Introducción al Método Variacional: aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Yolanda Román Alcaide

Tutor:
Pedro J. Martínez Aparicio

Grado en Matemáticas

Junio, 2020
Universidad de Almería

Agradecimientos

A mi tutor, Pedro J., por estar siempre dispuesto a aconsejarme y guiarme durante la redacción de este TFG. Gracias por brindarme toda la ayuda necesaria para comprender y hacerme descubrir esta fascinante rama de las matemáticas.

Índice general

Abstract in English

We introduce the Variational Method in this final degree proyect, which is a qualitative method used to solve problems of partial differential equations. It also allows, under certain conditions, to convert the problem into a minimization one.

The main objective of the study of the variational method is its application to partial differential equations, since it allows to prove the existence and uniqueness of solution in a specific function space.

The application of this method requires mathematical preliminaries, especially of Functional Analysis and function spaces, which we present throughout the first four chapters summarized below.

In the first chapter, we familiarize ourselves with the notation of this work, we study basic concepts and results about normed spaces and the functional ones in these spaces. In particular, isomorphisms, reflective Banach spaces, linear operators as well as adjacent operators. Finally, we present the Riesz-Fréchet theorem, which facilitates the construction of linear and continuous functions in Hilbert's spaces. This forms the basis of the proofs of two important theorems for the resolution of PDEs: the Stampacchia theorem and the Lax-Milgram theorem.

We start the study of function spaces in chapter 2 with the L_p spaces. First, we give a brief introduction to the measurement spaces of probability theory in order to define the L_p spaces. Subsequently, we study the properties of these spaces, which are fundamental for the results of Sobolev's spaces since they are formed by functions belonging to the L_p spaces.

In the third chapter, we expose Hilbert's spaces, which are very useful since they allow us to analyze in a simpler way the problems of PDEs. We introduce the scalar product concept and some of its characteristics. We present Hilbert's projection theorem, and the duality of such spaces. The last section of this chapter is dedicated to the theorems that allow us to prove the existence and uniqueness of solution of problems related to PDEs, these are Stampacchia's theorem and Lax-Milgram's theorem, the last one has the Riesz-Fréchet Representation's theorem as a particular case. We also show Banach's fixed-point theorem on which the demonstrations of the first two theorems mentioned above are based.

We present Sobolev's spaces in chapter 4, which are fundamental in the modern theory of PDEs since they intervene, first of all, in the search for solutions to partial differential equations. In this search, the concept of *weak solution* arises, which leads us to consider the notion of *weak derivative*, and therefore, to study the variational problem. They are also essential to prove the uniqueness and regularity of solutions, so we use these spaces throughout the process involved in the application of the variational method to boundary problems for PDEs. Sobolev spaces are Banach spaces formed by functions of L_p spaces with weak derivatives in L_p.

The last chapter focuses exclusively on the Variational Method. We raise the variational problem and we outline the process for solving problems of both ordinary dif-

ferential equations and elliptic partial diffetential equations, which we illustrate in the section below. Finally, we show the theorems that allow us to obtain the regularity of the weak solutions of elliptic partial differential equations.

Resumen en español

En este trabajo de fin de grado introducimos el Método Variacional, es un método cualitativo utilizado para resolver problemas de ecuaciones en derivadas parciales. También permite, bajo ciertas condiciones, convertir el problema en uno de minimización.

El objetivo fundamental del estudio del método variacional es su aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales puesto que nos permite probar la *existencia* y la *unicidad* de solución en un determinado *espacio de funciones*.

La aplicación de este método requiere ciertos preliminares matemáticos, sobre todo del análisis funcional y de los espacios de funciones, que presentamos a lo largo de los cuatro primeros capítulos, los cuales resumimos a continuación.

En el primer capítulo, nos familiarizamos con la notación que se va a utilizar en el trabajo, mostramos conceptos y resultados básicos sobre espacios normados y los funcionales en estos espacios. En concreto, los isomorfismos, los espacios de Banach reflexivos, los operadores lineales así como los operadores adjuntos. Por último, presentamos el teorema de Riesz-Fréchet, el cual facilita la construcción de funcionales lineales y continuos en espacios de Hilbert. Este constituye la base de las demostraciones de dos teoremas importantes para la resolución de EDPs: el teorema de Stampacchia y el teorema de Lax-Milgram.

Comenzamos el estudio de espacios de funciones en el capítulo 2 con los espacios L_p. En primer lugar, introducimos brevemente los espacios de medida de la teoría de probabilidades para poder definir los espacios L_p. Por otro lado, mostramos las propiedades de estos espacios, las cuales son fundamentales para los resultados de los espacios de Sóbolev dado que estos están formados por funciones pertenecientes a los espacios L_p.

En el tercer capítulo, exponemos los espacios de Hilbert, los cuales son de gran utilidad puesto que nos permiten analizar de manera más sencilla problemas de EDPs. Introducimos el concepto de *producto escalar* y algunas de sus características. Presentamos el teorema de la proyección de Hilbert, y la dualidad de dichos espacios. La última sección de este capítulo está dedicada a los teoremas que nos permiten probar la existencia y la unicidad de solución de problemas relacionados con EDPs, estos son el teorema de Stampacchia y el teorema de Lax-Milgram, el cual tiene como caso particular el teorema de Representación de Riesz-Fréchet. También mostramos el teorema del punto fijo de Banach en el cual se basan las demostraciones de los dos primeros resultados mencionados anteriormente.

Presentamos los espacios de Sóbolev en el capítulo 4, los cuales son fundamentales en la teoría moderna de EDPs puesto que intervienen, en primer lugar, en la búsqueda de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales. En esta búsqueda surge el concepto de *solución débil* lo que nos lleva a considerar la noción de *derivada débil*, y por lo tanto, a estudiar el problema variacional. También son esenciales para probar la unicidad y la regularidad de soluciones, por lo que utilizamos estos espacios en todo el proceso que conlleva la aplicación del método variacional a problemas de contorno para EDPs. Los espacios de Sóbolev son espacios de Banach formados por funciones de espacios L_p con derivadas en L_p en sentido débil.

El último capítulo se centra exclusivamente en el Método Variacional. Comenzamos planteando el problema variacional y esbozamos el proceso a seguir para la resolución de problemas tanto de ecuaciones diferenciales ordinarias como de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, los cuales ilustramos en la sección que le procede. Finalmente, mostramos los teoremas que nos permiten obtener la regularidad de las soluciones débiles de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

1 Conceptos previos

En este capítulo introducimos la notación que se va a utilizar y unos preliminares sobre el análisis funcional. En concreto, mostramos algunos conceptos básicos en espacios normados necesarios para estudiar, en el siguiente capítulo, los espacios L_p, que son ejemplos de espacios normados.

1.1 Notación

- $L(X,Y)$ denota el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y.
- X^* espacio dual topológico de X.
- l_1 espacio de las series escalares absolutamente convergentes.
- c_0 espacio de las sucesiones convergentes a cero.
- $C_c^k(\Omega)$ denota el espacio de las funciones con derivadas continuas hasta orden k y con soporte compacto en Ω, para todo $k \geq 0$.
$$C_c^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f(x) = 0,\ \forall x \in \Omega \backslash K,\ con\ K\ compacto\}.$$
- $C^\infty(\Omega) = \cap_k C^k(\Omega)$.
- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.
- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.
- $C^k(\bar{\Omega})$ espacio de las funciones en $C^k(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, la función $x \mapsto D^\alpha u(x)$ admite una extensión continua a $\bar{\Omega}$.
- $L^p = L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que u es medible en Ω y $\int_\Omega |u(t)|^p \, d\mu(t) < \infty$, $1 \leq p < \infty\}$.
- $L^\infty = L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que u es medible en Ω y existe una constante C: $|u(t)| \leq C$, c.t.p. en $\Omega\}$.
- $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ espacio de medida.
- $|I|$ medida del conjunto I.
- $\mathbf{1}_K$ función característica de K, i.e., $\mathbf{1}_K = \begin{cases} 1 & en\ \ K \\ 0 & resto \end{cases}$
- $D^k g = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$, g definida en $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = k$.
- Gradiente de la función u: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
- Laplaciano de u: $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- Espacios de Sóbolev: $W^{1,p}$, $W_0^{1,p}$, $W^{m,p}$, H^1, H_0^1, H^m.

En la siguiente sección definimos los espacios normados, los cuales vamos a considerar a lo largo del trabajo. También incluimos conceptos básicos sobre isomorfismos entre espacios normados, para estudiar en la sección posterior la propiedad de reflexividad.

1.2 Isomorfismos

El objetivo de los isomorfismos entre dos espacios es identificar dichos espacios para que el estudio de uno de ellos pueda reducirse al estudio del otro, lo cual facilita su comprensión.

Definición 1.1 (**Espacio normado**). *Un espacio normado es un par* $(X, \|\cdot\|)$*, donde* X *es un espacio vectorial y* $\|\cdot\|$ *es una norma en* X*.*

Definición 1.2 (**Isomorfismo**). *Se dice que un operador* $T \in L(X,Y)$ *es un isomorfismo entre los espacios normados* X *e* Y *si es biyectivo y su inversa* $T^{-1} \in L(X,Y)$*.*

Entonces decimos que X e Y son isomorfos.

Definición 1.3 (**Isometría**). *Sean* X *e* Y *espacios normados, una aplicación* $T : X \to Y$ *es una isometría si cumple*

$$\|T(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Es decir, una isometría es una aplicación entre dos espacios que conserva las distancias entre sus puntos.

Definición 1.4 (**Isomorfismo isométrico**). *Sean* X *e* Y *espacios normados, sea* $T : X \to Y$ *una aplicación lineal, se dice que* T *es un isomorfismo isométrico si es biyectiva, lineal, continua con inversa* T^{-1} *continua y conserva las distancias.*

Entonces decimos que X e Y son isométricamente isomorfos, esto es, X se identifica totalmente con Y.

1.3 Espacios reflexivos

La reflexividad es una propiedad topológica que presentan los espacios de Banach, la cual establece la simetría total entre un espacio y su dual.

Recordemos que un espacio X es de **Banach** si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy de puntos de X converge a un punto de ese mismo espacio. En este caso, se dice también que la norma de X es una norma completa.

Sea X un $\mathbb{k}$–espacio vectorial normado, su dual topológico X^* es un espacio de Banach con la norma dual usual.

Definición 1.5 (**Inyección canónica**). *La inyección canónica de* X *en su bidual* X^{**} *es la aplicación* $J_X : X \to X^{**}$ *dada por* $J_X(x)(f) = f(x)$*,* $\forall x \in X$*,* $\forall f \in X^*$*. Además,* J_X

- *es lineal:* $J_X(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$*,* $\forall f, g \in X^*$ *y* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$*.*
- *y conserva las normas:* $|J_X(f) - J_X(g)| = |f(x) - g(x)| = |(f-g)(x)| \leq \|x\|\,\|f-g\|$*,* $\forall f, g \in X^*$*.*

Definición 1.6 (Espacio reflexivo). *Un espacio normado X es reflexivo si la isometría J_X es sobreyectiva. Además, X es isométrico a su bidual.*

Es decir, X es reflexivo si $J_X : X \to X^{**}$ es una biyección, esto es, para todo $T \in X^{**}$, existe $x \in X$ tal que $T(f) = f(x)$, para todo $f \in X^*$.

