Ecuación de medios porosos fraccionaria

Trabajo Fin de Grado

Autor:

Autor:Rubén Fiñana Aránega

Tutor:

José Carmona Tapia

Grado en Matemáticas

Junio, 2020

Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

This work is focused on porous medium equation, which describes anomalous diffusion of gases through porous media with the restricted fractional laplacian operator, $(-\Delta)^s u^m + \frac{\partial u}{\partial t}$ for $m > 1$, $s \in (0,1)$. The study of this equation has a lot of applications in other areas (population dynamics, image processing, etc) and it is relatively recent, it began to be studied in 1958 and in the last decades, mathematicians as Luis Vázquez, Mateo Bonforte or Luis Caffarelli, are ahead in the investigations, whose work this document is going to be based on.

We are going to review the known proofs of existence and uniqueness of weak dual solutions, in order to do it, we are going to study certain types of solutions, like mild solutions or solutions of the class S_p, and relations with the weak dual solutions which are going to help us to obtain essential results about bounds for the solutions. All this presented after having introduced some preliminaires, to know where we are working, with an important key point being the Lebesgue spaces, and after obtaining a set of fundamental properties of the function u^m and of the laplacian operator with special emphasis on eigenfunctions and eigenvalues which are going to complete the understanding of spaces and later results.

Resumen en español

En este trabajo esta principalmente enfocado en la ecuación en medios porosos que describe la difusión anómala de gases en un medio poroso con el operador laplaciano fraccionario restringido, $(-\delta)^s u^m + \frac{\partial u}{\partial t}$ para $m > 1$, $s \in (0,1)$. El estudio de esta ecuación de difusión tiene muchas aplicaciones en otras áreas (dinámica de población, procesamiento de imágenes, etc), y es relativamente reciente, se comenzó a estudiar en 1958 y en las útlimas décadas, matemáticos como Mateo Bonforte o Luis Caffarelli han liderado las investigaciones, en cuyos trabajos nos centraremos.

Revisaremos las pruebas de la existencia y unicidad de las soluciones débiles duales, para lo que se estudiarán ciertos tipos de soluciones, como soluciones mild o soluciones de la clase S_p, y relaciones con la soluciones débiles duales que nos permitirán obtener resultados sobre las cotas de esas soluciones imprecindibles. Todo esto será presentado tras introducir unos preliminares, siendo los más importantes los espacios Lebesgue y tras obtener unas propiedades fundamentales de la función u^m y del operador laplaciano con especial énfasis en sus autovalores y autofunciones que completarán la comprensión del espacio y de algunos resultados posteriores.

1 Introducción

El concepto de difusión se puede definir como el movimiento de materia en un sistema cualquiera de una región con alta concentración a otra con baja.

El estudio de este fenómeno comenzó en Física en el siglo XVII con Robert Boyle y su estudio sobre los gases. A lo que le siguió el estudio de problemas de calor gracias a J. Fourier con su trabajo *"Théorie Analytique de la Chaleur"* de 1822, tras un intento fallido en 1807. Tras esto en la década de 1850 Adolf Fick realizó su trabajo sobre las leyes de difusión estableciendo que el flujo de masa era proporcional al gradiente de la concentración y obtuvo una conexión también entre difusión, conducción del calor y electricidad.

Durante estos años la teoría de ecuaciones de derivadas parciales lineales avanzó mucho pero también se observó que no era muy precisa a la hora de modelizar procesos físicos, solo eran útiles para algunos muy simples. No se hicieron avances en el desarrollo de versiones no lineales de las tres ecuaciones en derivadas parciales clásicas (La ecuación de Laplace, ecuación del calor y ecuación de ondas) hasta el siglo XX. Fue entre 1930 y 1960, cuando Leibenzon (1930) y Muskat (1933) estudiaron el flujo de gases en medios porosos, y se comenzó a construir teorías sólidas para esas ecuaciones no lineales, con grandes avances, sobre todo, en el estudio de ecuaciones parabólicas.

A partir de estos avances se comienza a desarrollar en 1958 la teoría matemática de las ecuaciones en la que se centrará este texto (momento en el que Oleinik introdujo las soluciones débiles), con una base sólida en 1980, a partir de la que se ha ido avanzando y desarrollando aún más en las últimas décadas.

En nuestro caso nos centraremos en problemas de difusión fraccionaria donde el operador es un laplaciano fraccionario, para representar procesos con difusión anómala con aplicaciones en mecánica cuántica, en finanzas o procesamiento de imágenes.

En concreto nos centraremos en el siguiente problema de Cauchy-Dirichlet homogéneo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}F(u) = 0 & \text{para todo } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0 & \text{para todo } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^N\setminus\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{para todo } x \in \Omega. \end{cases}$$

En el anterior sistema u hace referencia a la concentración o densidad del soluto en la difusión estudiada, Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera es suficientemente regular (basta que sea de la variedad de clase $C^{1,1}$). Con:

1. $\mathcal{L} : dom(\mathcal{L}) \subset L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ un operador lineal, simétrico ($\langle \mathcal{L}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{L}v\rangle$), densamente definido representando la difusión. Como caso modelo consideraremos $(-\Delta)^s$, el operador laplaciano fraccionario restringido, definido manera general con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^N$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$(-\Delta)^s f(x) = c_{N,s} p.v. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x) - f(x+y)}{|y|^{N+2s}} \,\mathrm{d}y.$$

Con $p.v$ el valor principal de Cauchy y $c_{N,s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(y_1)}{|y|^{n+2s} \mathrm{d}y} \right)^{-1} > 0$, una constante que no tendrá relevancia en nuestro trabajo.

2. F una función monótona real no decreciente y continua cumpliendo que $F(0) = 0$ y $F'(0) = 0$, que como caso modelo será u^m.

   En este sistema presentado, aparece la ecuación conocida como ecuación en medios porosos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u^m = 0, \quad m > 1, s \in (0,1), N > 2s. \tag{1.1}$$

El objetivo principal de este trabajo es por tanto el estudio de la ecuación en medio porosos, centrándome en aspectos como propiedades del operador, de la ecuación, tipos de soluciones de la misma, junto con algunas propiedades de esas soluciones (existencia, regularidad, etc). Una de las principales motivaciones de este trabajo, el gran abanico de aplicaciones de estas ecuaciones tales como en teoría de la probabilidad, en el ámbito demográfico, en el estudio de la distribución de las poblaciones, entre otras áreas donde juega un papel fundamental como en física tratando temas de cosmología, mecánica cuántica y termodinámica, donde las partículas se mueven de zonas de altas temperaturas a zonas de bajas temperaturas. Cn este trabajo no pretendemos hacer una búsqueda exhaustiva de bibliografía sobre el tema y por tanto no aparecen citados todos los autores que han realizado valiosas aportaciones al tema. Además de hecho he usado más fuentes bibliográficas pero en la bibliografía solamente aparecen las que de forma más directa son necesarias para la redacción del trabajo.

Otro punto importante respecto a esta ecuación es la relativa novedad de los trabajos sobre este tema, pues para algunos parámetros la ecuación se ha estudiado desde los años setenta ($s = 1$) por muchos autores, mientras que para otros valores ($s \in (0,1)$) el estudio es bastante reciente y se sigue desarrollando día a día (estudios sobre este caso han sido realizados por autores como Luis Caffarelli [5]).

Esto me lleva a usar los conocimientos ya estudiados en la carrera, desarrollar y ampliar mis conocimientos en matemáticas, a partir de la base construida en el último curso, y también constituye un reto importante para introducirnos al mundo de la investigación.

2

Preliminares

Esta sección tendrá como objetivo introducir conceptos claves tales como los espacios en los que nos situamos y una serie de hipótesis sobre el operador $\mathcal{L}$ y la función F, lo que será fundamental para comprender un conjunto de propiedades del operador laplaciano fraccionario, como pruebas que surgirán más adelante.

2.1 Introducción a los espacios de Sobolev

Recordemos primero un par de definiciones, del espacio de Banach y de Hilbert.

Definición 2.1. *Un espacio de Banach es un espacio normado de manera que la métrica inducida por la norma es completa (toda sucesión de Cauchy es convergente).*

Definición 2.2. *Un espacio de Hilbert, H, es un espacio vectorial con un producto escalar, $\langle u,v\rangle$, de manera que con la norma $\langle u,v\rangle^{1/2}$, tiene estructura de espacio de Banach. Cumpliendo además que H es uniformemente convexo.*

Antes definir el próximo espacio, recordemos el concepto de espacio dual e inyección canónica.

Sea X un espacio de Banach sobre un cuerpo numérico $\mathbb{K}$, su espacio dual normado X' está formado por el conjunto de todas las funciones lineales $f : X \to \mathbb{K}$ con norma dual $\|f\|' = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}$. El espacio dual de este espacio será el bidual de X, X''.

Por otro lado tenemos la función inyección canónica $J(x) : X' \to \mathbb{K}$ que es lineal y continua en X' ($J(x) \in X''$) definida como $J(x)(f) = f(x) \quad f \in X^{'}$. Es una aplicación bien definida, lineal e isométrica, permitiendo identificar el espacio X con el subespacio $J(X)$ de X''.

Definición 2.3. *Los espacios reflexivos son aquellos en los que se cumple que la función J es sobreyectiva cumpliendo que $J(X) = X''$ y así se identifican implícitamente X y X'', coinciden como espacio vectorial y topológico.*

Ahora centrémonos en los espacios Lebesgue, que son imprescindibles en el trabajo pues muchas de sus propiedades serán usadas en demostraciones posteriores.

Definición 2.4. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \le p < \infty$; se define el espacio de Banach, conocido como espacio de Lebesgue, $L^p(\Omega)$ como el siguiente conjunto $\{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f$ medible y $\int_\Omega |f|^p < \infty\}$, con norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.*

Por otro lado se define $L^\infty(\Omega)$ como el conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles, para las que existe una constante C tal que $|f(x)| \le C$ a.e, $x \in \Omega$, con norma
$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\{C : |f(x)| \le C \text{ a.e } x \text{ en } \Omega\}$.

Propiedades de los espacios $L^p(\Omega)$

1. Desigualdad de Hölder. Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |fg| \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$.

2. Si el espacio Ω es de medida finita, $|\Omega| < \infty$, si dados $1 \leq q \leq p \leq \infty$, entonces

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{(p-q)/pq} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

3. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f g \mathrm{d}x$.

4. $L^p(\Omega)$ es reflexivo $\forall p \in (1, \infty)$.

Consideremos también los espacios de Lebesgue con peso positivo, $L^p_\phi(\Omega)$ con ϕ una función medible y positiva, con $p \in [1, \infty)$ como el conjunto de funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $\int_\Omega \phi |f|^p \leq \infty$, con norma $\|f\|_{L^p_\phi(\Omega)} = \left(\int_\Omega \phi_1 |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$.

Ahora ya estamos en condiciones de definir los espacios de Sobolev.

Definición 2.5. *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es el conjunto de funciones de $L^p(\Omega)$ que admiten derivadas débiles de primer orden en $L^p(\Omega)$, es decir, para cada $i = 1, \ldots, N$ existe $g_i \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \rho$ para cada función test $\rho \in C^1_c(\Omega)$. A la función g_i la llamaremos derivada débil de u respecto a la variable x_i.Tienen norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$. Estos espacios son reflexivos para $1 < p < \infty$, separable para $p \in [1, \infty)$ y para $p = 2$ es un espacio de Hilbert separable, $H^1(\Omega)$, con producto escalar $\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{(L^2(\Omega))^N}$.*

Definamos ahora otro espacio de Sobolev más general.

