medio de los centros de la circunferencia haciendo uso de una razón r tal que $r \cdot 1 = r$ y $r \cdot r_2 = r'$, por lo que abordando este problema generalizaremos todos los demás. Estudiemos el caso:

Observemos que la diferencia principal entre las circunferencias generadoras originales y estas nuevas circunferencias, es que el radio de la vertical ha aumentado a razón r_2 y que el centro se ha alejado por el eje OX a una distancia r_2 . Esto es:

$$S_h = \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_v = \left. \begin{array}{l} (r_2 - x)^2 + z^2 = r_2^2 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Supongamos pues el punto $P = (\cos t, \sin t, 0) \in S_h$. Imitando la construcción del oloide en el capítulo anterior, buscamos un punto $Q = (r_2 + r_2 \cos u, 0, r_2 \sin u)$ de S_v con $\sin u > 0$ tal que su vector tangente forme con el tangente a S_h en P un plano concreto. Dicho plano cumplirá intersecar con ambas circunferencias únicamente en P y Q . Haciendo el cálculo:

¹Al fin y al cabo, la homotecia altera las medidas, pero conserva los ángulos.

$$n(\pi_t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -r_2 \sin u & 0 & r_2 \cos u \end{vmatrix} = (r_2 \cos t \cos u, r_2 \sin t \cos u, r_2 \cos t \sin u)$$

Es decir:

$$\pi_t \equiv (r_2 \cos t \cos u)x + (r_2 \sin t \cos u)y + (r_2 \cos t \sin u)z = r_2 \cos u$$

Si sustituimos en la ecuación un radio positivo y partimos de un punto $P = (\cos t, \sin t, 0)$ dado, tendremos que solo nos hará falta obligar a la ecuación del plano a cumplir la ecuación de S_v con discriminante nulo. Veamos un ejemplo con $r_2 = 3$ y el punto $P = (-1, 0, 0)$ (o sea, $t = \pi$).

$$\pi_\pi \equiv -(3 \cos u)x - (3 \sin u)z = 3 \cos u$$

Vemos claro que el propio punto P cumple esta ecuación. Buscamos los valores de u tales que la solución al cortar la circunferencia S_v sea de discriminante nulo. Se tiene que:

$$z = -\frac{3 \cos u + (3 \cos u)x}{3 \sin u}$$

$$(3 - x)^2 + \left(-\frac{\cos u + (\cos u)x}{\sin u} \right)^2 = 9$$

La solución con discriminante nulo de esta ecuación viene dada por:

$$x = \frac{3 - \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}{1 + \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}$$

Desarrollando, obtenemos:

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u \rightarrow x = 3 - 4 \cos^2 u$$

y como $x = 3 + 3 \cos u$, se tiene que $\cos u = -3/4$. Así, el punto Q buscado será $Q = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{\sqrt{63}}{4} \right)$. Al sustituir los puntos diametrales $(0, 1, 0)$ y $(0, -1, 0)$ de la misma forma, resulta claro que están en correspondencia con los puntos diametrales de la circunferencia vertical independientemente del radio de esta. Por supuesto, las afinidades permiten determinar los segmentos mediante simetrías una vez se haya determinado un octante de este nuevo "oloide".

Por supuesto, podemos generalizar este cálculo para cualquier r_2 o $P = (\cos t, \sin t, 0)$. Tendríamos que:

$$z = \frac{\cos u - (\cos t \cos u)x}{\cos t \sin u}$$

$$(r_2 - x)^2 + \left(\frac{\cos u - (\cos t \cos u)x}{\cos t \sin u} \right)^2 = r_2^2$$

Y con discriminante nulo:

$$x = \frac{r_2 + \frac{\cos^2 u}{\cos t \sin^2 u}}{1 + \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}$$

Como $\cos t \sin^2 u = \cos t - \cos t \cos^2 u$ y $x = r_2 + r_2 \cos u$ se tiene que:

$$\cos u = \frac{r_2 \cos t}{1 - r_2 \cos t}$$

Lo que determina por completo la figura. Al igual que ocurre con el oloide original, existe un sector de la circunferencia para el cuál no está definido este cálculo. Este sector quedará determinado por los puntos cuya coordenada oloidal (en este nuevo cálculo) coincida con $Q = (2r_2, 0, 0)$. En cuanto a tomar $\cos t = 1/r_2$ en π_t , punto que no permite la aplicación del cálculo, se tiene que:

$$\pi_t \equiv (\cos u)x + (\sin u)z = r_2 \cos u$$

La única solución posible es cualquiera con coordenadas $(r_2, y, 0)$, cosa imposible en S_v . La función determinadora de coordenadas oloidales no está definida para tal punto. Esto se debe a que se encuentra en el sector antes nombrado.