Teorema 1.1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, sea $M \subset X$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces M es reflexivo con la norma inducida por X.*

Para asegurar que un espacio de Banach es reflexivo, no es suficiente identificarlo con su bidual, se tiene que comprobar la sobreyectividad de la inyección canónica.

Ejemplos

Ejemplo 1.1. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Sea H un espacio de Hilbert y $J : H \to H^{**}$ la inyección canónica. Para $T \in H^{**}$ debemos encontrar $u \in H$ tal que $T = J(u)$.

Consideramos el funcional $f \in H^*$ definido por $f(x) = (x|y)$, $\forall x, y \in H$. La aplicación de H en H^* dada por $y \mapsto f$ es conjugado-lineal e isométrica, y el teorema de Riesz-Fréchet (teorema 1.2) nos dice que es sobreyectiva.

Consideramos la aplicación $\varphi : H \to \mathbb{K}$ definida por

$$\varphi(y) = \overline{T(f)}, \quad \forall y \in H.$$

Como la aplicación $y \mapsto f$ es conjugado-lineal y φ es un funcional lineal en H, se tiene que

$$|\varphi(y)| \leq \|T\| \, \|f\| = \|T\| \, \|y\|, \ \ \forall y \in H,$$

y esto implica que $\varphi \in H^*$.

Por tanto, $\exists u \in H$ tal que $\tilde{u} = \varphi$. Para $\tilde{f} \in H^*$, notamos $\tilde{f} = f$, entonces para $y \in H$ tenemos

$$T(\tilde{f}) = T(f) = \overline{\varphi(y)} = \overline{\tilde{u}(y)} = \overline{(y|u)} = (u|y) = f(u) = \tilde{f}(u) = (J(u))(\tilde{f}),$$

probando así que $T = J(u)$.

Ejemplo 1.2. *l_1 no es reflexivo.*

Sabemos que l_1^* se identifica con l_∞, entonces l_1^{**} es isométricamente isomorfo a l_∞^*, como este no es separable, l_1 no puede ser homeomorfo a l_1^{**}. Entonces l_1 no es reflexivo.

El espacio l_1 muestra que la separabilidad de un espacio no es heredada necesariamente por su espacio dual.

Ejemplo 1.3. *El espacio de Banach c_0 no es reflexivo.*

Sabemos que c_0^* se identifica con l_1, entonces c_0^{**} se identifica con l_1^*, y este se identifica con l_∞. Por tanto, c_0^{**} es isométricamente isomorfo a l_∞. Pero como l_∞ no es separable, c_0^{**} tampoco lo es, entonces c_0 no es homeomorfo a c_0^{**}, y la inyección canónica de c_0 no puede ser sobreyectiva.

1.4 Operador adjunto

Los elementos de los espacios sobre los que trabajamos son funciones, a las aplicaciones lineales entre dichos espacios que transforman unas funciones en otras se las denomina “operadores”. Por consiguiente, un **operador lineal** es una aplicación lineal de un espacio en otro, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1.7 (**Operador adjunto**). *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Definimos T^* como el operador adjunto de T, $T^* : Y^* \to X^*$ dado por $T^*(f) = f \circ T$, $\forall f \in Y^*$.*

Proposición 1.1. *Dados X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$, se tiene que $T^* \in L(Y^*, X^*)$ es el único operador que cumple*

$$<x, T^* f> = <Tx, f>, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in Y^*.$$

Demostración:

Sean $x \in X$ y $f \in Y^*$

$$<x, T^* f> = (T^* f)x = (f \circ T)(x) = f(Tx) = <Tx, f>.$$

Supongamos que $G \in L(Y^*, X^*)$ es otro operador cumpliendo lo mismo entonces dado $f \in Y^*$ se tiene

$$<x, Gf> = <Tx, f> = <x, T^* f>, \quad \forall x \in X.$$

Por lo que $Gf = T^* f$ y como f era un funcional cualquiera en Y^*, entonces $G = T^*$.

■

1.5 Teorema de Riesz-Fréchet

En esta sección incluimos una primera definición de espacios de Hilbert, en los cuales es muy fácil definir funcionales lineales y continuos. Todos los que mostramos en este trabajo se obtienen mediante el teorema de Riez-Fréchet. Analizamos en detalle los espacios de Hilbert en el Capítulo 3.

Definición 1.8 (**Espacio de Hilbert**). *H es un espacio de Hilbert si está equipado con el producto interno $<\cdot,\cdot> : H \times H \to \mathbb{R}$ cuya norma asociada es completa*

$$\|u\|_H = (<u,u>)^{1/2}.$$

Dado $y \in H$ definimos el funcional $f_y \in H^*$ por

$$f_y(x) = <x, y>, \quad \forall x \in H.$$

Teorema 1.2 (**Teorema de Riesz-Fréchet**). *La aplicación $H \to H^*$, $y \mapsto f_y$ produce un isomorfismo isométrico de H sobre H^*, es decir, para toda $f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que $f = <\cdot, y>$. Además, verifica $\|f\| = \left\|y\right\|$.*

Demostración:

Sabemos que $f_y \in H^*$ con $\|f_y\| \le \|y\|$ ya que por Cauchy-Schwarz tenemos

$$|f_y(x)| = |<x,y>| \le \|y\|\,\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Fijemos un $y \in H \backslash \{0\}$, consideremos el vector $x = \frac{y}{||y||} \in B_H$ que realiza la norma de f_y

$$||f_y|| \geq |f_y(x)| = f_y(x) = \frac{<y, y>}{||y||} = ||y||.$$

Por tanto, $||f_y|| = ||y||$. Con esto hemos probado que la representación $y \mapsto f_y$ es isométrica. Probemos que es sobreyectiva.

Sea $f \in H^* \backslash \{0\}$ y sea $\mathcal{S} = Kerf \subseteq H$. Como $\mathcal{S} \neq H$ entonces $\mathcal{S}^\perp \neq \{0\}$, por lo tanto existe un $z \in S^\perp$ con $||z|| = 1$.

Sea $y = \overline{f(z)}z \in \mathcal{S}^\perp$, se tiene que

$$\mathcal{S} \subseteq kerf_y,$$

mientras que

$$f_y(z) = <z, \overline{f(z)}z> = f(x)||z||^2 = f(z).$$

Pero como $\mathcal{S}$ es un hiperplano, $H = \mathcal{S} \oplus \mathbb{K} \cdot z$, f, f_y son lineales y coinciden en dos sumandos, deducimos que $f = f_y$.

■

2

Espacios L_p

En este capítulo presentamos los espacios L_p analizando sus propiedades, desigualdades y resultados más importantes para definir posteriormente los espacios de Sóbolev.

En primer lugar, definimos estos espacios considerando conceptos de la teoría de la medida. Por otro lado, mostramos las propiedades de los espacios L_p, esta es una de las secciones más importantes puesto que presenta desigualdades y resultados relevantes para estudiar el **Método Variacional**. Como por ejemplo la desigualdad de Hölder (teorema 2.6), el teorema de Representación de Riesz (teorema 2.1) y el teorema de Densidad (teorema 2.3), entre otros.

2.1 Introducción

Definición 2.1 (Espacio de medida). *$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida si Ω es un conjunto y*

I) $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en Ω, esto es, $\mathcal{M}$ es una familia de subconjuntos de Ω tales que

- *a) $\emptyset \in \mathcal{M}$.*
- *b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$.*
- *c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, $\forall A_n \in \mathcal{M}$.*

II) μ es una medida, i.e., $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ verifica

- *a) $\mu(\emptyset) = 0$.*
- *b) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para toda familia de conjuntos disjuntos $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$.*

A los elementos de $\mathcal{M}$ se los conoce como *conjuntos medibles* y a los elementos $A \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(A) = 0$ *conjuntos de medida nula*.

Una propiedad $\mathcal{P}$ se verifica *para casi todo punto* (c.t.p.) si y sólo si el conjunto donde $\mathcal{P}$ no se cumple tiene medida nula.

Definición de los espacios L^p

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ con medida de Lebesgue μ positiva y $\mathcal{M}$ una σ-álgebra en Ω. Los espacios $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ son espacios de Banach con la norma p usual, identificando como iguales las funciones que coinciden en casi todo punto.

- $L^1(\Omega)$ es el espacio de las funciones integrables Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}$.

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que f es medible Lebesgue y } \int_\Omega |f| < \infty \right\}.$$

- L^p con $1 < p < \infty$ es el espacio de las funciones p-integrables.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

con

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

- L^∞ es el espacio de las funciones esencialmente acotadas.

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq C, \ c.t.p.\}$$

con

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{ínf}\{C : |f(x)| \leq C\}.$$

Por simplificar, denotamos:
$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ por L^p.
$\int_\Omega f(t)\, d\mu(t)$ por $\int f$.

2.2 Propiedades

Dedicamos esta sección a los resultados más relevantes sobre los espacios L_p. Estos son imprescindibles para analizar las propiedades de los espacios de Sóbolev y resolver problemas por el método variacional.

Definición 2.2 (Exponentes conjugados). *p y q son exponentes conjugados entre sí, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 < p < \infty$.*

Teorema 2.1 (Representación de Riesz). *Sea $\varphi \in L_p^*$ con $1 < p < \infty$, entonces existe $g \in L_q$ tal que*

$$\varphi(f) = \int_\Omega f g \, d\mu, \quad \forall f \in L_p. \tag{2.1}$$

Para $\varphi \in L_1^*$, existe $g \in L_\infty$ cumpliendo (2.1) para toda $f \in L_1$.

Teorema 2.2. *Sean p y q exponentes conjugados con $1 < p < \infty$. Entonces*

$$L_p^* \cong L_q.$$

Además, $L_1^* \cong L_\infty$.

Proposición 2.1. *Los espacios L^p son reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Teorema 2.3 (Densidad). *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$, es decir*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ \text{tal que } \|f - f_1\|_1 \leq \varepsilon, \ \forall f \in L^1(\Omega).$$

Teorema 2.4. *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$.*

Definición 2.3. *Sea $1 \leq p < \infty$, se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f \mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ para todo $K \subset \Omega$ compacto.*

Lema 2.1. *Si $f \in L^p(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.*

Lema 2.2. *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f u = 0, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω.

Este lema es imprescindible para obtener la solución clásica de los problemas que tratamos.

Teorema 2.5. *$L^p(\Omega)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 2.6 (**Desigualdad de Hölder**)**.** *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración:

El lector puede consultar la demostración en [5], capítulo 4, teorema 4.6.

■

Teorema 2.7 (**Fischer-Riesz**)**.** *L^p es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración:

Remítase a [5], capítulo 4, teorema 4.8.

■

Teorema 2.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

La siguiente tabla resume las principales características de los espacios L_p cuando Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^N$:

	Reflexivo	Separable	Espacio dual
L^p con $1 < p < \infty$	Si	Si	L^q
L^1	No	Si	L^∞
L^∞	No	No	Estrictamente mayor que L^1

3 Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert nos permiten analizar de manera más sencilla algunos problemas relacionados con las ecuaciones en derivadas parciales. En primer lugar, definimos estos espacios, incluimos la proyección de Hilbert y algunos ejemplos. Por otro lado, presentamos la dualidad de los espacios de Hilbert. En la última sección mostramos los resultados que tendrán un papel clave en la resolución de los problemas mencionados mediante el método variacional.