Definición 2.6. *$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega)$ para cada $i = 1, \ldots, N\}$ con $p \in [1, \infty], m \geq 2$. Este espacio Sobolev con norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1}^m \|Du^\alpha\|_{L^p(\Omega)}$, heredará las propiedades de $W^{1,p}(\Omega)$. Por otro lado $H^m(\Omega)$ son los espacios $W^{m,2}(\Omega)$, espacios de Hilbert con producto escalar $\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle$.*

Es claro que $C^m_c(\Omega)$ está contenido en $W^{m,p}(\Omega)$ y esto nos permite definir las funciones de los espacios de Sobolev que "se anulan en el borde". Considerando esto definamos los siguientes espacios.

Definición 2.7. *El espacio $W^{1,p}_0(\Omega)$ es el cierre de $C^1_c(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, cuya norma es la inducida por $W^{1,p}(\Omega)$. Es un espacio separable, el cual será reflexivo para $p \in (1, \infty)$.*

Si consideramos el espacio $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$ tendrá como producto escalar el inducido por $H^1(\Omega)$, y será un espacio de Hilbert separable.

Al espacio dual de $W^{1,p}_0(\Omega)$ para $p \in [1, \infty]$ se denota como $W^{-1,p'}(\Omega)$ y por $H^{-1}(\Omega)$ al dual de $H^1_0(\Omega)$. Se tiene que si Ω es acotado $W^{1,p}_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$ y si no es acotado $W^{1,p}_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ para $p \in [1, 2]$. Demos ahora la definición de otro espacio que se obtiene como el cierre de otro $C^m_c(\Omega)$.

Definición 2.8. *El espacio $W^{m,p}_0(\Omega)$, es el cierre de $C^m_c(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$ cuya norma será la inducida por $W^{m,p}(\Omega)$, siendo $W^{m,2}_0(\Omega)$ el espacio de Hilbert $H^m_0(\Omega)$.*

2.2 Espacios de Sobolev fraccionarios

Teniendo en cuenta que el operador que pretendemos analizar involucra al laplaciano fraccionario es necesario introducir los espacios de Sobolev fraccionarios. Esto se suele hacer habitualmente desde un punto de vista espectral o bien de integrales singulares. Mostraremos la definición espectral asociada a un operador $\mathcal{L} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ para el cual el problema de valores propios $\mathcal{L}u = \lambda u$ en Ω, $u = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, admita una base ortonormal en $L^2(\Omega)$ de funciones propias ϕ_k, con valores propios positivos λ_k. Por tanto dado $f \in L^2(\Omega)$ $\exists! \hat{f}_k : f = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \phi_k$. Cumpliéndose que

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{kj},$$

$$\langle f, \phi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \langle \phi_k, \phi_j \rangle = \hat{f}_j.$$

De donde podemos obtener que :

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k \mathcal{L}(\phi_k)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{f}_k (\phi_k)(x).$$

Se puede definir además la potencia r de $\mathcal{L}$ como $\mathcal{L}^r f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \hat{f}_k \phi_k(x)$.

Podemos asociar a ese operador la función bilineal usando la simetría del operador.

$$B(f,g) := \int_\Omega f \mathcal{L} g \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} g \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} f \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g \mathcal{L} f \,\mathrm{d}x.$$

Respecto a esa forma bilineal, el espacio de Sobolev asociado a $\mathcal{L}$, definido como,

$$H = H(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{f}_k^2 < \infty \right\},$$

es un espacio de Hilbert con norma $\|f\|_H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \hat{f}_k^2 \right)^{1/2} = \|\mathcal{L}^{1/2} f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f \mathcal{L} f \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$ y producto interno $\langle f, g \rangle_H = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_k \hat{f}_k = B(f,g)$.

Cuando L es el operador laplaciano fraccionario, existe una relación entre el espacio de Sobolev fraccionario H definido de forma espectral y los espacios fraccionarios de Sobolev más usuales definidos mediante integrales singulares (H^s, H_0^s con $s \in (0, 1/2)$ ó $s \in (1/2, 1)$),

$$W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \},$$

con norma:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{H^s(\Omega)}^2. \tag{2.2}$$

$$|u|_{H^s(\Omega)}^2 = \int_\Omega \int_\Omega \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad s \in (0,1).$$

La relación entre los espacios Sobolev y $H(\Omega)$ sería la siguiente:

$$H(\Omega) = \begin{cases} H_0^s(\Omega), & \text{si } s \in (1/2,1), \\ H_{00}^{1/2}(\Omega) & \text{si } s = \frac{1}{2}, \\ H^{1/2}(\Omega) & \text{si } s \in (0,1/2). \end{cases}$$

En este caso $H_0^s(\Omega)$ se define de forma análoga a $H_0^1(\Omega)$ y
$H_{00}^{1/2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : |u|_{H^{1/2}(\Omega)} < \infty, \int_\Omega \frac{u(x)^2}{dist(x,\partial\Omega)} \mathrm{d}x < \infty\}$.

2.3 El operador laplaciano fraccionario

Aunque el operador diferencial que pretendemos estudiar involucra a $(-\Delta)^s u^m$, los resultados de esta memoria se pueden extender a operadores $\mathcal{L}$ más generales que el operador laplaciano fraccionario y funciones $F(u)$ más generales que u^m. En esta sección mostraremos las propiedades esenciales, contenidas en [2], que deben cumplir F y $\mathcal{L}$, las cuales satisfacen u^m y el operador laplaciano fraccionario:

(A0) $F \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $F/F' \in Lip(\mathbb{R})$ y existe a_0, $a_1 \in (0,1)$ tal que $1 - a_1 \leq (F/F')' \leq 1 - a_0$. Con $\frac{F(r)}{F'(r)}$ anulándose si $F(r) = F'(r) = 0$ o $r = 0$.

Esta hipótesis se cumple claramente para el caso de u^m, nuestro caso modelo, para el que $a_0 \leq (m-1)/m \leq a_1 \leq 1$.

(A1) $\mathcal{L}$ es lineal, simétrico, densamente definido y m-acretivo en $L^1(\Omega)$.

(A2) Si la imagen de f está contenida en el intervalo $[0,1]$ entonces la imagen de $e^{-t\mathcal{L}}$ aplicada a f también estará contenida en $[0,1]$, equivalente en operadores lineales a:

(A2') Si β es un grafo maximal monótono, en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ con $0 \in \beta(0)$ (indicaremos que el par $(s,t) \in \beta$ escribiendo que $t \in \beta(s)$), $u \in dom(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}u \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1,\infty]$, $v \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $v(x) \in \beta(u(x))$ a.e, entonces

$$\int_\Omega v(x)\mathcal{L}u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Respecto a (A1), que nuestro operador en el caso modelo, $\mathcal{L} : dom(\mathcal{L}) \subset L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ sea m-acretivo (sería el mayor de los operadores acretivos), quiere decir que :

1. Es acretivo, es decir, que para cada $\lambda \geq 0$ existe $(I + \lambda\mathcal{L})^{-1}$, denotada por G de manera que $G : R(I + \lambda A) \to L^1(\Omega)$ (con R siendo el rango) es una función no expansiva, es decir, $\|G(u) - G(v)\| \leq \|u - v\|$.

2. $R(I + \lambda\mathcal{L}) = L^1(\Omega)$, es decir, que la función $I + \lambda\mathcal{L}$ es sobreyectiva.

Respecto al punto (A2), el hecho que G sea no expansiva da lugar a que si la imagen de f se encuentra en el intervalo $[a,b]$ con a, b números reales mayores que cero, entonces la imagen de G sobre f estará en el intervalo $[a,b]$. Esto además de que $dom(\mathcal{L})$ es denso en $L^1(\Omega)$ junto a (A1) nos garantiza (A2).

Por otro lado respecto a (A2') un grafo maximal monótono, es un grafo cumpliendo que $\beta(\cdot) : H \to H$, $\langle \beta v - \beta w, v - w\rangle_H \geq 0$, $\forall v, w \in dom(\beta(\cdot))$ y $R(I + \beta) = H$. La prueba de que el operador laplaciano fraccionario satisface esta hipótesis es consecuencia del Lema 2.1 y Lema 2.2 que probamos a continuación.

Lema 2.1. *Sea $T : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ tal que para u, $v \in L^1(\Omega)$ se tiene que :*

a) $\|Tu - Tv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^1(\Omega)}$,

b) $\min\{0, \inf u\} \leq Tu(x) \leq \max\{0, \sup u\}$ *a.e.*

Sea $j : (-\infty, \infty) \to [0, \infty]$ una función semi-continua inferiormente (para cualquier $x \in Dom(j)$, se tiene que $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ con $y \in Dom(j)$, $j(y) \geq j(x) - \epsilon$) y convexa tal que $\min j = j(0) = 0$. Entonces

$$\int_\Omega j(Tu(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega j(u(x))\,\mathrm{d}x.$$

Demostración:

Consideremos las funciones convexas siguientes:

$$j_1(r) = (r - t)^+, j_2(r) = (-r - t)^+, t \geq 0.$$

Sea $y(x) = \min\{u(x), t\}$ como $y \in L^1(\Omega)$ podemos usar b) así $Ty(x) \leq t$ *a.e.* Entonces $(Tu(x) - t)^+ \leq (Tu(x) - Ty(x))^+ \leq |Tu(x) - Ty(x)|$ *a.e.* Integrando y usando a) tenemos que

$$\int_\Omega (Tu(x) - t)^+ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |u(x) - y(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u(x) - t)^+ \mathrm{d}x.$$

Tenemos que el lema se cumple para j_1. Sea ahora el operador $\mathcal{W}(u) = -T(-u)$ el cual cumple a), b), podemos aplicar este resultado a $\mathcal{W}$

$$\int_\Omega (-T(-u(x)) - t)^+ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega (u(x) - t)^+ \mathrm{d}x.$$

Ahora si vemos u como $-v$ tendriamos el lema para j_2. Combinando los resultados para j_1 y j_2 podemos considerar que para todo t real tenemos :

$$\int_\Omega [t(T(u(x)) - t)]^+ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega [t(u(x) - t)]^+ \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Ahora sea j una función convexa tal que pertenece a $C^1(\mathbb{R})$ con derivada Liptschitz tal que $\min j = j(0) = 0$, se tiene como punto crítico el cero $j'(0) = 0$. Entonces tanto para $r < 0$ como para $r \geq 0$ se tiene que :

$$j(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|} [t(r - t)]\mathrm{d}t.$$

Lo que se puede ver separando en dos casos $r < 0$ y $r \geq 0$:

1. Para $r \geq 0$,$j(r) = j(r) - j(0) = \int_0^r j'(s) - j'(0)\mathrm{d}s = \int_0^r \int_0^s j''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.
   Usando ahora el teorema de Fubini:
$$\int_0^r \int_0^s j''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^r \int_t^r j''(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^r j''(r)(r-t)\mathrm{d}t = \int_0^r j''(t)\frac{t^+}{|t|}(r-t)^+\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|}t^+(r-t)^+\mathrm{d}t.$$
   Como t es no negativa entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|}t^+(r-t)^+\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|}[t(r-t)]^+\mathrm{d}t.$$

2. Para $r < 0$ de forma análoga, $j(r) = \int_r^0 \int_0^s j''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.
   Aplicando el teorema de Fubini:
$$\int_r^0 \int_0^s j''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_r^0 \int_r^t j''(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_r^0 j''(t)\frac{-t^-}{|t|}(t-r)^+\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j''(t)}{|t|}[t(r-t)]^+\mathrm{d}t.$$
   Hemos tenido en cuenta que $(-t^-)(t-r)^+ = (-t^-) - (r-t)^-) = [t(r-t)]^+$.

Multiplicamos (2.3) por $j''(t)/|t|$ e integramos:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega t(T(u(x)) - t)j''(t)/|t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega t(u(x) - t)j''(t)/|t|\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$
La desigualdad se mantiene por ser j convexa, pues $j''(t) > 0$.