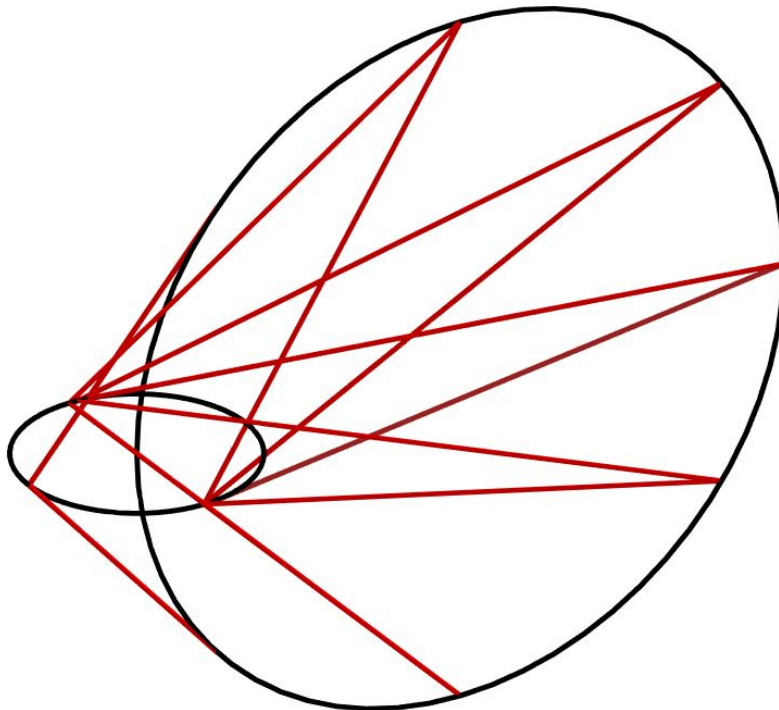


Figura 4.1: El desarrollo de un oloide de distintos radios. Los puntos diametrales permanecen relacionados entre sí aún con el cambio de radio.

4.2 Aumento de la distancia entre circunferencias

En el siguiente caso supondremos que las circunferencias generadoras pasan cada una por el exterior de la otra. Vamos a determinar la relación entre los puntos de la misma forma. Supongamos:

$$S_h = \left. \begin{array}{l} (-a-x)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_v = \left. \begin{array}{l} (b-x)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

con $|a-b| > 1$ y $0 < a, b$. Afínmente, podemos trabajar con:

$$S_h = \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_v = \left. \begin{array}{l} (d-x)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Se tiene entonces el mismo enfoque que en el problema de los radios con $r_2 = 1$ pero con el centro del S_v en $x = b + a$

$$n(\pi_t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{vmatrix} = (\cos t \cos u, \sin t \cos u, \cos t \sin u)$$

Es decir:

$$\pi_t \equiv (\cos t \cos u)x + (\sin t \cos u)y + (\cos t \sin u)z = (1 + d \cos t) \cos u$$

Despejando y sustituyendo en la circunferencia:

$$z = \frac{(1 + d \cos t) \cos u - (\cos t \cos u)x}{\cos t \sin u}$$

$$(d-x)^2 + \left(\frac{(1 + d \cos t) \cos u - (\cos t \cos u)x}{\cos t \sin u} \right)^2 = 1$$

Cuya solución con discriminante 0 es:

$$x = d + \frac{1}{2 \cos t} \rightarrow \cos u = \frac{1}{2 \cos t}$$

En comparación con el último problema resulta mucho más sencillo. Sin embargo, ocurre una complicación en los puntos diametrales de S_h . Esto es, los puntos con $\cos t = 0$ no tienen cabida en esta última fórmula. Esto se debe a que, de sustituir puntos diametrales en la ecuación del plano π_t nos lleva a, por ejemplo:

$$\pi_t/2 \equiv 0 = \cos u$$

Y se deduce que a tales puntos le corresponden los puntos diametrales de S_v

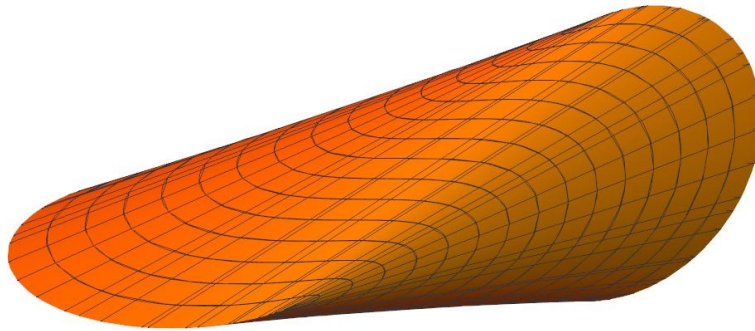


Figura 4.2: El desarrollo de un oloide de circunferencias ortogonales fuertemente separadas. Los puntos diametrales permanecen relacionados entre sí aún con la separación.

4.3 Otras Ideas

Aunque estas dos últimas construcciones han sido relativamente sencillas, pueden idearse otras de características más espectaculares. Podemos observar qué le ocurre al oloide si decidimos girar una de las circunferencias, digamos la horizontal, un número de grados. Resulta impresionante cómo los segmentos oloidales continúan siendo aquellos que miden $\sqrt{3}$. Esto permite construir su parametrización de la misma forma que se ha hecho con el oloide original, obteniendo nuevas funciones para acordar qué coordenada oloidal corresponde a cada punto. Es decir, plantear:

$$P + (Q - \vec{P}) = Q$$

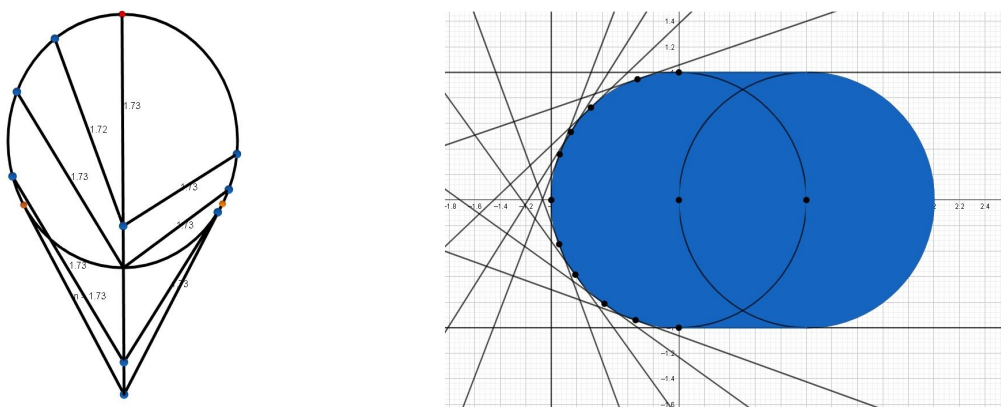


Figura 4.3: A la izquierda, el desarrollo de un **oloide oblicuo** (25 grados) visto desde arriba. A la derecha, la envolvente convexa (y técnicamente, un oloide oblicuo también) de dos circunferencias de planos coincidentes obtenidas al girar 90 grados una de ellas.

De forma que $\|(\vec{Q}-\vec{P})\| = \sqrt{3}$, con P y Q puntos de las dos circunferencias. Ocurre que un giro de 90 grados que deje las circunferencias en planos coincidentes construye mediante este método un cilindro plano con dos semicircunferencias en los extremos, lo que supone una excepción igual de interesante. Realizar un giro mayor presenta un caso análogo por simetrías al primero.

Otro caso interesante es el del **esfericón**. Objeto descubierto por **David H. Hirsch** a finales del siglo XX nacido de cortar un **bicono** concreto y girar una de sus mitades 90 grados. El bicono debe cumplir poseer una apertura de también 90 grados entre su vértice y dos extremos diametrales. Pegando las dos mitades, una de ellas girada, se obtiene el objeto. En relación con lo estudiado, el **esfericón** se define como **la envolvente convexa de dos semicircunferencias ortogonales con centros coincidentes**, y su construcción es idéntica a la del oloide. Tanto en su desarrollo original, como aplicando alteraciones vistas en este capítulo. Existen muchas construcciones semejantes al **esfericón** obtenidas mediante el patrón **corte-giro-pegado**, y muchos de ellos son, a su vez, envolventes convexas