3.1 Introducción

Definición 3.1 (**Producto escalar**). *Dado un espacio vectorial H, se define el producto escalar como la forma bilineal $(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ que satisface*

1. *Lineal en cada variable:*

   $(u+v,w) = (u,w)+(v,w)$,

   $(u,v+w) = (u,v)+(u,w)$ *y*

   $(\lambda u,v) = (u,\lambda v) = \lambda(u,v)$, $\forall u,v,w \in H$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *Simétrica:*

   $(u,v) = (v,u)$, $\forall u,v \in H$.

3. *Definida positiva:*

   $(u,u)_H \geq 0$, $\forall u \in H$.

   $(u,u)_H > 0$, *si* $u \neq 0$.

Propiedades

El producto escalar verifica:

1. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|(u,v)_H| \leq (u,u)_H^{1/2}(v,v)_H^{1/2}, \quad \forall u,v \in H.$$

2. La identidad del paralelogramo

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_H^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_H^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2\right), \quad \forall u,v \in H.$$

Definición 3.2 (**Espacio de Hilbert**). *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial dotado de un producto escalar $(\cdot,\cdot)_H$ y es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_H$ asociada al producto escalar.*

Ejemplos de espacios de Hilbert

Ejemplo 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, el espacio de Lebesgue $L^2(\Omega)$, de las funciones de cuadrado integrable, es un espacio de Hilbert con el producto escalar*

$$(u,v)_H = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

y la norma asociada

$$||u||_H = ||u||_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 3.2. *El espacio vectorial l^2 de sucesiones de cuadrado absolutamente sumable, $l^2 = \{\{x(n)\}_{n=1}^\infty : x(n) \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^2 < \infty\}$ siendo $\mathbb{K}$ el espacio real o complejo n-dimensional, es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$<x,y> = \sum_{n=1}^\infty x(n)\overline{y(n)}, \;\; x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty, y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in l^2.$$

Ejemplo 3.3. *El espacio de sucesiones casi nulas $c_{00} = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{C}, x_n = 0, \forall n \geq n_0\}$ con el producto escalar de l^2 no es completo.*

Proyección de Hilbert

Definición 3.3. *Sea $C \neq \emptyset$, definimos el elemento u_0 como la proyección de u sobre C. La denotamos por $P_C(u)$.*

Teorema 3.1 (Teorema de la proyección de Hilbert). *Sea $C \subset H$ un subconjunto convexo, no vacío y cerrado. Entonces existe un único elemento $u_0 \in C$ tal que*

$$||u-u_0|| = mín_{c\in C}||u-c||, \;\; \forall u \in H.$$

Además, u_0 es el único elemento que verifica:

$$u_0 \in C \; y \;\; (u-u_0, c-u_0) \leq 0, \; \forall c \in C.$$

Proposición 3.1. *La proyección P_C verifica*

$$||P_C(u_1) - P_C(u_2) \leq ||u_1 - u_2||, \;\; \forall u_1, u_2 \in H.$$

Esta proposición afirma que la proyección no aumenta las distancias.

Definición 3.4. *La proyección ortogonal sobre M, P_M, es un operador lineal.*

Proposición 3.2. *Si $M \subset H$ es un subespacio cerrado de H, la proyección de u sobre M, $u_0 = P_M(u)$, verifica*

$$u_0 \in M \;\; y \;\; (u-u_0, m) = 0, \;\; \forall m \in M.$$

3.2 Dualidad de los espacios de Hilbert

Definición 3.5 (Espacio dual algebraico). *Sea X un $\Bbbk$-espacio vectorial. Su dual algebraico X' es el conjunto de formas lineales definidas sobre X. Lo denotamos $X' = L^*(X,\mathbb{K})$.*

Definición 3.6 (Espacio dual topológico). *El dual topológico de X, X^*, es el conjunto de formas lineales y continuas de X en $\mathbb{K}$, es decir, $X^* = L(X,\mathbb{K})$ con la norma canónica de operadores definida por*

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Teorema 3.2 (Continuidad). *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Equivalen:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\,\|x\|_X, \ \ \forall x \in X.$$

2. *T es uniformemente continua.*
3. *T es continua.*
4. *T es continua en el origen.*

Proposición 3.3. *Dado un $\Bbbk$-espacio vectorial X separado y localmente convexo, con $X^* = L(X,\mathbb{K})$ su espacio dual topológico. Entonces la forma bilineal*

$$<\cdot,\cdot> : X \times X^* \to \mathbb{K}$$

$$(x, T) \mapsto <x, T> = T(x)$$

es dual.

Teorema 3.3. *Sean H un espacio de Hilbert, H^* su espacio dual topológico y $T \in H^*$. Entonces existe un único $u \in H$ tal que*

$$<T, v> = (u, v)_H, \ \ \forall v \in H.$$

Este teorema afirma que un espacio de Hilbert H se puede identificar con su espacio dual H^*.

3.3 Teoremas para la resolución de problemas por el Método Variacional

En esta sección mostramos los resultados que nos permiten probar la existencia y unicidad de solución de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 3.7. *Sea H un espacio de Hilbert. La aplicación $< \cdot,\cdot >: H \times H \to \mathbb{R}$ es*

- *una forma bilineal, si es lineal en cada una de sus variables.*

- *Continua, si cumple*
$$|a(u,v)| \leq C\,\|u\|_H\,\|v\|_H\,,\ \ \forall u,v \in H,$$
donde C es una constante universal.

- *Coerciva, si existe una constante* $\alpha > 0$ *tal que*
$$a(u,u) \geq \alpha\,\|u\|_H^2\,,\ \ \forall u \in H.$$

Teorema 3.4 (**Representación de Riesz-Fréchet**). *Sean* $(H, <\cdot,\cdot>_H)$ *un espacio de Hilbert,* H^* *su espacio dual y* $f \in H^*$*, entonces existe una única* $u \in H$ *tal que*

$$<u,v>_H = <f,v>_{H^*,H},\ \ \forall v \in H.$$

Además, $\|u\|_H = \|f\|_{H^*}$.

Demostración:

Consideramos la aplicación $T : H \to H^*$ definida por

$$\begin{aligned} u \mapsto T_u : H &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto < u,v >, \end{aligned}$$

la cual es lineal e inyectiva.

Como $T_u(v) =< u,v >$, se sigue que

$$\|T_u\|_{H^*} = sup_{v\in H}\frac{T_u(v)}{\|v\|} \leq sup_{v\in H}\frac{\|u\|\cdot\|v\|}{\|v\|} = \|u\|_H.$$

Además, si $v = u$ se tiene

$$\frac{T_u(u)}{\|u\|} = \frac{< u,u >}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|_H.$$

Por tanto, $\|T_u\|_{H^*} = \|u\|_H$.

Queda probado que $T : H \to T(H)$ es una isometría lineal biyectiva.

Por otro lado, $T(H)$ es cerrado por ser imagen isométrica del espacio completo H.

Probemos que $T(H)$ es denso en H^*. Para ello, veamos que todo funcional continuo $h : H^* \to \mathbb{R}$ $(h \in H^{**})$ que se anule en $T(H)$ es un funcional nulo en H^{**}.

En efecto, dado $h \in H^{**}$ con $h(T(u)) = 0$, $\forall u \in H$.

Como H es reflexivo, h representa la inyección canónica de H en H^{**}, entonces $h(T(u)) = T_u(h) = 0$, $\forall u \in H$. Así, $< u,h >= 0$, $\forall u \in H$, es decir, $h = 0$.

∎

Lema 3.1 (**Teorema del punto fijo de Banach**). *Si* $X \neq \emptyset$ *es un espacio métrico completo y* $S : X \to X$ *es una aplicación que verifica*

$$d(S(v_1),S(v_2)) \leq kd(v_1,v_2),\ \ \forall v_1,v_2 \in X,\ \ \forall k < 1.$$

Entonces S *tiene un único punto fijo* v*, i.e.,* $S(v) = v$.

Demostración:

Probemos la unicidad de v.

Si tomamos dos puntos fijos $v, \tilde{v} \in S$ tenemos que

$$d(S(v),S(\tilde{v})) = d(v,\tilde{v}) \leq kd(v,\tilde{v}),\ \ k < 1.$$

Por tanto, $d(v,\tilde{v}) = 0$, es decir, $v = \tilde{v}$.

Para demostrar la existencia de v tomamos cualquier $u_0 \in X$ y definimos la sucesión $u_{n+1} = S(u_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, para la cual obtenemos por inducción que

$$d(u_{n+1}, u_n) \leq k^n d(S(u_0), u_0).$$

Además, si $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq 1$ se tiene

$$d(u_{n+m}, u_n) \leq d(u_{n+m}, u_{n+m-1}) + ... + d(u_{n+1}, u_n) \leq (k^{n+m-1} + ... + k^n) d(S(u_0), u_0)$$
$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(S(u_0), u_0).$$

La sucesión (u_n) es de Cauchy y por tanto tiene límite $v \in X$.

Por ser S continua tenemos que

$$S(v) = lim_{n\to\infty} S(u_n) = lim_{n\to\infty} u_{n+1} = v.$$

Por lo tanto v es el punto fijo de S.

■

Teorema 3.5 (Stampacchia). *Dado un espacio de Hilbert H con $C \subset H$ un subconjunto compacto y convexo, $a(u,v)$ una forma bilineal y coerciva sobre H y $f \in H^*$ una forma lineal. Entonces existe una única $u \in H$ tal que*

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle, \quad \forall v \in C. \tag{3.1}$$

*Si a es **simétrica** entonces el elemento u está caracterizado por ser el mínimo de la función $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$. Es decir, u verifica*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = mín_{v\in C}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\right\}.$$

Demostración:

Probemos la existencia de u.

Fijado $u \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} a_u : H &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto a(u,v) \end{aligned}$$

es un funcional lineal y continuo, lo que nos permite aplicar el teorema de Riesz-Fréchet (teorema 1.2) para afirmar que existe un único elemento en H, que denotaremos $A(u)$, tal que $a(u,v) = (A(u), v)$, $\forall v \in H$. La aplicación $A : H \to H$ es un operador lineal que verifica

1. $||Au|| \leq C||u||$, $\forall u \in H$.
2. $(Au, u) \geq \alpha ||u||^2$, $\forall u \in H$.

Además, el teorema 1.2 también nos dice que existe un elemento $w \in H$ tal que $f(v) = (w, v)$, $\forall v \in H$. Por tanto, encontrar un u que verifique (3.1) equivale a encontrar u tal que

$$(Au, v-u) \geq (w, v-u), \quad \forall v \in C.$$

Que a su vez equivale a que v verifique

$$(\rho w - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0, \ \ \forall v \in C, \ \ \forall \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Esta desigualdad define a u como la proyección del elemento $\rho w - \rho Au + u$ para algún $\rho \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$u = P_C(\rho w - \rho Au + u).$$

Consideremos entonces la aplicación $S : C \to C$ dada por $v \mapsto P_C(\rho w - \rho Au + u)$. La función buscada u es un punto fijo de S.

Demostrar su existencia y unicidad se reduce a comprobar que S verifica las condiciones del teorema del punto fijo de Banach (lema 3.1). C es completo por ser cerrado en un espacio completo. Veamos por tanto que la correcta elección de ρ garantiza que S sea una contracción estricta.

Como P_C no incrementa las distancias, tenemos

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2). \end{aligned}$$

Así pues tomando $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$ se tiene que S es una contracción estricta con $k = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ y quedan probadas la existencia y unicidad de u.