Con el teorema de Fubini llegamos a que
$$\int_\Omega j(T(u(x)))\mathrm{d}x \leq \int_\Omega j(u(x))\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Si j es una función convexa inferiormente semi-continua cualquiera, entonces va a existir una sucesión de funciones $\{j_n\}$ del mismo tipo que convergen a j inferiormente, por ejemplo, sea $j_n(r) = \inf\{\frac{1}{2n}(r-t)^2 + j(t)\}$. Está claro que $\frac{1}{2n}(r-t)^2 + j(t)$ para t fijo es una función convexa pues es suma de una función convexa $j(t)$ y $\frac{1}{2n}(r-t)^2$ también es convexa, pues $(r-t)^2$ lo es: $((1-r)a + (rb) - t)^2 \leq ((1-r)a)^2 + (rb-t)^2 \leq ((1-r)a - t)^2 + (rb-t)^2$. Luego si para cada t fijo es convexa para el ínfimo también lo será. Por otro lado también tenemos que $j_n(r)$ será una función perteneciente a $C^1(\mathbb{R})$ y $j_n(0) = 0 = \min j_n(r)$, como ocurría con j. Además es monótona en n, y se cumple que $j_n(r) \leq j(r)$ (el ínfimo en t es menor que el valor que tome para $t = r$). Así si usamos (2.4) para $j_n(r)$
$$\int j_n(Tu)\mathrm{d}x \leq \int j_n(u)\mathrm{d}x \leq \int j(u)\mathrm{d}x.$$
Ya solo aplicando que $n \to \infty$ tendríamos lo que buscamos, que $j(Tu) \in L^1(\Omega)$ y que cumple la desigualdad.

■

Lema 2.2. *Sea A un operador con dominio $dom(A) \subset L^1(\Omega)$ denso de manera que $\forall \lambda > 0$, $I + \lambda A : dom(A) \to L^1(\Omega)$, tiene como inverso una función no expansiva en $L^1(\Omega)$ y sea $f \in L^1(\Omega)$ entonces se tiene que $\sup(I+\lambda A)^{-1} f \leq \max\{0, \sup f\}$.*

Consideremos γ un grafo maximal monótono que contiene al origen, sea $u \in dom(A) \bigcap L^p(\Omega)$, con $Au \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $g(x) \in \gamma(u(x))$ a.e, siendo $p \in [1, \infty]$, $p' = p/(p-1)$. Entonces

$$\int_\Omega Au(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, Au \rangle \geq 0.$$

Demostremos este lema para nuestro operador en el caso modelo, $\mathcal{L}$.

Demostración:

Para demostrar el lema consideremos j la integral indefinida de γ que sabemos que satisface que $j(0) = 0$. Es una función convexa semi-continua inferiormente de manera que el mínimo es cero. Tenemos entonces que $\partial j = \gamma$. Ahora consideremos $g(x) \in \gamma(u(x)))$ y $T_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$. Por la definición de subdiferencial tenemos que entonces se cumple que :

$$j(T_\lambda u(x)) - j(u(x)) \geq g(x)[T_\lambda u(x) - u(x)].$$

Ahora como nuestro operador es lineal T_λ lo será. Además como A es m-acretivo de $L^1(\Omega)$ a $L^1(\Omega)$, $T_\lambda : R(I + \lambda A) \to L^1(\Omega)$ verifica que $L^1(\Omega)$=$R(I + \lambda A)$ y no tenemos problema al considerar $j(T_\lambda u)$. De la linealidad obtenemos que

$$(I+\lambda A)^{-1}(I+\lambda A)u = u \implies (T_\lambda(I+\lambda A)u) = u \implies T_\lambda(u) + T_\lambda(\lambda A u) = u \implies$$

$$\lambda T_\lambda A u = u - T_\lambda u \implies -\lambda T_\lambda A u = T_\lambda u - u. \tag{2.5}$$

Así obtenemos

$$j(T_\lambda u(x)) - j(u(x)) \geq g(x)[T_\lambda u(x) - u(x)] = -\lambda g(x)(T_\lambda A u)(x). \tag{2.6}$$

El siguiente paso será aplicar el Lema 1.1. Para ello veamos que primero $j(u) \in L^1(\Omega)$. Usando la propiedad del subdiferencial tenemos que

$$j(0) - j(u(x)) \geq g(x)(0 - u(x)) \quad a.e. \implies \int_\Omega j(u) \leq \int_\Omega gu < \infty.$$

Como gu es integrable, ya que como $u \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ por la desigualdad de Hölder $ug \in L^1(\Omega)$, entonces $j(u)$ también lo será:

Caso 1. Si $u \in L^p(\Omega), p \in (1, \infty) \implies g \in L^\infty(\Omega) \implies gu \in L^1(\Omega)$.

Caso 2. Si $u \in L^1(\Omega) \implies g \in L^\infty(\Omega) \implies gu \in L^1$.

Caso 3. Si $u \in L^\infty(\Omega) \implies g \in L^1(\Omega) \implies gu \in L^1$.

Nos quedan dos hipótesis para comprobar:

a) $\|T_\lambda u - T_\lambda v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^1(\Omega)}$.

b) $\min\{0, \inf u\} \leq T_\lambda u(x) \leq \max\{0, \sup u\}$.

La primera la obtenemos del hecho de que T_λ es no expansiva, por ser A un operador m-acretivo.

La segunda proviene del mismo hecho, que nos da como resultado que si $f \in L^1(\Omega)$ y la imagen de f pertenece al intervalo $[a,b]$ con a, b números reales positivos, entonces la imagen de T_λ sobre f pertenecerá al mismo intervalo $[a,b]$.

Por tanto aplicamos el Lema 2.1.

$$\int_\Omega j(T_\lambda(u(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega j((u(x))\,\mathrm{d}x.$$

Usando la desigualdad (2.6) :

$$\langle g, T_\lambda Au\rangle \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Ahora consideremos la acotación siguiente:

$$\|T_\lambda Au\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|Au\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Para $p \in [1,\infty)$ esta acotación se deduce de aplicar el Lema 2.1 a $|u|^p : (-\infty,\infty) \to [0,\infty)$ para la que está claro que $0^p = 0 = \text{mín}\{|u|^p\}$, que es una función continua luego inferiormente semicontinua y además convexa, por ser composición de una función creciente y convexa, $g(x) = x^p$ (convexa para $p \geqslant 1$) con otra convexa, $g(x) = |x|$.

Para $p = \infty$ también tenemos la acotación gracias a que

$$-\|Au\|_\infty \leqslant \{-Au\} \leqslant T_\lambda Au \leqslant \sup\{Au\} \leqslant \|Au\|_\infty.$$

Ahora nos queda pasar al límite la desigualdad (2.7), distingamos dos casos:

Caso 1. Si $p = 1$, esta claro que cuando λ converge a 0, entonces según como tenemos definida T_λ, $T_\lambda Au \to Au$ en $L^1(\Omega)$.

Caso 2. Para $p \in (1,\infty]$ consideremos la igualdad (2.5) sustituyendo u por Au y multiplicando por g, queda que $\lambda T_\lambda AAug = Aug - T_\lambda Aug$.

Así, $\|Aug\|_{L^p(\Omega)} = \|T_\lambda Aug + \lambda T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)}$. Ahora usando la desigualdad (2.8)

$$\|T_\lambda Aug + \lambda T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Aug\|_{L^p(\Omega)} + \|\lambda T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)}.$$

Obteniendo que $\|Aug\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Aug\|_{L^p(\Omega)} + \|\lambda T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)}$. Entonces

$0 \leq \|\lambda T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)}$. Así $\forall \epsilon \geq 0\ \exists \delta \geq 0$ tal que si $\|\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta$ entonces $\|Aug - T_\lambda Aug\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon$ con $\epsilon = \delta\|T_\lambda AAug\|_{L^p(\Omega)}$. Luego $g(T_\lambda Au) \to g(Au)$. Así

$$\int_\Omega T_\lambda Au(x)g(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega Au(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

■

3 Problema de autovalores asociado al operador laplaciano fraccionario

Analizaremos algunas de las propiedades de este operador, en concreto sobre autofunciones y autovalores, las que nos serán de ayuda para el estudio de soluciones de la ecuación en medios porosos. Nos centraremos en esta sección en el problema de autovalores siguiente:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Con Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ y el operador $\mathcal{L}$ que se puede definir en general como

$$-\mathcal{L}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))\mathbb{K}(x,y)\mathrm{d}y.$$

Con $\mathbb{K} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \backslash\{0\} \longrightarrow (0,\infty)$ tal que se cumple que $m\mathbb{K} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, con $m(x) = \text{mín}\{|x|^2, 1\}$, que $\mathbb{K}(x,x) = \mathbb{K}(x,-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ y que existe $\alpha > 0$ satisfaciendo

$$\mathbb{K}(x,x) \geq \alpha|x|^{-(N+2s)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}. \tag{3.1}$$

En nuestro caso modelo, corresponde a $-\mathcal{L}$ =-(-Δ)^s y $\mathbb{K}(x,y) = |y|^{-N+2s}$.

Si transformamos la expresión del problema de autovalores en su forma débil (mediante la multiplicación por una función φ perteneciente a un espacio que llamaremos X_0 e integración por partes en la ecuación). Nos quedará :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{R^{2N}} (u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \int_\Omega u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in X_0, \\ u \in X_0 \end{cases}$$

Denotaremos el espacio X como el espacio de las funciones $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tales que $f_{|\Omega} \in L^2(\Omega)$ cumpliendo $F(x,y) = (f(x)-f(y))\sqrt[2]{\mathbb{K}(x,x-y)} \in L^2(\mathbb{R}^{2N}\backslash(\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega))$, con $\mathcal{C}\Omega := \mathbb{R}^N\backslash\Omega$. Se considera la norma

$$||g||_X = ||g||_{L^2(\Omega)} + \left(\int_Q |g(x)-g(y)|^2\mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2},$$

con $Q = R^{2N}\backslash\mathcal{O}$, donde $\mathcal{O} = (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$. Podemos ver que es una norma pues cumple que:

1. $||g||_X = 0$ si solo si $g = 0$.

   En efecto, si $g = 0$, está claro que $||g||_X = 0$. Si $||g||_X = 0$, entonces como

   $$\left(\int_Q |g(x)-g(y)|^2\mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} \geq 0$$

   y $||g||_{L^2(\Omega)} \geq 0$, así $\left(\int_Q |g(x)-g(y)|^2\mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} = 0$.

   Por tanto es constante $g(x) = g(y) = g$ y $||g||_{L^2(\Omega)} = 0$, luego $g = 0$.

2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha g\|_X = |\alpha|\|g\|_{L^2(\Omega)} + \left(|\alpha|^2 \int_Q |(g(x)-g(y))|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} = |\alpha|\|g\|_X$.

3. Se verifica además la desigualdad triangular:

$$
\begin{aligned}
\|g+f\|_X &= \|g+f\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_Q |g(x)+f(x)-(g(y)+f(y))|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\
&\le \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \left(\int_Q |g(x)-g(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_Q |f(x)-f(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Como los sumandos dentro de la raíz son positivos tenemos que

$$
\|f+g\|_X \le \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_Q |g(x)-g(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}
$$

$$
+ \left(\int_Q |f(x)-f(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} = \|g\|_X + \|f\|_X.
$$

En cuanto al espacio X_0 se define como

$$
X_0 = \{f \in X : f = 0 \quad a.e. \quad en \quad \mathbb{R}^N \backslash \Omega\},
$$

con norma $\|v\|_{X_0} = \left(\int_Q |v(x)-v(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$.