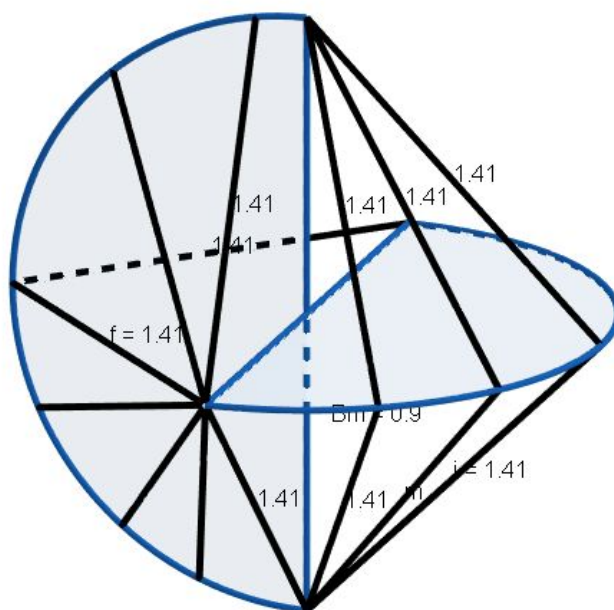


Figura 4.4: Desarrollo de un esfericón

Conclusión (o Sobre Utilidades)

De lo que no se puede hablar debe uno callarse

Ludwig Wittgenstein

Como ya se ha dicho, el oloide fue diseñado, descubierto, estudiado y utilizado por el escultor e ingeniero **Paul Schatz**. Al igual que todas las figuras geométricas, superficies, polígonos y nudos topológicos, tantas formas hay de describir y utilizar un juguete matemático como puntos de vista se tenga la intención de abrir. Nació de vencer las limitaciones del poliedro más simple de la existencia espacial: el cubo, y aunque nuestro enfoque haya dejado a un lado este origen, lo cierto es que puede caracterizarse el oloide como homeomorfismo de esfera o como generado mediante deslizamientos de otras figuras tridimensionales. Este es solo un estudio de tantos, centrado en la posibilidad de aplicar teoremas de geometría diferencial y afín.

Manifestada queda la importancia de la geometría convexa en este documento, que no solo acompaña como premisa, sino también como pie a definir figuras y superficies consecuencia de fabricar convexidad entre conjuntos. La parametrización construida en capítulos anteriores se debe, precisamente, a la idea de segmento, axioma imprescindible de lo convexo. La consecuencia de dicho cálculo no deja de ser un semienigma, un resultado útil, que otorga pistas sobre la relación entre las curvas de dos circunferencias ortogonales. Resulta visible, aunque camuflado, el peso de la fórmula $\cos u = \frac{-2\cos t}{2\cos t - 1}$ en la definición y cálculo de las superficies del capítulo 4, así como las posibilidades diferenciales que permite la parametrización del oloide regular definida poco antes en el capítulo 3. Formas fundamentales, curvas de nivel o cálculo geodésico son muchas de las cosas que permiten tales resultados en relación con el oloide y las figuras generadas a semejanza.

Las matemáticas, que presumen de ser holísticas, se ven obligadas conforme avanzan al límite de sus posibilidades a ser más concretas y especializadas. El paso de gigante entre el método de resolución de infinitas ecuaciones de segundo grado y la resolución aproximada de la específica ecuación de calor, por ejemplificar, es un problema que también afecta a la geometría, que escala desde definir espacios vectoriales en casi cualquier conjunto hasta estudiar la rigidez de la esfera, y nada más que la esfera. Por esto, cada vez resulta de mayor necesidad estudiar superficies concretas y generalizar construcciones a partir de ellas, aunque sean tan solo dos o tres.

Bibliografía

- [1] M.A. Hernández, J.A. Pastor. *Un curso de Geometría Diferencial*, Doce Calles, S.L., 2010.
- [2] H. Dirnböck, H. Stachel. *The Development of the Oloid*, Journal for Geometry and Graphics, 1,(1997) No.2, 105-118.
- [3] Paul Schatz Foundation: <http://www.paul-schatz.ch/en/>.
- [4] M. Ritoré. *Geometría de Conjuntos Convexos*: https://www.ugr.es/~jperez/docencia/GeomConvexos/geometria_convexos-v2.pdf.
- [5] J. R. Munkres, *Topología*, 2ª Edición, Prentice Hall, 2002.
- [6] A. Sen. *Geometry in problems*, American Mathematical Society. 2016.
- [7] Wolfram MathWorld. Sphericon <http://mathworld.wolfram.com/Sphericon.html>