Si además a es simétrica, entonces a define un nuevo producto escalar en H y por ser continua y coerciva tenemos $0 \leq \alpha\|v\| \leq |a(v,v)|^{1/2} \leq C\|v\|$, $\forall v \in H$. Esto implica que las normas $\|\cdot\|$ y la generada por a, $\|\cdot\|_a$ son equivalentes.

Por tanto, H es completo con la norma $\|\cdot\|_a$. Aplicando de nuevo el teorema 1.2 para representar el funcional f, existe un único $g \in H$ tal que

$$f(v) = a(g,v), \ \ \forall v \in H.$$

Por consiguiente, tenemos

$$a(u, v - u) \geq a(g, v - u),$$

de donde se obtiene

$$a(g - u, v - u) \leq 0, \ \ \forall v \in C.$$

Se deduce que u es la proyección de g sobre C, entonces u es el único elemento que verifica

$$a(g - u, g - u)^{1/2} = \text{mín}_{v \in C}(g - v, g - v)^{1/2} = \text{mín}_{v \in C}\|g - v\|_a.$$

Es decir, u minimiza la función

$$\begin{aligned} \tilde{F} : C &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto a(g - v, g - v). \end{aligned}$$

Como $a(g - v, g - v) = a(v,v) - 2a(g,v) + a(g,g) = a(v,v) - 2f(v) + a(g,g)$. Entonces minimizar $\tilde{F}$ equivale a minimizar

$$\begin{aligned} F : C &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \tfrac{1}{2}a(v,v) - f(v). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.6 (Lax-Milgram). *Sea $(H, <\cdot,\cdot>_H)$ un espacio de Hilbert y H^* su espacio dual. Dada una forma bilineal, continua y coerciva $a(\cdot,\cdot)$ en H y una forma lineal f en H^*. Entonces existe un único elemento $u \in H$ que verifica*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in H.$$

*Si a es **simétrica** entonces el elemento u está caracterizado por ser el mínimo de la función $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$. Es decir, u verifica*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = mín_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\right\}.$$

Demostración:

Basta considerar $C = H$ en la demostración del teorema de Stampacchia (teorema 3.5).

En efecto, para toda $f \in H^*$ existe un único $u \in H$ tal que

$$a(u, v-u) \geq f(v-u), \quad \forall v \in H.$$

Por tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $a(u, tv-u) \geq f(tv-u)$. Equivalentemente,

$$ta(u,v) - a(u,u) \geq f(tv-u),$$

$$t(a(u,v) - f(v)) \geq a(u,u) - f(u), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in H.$$

Necesariamente $a(u,v) - f(v) = 0$ puesto que en caso contrario, $\exists v \in H$ tal que $a(u,v) - f(v) = k \neq 0$ entonces si t tiende a ∞ o a $-\infty$ se contradice la desigualdad anterior.

∎

En [1] podemos encontrar una demostración alternativa a este teorema, la cual se basa en la versión del teorema de Hahn-Banach dada por Mazur.

Si la forma bilineal del teorema de Lax-Milgram es el producto escalar del espacio, entonces el teorema de Representación de Riesz-Fréchet (teorema 3.4) se obtiene como caso particular.

Corolario 3.6.1. *Bajo las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, para el funcional continuo $f \in H^*$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{H^*}$$

donde α la constante de coercividad de $a(\cdot,\cdot)$.

Demostración:

En la prueba del teorema de Lax-Milgram se tiene que, por el teorema de Riesz-Fréchet (teorema 1.2),

$$\exists!\ A(u) \in H \text{ tal que } a(u,v) = (A(u), v), \quad \forall v \in H,$$

donde $A : H \to H$ un operador lineal que por la continuidad y coercividad de a verifica

1. $\|Au\| \leq C\|u\|, \forall u \in H.$

2. $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in H$.

De la última desigualdad se tiene que $\alpha\|u\| \leq \|Au\|$.
Es decir, A está acotado inferiormente, entonces A^{-1} es continua.
Por otro lado, por el teorema 1.2,

$$\exists w \in H : f(v) = (w, v), \quad \forall v \in H.$$

Por tanto, se tiene que

$$\|u\| = \|A^{-1}(w)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|w\|.$$

Como w proviene de aplicar el teorema 1.2 al funcional f, $\|w\| = \|f\|$. Obteniendo así

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|.$$

■

En la Sección 5.3 aplicaremos estos resultados pero para ello, necesitamos trabajar en un espacio de funciones adecuado: los espacios de Sóbolev.

4

Espacios de Sóbolev

En este capítulo presentamos los espacios de Sóbolev en I y no en Ω por simplicidad. Eso si, reflejamos las definiciones de los espacios de Sóbolev en N dimensiones. En ellas se introducen los conceptos de derivada distribucional y notación multi-índice, los cuales son necesarios para aplicar el método variacional a las ecuaciones en derivadas parciales elípticas. Estos espacios son fundamentales para resolver ciertos problemas variacionales puesto que dan sentido a la existencia, unicidad y regularidad de solución de algunos problemas de contorno para EDPs.

Motivamos la noción de *solución débil*, esto nos conduce al problema variacional ya que tenemos que considerar una nueva formulación, la *formulación débil o variacional*. Posteriormente, analizamos en profundidad los espacios de Sóbolev mostrando sus propiedades y su espacio dual.

4.1 Motivación del Método Variacional

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t), \ \text{ en } [a,b], \ f \in C([a,b]), \\ \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Es evidente que este problema se puede resolver explícitamente determinando la solución homogénea, y posteriormente, la particular por el método de los coeficientes indeterminados. Pero ignoramos este hecho para ilustrar el método variacional.

Una solución clásica de (4.1) es una función $u \in C^2([a,b])$ que verifica (4.1) en sentido clásico.

Sin embargo, si multiplicamos la ecuación $-u''(t) + u(t) = f(t)$ por una función test φ tal que $\varphi \in C^1([a,b])$ y $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, se tiene

$$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi.$$

Si integramos en $[a,b]$, tenemos

$$\int_a^b -u''(t)\varphi(t)dt + \int_a^b u(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt.$$

Integrando por partes el primer término obtenemos

$$-u'(b)\varphi(b) + u'(a)\varphi(a) + \int_a^b u'(t)\varphi'(t)dt + \int_a^b u(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt.$$

Como $\varphi \in C^1([a,b])$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ (es decir, $\varphi \in C_c^1([a,b])$), tenemos

$$\int_a^b u'(t)\varphi'(t)dt + \int_a^b u(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt, \ \ \forall \varphi \in C_c^1([a,b]). \tag{4.2}$$

Para que (4.2) tenga sentido, $u \in C^1([a,b])$. De hecho, es suficiente que $u, u' \in L^1(a,b)$, por lo que en esta ecuación se exige menor regularidad que en (4.1).

Por tanto, las funciones que satisfacen (4.2) se denominan *soluciones débiles*.

4.2 Definición de los espacios de Sóbolev $W^{1,p}$

Definición 4.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$, se define el espacio de Sóbolev $W^{1,p}(I)$ como*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^1(I)\},$$

*donde g es la **derivada débil** de u, $g = u'$.*

Denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$.

Ejemplo 4.1. *Consideremos la función $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ en $I = (-1,1)$. Dada una función $\varphi \in C_c^1(I)$ se tiene que*

$$\int_I u\varphi' = \int_{-1}^0 0\varphi' + \int_0^1 x\varphi' = -\int_0^1 \varphi.$$

La última igualdad se ha obtenido integrando por partes y teniendo en cuenta que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Entonces tenemos

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi$$

con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 < x < 0, \\ 1 & si \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Claramente $g \in L^p(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Por tanto, $u \in W^{1,p}(I)$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$ y su derivada débil es $u' = g$, aunque u no es derivable en sentido clásico ($u \notin C^1(I)$).

Proposición 4.1. *$W^{1,p}(I)$ es un subespacio vectorial de $L^p(I)$, entonces si $u, v \in W^{1,p}(I)$, $u + cv \in W^{1,p}(I)$.*

Lema 4.1 (Linealidad de la derivada débil). *Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(u + cv)' = cu' + v'.$$

Norma asociada a $W^{1,p}(I)$

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

si $1 < p < \infty$ la norma equivalente es

$$(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

El espacio H^1 está dotado del producto escalar

$$<u, v>_{H^1} = <u, v>_{L^2} + <u', v'>_{L^2} = \int_I uv + u'v',$$

con norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = (<u, u>_{L^2} + <u', u'>_{L^2})^{1/2} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 4.2. *Definimos el espacio de Sóbolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *como*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \ \forall i = 1, \ldots N \end{array} \right\}.$$

Con el producto escalar

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

y norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Denotamos $W^{1,2}(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$.

4.3 Propiedades fundamentales de los espacios $W^{1,p}$

Proposición 4.2.

(1) $W^{1,p}(I)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

(2) $W^{1,p}(I)$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$.

(3) $W^{1,p}(I)$ *es separable para* $1 \leq p < \infty$.

(4) $H^1(I)$ *es un espacio de Hilbert separable.*

Demostración:

(1) Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(I)$, entonces $\{u_n\}$ y $\{u_n'\}$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(I)$, es decir, $\{u_n\} \to u$ y $\{u_n'\} \to g$ en norma $\|\cdot\|_{L^p}$.

Como para cada n

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u_n' \varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

tomando límites obtenemos

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Así que $u \in W^{1,p}(I)$, $u' = g$ y $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.

(2) Consideremos el operador $T : W^{1,p}(I) \to L^p(I) \times L^p(I)$ definido por $T(u) = (u, u')$

El espacio producto $X = L^p(I) \times L^p(I)$ es reflexivo, y T es una isometría inyectiva. Como $W^{1,p}$ es un espacio de Banach, $T(W^{1,p}(I))$ es un subespacio cerrado de X, luego $T(W^{1,p}(I))$ es reflexivo y por tanto, $W^{1,p}(I)$ es también reflexivo.

(3) El espacio producto $X = L^p(I) \times L^p(I)$ es separable, y como todo subespacio de un espacio separable es separable, se tiene que $T(W^{1,p}(I))$ es separable. Entonces $W^{1,p}(I)$ es separable.

(4) De las propiedades del producto escalar de $L^2(I)$ se deduce trivialmente que $(u,v)_{H^1(I)}$ es un producto escalar y $H^1(I)$ es un espacio de Hilbert.

■

Proposición 4.3.

(1) $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

(2) $W^{1,p}(\Omega)$ *es reflexivo para* $1 < p < \infty$.

(3) $W^{1,p}(\Omega)$ *es separable para* $1 \leq p < \infty$.

(4) $H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert separable.*

Teorema 4.1. *Sea* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, entonces* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *si, y solo si,* $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$.

Proposición 4.4. *Si* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $W^{1,p}(I)$ *que converge a* u *en* $L^p(I)$ *y* $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ *también es convergente en* $L^p(I)$*, entonces* $u \in W^{1,p}(I)$ *y* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* u *con la norma de* $W^{1,p}(I)$.

Teorema 4.2. *Sea* $u \in W^{1,p}(I)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$*, entonces existe* $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ *tal que* $u = \tilde{u}$ *c.t.p. en* I *y*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \ \ \forall x,y \in \bar{I}.$$

Este teorema afirma que para un elemento $u \in W^{1,p}(I)$ existe un único *representante continuo* en $\bar{I}$. Es decir, en la clase de equivalencia de u existe un único elemento $\tilde{u}$ continuo. También se deduce que, si $u \in W^{1,p}(I)$ y $u' \in C(\bar{I})$ (i.e., hay un representante continuo de u' en $\bar{I}$), entonces existe $\tilde{u}$ representante continuo de u tal que $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ (teorema fundamental del cálculo). Esto es de vital importancia para determinar la regularidad en los problemas planteados en la sección 5.3. No haremos distinción entre u y $\tilde{u}$.