En efecto, es suficiente con ver que si $\|v\|_{X_0} = 0$ con $v \in X_0$, entonces $v = 0$. Para ello, si $\|v\|_{X_0} = 0$ entonces

$$
\int_Q |v(x)-v(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.
$$

Así v es constante en $\mathbb{R}^N$ entonces, como v es 0 a.e en $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, es cero. El resto de propiedades de esta norma se hacen con los mismos pasos que hemos visto para la norma de X. Las propiedades elementales de estos espacios las resumiremos en los siguientes lemas. Los tres últimos demostrados en [11] (Lema 5, Lema 6):

Lema 3.1. *(Lema de Fatou.) Si f_n es una sucesión de funciones integrables no negativas para las que* $\liminf \int f_n < \infty$, *entonces*

$$
\int \liminf f_n \le \liminf \int f_n
$$

Lema 3.2. *Si $v \in X_0$ entonces pertenece al espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\mathbb{R}^N)$ con la norma definida como 2.2, y verifica*

$$
\|v\|_{H^s(\Omega)} \le \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \le c(\alpha)\|v\|_X.
$$

Con $c(\alpha) = \text{máx}\{1, \alpha^{-1/2}\}$, siendo α el numero positivo de la propiedad (3.1) de la función K, tal que $K(x) \ge \alpha|x|^{-(N+2s)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$.

Lema 3.3. *Sea $s \in (0,1)$ y 2^* el exponente conjugado de Sobolev de 2 $(2N/(N-2s))$. Entonces existe una constante positiva C que tendrá una dependencia respecto de las constantes N, s tal que para cualquier función medible de soporte compacto $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se tiene*

$$\|f\|^p_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+s2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lema 3.4. *La norma en X y en X_0 son equivalentes, es decir, existe una constante $C > 1$ dependiendo de n, s, α y Ω tal que $\forall v \in X_0$:*

$$\int_Q |v(x)-v(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \|v\|^2_X \leq C \int_Q |v(x)-v(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lema 3.5. *El espacio X_0 es un espacio de Hilbert.*

<u>Demostración:</u>

Por un lado el espacio X_0 ya tiene producto escalar para $(u, v) \in X_0 \times X_0$, gracias a las propiedades de las integrales y a la positividad de K. Este producto, que induciría a la norma de X_0, está definido como:

$$\langle u, v\rangle = \int_Q (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Falta comprobar que X_0 es completo respecto a la norma para que sea un espacio de Hilbert.

Sea u_j una sucesión de Cauchy en X_0, usando que es de Cauchy y el Lema 3.4 tenemos que $\forall \varepsilon \geq 0$, $\exists v_\varepsilon$ tal que si $i, j \geq v_\varepsilon$, entonces:

$$(1/C)\|u_i - u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1/C)\|u_i - u_j\|^2_X \leq \|u_i - u_j\|^2_{X_0} \leq \varepsilon.$$

Luego la sucesión es de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y como es completo, va a converger a una u_∞ en $L^2(\Omega)$. Pero como $u_j = 0$ en $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, podemos suponer que ocurre lo mismo para u_∞, así la convergencia se dará en el espacio $L^2(\mathbb{R}^N)$. Usando el Teorema IV.9 de [4], entonces existirá una parcial $u_{jk} \in X_0$ tal que $u_{jk} \to u_\infty$ a.e. en $\mathbb{R}^N$. Entonces por el Lema de Fatou tenemos que

$$\int_Q |u_\infty(x)-u_\infty(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \liminf_{k\to\infty} \int_Q |u_{jk}(x)-u_{jk}(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \|u_{jk}\|^2_{X_0} \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\|u_{jk} - u_{v_1}\|_{X_0} + \|u_{v_1}\|_{X_0}\right)^2.$$

De la primera desigualdad de la demostración para $\varepsilon = 1$ obtenemos entonces

$$\liminf_{k\to\infty} \left(\|u_{jk} - u_{v_1}\|_{X_0} + \|u_{v_1}\|\right)^2 \leq \left(1 + \|u_{v_1}\|_{X_0}\right)^2 < \infty.$$

Por lo tanto tenemos que $u_\infty \in X_0$. Ya tenemos que la parcial de u_j es convergente en X_0 veamos que la sucesión u_{jk} también :

Por el Lema 3.4 con $i \geq v_\varepsilon$, $\|u_i - u_\infty\|_{X_0} \leq \|u_i - u_\infty\|_X$.

Mediante la aplicación del Lema de Fatou a la definición de la norma de X tenemos que

$$\|u_i - u_\infty\|_X \leq$$

$$\liminf_{k\to\infty}\left[\left(\left(\int_Q |u_i(x)-u_{jk}(x)-u_i(y)+u_{jk}(y)|^2\mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}+\|u_i-u_{jk}\|_{L^2(\Omega)}\right]^2$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\|u_i-u_{jk}\|_X\right)^2.$$

Por el Lema 3.4 se tiene que $\lim_{k\to\infty}\left(\|u_i-u_{jk}\|_X\right)^2 \leq \lim_{k\to\infty} C\|u_i-u_{jk}\|_{X_0}^2 \leq C\varepsilon$. Lo que significa que $u_i \to u_\infty$ cuando $i \to \infty$.

■

Este espacio es reflexivo por el teorema de Milman-Pettis, puesto que es un espacio de Hilbert, al igual que ocurre con todos los espacios de Banach uniformemente convexos.

En el siguiente lema, demostrado en [8] se prueba que los conjuntos acotados en los espacios de Sobolev fraccionarios son precompactos en algunos espacios de Lebesgue (inmersión compacta). Recordemos la definición de conjunto precompacto.

Definición 3.1. *A un conjunto contenido en el espacio métrico X, es un pre-compacto de X si solo si para cada $\epsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1,\dots,x_n \in X$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k,\epsilon)$.*

Lema 3.6. *Sea $s \in (0,1)$ y $p \in [1,\infty)$ tal que $sp < n$, $q \in [1,p^*)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado $W^{s,p}(\Omega)$ y $J \subset W^{s,p}(\Omega)$. Entonces si*

$$\sup_{f\in J}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

Se da que J es un conjunto pre-compacto en $L^q(\Omega)$.

Lema 3.7. *Sea v_j un sucesión acotada en X_0, entonces existe $v_\infty \in L^\mu(\mathbb{R}^N)$ tal que para una parcial de v_j, denotada de la misma manera, tendremos que*

$$Si \quad j \longrightarrow \infty \implies v_j \longrightarrow v_\infty \quad en \quad L^\mu(\mathbb{R}^N), \quad \forall \mu \in [1,2^*).$$

Demostración:

Por el Lema 3.2, $v_j \in H^s(\mathbb{R}^N)$ entonces $v_j \in H^s(\Omega)$. Sabemos con ese lema que

$$\|v_j\|_{H^s(\Omega)} \leq \|v_j\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq c(\alpha)\|v_j\|_X.$$

Ahora usando el Lema 3.4 $c(\alpha)\|v_j\|_X \leq c(\alpha)\sqrt[2]{C}\|v_j\|_{X_0} < \infty$.

Se ve por ello que v_j está acotado en $H^s(\Omega)$, en particular en $L^2(\Omega)$.

Como Ω es acotado, el Lema 3.6, nos dice que la sucesión v_j es un conjunto precompacto en $L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1,2^*)$, por ello, tiene una parcial que nombraremos igual, convergente en ese espacio a v_∞. Así $v_j \to v_\infty$ en $L^q(\Omega)$ cuando $j \to \infty$.

Como v_j se anula fuera de Ω, se puede decir que la convergencia ocurre en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

■

Antes de mostrar más lemas recordemos algunos conceptos topológicos.

Definición 3.2. *Dadas dos topologías τ_1, τ_2 sobre un conjunto X si $\tau_1 \subset \tau_2$ diremos que τ_1 es más débil que τ_2. Si F es una familia no vacía de funciones $f : X \to Y_f$ con Y_f un espacio topológico,τ es la topología más debil sobre X, la topología débil, si es la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos $f^{-1}(V)$, con V abierto en Y_f.*

Definición 3.3. *Un subespacio $U \subset X$ es débilmente cerrado en X si es cerrado en la topología débil de X, cumpliendo que para todo punto $x \in X$ $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U$ tal que x_n converge débilmente a x*

Definición 3.4. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ converge débilmente a $x \in X$ si para f en el dual de X, $f(x_n)$ converge a $f(u)$.*

Consideremos también para los siguientes lemas $J : X_0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$J(u) = 1/2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\|u\|_{X_0}^2.$$

Entonces: $\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} (u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle u, v\rangle_{X_0} = \langle J'(v), u\rangle$.

Lema 3.8. *Sea un subespacio X_* débilmente cerrado de X_0, y sea $M_* = \{u \in X_* : \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$, entonces*

$$\exists u_* \in M_* : \min_{u\in M_*} J(u) = J(u_*).$$

Demostración:

Usemos una sucesión minimizante $u_j \in M_*$ para J, es decir que

$$J(u_j) \to \inf_{u\in M_*} J(u) \geq 0 > -\infty \quad j \to \infty.$$

Entonces $J(u_j)$ está acotada en $\mathbb{R}$ y por la definición de J tendríamos que $\|u_j\|_{X_0}$ también.

Por otro lado X_0 es reflexivo entonces existe una parcial de u_j, que denotaremos igual, que converge débilmente a u_*, como $u_j \in M_*$, $M_* \subset X_*$ y X_* débilmente cerrado, $u_* \in X_*$. Así tenemos que $\forall \rho \in X_0$ $\int_{\mathbb{R}^{2N}} (u_j(x)-u_j(y))(\rho(x)-\rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ converge a $\int_{\mathbb{R}^{2N}} (u_*(x) - u_*(y))(\rho(x) - \rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Usando que $\|u_j\|_{X_0}$ está acotada podemos usar el Lema 3.7 y así obtenemos convergencia fuerte para una parcial, que denotaremos de la misma manera, $u_j \in X_0$ tal que $u_j \to u_*$ en $L^2(\Omega)$ cuando $j \to \infty$. Pero como $u_j = 0$ en $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$, podemos suponer que ocurre lo mismo para u_*, así la convergencia se dará en el espacio $L^2(\mathbb{R}^N)$. Usando el Teorema IV.9 de [4], también vamos a obtener convergencia para casí todo punto de la parcial en $\mathbb{R}^N$.

Entonces ahora por definición tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} J(u_j) = \frac{1}{2} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_j(x) - u_j(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Por el lema de Fatou tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} J(u_j) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_*(x) - u_*(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = J(u_*) \geq \inf_{u\in M_*} J(u).$$

Y como teniamos que $J(u_j) \to \inf_{u\in M_*} J(u) \geq 0$ entonces

$$J(u_*) = \inf_{u\in M_*} J(u) = \min_{u\in M_*} J(u).$$

■

Gracias a este lema se puede obtener el siguiente (demostrado en [13] Claim 1).

Lema 3.9. *Considerando X_*, X_0, M_* igual que en el anterior lema tenemos que existe $u_* \in M_*$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (u_*(x) - u_*(y))(\rho(x) - \rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_* \int_\Omega u_*(x)\rho(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall \rho \in X_*,$$

con $\lambda_* = 2J(u_*) > 0$.

Otra propiedad que cumple el espacio X_0 es que $C_0^2(\Omega) \subset X_0$ (conjunto de las funciones $C^2(\Omega)$ que se anulan fuera de Ω) como consecuencia del lema (demostrada en el Lema 5.1 de [12]).

Lema 3.10. *Sea $\rho \in C_0^2(\Omega)$, y $(x, y) \in \mathbb{R}^{2N}$, entonces:*

$$|\rho(x) - \rho(y)|^2\mathbb{K}(x, x-y) \in L^1(\mathbb{R}^{2N}).$$

Observemos que gracias al Lema 3.9, por la definición de autofunción e asociada al autovalor λ y de la función J se satisface la ecuación:

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |e(x) - e(y)|^2\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda\|e\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2}$$

Esto se obtiene de sustituir en el lema ρ por e, u_* por e, λ_* por λ y X_* por X_0.