Lema 4.2. *Sea* $f \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Entonces existe una constante C *tal que* $f = C$ *c.t.p.*

Proposición 4.5. *Sea* $u \in L^p(I)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *y sea* q *el exponente conjugado de* p*. Equivalen:*

1. $u \in W^{1,p}(I)$.

2. *Existe una constante* C *tal que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(I)}, \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

(*podemos tomar* $C = \|u'\|_{L^p(I)}$).

Proposición 4.6. *Una función $u \in L^\infty(I)$ pertenece a $W^{1,\infty}(I)$ si, y solo si, existe una constante C tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \;\; c.t.\, x, y \in I.$$

Lema 4.3. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $\{u_n|_I\}_{n\geq 1}$ converge a u en $W^{1,p}(I)$.*

Teorema 4.3 (Operador de prolongación). *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe un operador de prolongación $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ lineal y continuo tal que*

(1) $Pu|_I = u$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

(2) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

(3) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

Teorema 4.4. *Existe una constante C que depende solo de $|I|$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Este teorema afirma que $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración:

Lo demostramos para $I = \mathbb{R}$, ya que el caso general se reduce a este gracias al teorema de Prolongación (teorema 4.3)

Sea $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, si $1 \leq p < \infty$ tomamos $G(s) = |s|^{p-1}s$. La composición $w = G(v)$ pertenece a $C_c^1(\mathbb{R})$ y

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Entonces, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)\,dt,$$

y por la desigualdad de Hölder

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}.$$

Por tanto, tenemos

$$|v(x)| \leq p^{1/p}\|v\|_{L^p}^{1-1/p}\|v'\|_{L^p}^{1/p}.$$

Como $p^{1/p} \leq \varepsilon^{1/\varepsilon}$, $\forall p \geq 1$, obtenemos

$$|v(x)| \leq \varepsilon^{1/\varepsilon}\|v\|_{L^p}^{1/q}\|v'\|_{L^p}^{1/p}.$$

Aplicando la desigualdad de Young tenemos

$$|v(x)| \leq \varepsilon^{1/\varepsilon}\left(\frac{1}{q}\|v\|_{L^p} + \frac{1}{p}\|v'\|_{L^p}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{W^{1,p}}, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{4.3}$$

Finalmente, por (lema 4.3) sabemos que dada $u \in W^{1,p}$ existe una sucesión $\{u_n\} \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $\{u_n\} \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Por (4.3), $\{u_n\}$ es de Cauchy en L^∞.

Entonces $\{u_n\} \to u$ en L^∞ y $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$.

■

Además, si I es acotado entonces

- la inyección $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ es compacta para todo $1 < p \leq \infty$.
- la inyección $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ es compacta para todo $1 \leq q < \infty$.

Corolario 4.4.1 (Derivada del producto). *Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$, se tiene*

1. $uv \in W^{1,p}(I)$.
2. $(uv)' = u'v + uv'$.
3. $\int_x^y u'v = u(x)v(x) - \int_x^y uv', \quad \forall x, y \in \bar{I}$.

Corolario 4.4.2 (Derivada de la composición). *Sean $g \in C^1(\mathbb{R})$ y $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $g(0) = 0$. Entonces:*

1. $g \circ u \in W^{1,p}(I)$.
2. $(g \circ u)' = (g' \circ u)u'$.

4.4 El espacio $W_0^{1,p}(I)$

Es el espacio de las funciones de $W^{1,p}(I)$ que se anulan en ∂I.

Definición 4.3. *Sea $1 \leq p < \infty$, definimos $W_0^{1,p}(I)$ como*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^1(I)}^{W^{1,p}(I)}$$

con la norma inducida por $W^{1,p}(I)$.

Notamos $H_0^1(I)$ por $W_0^{1,2}(I)$.

Proposición 4.7. *$W_0^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo cuando $p \neq 1$.*

Proposición 4.8. *Por el teorema de Densidad sabemos que cuando $I = \mathbb{R}$, C_c^1 es denso en $W^{1,p}$. Por tanto, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Teorema 4.5. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ si, y solo si, $u = 0$ sobre ∂I.*

Demostración:
$\Leftarrow$) Sea $u \in W^{1,p}(I)$, con $u = 0$ en ∂I. Fijamos $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si\ |t| \leq 1 \\ t & si\ |t| \geq 2 \end{cases}$$

y

$$|G(t)| \leq |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sabemos, por la derivada de la composición (corolario 4.4.2), que $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo n. Además, se tiene que

$$sop u_n \subset \left\{x \in I : |u(x)| \geq \frac{1}{n}\right\},$$

entonces $sopu_n$ es un subconjunto compacto de I ($u = 0$ sobre ∂I y tiende a 0 cuando $|x| \to \infty$, $x \in I$). Por la proposición 4.8, tenemos que $u_n \in W_0^{1,p}$.

Finalmente, por el teorema de la convergencia dominada se ve que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(I)$. Entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$.

■

Ejemplo 4.2. *Dada* $u(x) = \begin{cases} 1+x & si \ -1 \leq x < 0, \\ 1-x & si \ \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Claramente $u \in L^2(I)$ *con* $I = (-1,1)$.

Sea $\varphi \in C_c(I)$, *se tiene que*

$$\int_I u\varphi' = \int_{-1}^{0} (1+x)\varphi' + \int_0^1 (1-x)\varphi'.$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ *(ya que* $\varphi \in C_c(I)$*), obtenemos*

$$\int_I u\varphi' = \int_{-1}^{0} -\varphi + \int_0^1 \varphi.$$

Entonces

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \ con \ \ g(x) = \begin{cases} 1 & si \ -1 < x < 0 \\ -1 & si \ \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

la derivada débil de u, $u' = g$.

Como $u, u' \in L^2(I)$ *y* u *se anula en los extremos del intervalo* I, *entonces* $u \in H_0^1(I)$.

Proposición 4.9. *Sea* $u \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. *Dada* $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \ x \in I, \\ 0 & si \ x \in \mathbb{R} \backslash I. \end{cases}$

Entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si, y solo si,* $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Proposición 4.10 (Desigualdad de Poincaré). *Si* I *es acotado, existe una constante* C *que depende de* $|I|$ *tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Demostración:

Remítase a [5], capítulo 8, proposición 8.13.

■

Esta desigualdad nos dice que en $W_0^{1,p}(I)$ la norma $\|u\|_* = \|u'\|_{L^p}$ es equivalente a la norma que induce $W^{1,p}(I)$ en este espacio.

Si I es acotado, la expresión $<u', v'>_{L^2} = \int u'v'$ define un producto escalar sobre H_0^1, y la norma asociada $\|u'\|_{L^2}$ es equivalente a la de H_0^1.

Lema 4.4. *Si* $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, *entonces* $u \in W_0^{1,p}(I)$.

El espacio dual de $W_0^{1,p}(I)$

Denotamos por $W^{-1,p}(I)$ al espacio dual de $W_0^{1,p}(I)$ con $1 \le p < \infty$, y $H^{-1}(I)$ al dual de $H_0^1(I)$.

$L^2(I)$ se identifica con su dual y se tiene que

$$H_0^1(I) \subset L^2(I) \subset H^{-1}(I).$$

Proposición 4.11. *Si I es acotado, entonces tenemos*

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,q}(I), \ \ \forall 1 \le p < \infty.$$

Los elementos de $W^{-1,q}(I)$ se pueden representar mediante funciones de $L^q(I)$.

Proposición 4.12. *Sea $F \in W^{-1,q}(I)$. Entonces existen $f_0, f_1 \in L^q(I)$ tales que*

$$<F,v> = \int f_0 v + \int f_1 v', \ \ \forall v \in W_0^{1,p}(I)$$

y

$$||F|| = max\{||f_0||_{L^q}, ||f_1||_{L^q}\}.$$

Cuando I es acotado, podemos tomar $f_0 = 0$.

4.5 Espacios de Sóbolev $W^{m,p}(I)$

Definición 4.4. *Sean un entero $m \ge 2$ y $1 \le p \le \infty$, definimos el espacio*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Los espacios $W^{m,p}(I)$ están formados por las funciones pertenecientes al espacio de Lebesgue $L^p(I)$ con derivadas débiles en $L^p(I)$.

Decimos que $D^j u = g$ en sentido débil (o en sentido de las distribuciones) si

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \ \ \forall j = 1, \dots, m. \tag{4.4}$$

Con norma

$$||u||_{W^{m,p}} = ||u||_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} ||D^\alpha u||_{L^p}.$$

Notamos $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ a los espacios de Hilbert dotados del producto escalar

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_I D^\alpha u D^\alpha v.$$

Si $k = 0$ entonces $W^{0,p}(I) = L^p(I)$.

Nota: todas las propiedades del espacio $W^{1,p}$ se pueden extender al espacio $W^{m,p}$.

Por ejemplo, si I es acotado, la inyección $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ es continua (y compacta para $1 < p \le \infty$).

Proposición 4.13. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq p \leq \infty$, se tienen las inclusiones*

$$W^{m+1,p}(I) \subset W^{m,p}(I) \subset L^p(I).$$

Proposición 4.14. *Los espacios $W^{m,p}(I)$ son espacios de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración:

El lector puede consultar la demostración en [11], *sección 5.2.3, teorema 2.*

■

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, $m \geq 2$ y $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 4.5. *Definimos el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega),\ \ \forall i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Utilizando la **notación multi-índice** cada derivada parcial se expresa como

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Con $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ y $|\alpha| \leq m$ para $\alpha_i \geq 1$.

Entonces podemos dar una definición equivalente a $W^{m,p}(\Omega)$.

Definición 4.6.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi,\ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

El espacio $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

5 Método Variacional

En este capítulo planteamos el problema variacional, mostramos los pasos a seguir para probar la existencia y unicidad de *solución clásica* a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales. Resolvemos algunos problemas mediante el método variacional, teniendo en cuenta todo lo expuesto en los capítulos anteriores. En concreto, tenemos que estudiar en qué espacio debemos trabajar para que tenga sentido la existencia de solución y requiera menor regularidad, aplicando propiedades y resultados sobre estos espacios.

5.1 Formulación variacional

Definición 5.1 (Problema variacional). *Sea H un espacio de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $f : H \to \mathbb{R}$ una forma lineal y continua, definimos el problema variacional como*

$$(PV)\begin{cases} \text{encontrar } u \in H \ \text{ tal que} \\ \\ a(u,v) = <f,v>, \ \ \forall v \in H. \end{cases}$$

El elemento u se denomina solución débil, y a la ecuación de (PV) se la conoce como formulación variacional.

El siguiente esquema esboza los pasos del enfoque variacional en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Esto nos permite demostrar la existencia y unicidad de **solución clásica** de las ecuaciones en derivadas parciales.

(1) **Probar que toda solución clásica es solución débil.** Esto es inmediato realizando una integración por partes en la ecuación del problema, como muestra el corolario 4.4.1 (apartado 3).

(2) **Probar la existencia y unicidad de solución débil.** Para ello haremos uso de los teoremas de Stampacchia (teorema 3.5) y de Lax-Milgram (teorema 3.6) en espacios de Sóbolev.