Una vez que tenemos estos lemas podemos pasar a demostrar la existencia de una base ortonormal en $L^2(\Omega)$ de autofunciones. Lo haremos en sucesivas proposiciones.

Proposición 3.1. *Sean λ_1, λ_2 dos autovalores distintos entonces sus respectivas autofunciones, $e_1, e_2 \in X_0$ cumplen que*

$$\langle e_1, e_2\rangle_{X_0} = 0 = \int_\Omega e_1(x)e_2(x)\mathrm{d}x.$$

Demostración:

Primero suponiendo que ninguna de las autofunciones es nula, las normalizamos, teniendo $f_1 = e_1/\|e_1\|_{L^2(\Omega)}, f_2 = e_2/\|e_2\|_{L^2(\Omega)}$. Al seguir siendo autofunciones, cumple la ecuación del problema de autovalores y tomando como función test f_i en el problema que satisface $f_j (i \neq j)$ se tiene:

$$\lambda_1 \int_\Omega f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f_1(x) - f_1(y))(f_2(x) - f_2(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_2 \int_\Omega f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Por tanto

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_\Omega f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x = 0$$

y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\int_\Omega f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x = 0$. Entonces

$$\langle f_1, f_2\rangle_{X_0} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f_1(x) - f_1(y))(f_2(x) - f_2(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

■

Proposición 3.2. *Considerando el problema de autovalores con su formulación débil, este admitirá un autovalor positivo de la forma:*

$$\lambda_1 = \min_{u \in X_0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Demostración:

Del Lema 3.8 tenemos que ese λ_1 existe y del Lema 3.9 nos asegura que es un autovalor, ambos lemas aplicados para $X_* = X_0$. Por definición $\lambda_1 > 0$. Si fuese cero, como cumple la fórmula $\min_{u \in X_0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, implicaría que $u(x) = u(y)$, es decir que es constante. Como pertenece a X_0, fuera de Ω es cero por lo tanto $u = 0$, pero en ese caso no cumple que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

■

Proposición 3.3. *Existe una autofunción no negativa $e_1 \in X_0$ asociada al autovalor λ_1 tal que $\|e_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$ y $\lambda_1 = \min_{u \in X_0 : \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_1(x) - e_1(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.*

Demostración:

Sea λ_1 el autovalor definido como el mínimo de la proposición anterior que existe y esta asociado a una autofunción $e_1 \in X_0$ por los lemas 3.8 y 3.9 para $X_* = X_0$. Veamos que e_1 es positiva.

Sea e una autofunción de norma 1 en $L^2(\Omega)$, además de la anterior e_1, asociada al autovalor λ_1 se verifica la ecuación (3.2)

$$2J(e) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_1(x) - e_1(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \lambda_1 = 2J(e_1).$$

Por otro lado, gracias a la desigualdad triangular, tenemos que $J(|e|) \leq J(e)$.

Como $e \in X_0$ entonces $|e| \in X_0$ teniendo que $\||e|\|_{L^2(\Omega)} = \|e\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Usando la minimalidad de e_1 en J, que proviene de los lemas 3.8 y 3.9, tenemos que $J(|e|) = J(e) = J(e_1)$. Entonces tenemos que $|e|$ también es una autofunción, y sustituyendo e_1 por $|e|$ lo tendríamos probado. Además ninguna autofunción asociada a λ cambia de signo. Si tenemos puntos $x \in \{e > 0\}$ y $y \in \{e < 0\}$ entonces

$$||e(x)| - |e(y)|| = |e(x) + e(y)| = \max\{e(x) + e(y), -e(x) - e(y)\} < e(x) - e(y) = |e(x) - e(y)|.$$

Lo que significa que $J(|e|) < J(e)$. Pero como hemos dicho antes por la minimalidad de e_1 tendríamos una contradicción pues sus valores en J deberían ser iguales.

■

Proposición 3.4. *λ_1 es simple, lo que significa que si $u \in X_0$ es una solución para*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (u(x) - u(y))(\rho(x) - \rho(y)) \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \lambda_1 \int_\Omega u(x)\rho(x) \mathrm{d}x, \quad \forall \rho \in X_0.$$

Entonces $u = \gamma e_1, \quad \gamma \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Supongamos que para λ_1 tenemos otra autofunción diferente de e_1, f_1. Por la prueba de la proposición anterior sabemos que o bien es positivo o bien es negativo, así que consideremos el caso en el que $f_1 \geq 0$ a.e en Ω (la demostración el otro caso es análoga).

Para ello, vamos a normalizarlo y a considerar su deferencia respecto de e_1, es decir:

$$h = \frac{f_1}{\|f_1\|_{L^2(\Omega)}}, \quad g_1 = e_1 - h.$$

Ese g_1 es otra autofunción asociada a λ_1. Esto es debido a que tanto e_1 como h cumplen la ecuación (3.2) para λ_1, entonces (junto con el uso de la Proposición 3.1) g_1 también:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \|g\|^2_{L^2\Omega} &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_1(x) - e_1(y)|^2 - |h(x) - h(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_1(x) - e_1(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{R^{2n}} |h(x) - h(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= |e_1(x) - e_1(y) - (f(x) - f(y))|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{R^{2n}} |g(x) - g(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Como es autofunción por la prueba de la proposición anterior, ninguna autofunción cambia de signo, $g_1 \geq 0$ o $g_1 \leq 0$ en Ω, es decir $e_1 \geq h$ o $e_1 \leq h$ y por ser $h, e_1 \geq 0$, $e_1^2 \geq h^2$ o $e_1^2 \leq h^2$. Por otro lado

$$\int_\Omega (e_1^2(x) - h^2(x)) \mathrm{d}x = \|e_1\|^2_{L^2(\Omega)} - \|h\|^2_{L^2(\Omega)} = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto al ser una función de signo constante con integral cero, dicha función tiene que ser cero, lo que nos lleva a que h proporcional a e_1, siendo f_1 múltiplo de e_1.

■

Proposición 3.5. *El conjunto de autovalores del problema, es una sucesión de autovalores $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que:*

a) 0 $<\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots$

b)$\lambda_k \to \infty \quad$ si $\quad k \to \infty$.

c) $\lambda_k = \min\limits_{u \in P_{k+1} : \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

con $P_{k+1} = \{u \in X_0 : \langle u, e_j \rangle_{X_0} = 0 \quad \forall j = \{1, \ldots, k\}\}$.

<u>Demostración:</u>

Sabemos que el mínimo de la función $\int_{\mathbb{R}^{2n}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existe, asociado a una autofunción $e_{k+1} \in P_{k+1}$ por los lemas 3.8 y 3.9 para $X_* = P_{k+1}$, obteniendo una autofunción para el valor definido en c), siendo P_{k+1} débilmente cerrado por como se ha definido en el espacio de Hilbert $(X_0, \|.\|_{X_0})$, ya que dado e_j en X_0 podemos considerar f en el dual de X_0 como $f(u) = \langle u, e_j \rangle_{X_0}$. Así si u_n converge débilmente a u, se tiene que $f(u_n)$ converge a $f(u)$ para cada f en el dual de X_0. Por tanto $\langle u_n, e_j \rangle_{X_0}$ converge a $\langle u, e_j \rangle_{X_0}$ $\forall e_j \in X_0$. Así todo límite débil de sucesiones $u_n \in P_{k+1}$ se encuentra en P_{k+1}. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\rho(x) - \rho(y)) \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_{k+1} \int_\Omega e_{k+1}(x) \rho(x) \mathrm{d}x \quad \forall \rho \in \mathbb{P}_{k+1}.$$

Por lo que realmente nos quedaría ver, para que λ_{k+1} fuese autovalor y e_{k+1} autofunción asociada, que se cumple la igualdad anterior $\forall \rho \in X_0$. Usaremos inducción sobre k, teniendo que sabemos que λ_1 es un autovalor, lo que ya habíamos demostrado antes. Tengamos en cuenta la siguiente descomposición :

$$X_0 = span\{e_1, \dots, e_k\} \oplus (span\{e_1, \dots, e_k\})^{\perp} = span\{e_1, \dots, e_k\} \oplus \mathbb{P}_{k+1}.$$

Por lo tanto tenemos que $\forall \rho \in X_0$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ con $\rho_1 = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Aplicando el Lema 3.9 a $\rho_2 = \rho - \rho_1$ obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\rho(x) - \rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)\rho(x)\mathrm{d}x =$$
$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\rho_1(x) - \rho_1(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)\rho_1(x)\mathrm{d}x =$$
$$\sum_{i=1}^{k} c_i \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)e_i(x)\mathrm{d}x \right).$$

Y si nos damos cuenta, usando la forma débil del problema de autovalores pero para $u = e_i$ y para $\rho = e_{k+1}$ con $i = 1, \dots, k$, lo cual se puede hacer por hipótesis de inducción teniendo

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)e_i(x)\mathrm{d}x.$$

Por otro lado como $\mathbb{P}_{k+1} \subseteq \mathbb{P}_k \subseteq X_0$, entonces $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \dots$.

Usando esta desigualdad anterior,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(e_i(x) - e_i(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)e_i(x)\mathrm{d}x.$$

Considerando esto tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\rho(x) - \rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \rho \in X_0.$$

Es decir, lo que queríamos que λ_{k+1} es autovalor y e_{k+1} autofunción.

Probemos a), es decir que λ_1 no es igual que λ_2 mediante contradicción.

En otro caso, la autofunción e_2, sería una autofunción para λ_2, pero también para λ_1, por ello usando la Proposición 3.4, $e_2 = \gamma e_1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $e_2 \neq 0$. Como $e_2 \in \mathbb{P}_2$, $0 = \langle e_1, e_2 \rangle = \gamma \|e_1\|_{X_0}^2$. Entonces $e_1 = 0$ lo que es una contradicción con que $e_2 \neq 0$.

Probemos b), para ello veamos que si $k, h \in \mathbb{N}, k \neq h$ entonces

$$\langle e_k, e_h \rangle_{X_0} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x)e_h(x)\mathrm{d}x.$$

Supongamos que $k > h$, entonces $k - 1 \geq h$ por lo que

$$e_k \in P_k = (span\{e_1, \dots e_{k-1}\})^{\perp} \subseteq (span\{e_h\})^{\perp}.$$

Entonces $\langle e_k, e_h \rangle_{X_0} = 0$.

Como e_k es una autofunción usando la ecuación del problema de autovalores pero para $u = e_k$ y $\rho = e_h$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_k(x) - e_k(y))(e_h(x) - e_h(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_k \int_{\Omega} e_k(x)e_h(x)\mathrm{d}x.$$

Así $\langle e_k, e_h \rangle_{X_0} = 0 = \int_{\Omega} e_k(x)e_h(x)\mathrm{d}x$.

Ahora para terminar la demostración de b) supongamos que $\lambda_k \to c \in \mathbb{R}$, así λ_k acotada en $\mathbb{R}$.

Consideremos su autofunción asociada e_k normalizada, que $\|e_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Usando que todo autovalor cumple la fórmula (3.2)

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_k(x) - e_k(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_k \|e_k\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces $\|e_k\|^2_{X_0} = \lambda_k$

Ahora usando el Lema 3.7 llegamos a una parcial de e_k que la denotaremos por e_{kj} de manera que cuando $kj \to \infty$

$$e_{kj} \to e_\infty \quad en \quad L^2(\Omega).$$

Como $L^2(\Omega)$ es un espacio completo tenemos que e_{kj} será de Cauchy en ese espacio. Pero ya hemos demostrado antes que siendo kj, ki dos naturales diferentes entonces en $L^2(\Omega)$ se cumple que $\langle e_{kj}, e_{ki} \rangle = 0$. Por lo que $\|e_{kj} - e_{ki}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|e_{kj}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_{ki}\|^2_{L^2(\Omega)} = 2$, lo que es una contradicción ya que e_{kj} es de Cauchy, teniendo ya b).