(3) **Regularidad de la solución débil**, estudiando en detalle las propiedades de las derivadas débiles. En el caso unidimensional se deduce del teorema 4.2. Para el caso N dimensional, consultar la sección 5.3.

(4) **Recuperación de la solución clásica.** Se prueba que una solución débil con su correspondiente regularidad sea solución clásica, por el paso (1) se tiene que la formulación débil es equivalente a la formulación clásica bajo las condiciones de regularidad halladas en (3),y por lo probado en (2) queda demostrada la existencia y unicidad de solución clásica.

Debemos tener en cuenta que los espacios de Sóbolev están formados por clases de equivalencia, es decir, cada elemento $u \in W^{1,p} \subset L^p$ es un conjunto de funciones que coinciden *en casi todo punto*. Pero cuando una función u se dice que está en $L^p \cap C$ o $W^{1,p} \cap C$ es, cuando existe, la única función continua de la clase de equivalencia de u. Los representantes continuos son únicos siempre que existan, puesto que si se modifica una función continua en un punto y la función resultante debe ser continua, tiene que hacerse una modificación en todo un intervalo, que hará que esta nueva función ya no esté en la misma clase de equivalencia, dado que un intervalo tiene medida positiva. O equivalentemente, el complementario de un conjunto de medida nula es siempre denso, y dos funciones continuas que son iguales en un conjunto denso, necesariamente lo son en todo punto.

5.2 Resolución de problemas por el Método Variacional

En esta sección resolvemos varios problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales empleando la teoría variacional. El método variacional se aplica de manera similar para cada problema, pero en cada uno tenemos que definir en qué espacio de Hilbert es adecuado trabajar y qué formulación variacional vamos a utilizar.

Problemas de EDOs

Problema canónico con condiciones de contorno homogéneas

$$\begin{cases} -u''(t)+u(t)=f(t) \quad en \ \ I=(0,1),\, f\in L^2(I), \\ \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Definimos la solución débil del problema como una función $u \in H_0^1(I)$ que verifica

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \ \ \forall v \in H_0^1(I). \tag{5.2}$$

(1) **Toda solución clásica es solución débil.** Sea u una solución en sentido clásico del problema, multiplicando la ecuación de (5.1) por otra función $v \in H_0^1(I)$ e integrando por partes obtenemos

$$-u'(1)v(1)+u'(0)v(0)+\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv,$$

esto es equivalente, por el teorema 4.5, a

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv.$$

Por lo tanto u es también solución débil.

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Consideremos el espacio de Hilbert $H_0^1(I)$, la forma bilineal

$$a(u,v)=\int_I u'v' + \int_I uv,$$

y el funcional

$$\varphi : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \int_I f v.$$

Dado que $a(u,v) = (u,v)_{H_0^1(I)}$, a es trivialmente coerciva y simétrica.

Entonces aplicando el teorema de Lax-Milgram se tiene que existe una única función $u \in H_0^1(I)$ que verifica (5.2), es decir, $u \in H_0^1(I)$ es la única solución débil.

Cabe destacar que u también se puede obtener mediante un problema de minimización, ya que

$$u = \text{mín}_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I f v \right\}.$$

(3) **Regularidad de la solución débil.** Como $f \in L^2(I)$ y $u \in H_0^1$ es solución débil, entonces $u \in H^2(I)$, ya que

$$\int_I u'v' = \int_I (f-u)v, \quad \forall v \in C_c^1(I) \subset H_0^1(\Omega)$$

y $u' \in H^1$ (por definición de H^1 y porque $(f-u) \in L^2(I)$).

Además, si $f \in C(\bar{I})$, entonces $u'' \in C(\bar{I})$, y por el teorema 4.2, $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **Recuperación de solución clásica.** Veamos que la solución débil $u \in C^2(\bar{I})$ (tal que $u(0) = u(1) = 0$) es solución clásica del problema.

Integramos por partes el primer término de (5.2), teniendo en cuenta que $C_c^1(\bar{I}) \subset H_0^1(I)$

$$\int_I u'v' = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_I u''v, \quad \forall v \in C_0^1(I),$$

y obtenemos

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Por el lema 2.2, $-u'' + u - f = 0$ en *casi todo punto*, es decir, $-u'' + u = f$ en *casi todo punto*, y como $u \in C^2(\bar{I})$, se da la igualdad en todo punto.

Problema canónico con condiciones de contorno no homogéneas

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) \quad en \ \ I = (0,1), f \in L^2(I), \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases} \tag{5.3}$$

Basta escoger una función $u_0 \in C^2$ que verifique $u_0(0) = \alpha, u_0(1) = \beta$, y tomamos $\tilde{u} = u - u_0$ que satisfaga el problema

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(t) + \tilde{u}(t) = f(t) + u_0'' - u_0 \quad en \ \ I = (0,1), \ \ f \in L^2(I), \\ \tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Este problema se resuelve de manera análoga al problema del apartado anterior.

Problema de Neumann homogéneo

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) \quad en \ \ I = (0,1),\ f \in L^2(I), \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Dado que los valores de u en la frontera ($u(0)$ y $u(1)$) son desconocidos, no tiene sentido utilizar el espacio H_0^1. Definimos la solución débil del problema como una función $u \in H^1(I)$ que satisface la formulación variacional

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I). \tag{5.5}$$

(1) **Toda solución clásica es débil.** Supongamos que u es solución clásica, es decir, $u \in C^2(\bar{I})$ y verifica el problema (5.4). Si multiplicamos la ecuación inicial por una función $v \in H^1(I)$ e integramos por partes el primer término nos queda

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv,$$

donde los dos primeros términos se anulan por las condiciones de contorno de tipo Neumann. Por tanto, u es solución débil.

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Consideremos el espacio de Hilbert $H^1(I)$, la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

y el funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(I) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \textstyle\int_I fv. \end{aligned}$$

Entonces el teorema de Lax-Milgram nos asegura la existencia de una única solución débil $u \in H^1(I)$.

(3) **Regularidad de la solución débil.** Por (5.5), u está en $H^2(I)$.

Si además f es continua, por el teorema 4.2, $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **Recuperación de la solución clásica.** Como $u \in H^2(I)$, entonces $u' \in H^1(I)$, es decir, $u \in C^1(\bar{I})$ (por el teorema 4.2). Esto garantiza que la condición $u'(0) = 0 = u'(1)$ tiene sentido.

Supongamos que $u \in C^2(\bar{I})$ es una solución débil.

Integramos (5.5) por partes y obtenemos

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Como $C_c^\infty(I) \subset H_0^1(I) \subset H^1(I)$, y toda función $v \in H_0^1(I)$ se anula en la frontera de I, tenemos que $-u'' + u - f = 0$ por el lema 2.2.

Por otro lado,

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Dado que v era arbitraria se deduce que $u'(0) = u'(1) = 0$ y por tanto, u es la solución clásica del problema.

Problema de Neumann no homogéneo

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) \quad en \;\; I = (0,1),\, f \in L^2(I), \\ \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{5.6}$$

Se resuelve de manera análoga al problema anterior, considerando el espacio de funciones $H^1(I)$ y aplicando el teorema de Lax-Milgram a la misma forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

pero a distinto funcional continuo

$$\varphi : H^1(I) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

Problema con condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) \quad en \;\; I = (0,1),\, f \in L^2(I) \\ \\ u(0) = 0,\; u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Tomamos como espacio de Hilbert $H = \{v \in H^1(I) : v(0) = 0\}$.

Para probar que H es de Hilbert es suficiente con ver que es cerrado en $H^1(I)$, se toma cualquier sucesión convergente $\{v_n\} \subset H$, $\{v_n\} \to v$ y vemos que $v \in H$.

En efecto, como $\{v_n\}$ converge en norma $\|\cdot\|_{H^1(I)}$, también lo hace en norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Por tanto, la convergencia es uniforme y $v(0) = 0$ (para el representante continuo).

(1) **Toda solución clásica es también solución débil.** Dada una solución clásica $u \in C^2(I)$, integrando por partes el primer término de la ecuación (5.7) multiplicada por $v \in H$ obtenemos

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v',$$

donde el primer término se anula por la condición $u'(1) = 0$ y el segundo por el espacio H que hemos escogido, entonces tenemos

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad v \in H. \tag{5.8}$$

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Si consideramos el espacio de Hilbert H, la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

y el funcional lineal

$$\varphi : H \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto \int_I fv.$$

Entonces el teorema de Lax-Milgram nos asegura la existencia de una única $u \in H$ que verifica (5.8) (es decir, u es la única solución débil del problema). Además, u puede obtenerse también mediante el problema de minimización

$$u = \text{mín}_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv\right\}.$$

(3) **Regularidad de la solución débil.** Razonando como en los casos anteriores, podemos deducir que si f es continua, entonces $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **Recuperación solución clásica.** Partiendo una solución débil de C^2 e integrando por partes la formulación variacional (5.8), se obtiene

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv, \ \ \forall v \in H.$$

Como $C_c^\infty \subset H_0^1(I) \subset H$, los dos primeros términos se anulan y se tiene que

$$-u'' + u - f = 0.$$

Sabemos que $v(0) = 0$, entonces de $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$ se sigue que $u'(1)v(1) = 0$, y por la arbitrariedad de $v(1)$ obtenemos finalmente que $u'(1) = 0$.

Problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = f(t) \quad en \ \ I = (0,1),\, f \in L^2(I), \\ \\ u(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Donde $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ y $f \in L^2(I)$ tal que $p(t) \geq \alpha > 0$, $q(t) \geq 0$.

(1) **Toda solución clásica es solución débil.** Si u es solución de (5.9), entonces, multiplicando la ecuación diferencial por $v \in H_0^1(I)$ e integrando por partes se tiene

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Por lo tanto u es solución débil.

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Consideremos el espacio de Hilbert $H_0^1(I)$, la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv,$$

y el funcional

$$\varphi : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \int_I fv.$$

a es evidentemente una forma bilineal simétrica en $H_0^1(I)$, y como

$$|a(u,v)| = \left|\int_I pu'v' + \int_I quv\right| \leq \left|\int_I \|p\|_\infty u'v' + \|q\|_\infty uv\right|$$

$$\leq max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\}\left|\int_I u'v' + uv\right| = C|(u,v)_{H_0^1(I)}|$$

$$\leq C\|u\|_{H_0^1(I)}\|v\|_{H_0^1(I)},$$

a es continua.

Teniendo en cuenta que $q \geq 0$, $p \geq \alpha$ y usando la desigualdad de Poincaré (proposición 4.10) podemos probar la coercividad de a

$$a(v,v) = \int_I pv'^2 + \int_I qv^2 \geq \int_I pv'^2 \geq \alpha\|v'\|^2_{L^2(I)} \geq \frac{\alpha}{C}\|v'\|_{H^2(I)}.$$

El teorema de Lax-Milgram (teorema 3.6) nos garantiza la existencia de una única $u \in H_0^1(I)$ que verifica la formulación variacional (o débil), y también que u puede obtenerse mediante un problema de minimización

$$u = \text{mín}_{v\in H_0^1(I)}\left\{\frac{1}{2}\int_I (pv'^2 + qv^2) - \int_I fv\right\}.$$

(3) **Regularidad de la solución débil.** Es evidente que $pu' \in H^1$ y su derivada es $f - qu$. Por tanto, el corolario 4.4.1 (Derivada del producto) nos asegura que $u' = \frac{1}{p}(pu') \in H^1(I)$, lo que implica que $u \in H^2(I)$.