Probemos c)

Tendremos que ver que cualquier autovalor es posible escribirlo con la fórmula que nos proporciona el apartado c). Lo demostraremos por contradicción.

Si $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores que se pueden escribir con la fórmula c), supongamos que existe λ que no pertenece a $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Sea e una autofunción normalizada, asociada a λ se cumpliría que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |e(x) - e(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \|e\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda = 2J(e).$$

Por otro lado, gracias al apartado a) tenemos la minimalidad de λ_1 cumpliendose que

$$\lambda = 2J(e) \geq 2J(e_1) = \lambda_1.$$

Como λ no pertenece a la sucesión $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ para la que se cumpla b), debería existir un autovalor de la sucesión mayor que λ. Así existirá un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_k \lneq \lambda \lneq \lambda_{k+1}$.

Veamos ahora que $e \notin \mathbb{P}_{k+1}$, pues si perteneciese, entonces por cumplirse la ecuación anterior

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |ex) - e(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \|e\|^2_{L^2(\Omega)},$$

junto con la minimalidad de λ_{k+1} dada por la fórmula c) tenemos que

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda = 2J(e).$$

Llegamos a una contradicción. Luego como $e \notin \mathbb{P}_{k+1}$ vamos a tener para un $i \in \{1, \ldots, k\}$ que $\langle e, e_i \rangle_{X_0} \neq 0$. Una contradicción con la Proposición 3.1 probándose que todos los autovalores son de la forma que indica c). Así concluimos la demostración de esta proposición.

■

Proposición 3.6. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una autofunción de λ_{k+1}, $e_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$, tal que $\|e_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ y $\lambda_{k+1} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} |e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

Demostración:

Usando $X_* = \mathbb{P}_{k+1}$ en el Lema 3.8 podemos asegurar que ese mínimo existe asociado a una autofunción e_{k+1} y que λ_{k+1} cumple la fórmula deseada gracias al Lema 3.9. El hecho de que e_{k+1} es una autofunción para λ_{k+1} ya lo habíamos demostrado al principio de la prueba de la Proposición 3.5 teniendo que se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (e_{k+1}(x) - e_{k+1}(y))(\rho(x) - \rho(y))\mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_{k+1} \int_{\Omega} e_{k+1}(x)\rho(x)\mathrm{d}x \quad \forall \rho \in X_0.$$

■

Proposición 3.7. *La sucesión de autofunciones, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ asociadas al valor propio λ_k es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y ortogonal de X_0.*

Demostración:

En cuanto a la ortogonalidad para autofunciones de un mismo autovalor ya la hemos demostrado al principio de la demostración del apartado b) de la Proposición 3.5. Demostremos que es base para X_0.

Primero veamos que si $v \in X_0$ tal que $\langle v, e_k \rangle_{X_0} = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ entonces $v \equiv 0$.

Supongamos que existe $v \not\equiv 0$ en X_0 tal que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ y que $\langle v, e_k \rangle_{X_0} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Ahora por el apartado b) de la Proposición 3.5 tenemos que existirá un $k \in \mathbb{N}$ tal que $2J(v) < \lambda_{k+1}$. Que por c) de la misma proposición

$$\lambda_{k+1} = \min_{u \in P_{k+1} : \|u\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x) - u(y)|^2 \mathbb{K}(x, x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Por lo tanto $v \notin \mathbb{P}_{k+1}$ ya que de lo contrario la minimalidad de λ_{k+1}, dada por la fórmula c) de la Proposición 3.5, se tiene que $2J(u) \geq \lambda_{k+1}$.

Es una contradicción respecto a como habíamos definido v, pues habría un $j \in N$ que $\langle v, e_j \rangle_{X_0} \neq 0$. Por lo tanto tenemos que $v \equiv 0$.

Para terminar de ver que es una base ortogonal para X_0 consideremos $E_i = e_i / \|e_i\|_{X_0}$, $f \in X_0$ y $f_j = \sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i \rangle_{X_0} E_i$. Esta claro que $\forall j \in \mathbb{N}, f_j \in span\{e_1 \ldots e_j\}$.

Ahora sea $v_j = f - f_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 \leq \|v_j\|_{X_0}^2 = \langle v_j, v_j \rangle_{X_0} &= \|f\|_{X_0}^2 + \|f_j\|_{X_0}^2 - 2\langle f, f_j \rangle_{X_0} \\
&= \|f\|_{X_0}^2 + \langle f_j, f_j \rangle_{X_0} - 2\sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i \rangle_{X_0}^2 \\
&= \|f\|_{X_0}^2 + \left\langle \sum_i \langle f, E_i \rangle_{X_0} E_i, \sum_k \langle f, E_k \rangle_{X_0} E_k \right\rangle_{X_0} - 2\sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i \rangle_{X_0}^2 \\
&= \|f\|_{X_0}^2 + \sum_i \sum_k \langle f, E_i \rangle_{X_0} \langle f, E_k \rangle_{X_0} \langle E_i, E_k \rangle_{X_0} - 2\sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i \rangle_{X_0}^2.
\end{aligned}$$

Por ser $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonal tenemos

$$\|f\|_{X_0}^2 + \sum_i \sum_k \langle f, E_i\rangle_{X_0} \langle f, E_k\rangle_{X_0} \langle E_i, E_k\rangle_{X_0} - 2\sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2$$

$$= \|f\|_{X_0}^2 - \sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2 \longrightarrow \sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2 \leq \|f\|_{X_0}^2 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por lo que tenemos la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2$.

Consideremos la sucesión de sumas parciales de la serie $T_j = \sum_{i=1}^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2$.

Como la serie es convergente, T_j lo será, y por ello será de Cauchy en $\mathbb{R}$. Ahora veamos que v_j será de Cauchy en X_0. Sea $Q > j$

$$\|v_Q - v_j\|_{X_0}^2 = \|f_Q - f_j\|_{X_0}^2 = \sum_{i=j+1}^{Q} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2$$

usando la ortogonalidad de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tenemos $\sum_{i=1+j}^{Q} \langle f, E_i\rangle_{X_0}^2 = T_Q - T_j$.

Y como T_j era de Cauchy ya lo tenemos. Además por el Lema 3.2, X_0 es un espacio de Hilbert, y exisitrá $v \in X_0$ tal que $v_j \to v$ cuando $j \to \infty$.

Por otro lado tenemos que si $j \geq k$,

$$\langle v_j, E_k\rangle_{X_0} = \langle f, E_k\rangle_{X_0} - \langle f_j, E_k\rangle_{X_0} = \langle f, E_k\rangle_{X_0} - \left\langle \sum_i^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0} E_i, E_k \right\rangle_{X_0}$$

$$= \langle f, E_k\rangle_{X_0} - \sum_i^{j} \langle f, E_i\rangle_{X_0} \langle E_i, E_k\rangle_{X_0}.$$

Como $\langle E_i, E_k\rangle_{X_0} = 0$ si $i \neq k$ y uno en caso contrario pero como $j \geq k$ este caso se dará entonces $\langle f, E_k\rangle_{X_0} - \sum_i^j \langle f, E_i\rangle_{X_0} \langle E_i, E_k\rangle_{X_0} = \langle f, E_k\rangle_{X_0} - \langle f, E_k\rangle_{X_0} = 0$.

Por lo tanto tenemos que $\langle v, E_k\rangle_{X_0} = 0$ y como ya habíamos demostrado al principio en ese caso $v \equiv 0$. Entonces $f_j = f - v_j \to f - v = f$.

Para completar la prueba nos queda ver que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$es una base para $L^2(\Omega)$.

Sea $v \in L^2(\Omega)$ y $v_j \in C_0^2(\Omega) : \|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1/j$, debido a que $C_0^2(\Omega) \subset X_0$, tenemos que $v_j \in X_0$. Como $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hemos visto que es una base para X_0 entonces existirá $kj \in \mathbb{N}$ una $w_j \in span\{e_1, \ldots, e_{kj}\}$ tal que $\|v_j - w_j\|_{X_0} \leq 1/j$.

Usando el Lema 3.4 tenemos que

$$\|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_j - w_j\|_X \leq C\|v_j - w_j\|_{X_0} \leq C/j.$$

Ahora mediante la desigualdad triangular de la norma llegamos a que

$$\|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_j - v\|_{L^2(\Omega)} + \|v_j - w_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C/j + 1/j.$$

Teniendo así que es una base para $L^2(\Omega)$.

$\blacksquare$

Proposición 3.8. *Cada autovalor λ_k tiene multiplicidad finita, además si λ_k cumple que*

$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1},$$

con $h \in \mathbb{N}_0$, entonces las autofunciones asociadas a λ_k se corresponden con $span\{e_k, \ldots e_{k+h}\}$.

Demostración:

Sea $h \in \mathbb{N}_0$ tal que $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+h} < \lambda_{k+h+1}$.

De la Proposición 3.6 ya sabemos que $span\{e_k, \ldots e_{k+h}\}$ es un conjunto de autofunciones correspondiente a $\lambda_k, \ldots, \lambda_{k+h}$.

Necesitamos ver entonces que cualquier autofunción, $\phi \in X_0$ asociada a λ_k pertenece a $span\{e_k, \ldots e_{k+h}\}$. Para ello escribamos:

$$X_0 = span\{e_k, \ldots e_{k+h}\} \oplus (span\{e_k, \ldots e_{k+h}\})^{\perp}.$$

Entonces escribamos $\phi = \phi_1 + \phi_2$, $\phi_1 \in span\{e_k, \ldots e_{k+h}\}$ y $\phi_2 \in (span\{e_k, \ldots e_{k+h}\})^{\perp}$.

Cumpliéndose así que $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{X_0} = 0$. Podemos expresar ϕ_1 como $\phi_1 = \sum_{i=k}^{k+h} c_i e_i$ $c_i \in \mathbb{R}$.

Como ϕ es autofunción va a cumplir la ecuación (3.2), entonces:

$$\lambda_k \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\phi(x) - \phi(y))^2 \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|\phi\|^2_{X_0} = \|\phi_1\|^2_{X_0} + \|\phi_2\|^2_{X_0}.$$

(Recordemos que $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{X_0} = 0$).

Como $\{e_k, \ldots e_{k+h}\}$ son autofunciones correspondiente a $\lambda_k = \ldots = \lambda_{k+h}$, entonces ϕ_1 es una autofunción correspondiente a λ_k.

Escribimos entonces la ecuación del problema de autovalores con $u = \phi_1$ y $\rho = \phi_2$

$$\lambda_k \int_{\Omega} \phi_1(x)\phi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\phi_1(x) - \phi_1(y))(\phi_2(x) - \phi_2(y)) \mathbb{K}(x, x-y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{X_0} = 0.$$

Por otro lado según la forma en la que habíamos expresado ϕ_1 y usando la ortogonalidad dada en la proposición anterior de $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tenemos que

$$\|\phi_1\|^2_{X_0} = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|^2_{X_0} = \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|^2_{L^2(\Omega)} \lambda_i = \lambda_k \sum_{i=k}^{k+h} c_i^2 \|e_i\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Así tendríamos de las igualdades vistas que

$$\lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_k \|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|^2_{X_0} = \|\phi_1\|^2_{X_0} + \|\phi_2\|^2_{X_0} =$$

$$\lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_2\|^2_{X_0} \Longrightarrow \lambda_k \|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\phi_2\|^2_{X_0}.$$

Por tanto ϕ_2 es una autofunción para λ_k, cumpliendo (3.2) satisfaciendo la ecuación del problema de autovalores.

Gracias al Lema 3.1 se tiene $\langle \phi_2, e_1 \rangle_{X_0} = \ldots = \langle \phi_2, e_{k-1} \rangle_{X_0} = 0$. Esto junto al hecho que $\phi_2 \in (span\{e_k, \ldots e_{k+h}\})^{\perp}$ implica que $\phi_2 \in (span\{e_k, \ldots e_{k+h}\})^{\perp} = \mathbb{P}_{k+h+1}$.

Veamos que $\phi_2 \equiv 0$.

Por el apartado c) de la Proposición 3.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_k < \lambda_{k+h+1} &= \min_{u\in\mathbb{P}_{k+1}} \frac{\int_{\mathbb{R}^{2n}} |u(x)-u(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x} \\
&\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\phi_2(x)-\phi_2(y)|^2 \mathbb{K}(x,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_\Omega |\phi_2(x)|^2 \mathrm{d}x} = \frac{\|\phi_2\|^2_{X_0}}{\|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Por otra parte $\lambda_k \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|^2 = \|\phi\|^2_{X_0} = \|\phi_1\|^2_{X_0} + \|\phi_2\|^2_{X_0}$.
Según hemos demostrado antes tenemos que

$$\|\phi_1\|^2_{X_0} + \|\phi_2\|^2_{X_0} > \lambda_k \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_k \|\phi_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_k (\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|)^2.$$

Lo que es una contradicción, por lo tanto $\phi_2 \equiv 0$.
Así tenemos que $\phi = \phi_1 \in span\{e_k, \ldots, e_{k+h}\}$ como queríamos, terminando la prueba.

■

Por lo tanto hemos mostrado que el operador $\mathcal{L} = (-\Delta)^s$, $s \in (0,1)$ es un operador autoadjunto con autovalores y con un conjunto de autofunciones normales en $L^2(\Omega)$ con al menos una positiva que llamaremos ϕ_1.

4 Ecuación en medios porosos fraccionaria

En esta sección introduciremos los diferentes tipos de soluciones centrándonos más adelante en las soluciones mild y en las soluciones débiles duales demostrando una serie de propiedades importantes para estas como son su existencia y unicidad.

Para comenzar esta sección veremos dos resultados previos que son importantes para la existencia y unicidad y para las cotas a priori de estas soluciones.

Definición 4.1. *La función de Green de un operador $\mathcal{L}$ es una función continua y diferenciable que cumple para $(x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$ que $\mathcal{L}[G(x,y)] = \delta(x-y)$, en un dominio $D \subset \mathbb{R}^{2N}$ (en nuestro caso Ω), de manera que $\mathcal{L}\left[\int_D G(x,y)f(y)dy\right] = \int_D \delta(x-y)f(y)dy = f(x)$, pudiendo ser útil para expresar soluciones de una ecuación tipo $\mathcal{L}u = f(x)$. Esa δ es la medida de Dirac centrada en cero.*

El inverso del operador $\mathcal{L} = (-\Delta)^s$, que será también simétrico, se denota como la función $\mathcal{L}^{-1} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ siguiente

$$\mathcal{L}^{-1}f(x) = \int_\Omega \mathbb{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega G(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

El núcleo de la inversa, se puede ver como G, la función de Green del operador $\mathcal{L}$.

Al núcleo $\mathbb{K}$ hay que imponerle una serie de hipótesis:

(K1) . Existe una constante $c_{1,\Omega} > 0$ tal que para a.e $x,y \in \Omega$

$$0 < \mathbb{K}(x,y) \leq c_{1,\Omega}|x-y|^{-(N-2s)}. \tag{4.1}$$

(K2) . Sea $s \in (0,1)$, $c_{0,\Omega}$, $c_{1,\Omega} > 0$ tal que a.e $\forall x,y \in \Omega$

$$\begin{aligned} c_{0,\Omega}dist(x,\partial\Omega)^s dist(y,\partial\Omega)^s &\leq \mathbb{K}(x,y) \leq \\ \frac{c_{1,\Omega}}{|x-y|^{N-2s}}\left(\frac{dist(x,\partial\Omega)^s}{|x-y|^s} \wedge 1\right)&\left(\frac{dist(y,\partial\Omega)^s}{|x-y|^s} \wedge 1\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Obtendremos ahora un resultado para la distancia de un punto $x \in \mathbb{R}^N$ al borde de Ω, $dist(x,\partial\Omega)$ mediante el siguiente resultado demostrado en el Teorema 1.2. de [10].

Lema 4.1. *Sea Ω el dominio acotado con borde suficientemente regular (basta con que sea variedad de clase $C^{1,1}$), $g \in L^\infty(\Omega)$, u la solución de*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = g & x \in \Omega, \\ u(x)=0 & \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, \end{cases}$$

Tenemos que $u/dist(x,\partial\Omega) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ y $\|u/dist(x,\partial\Omega)^s\| \leq C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.
Con $\alpha > 0 : \alpha < \min\{s, 1-s\}$ y C otra constante que dependen ambas de Ω y s.

El Lema 4.1 dará lugar a que cerca del borde de Ω cumpla que $\phi_1(x) \asymp dist(x,\mathbb{R}^N\backslash\Omega)^s$ pues

$$\mathcal{L}(\phi_1) = \lambda_1\phi_1 \Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1\phi_1) = \phi_1.$$

Por como hemos definido $\mathcal{L}^{-1}$ tenemos que $\phi_1 = \int_\Omega \mathbb{K}(x,y)\lambda_1\phi_1(y)\mathrm{d}y$.

Usando la hipótesis (K2).

$$\phi_1 \geq c_{0,\Omega} dist(x,\partial\Omega)^s \int_\Omega \lambda_1\phi_1(y) dist(y,\partial\Omega)^s \mathrm{d}y$$

y

$$\phi_1 \leq c_{1,\Omega} dist(x,\partial\Omega)^s \int_\Omega \frac{dist(y,\partial\Omega)^s}{|x-y|^{N-s}} \lambda_1\phi_1(y)\mathrm{d}y.$$

Teniendo que $c_1 dist(x,\partial\Omega) \leq \phi_1(x) \leq c_2 dist(x,\partial\Omega)$ yendo a cero en el borde $\phi_1(x) \asymp dist(x,\partial\Omega)$.

4.1 Tipos de soluciones

Definamos diferentes tipos de soluciones para la ecuación en medios porosos fraccionaria

$$u_t = -\mathcal{L}u^m \quad en \quad Q_T = (0,T)\times\Omega. \tag{4.3}$$

Definición 4.2. *Una función u es una solución débil a la ecuación (4.3) si*

i) $u \in C((0,T) : L^1(\Omega)), u^m \in L^2_{loc}((0,T) : H(\Omega))$.

ii) Se cumple que

$$\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega (\mathcal{L}^{1/2}u^m)(\mathcal{L}^{1/2}\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \psi \in C_0^1((0,T)\times\Omega).$$

iii) Además la función u es una solución débil a nuestro problema de Cauchy Dirichlet si se tiene también que $u \in C([0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$ *y* $u(0,x) = u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

iv) Se dice que la solución débil a un problema de Cauchy Dirichlet es una solución fuerte si cumple que $\partial_t u$ *y* $\mathcal{L}u^m \in L^\infty((\tau,\infty) : L^1(\Omega)), \quad \forall \tau > 0$.

Definición 4.3. *La función u es una solución muy débil, para la ecuación (4.3) si*

i) $u \in C((0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega)), u^m \in L^1((0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$

ii) Se cumple que

$$\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega u^m \mathcal{L}\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \psi \in C_c^2((0,T)\times\overline{\Omega}).$$

Una solución muy débil a nuestro problema de Cauchy Dirichlet con la ecuación (4.3) si es una solución muy débil a esa ecuación y además $u \in C([0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$ *y* $u(0,x) = u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

Definición 4.4. *Una función u es una solución débil dual a nuestro problema de Cauchy-Dirichlet con ecuación (4.3) si:*

i) $u \in C((0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega)), u^m \in L^1((0,T) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$.

ii) Se cumple para toda función test $\psi : \frac{\psi}{\phi_1} \in C_c^1((0,T) : L^\infty(\Omega))$.

$$\int_0^T \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\frac{\partial \psi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega u^m \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

iii) $u(0,x) = u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

El siguiente concepto surge de intentar resolver el problema conocido como problema de evolución con un operador A:

$$\begin{cases} u_t + Au = 0, & \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Para ello discreticemos el tiempo en $t_0 = t_1, \ldots, t_k = T$ dando lugar a problemas iterativos con $h_k = t_k - t_{k-1}$

$$\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{h_k} + A(u(t_k)) = 0.$$

Obtenemos la solución aproximada que dependerá de ese h_k, que podemos considerar igual para todo k, con $h_k = h$, $u^h = \{u_k^h\}_k$ que cumple que $hA(u_k^h) + u_k^h = u_{k-1}^h$.

Este proceso se conoce como discretización implícita en el tiempo (ITD) y la primera iteración con la que se comienza u^h será el valor inicial dado en el problema o con una aproximación de este valor inicial u_{0h}.

Si A es un operador m-acretivo densamente definido en un espacio de Banach, X, entonces haciendo uso del Teorema de Crandall-Ligget [7] tenemos la existencia de soluciones a problemas iterativos. Además, cuando h converge a cero la solución discreta u^h converge a la función $u(t) \in C([0,\infty) : X)$, lo que se conoce como solución mild. Teniendo estas soluciones se dice que el problema se ha resuelto en un sentido mild. El conjunto de soluciones es un semigrupo de contracciones en X, aunque daremos su definición, no entraremos en detalle en esta parte ya que la teoría de semigrupos requeriría un TFG completo [9].

En nuestro caso el operador $A(u)$ es $(-\Delta)^s u^m = \mathcal{L}F(u)$ y $X = L^1(\mathbb{R}^N)$. Recordemos la definición de semigrupo de contracción:

Definición 4.5. *Consideremos un espacio de Banach* X *y* $L(X)$ *el espacio de operadores lineales acotados sobre* X*. Entonces una familia* $S(t) \in L(X)$ *de operadores es un semigrupo de operadores lineales acotados de* X *si* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ *para* $t_1, t_2 \geq 0$ *y* $S(0) = I$.

Es uniformemente continuo si además $\lim_{t\to 0, t>0} ||S(t)u_0 - u_0|| = 0 \quad \forall u_0 \in B$.

Y es un semigrupo de contracciones en un espacio de Banach X *si además* $||S(t)||_X \leq 1$*, cumpliendo que* $||S(t)u||_X \leq ||u||_X$ *para todo* $u \in X$.

Así el Teorema de Crandall-Ligget nos proporciona un semigrupo de contracciones en $L^1(\Omega)$.

Se puede usar, en nuestro caso, en lugar del Teorema de Crandall-Ligget, el Teorema de Crandall-Pierre para la existencia de esas soluciones demostrado en [6].

Teorema 4.1. *(Teorema de Crandall-Pierre). Sea* $\mathcal{L}$ *que satisface (A1), (A2) o equivalentemente (A2') Y* F *que cumple (A0). Entonces* $\forall u_0 \in L^1(\Omega)$*, no negativa,*

1) Existe una solución mild única, u *para la ecuación (4.3).*

2) La aplicación $t \to t^{\frac{1}{a_0}} F(u(t,x))$ es no decreciente en $t > 0$ para a.e $x \in \Omega$.

3) $u \in C([0,\infty) : L^1(\Omega))$ y $\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$.

4) Se verifica que a datos iniciales ordenados corresponden soluciones mild ordenadas.

Esas soluciones mild van a ser fundamentales para el teorema de existencia y unicidad de soluciones débiles duales, que podemos enunciar ahora aunque su prueba la completaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 4.2. *(Existencia y unicidad de soluciones débiles duales.) Para todo $u_0 \in L^1_{\phi_1}$ existe una solución débil dual única al problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación $u_t = -\mathcal{L}u^m$. Es la llamada solución minimal, que es obtenida como el límite monótono del semigrupo de soluciones (soluciones mild) que existe y es único. La solución minimal, u es continua en el espacio con pesos, $u \in C((0,\infty) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$ y se mantienen las desigualdades estándar es decir que si $\underline{u} \leq \overline{u}$ en $\partial\Omega$ siendo sub y super soluciones respectivamente de la ecuación, entonces $\underline{u} \leq \overline{u}$ en Ω.*

Para demostrar este teorema lo separaremos en existencia y en unicidad.