Finalmente, si $f \in C(\bar{I})$, entonces $pu' \in C^1(\bar{I})$. Por tanto, $u' \in C^1(\bar{I})$, es decir, $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **Recuperación de la solución clásica.** Supongamos que $u \in C^2(\bar{I}) \cap H_0^1(\Omega)$, integrando por partes el primer término de

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv, \quad \forall v \in C_c^1(\bar{I}),$$

se tiene

$$\int_I (-(pu')' + qu - f)v = 0, \quad \forall v \in C_c^1(\bar{I}).$$

Por el lema 2.2, $-(pu')' + qu - f = 0$ *en casi todo punto*, y como $u \in C^2(\bar{I})$, se cumple en todo punto.

Problemas de EDPs elípticas

Problema de Poisson homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y acotado, y sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & en \ \ \Omega, \\ u = 0 & en \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

Como la solución u debe anularse en la frontera de Ω debemos considerar el espacio $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si multiplicamos por una función test $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e integramos por partes llegamos al **problema variacional** de (5.10)

$$\begin{cases} \text{encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \\ a(u,v) = <f,v>, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{5.11}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga la formulación variacional de (5.11) es una solución débil de (5.10).

Probemos que existe una única solución débil del problema.

La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es el producto interno de $H_0^1(\Omega)$ con norma asociada equivalente a la usual de $H_0^1(\Omega)$.

Como f es un funcional lineal y acotado de $(H_0^1, <,>_H)$, el teorema de representación de Riesz-Fréchet (teorema 3.4) nos garantiza que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica la formulación variacional para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, es decir, u es solución débil de (5.10).

De hecho, u es solución del problema (5.10) si y solo si es solución del problema (5.11). Veámoslo:

Si u es solución de (5.10) entonces $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Multiplicando la ecuación diferencial de (5.10) por una función test $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes obtenemos

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por densidad $(W_0^{1,2}(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega))$ se tiene que

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Entonces u es solución de (5.11), es decir, u es solución débil.

Recíprocamente, si u es solución de (5.11) verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si integramos por partes, obtenemos

$$\int_\Omega (-div(\nabla u) - f) v \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

De donde deducimos que u es solución clásica.

Problema de Dirichlet homogéneo para el Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en \;\; \Omega, \\ \\ u = 0 & en \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.12}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^1, $\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}$, y $f \in L^2(\Omega)$.

El objetivo es buscar una función $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ que sea solución clásica, es decir, que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y satisfaga (5.12).

Definimos una solución débil del problema como una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.13}$$

(1) **Toda solución clásica es solución débil.** Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solución de (5.12). Entonces $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y como $u = 0$ en $\partial\Omega$, por el teorema 4.1, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Tomamos $v \in C_c^1(\Omega)$, multiplicando a ambos lados de la ecuación de (5.12) e integrando, se tienen que

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Aplicamos la identidad de Green al primer término y obtenemos

$$-\int_\Omega v \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}\, dV = -\int_{\partial\Omega} v(\Delta u)\vec{n}\, dS + \int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i}\, dV.$$

Como v tiene soporte compacto, la integral sobre la frontera es nula, entonces u verifica (5.13) para toda $v \in C_c^1(\Omega)$.

Sabemos que para toda $v \in C_c^1(\Omega)$ existe una sucesión $\{v_n\} \subset C_c^1(\Omega)$ que converge a v en norma $H^1(\Omega)$. Por tanto, podemos reescribir la ecuación (5.13) como

$$\sum_{i=1}^N (u_{x_i}, v_{n_{x_i}})_{L^2(\Omega)} + (u, v_n)_{L^2(\Omega)} = (f, v_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^N (u_{x_i}, v_{n_{x_i}})_{L^2(\Omega)} + (u, v_n)_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} (f, v_n)_{L^2(\Omega)}$$

y de la continuidad del producto escalar se deduce que la igualdad se cumple para cualquier $v \in H_0^1(\Omega)$.

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Escribimos $\sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} = \nabla u \nabla v$.

Considerando el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv,$$

y el funcional

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \int_\Omega f v,$$

el teorema de Lax-Milgram nos asegura la existencia de una única $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica la *formulación variacional* (5.13) y que

$$u = \text{mín}_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) - \int_\Omega f v \right\}.$$

(3) **Regularidad de la solución débil.** Véase el teorema 5.1.

(4) **Recuperación de la solución clásica.** Sabemos que Ω es de clase C^1, $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil y $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Por el teorema 4.5, $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces tenemos la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega).$$

Aplicando la identidad de Green al primer término

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dV = -\int_\Omega v(\Delta u) \, dV + \int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n} \, dS.$$

Como v se anula en la frontera, u verifica

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega).$$

Por el lema 2.2, $-\Delta u + u = f$ *en casi todo punto*, y como $u \in C^2(\Omega)$, en todo punto. Por tanto, u es la solución clásica.

Problema de Dirichlet no homogéneo para el Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en \ \ \Omega, \\ u = g & en \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.14}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto de clase C^1 y acotado, g definida en $\partial\Omega$. Supongamos que existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\tilde{g} = g$ en $\partial\Omega$. Para tal $\tilde{g}$, definimos el conjunto

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\},$$

el cual es independiente de la elección de $\tilde{g}$ y solo depende de g. Además, $K \subset H^1(\Omega)$ es no vacío, convexo y cerrado.

Una solución débil es una función $u \in K$ que sea única (no dependa de $\tilde{g}$) y verifique la formulación variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.15}$$

(1) **Toda solución clásica es también solución débil.** Se deduce como en el caso anterior, partiendo de $u \in C^2(\bar{\Omega})$, multiplicando por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando por partes el primer término. Como $u = g$ en $\partial\Omega$, entonces $u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$ y por tanto $u \in K$.

(2) **Existencia y unicidad de solución débil.** Consideremos la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv,$$

y el funcional

$$\varphi(v) = \int_\Omega fv.$$

Probemos que la formulación variacional (5.15) equivale a la siguiente

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \quad \forall v \in K. \tag{5.16}$$

Claramente si u verifica (5.15) entonces u verifica (5.16), dado que $u - v \in K$ y por tanto, $u - \tilde{g}$, $v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$, con lo cual $u - v = u - \tilde{g} - (v - \tilde{g}) \in H_0^1(\Omega)$.

Recíprocamente, para $u \in K$ escogemos $w \in H_0^1(\Omega)$ y aplicamos la desigualdad (5.16) a $v = u + w \in K$ y $v = u - w \in K$, obteniendo así las desigualdades

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w + \int_\Omega uw \geq \int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla w - \int_\Omega uw \geq -\int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w + \int_\Omega uw = \int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Aplicando el teorema de Stampacchia (teorema 3.5) obtenemos una única $u \in K$ verificando (5.16) que equivale a (5.15) y también podemos hallarla minimizando la función

$$\begin{aligned} F : H &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \int_\Omega ((\nabla v)^2 + v^2 - fv). \end{aligned}$$

(3) **Regularidad de la solución débil.** Véase el teorema 5.1.

(4) **Recuperación de la solución clásica.** Se realiza de manera análoga al problema anterior partiendo de la formulación (5.15).

Problema de Neumann homogéneo para el Laplaciano

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado de clase C^1 y $f \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en \ \ \Omega, \\ \nabla_n u = 0 & en \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.17}$$

donde $\nabla_n u$ denota la derivada normal de u, es decir, $\nabla_n u = \nabla u \cdot n$, con n el vector normal a la frontera de Ω apuntando hacia el exterior.

Una solución débil es una función $u \in H^1(\Omega)$ verificando la formulación variacional

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.18}$$

(1) Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solución clásica de (5.17). Entonces $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Multiplicando por $v \in C^1(\Omega)$ e integrando en Ω, se tiene

$$-\int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Aplicamos la identidad de Green al primer término

$$\int_\Omega v\Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dV, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}),$$

donde $\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v dS = 0$ por la condición de contorno.

Por densidad, u verifica (5.18), es decir, es solución débil.

(2) Si consideramos el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$, la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv,$$

y el funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \textstyle\int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema de Lax-Milgram, existe una única $u \in H^1(\Omega)$ que verifica (5.18), y además se puede obtener mediante

$$u = \text{mín}_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|)^2 + |v|^2 - \int_\Omega fv \right\}.$$

(3) La regularidad de la solución débil la estudiamos en el teorema 5.2.

(4) Sea $u \in H^1(\Omega)$ una solución débil con $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Por la identidad de Green obtenemos

$$\int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dV + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dS = \int_\Omega fv \, dV, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}). \tag{5.19}$$

Como $C_c^1(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ se tiene (5.19) para todo $v \in C_c^1(\Omega)$ y como v se anula en la frontera obtenemos

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega).$$

Por el lema 2.2 podemos concluir que $-\Delta u + u = f$ en Ω, y de (5.19), que

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v \, dS = 0, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Entonces $(\nabla u \cdot n) = 0$ en $\partial\Omega$ de nuevo por el lema 2.2, también en todo punto dado que $\nabla u \in C^1(\bar{\Omega})$ y por tanto, u es solución clásica.

Problema de Dirichlet para el operador elíptico de 2º orden

Probemos que el problema

$$\begin{cases} Lu + u = f & en \;\; \Omega, \\ u = 0 & en \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.20}$$

tiene una única solución débil, donde L el operador diferencial lineal dado por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} (b_i u)_{x_i} + cu$$

con $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $a_{ij} = a_{ji}$.

Multiplicando la ecuación diferencial de (5.20) por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando por partes se obtiene que $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil si

$$a(u,v) = <f,v>_{H'(\Omega),H_0^1(\Omega)}, \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.21}$$

donde

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} \, dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i u v_{x_i} \, dx + \int_\Omega c u v \, dx + \int_\Omega u v \, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz vemos que $a(\cdot,\cdot)$ es continua en $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \le C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ + C_3 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ \le C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

$a(\cdot,\cdot)$ es lineal porque L es un operador lineal, y es coerciva ya que

$$|a(u,v)| \ge \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ge C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Entonces se verifican todas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram y por lo tanto, podemos afirmar que para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$ existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando (5.21), es decir, u es la única solución débil del problema.

5.3 *Regularidad de las soluciones débiles*

En esta sección estudiamos el paso (3) del método variacional para el problema homogéneo con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, de tipo Neumann y para otros problemas.

Debemos suponer cierta regularidad sobre f y Ω para ver de que manera se transfiere a la solución del problema. Es decir, según sea el espacio al que pertenecen f y Ω, se obtiene una regularidad correspondiente de u.

Teorema 5.1 (**Regularidad para el problema de Dirichlet**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado o $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución de*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{5.22}$$

(formulación débil o variacional del problema de Dirichlet). Según la regularidad de f y de Ω tenemos:

1. *Si $f \in L^2(\Omega)$ y Ω es de clase C^2, entonces*
$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \;\; y \;\; u \in H^2(\Omega).$$
2. *Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2}, entonces*
$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)} \;\; y \;\; u \in H^{m+2}(\Omega).$$

 En particular,

3. *Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2} con $m > \frac{N}{2}$, entonces*
$$u \in C^2(\bar{\Omega}).$$
4. *Si $f \in H^\infty(\Omega)$ y Ω es de clase C^∞, entonces*
$$u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Observación: $f \in H^\infty(\Omega)$ significa que $f \in H^m(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2 (**Regularidad para el problema con condiciones de tipo Neumann**). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado o $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sea $u \in H^1(\Omega)$ verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

(formulación variacional del problema con condiciones de tipo Neumann). Según la regularidad de f y de Ω tenemos:

1. *Si $f \in L^2(\Omega)$ y Ω es de clase C^2, entonces*
$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \;\; y \;\; u \in H^2(\Omega).$$

2. *Si* $f \in H^m(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^{m+2}*, entonces*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)} \quad y \quad u \in H^{m+2}(\Omega).$$

   En particular,

3. *Si* $f \in H^m(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^{m+2} *con* $m > \frac{N}{2}$*, entonces*

$$u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

4. *Si* $f \in H^\infty(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^∞*, entonces*

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Teorema 5.3 (Regularidad para el problema asociado a un operador elíptico de segundo orden). *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado o* $\Omega = \mathbb{R}^N$*. Sea* $u \in H_0^1(\Omega)$ *verificando*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \int_\Omega a_0 u v = \int_\Omega f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

(formulación variacional para el problema general). Dependiendo de la regularidad de f*,* Ω*,* a_{ij} *y* a_0*:*

1. *Si* $f \in L^2(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^2 *y* a_{ij}*,* $a_0 \in C^1(\bar{\Omega})$*, entonces*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad y \quad u \in H^2(\Omega).$$

2. *Si* $f \in H^m(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^{m+2} *y* a_{ij}*,* $a_0 \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$*, entonces*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)} \quad y \quad u \in H^{m+2}(\Omega).$$

   En particular,

3. *Si* $f \in H^m(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^{m+2} *y* a_{ij}*,* $a_0 \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ *con* $m > \frac{N}{2}$*, entonces*

$$u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

4. *Si* $f \in H^\infty(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^∞ *y* a_{ij}*,* $a_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$*, entonces*

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

6 Conclusiones

Este Trabajo de Fin de Grado ha tenido como objetivo la resolución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales mediante el método variacional. Con el propósito de lograr este fin he llevado a cabo el estudio de los espacios de funciones. Para ello, ha sido de suma importancia la aplicación de conceptos y resultados básicos adquiridos en la asignatura de *Análisis Funcional* como por ejemplo los espacios normados, los isomorfismos, los espacios de Banach y el espacio dual topológico. Además, tras la indagación en esta rama de las matemáticas, por su papel clave en la introducción al método variacional, he aprendido nuevos resultados sobre espacios de Hilbert como el teorema de Riesz-Fréchet. Esto me ha permitido realizar las demostraciones de los teoremas más importantes del trabajo: el teorema de Stampacchia y el teorema de Lax-Milgram.

La investigación de los espacios de funciones me ha resultado satisfactoria puesto que he estudiado con detalle la teoría de los espacios L^p, lo cual me ha permitido analizar los espacios de Sóbolev cuyo origen se atribuye a la *derivabilidad débil*. Cabe mencionar que para profundizar en estos capítulos han influido las asignaturas de *Análisis Matemático* por el estudio de las funciones y sus propiedades, y *Cálculo Diferencial e Integral* por haber obtenido en ella la habilidad de derivar parcialmente e integrar funciones de varias variables. Como consecuencia, he adquirido los conocimientos indispensables para desarrollar la teoría variacional.

La aplicación del método variacional ha hecho que consolide todos estos conocimientos. En este sentido he redactado las secciones 5.1 y 5.2, las cuales consisten en la construcción del método variacional y en la resolución de problemas mediante este, en base a lo anterior. Entre todos los resultados, me gustaría destacar el teorema 4.2 (Representante Continuo), el teorema 2.1 (Representación de Riesz) y el teorema 3.4 (Representación de Riesz-Fréchet) ya que son fundamentales en el objetivo del presente trabajo.

Para la elaboración de este trabajo también he tenido en cuenta muchos de los contenidos estudiados en otras asignaturas como los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales considerados en *Ecuaciones Diferenciales I*, los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de *Ecuaciones Diferenciales II*, los operadores diferenciales (gradiente, divergencia,..) y los teoremas integrales clásicos mostrados en *Análisis Vectorial*, además de la capacidad de planteamiento y resolución de problemas desarrollada en *Modelización*. También está relacionada *Ecuaciones de la Física Matemática* ya que se dieron a conocer EDPs como las ecuaciones de Laplace, Poisson, del calor y algunos métodos directos para resolver problemas físicos relacionados con ellas.

Por último, cabe destacar que las herramientas necesarias para la redacción de este trabajo las he obtenido de diversas fuentes relacionadas principalmente con el análisis funcional, las ecuaciones en derivadas parciales y el cálculo diferencial. En cuanto a las referencias, me gustaría destacar [5] y [11] por presentar un contenido avanzado en espacios de funciones y ecuaciones en derivadas parciales, lo que me ha ayudado a ampliar mis conocimientos en esta área de las matemáticas.

Según lo expuesto en estas conclusiones, se han cubierto los objetivos marcados en la introducción al método variacional. Es decir, la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno homogéneas, no homogéneas, mixtas, de tipo Neumann y de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales elípticas como las ecuaciones de Laplace y Poisson.

Objetivos generales del título de Grado:

- Conocer la naturaleza, métodos y fines de los distintos campos de las Matemáticas.

- Reconocer la presencia de las Matemáticas subyacente en la Naturaleza, Ciencia y Tecnología. Reconocer a la Matemática como parte integrante de la Educación y la Cultura.

- Desarrollar las capacidades analíticas y de abstracción, la intuición y el pensamiento lógico y riguroso a través del estudio de la Matemática.

- Capacitar para la utilización de los conocimientos teóricos y prácticos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones tanto en contextos académicos como profesionales.

- Preparar para posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos.

Objetivos específicos del Grado en Matemáticas:

- Conocer y saber aplicar los métodos y técnicas de las Matemáticas.

- Desarrollar las capacidades de crítica constructiva y autocrítica.

- Desarrollar las capacidades de razonamiento riguroso, pensamiento lógico, de abstracción, de análisis y de toma de decisiones.

- Desarrollar la capacidad de formular en términos matemáticos problemas de la vida real y de otras ciencias e ingenierías. Analizar y resolver dichos problemas, lo cual puede requerir el uso de TICs y de programas informáticos que el graduado debe estar capacitado para usar con soltura.

- Desarrollar el gusto por la Ciencia, en especial, por las Matemáticas y conocer el papel que esta ciencia ha jugado y juega en la evolución humana.

- Poder incorporarse posteriormente al mercado laboral en una posición acorde a la formación recibida así como a máster o programas de postgrado.

Durante la elaboración de este TFG he adquirido las siguientes competencias.

Competencias básicas:

- Aplicación de conocimientos.

- Capacidad de emitir juicios.

- Capacidad de comunicación y aptitud social.

- Habilidad para el aprendizaje.

Competencias Trasversales de la Universidad de Almería:

- Conocimiento de una segunda lengua.
- Competencia social y ciudadanía global.
- Capacidad de resolver problemas.
- Comunicación oral y escrita en la propia lengua.
- Habilidad en el uso de las TICs.
- Capacidad de crítica y autocrítica.
- Compromiso ético.
- Capacidad para aprender a trabajar de forma autónoma.

Competencias Específicas desarrolladas:

- CB2: Saber aplicar los conocimientos matemáticos básicos.
- CB3: Saber construir y emitir juicios.
- CB4: Adquirir la capacidad de transmisión y comunicación de ideas.
- CB5: Habilidad para el aprendizaje.
- CE5: Saber resolver problemas matemáticos.
- CE6: Capacidad de análisis.
- CT1: Capacidad de búsqueda bibliográfica.
- CT2: Comunicación en otra lengua.

Como valoración personal, el proceso de elaboración de este trabajo de fin de grado ha sido completamente enriquecedor puesto que el tiempo que le he dedicado me ha llevado a ampliar mis conocimientos en varias ramas de las matemáticas con las que mayor afinidad he tenido durante el Grado, por lo que no podría haber puesto mejor punto y final a mi formación como graduada en Matemáticas. Todo ello no solo ha contribuido en el desarrollo académico, sino también en gran medida en mi crecimiento personal. Es de gran importancia para mí la solidez de la base matemática que he adquirido en mis conocimientos, gracias a la realización del presente trabajo, para orientar y continuar mis próximos estudios de Máster.

Bibliografía

[1] D. Álvarez, *El teorema de Lax-Milgram, Generalizaciones y Aplicaciones*, ITAM, 2011.

[2] R. Adams, J. Fourier, *Sobolev Spaces*, 2^{nd} ed., Academic Press, 2003.

[3] P. Alegría, *Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue*, Apuntes UPV-EHU, 2007.

[4] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDEs and Optimization*, 2^{nd} ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.

[5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science, 2011.

[6] P. Calderón, *Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, 1962.

[7] J. C. Cabello, *Análisis Funcional*, UGR, 2008.

[8] D. Chamorro, *Espacios de Hilbert, Espacios de Sóbolev*, Amaraun, 2015.

[9] E. Casas, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.

[10] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Mir-Rubiños, Madrid, 1969.

[11] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2^{nd} ed., American Mathematical Society, 2010.

[12] M. Forastieri, *Introducción a los Espacios de Sóbolev*, 2014.

[13] G. Galiano, *Introducción al Cálculo Variacional*, 2003.

[14] F. Galindo, *Introducción a los espacios de funciones*, Universidad de Valladolid, 2016.

[15] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of variations*, Prentice-Hall, Inc., New York, 1963.

[16] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2^{nd} ed., Springer, 1983.

[17] D. Greenspan, *Introduction to Partial Differential Equations*, Mc. Graw-Hill, 1961.

[18] M. Gonzalez, *Espacios de Sóbolev. Primeras propiedades*, Universidad de Sevilla, 2012.

[19] L. Hörmander, *Lineal Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.

[20] A. Jiménez, *Lección 4: aplicaciones lineales continuas entre espacios normados*, Apuntes de análisis funcional, UAL, 2019.

[21] M. Legasa, *Espacios de Sóbolev y Formulación Variacional de Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas*, Universidad del País Vasco, 2016.

[22] G. López, *Apuntes de Teoría de Distribuciones*, Universidad de Granada.

[23] M. López, *El Teorema de Lax-Milgram: origen, generalizaciones y aplicaciones*, UGR, 2017.

[24] A. Ortiz, *Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad Nacional de Trujillo, 2004.

[25] R. Payá, *Dualidad en espacios normados*, Apuntes UGR, Curso 2018/19. https://www.ugr.es/~rpaya/

[26] R. Payá, *Espacios de Hilbert*, Apuntes UGR, Curso 2018/19.

[27] I. Peral, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad Autónoma de Madrid.

[28] F. Periago, *Introducción al Método Variacional*, UPCT.

[29] H. Sagan, *Introduction to the Calculus of Variations*, Mc. Graw- Hill, 1969.

[30] A. Salort, *Clase: soluciones débiles*. Universidad de Buenos Aires, 2013.

[31] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Springer, Verlag Italia srl, 2008.

[32] M. Santander, *Introducción al cálculo variacional*, Departamento de Física Teórica, Universidad de Valladolid, 2003.

[33] D. Stojanoff, *Un Curso de Análisis Funcional*, Universidad Nacional de la Plata, 2019.

[34] A. Vera, P. Alegría, *Un curso de análisis funcional: teoría y problemas*, AVL, 1997.

[35] E. Zuazua, *Ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad Autónoma de Madrid.