Antes de comenzar la demostración es necesario introducir un tipo de soluciones en las que veremos que se encontrarán las soluciones mild.

Definición 4.6. *Clase S_p será el conjunto de soluciones duales débiles no negativas de nuestro problema de Cauchy Dirichlet con $u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$, tal que:*
i) la aplicación $u_0 \to u(t)$ preserva el orden en $L^1_{\phi_1}(\Omega)$.
ii) $u(t) \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1, \forall t > 0$.

Necesitaremos la siguiente proposición, cuya prueba se encuentra en [6]

Proposición 4.1. *Sea A un operador lineal, densamente definido, satisfaciendo (A1) y (A2), sea $h \geq 0$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, no decreciente con $F(0) = 0$. Entonces*

$$\|u\|_p \leq \|(I + hAF)(u)\|_p \quad u \in Dom(AF), \quad p \in [1,\infty].$$

En las siguientes proposiciones, comprobaremos algunos resultados de sumabilidad $L^p(\Omega)$

Proposición 4.2. *Sea u la única solución mild del problema (4.3) asociada al valor inicial $u_0 \in L^p(\Omega)$ siendo $p \geq 1$ como hemos visto en el Teorema 4.1. Entonces $u(t) \in L^p(\Omega)$ $\forall t > 0$, además $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)}$.*

Demostración:

Caso $p = 1$.

No hay problema pues las soluciones mild forman un grupo contractivo en $L^1(\Omega)$.

Caso $p \in (1,\infty)$.

Como $u_0 \in L^p(\Omega)$, veamos que podemos asumir que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$: para ello, consideramos una sucesión de aproximaciones de u_0, denotada $u_{0,j} \in L^\infty(\Omega)$ que converja fuertemente a u_0, para la cual siendo u_j las soluciones a los problemas iterados de ITD

$$\|u_j(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_{0,j}(t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Así, cuando $j \to \infty$ usando la semicontinuidad inferior de la norma se tiene que $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)}$.

En el caso $p = \infty$ solo sería tomar límites para p, supongamos que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y consideremos $p \in (1, \infty)$, la solución mild que nos da el Teorema 4.1 se obtienen a través del método ITD de la siguiente forma.

Discretizamos $[0, T]$, $t_k = \frac{k}{n} T \ \forall k \in [0, n]$, siendo $h = t_{k+1} - t_k = T/n$.

La única solución mild $u(t, \cdot)$ es el límite en $L^1(\Omega)$ de las soluciones $u_{k+1}(\cdot) = u(t_{k+1}, \cdot)$ que solucionaría en nuestro caso la ecuación

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = -\mathcal{L}F(u_{k+1}). \tag{4.4}$$

Además como $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $h\mathcal{L}F(u_{k+1}) + u_{k+1} = u_k$ se puede ver que $u_k \in L^\infty(\Omega)$. Para ello usemos la Proposición 4.1 por la que se tendría que

$$\|u_{k+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|(I + h\mathcal{L}F)u_{k+1}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Si multiplicamos la ecuación (4.4) por $u_{k+1}^{p-1} = u^{p-1}(t_{k+1}, \cdot)$, integramos y obtenemos

$$-\int_\Omega u_{k+1}^{p-1} h\mathcal{L}F(u_{k+1})\mathrm{d}x = \int_\Omega (u_{k+1} - u_k)u_{k+1}^{p-1}.$$

Con $w = u_{k+1}^{p-1}$, podemos aplicar la hipótesis (A2′), que junto con la simetría del operador $\mathcal{L}$ nos dará la siguiente serie de igualdades;

$$h\int_\Omega u_{k+1}^{p-1}\mathcal{L}F(u_{k+1})\mathrm{d}x = h\int_\Omega F(w^{\frac{1}{p-1}})\mathcal{L}w\mathrm{d}x = h\int_\Omega \beta(w)\mathcal{L}w\mathrm{d}x \geq 0.$$

Pues la función que transforma w en $\beta(w) = F(w^{\frac{1}{p-1}})$ es una función continua monótona y real con $\beta(0) = 0$ pudiendo usar (A2′), con $w, \mathcal{L}w \in L^\infty(\Omega)$. Entonces :

$$\int_\Omega u_{k+1}^p \mathrm{d}x - \int_\Omega u_k u_{k+1}^{p-1} \leq 0.$$

Así:

$$\int_\Omega u_{k+1}^p \mathrm{d}x \leq \int_\Omega u_k u_{k+1}^{p-1} \Longrightarrow \|u_{k+1}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|u_k u_{k+1}^{p-1}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Mediante el uso de la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u_k u_{k+1}^{p-1}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^p(\Omega)}\|u_{k+1}^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = \|u_k\|_{L^p(\Omega)}\|u_{k+1}^{p-1}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}.$$

Entonces $\|u_{k+1}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^p(\Omega)}$ lo que da lugar a que $\|u_{k+1}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_{0,k}\|_{L^p(\Omega)}$,($u_{0,k}$ va a representar $u_k(0)$). Una vez tenemos esto, si hacemos tender k hacia ∞ obtendremos que $u_{k+1} \to u(t)$ y $u_{0,k} \to u_0$.

■

Ahora veamos que las soluciones mild son débiles duales:

Proposición 4.3. *Sea u solución mild única del problema (4.3) asociada al valor inicial $u_0 \in L^1(\Omega)$, la cual existirá por el Teorema 4.1. Entonces u es una solución débil dual.*

Demostración:

Igual que en la demostración anterior suponiendo que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $p \in (1,\infty)$, la solución mild que nos da el Teorema 4.1 se obtienen a través del método ITD de la siguiente forma :

Discretizamos $[0,T]$, $t_k = \frac{k}{n}T$ $\forall k \in [0,n]$, siendo $h = t_{k+1} - t_k = T/n$.

La única solución mild $u(t,\cdot)$ es el límite en $L^1(\Omega)$ de las soluciones $u_{k+1}(\cdot) = u(t_{k+1},\cdot)$ que solucionaría en nuestro caso la ecuación

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = -\mathcal{L}F(u_{k+1}).$$

Además como $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $h\mathcal{L}F(u_{k+1}) + u_{k+1} = u_k$ tenemos de antes que $u_k \in L^\infty(\Omega)$. Aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ a la ecuación anterior

$$\frac{\mathcal{L}^{-1}(u_{k+1}) - \mathcal{L}^{-1}(u_k)}{h} = -F(u_{k+1}).$$

Consideramos la función test $\psi : \frac{\psi}{\phi_1} \in C_c^1((0,T) : L^\infty(\Omega))$.

Multiplicamos la expresión última por $\psi_k = \psi(t_k,\cdot)$ integramos y hacemos la sumatoria sobre las k.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega (\mathcal{L}^{-1}(u_{k+1}) - \mathcal{L}^{-1}(u_k))\psi_k \mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega hF(u_{k+1})\psi_k \mathrm{d}x.$$

Para n suficientemente grande podemos asumir que

$$\psi_1 = \psi(t_1,\cdot) = \psi(T/n,x) = 0 \quad \psi(T,\cdot) = 0,$$

ya que ψ tiene un soporte compacto en $(0,T)$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega (\mathcal{L}^{-1}(u_{k+1}) - \mathcal{L}^{-1}(u_k))\psi_k \mathrm{d}x = \int_\Omega (\psi_n \mathcal{L}_{-1}u_n - \psi_1 \mathcal{L}^{-1}u_0)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n-1}\int_\Omega (\psi_{k+1} - \psi_k)\mathcal{L}^{-1}u_k \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega hF(u_{k+1})\psi_k \mathrm{d}x.$$

Teniendo en cuenta que las anteriores dos sumas son de Riemann, haciendo n tender a infinito obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_\Omega ((\psi_{k+1} - \psi_k)/h)\mathcal{L}^{-1}u_k \mathrm{d}x \to \int_0^T\int_\Omega (\partial_t\psi)\mathcal{L}^{-1}(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_\Omega F(u_{k+1})\psi_k \mathrm{d}x \to \int_0^T\int_\Omega F(u)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Así obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\psi_n \mathcal{L}^{-1}u_n - \psi_1\mathcal{L}^{-1}u_0)\mathrm{d}x = \int_0^T\int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\partial_t\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega F(u)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Queda ver que entonces la parte de la izquierda es cero para que sea débil dual.

Como $\psi(t_1) = 0$ para un n grande, solo queda ver que $lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \mathcal{L}^{-1} u_n \mathrm{d}x = 0$, pero usando lo que habíamos asumido para n suficientemente grande, pero eso lo tenemos pues $lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \mathcal{L}^{-1} u_n \mathrm{d}x = \int_\Omega \psi(T,x)\mathcal{L}^{-1} u(T,x)\mathrm{d}x = 0$, entonces lo tenemos.

Por otra parte tenemos la regularidad. Como las soluciones mild cumplen que $u \in C([0,T] : L^1(\Omega))$ y como $L^1(\Omega) \subset L^1_{\phi_1}(\Omega)$, de la misma manera se tendría que $u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

Por otro lado si u es continua de $[0,T]$ a $L^1(\Omega)$ entonces u^m es también L^1 de $[0,T]$ a $L^1(\Omega)$.

■

De estas dos proposiciones se obtiene que las soluciones mild únicas, u, asociadas a un $u_0 \in L^p(\Omega)$, son soluciones duales débiles en $L^p(\Omega)$ cuando $t > 0$, cumpliéndose la segunda característica de la clase S_p. La primera característica de preservación del orden en $L^1_{\phi_1}$ proviene de la construcción de las soluciones mild de la Proposición 4.2 donde se vio que $\|u_{k+1}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^p(\Omega)}$ y de que $L^1(\Omega) \subset L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

Así, todas las soluciones mild pertenecen a la clase S_p.

4.2 Estimaciones a priori

Enunciaremos a continuación tres resultados correspondientes a la Proposición 5.1, Lema 5.3, Lema A.1 y Teorema 6.1 de [2], respectivamente, que se usarán para demostrar cotas de las soluciones necesarias para la unicidad y existencia de las soluciones que construiremos más adelante. Esta es quizá la parte más técnica del trabajo aunque hemos incidido en la prueba de solo alguno de esos resultados técnicos debido a las restricciones de extensión del trabajo.

Lema 4.2. *Sea $u \geq 0$ una solución de clase S_p de soluciones muy débiles al problema de Cauchy-Dirichlet con $p > N/2s$. Entonces*

$$\int_\Omega u(t,x)\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x \leq \int_\Omega u_0(x)\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x \quad \forall t > 0.$$

$$y \quad \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} (t_1 - t_0)F(u(t_0,x_0)) \leq \int_\Omega [u(t_0,x) - u(t_1,x)]\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x \leq (m_0 - 1)\frac{t^{\frac{1}{\alpha_0}}}{t_0^{\frac{1}{\alpha_0}}} F(u(t,x_0)),$$

$$a.e \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t, \quad a.e \quad x_0 \in \Omega.$$

Lema 4.3. *Sea $\mathbb{K}$ la función de Green del operador. Entonces la hipótesis (K1) (4.1), implica la existencia de una constante $c_{2,\Omega}(q) > 0$ tal que*

$$\sup_{x_0\in\Omega} \int_\Omega \mathbb{K}^q(x,x_0)\mathrm{d}x \leq c_{2,\Omega}(q) \quad \forall 0 < q < \frac{N}{N-2s}.$$

Lema 4.4. *Consecuencias de la hipótesis (A0). Si una función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface (A0) con $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < 1$. Entonces, $\forall r \geq r_0 \geq 0$ con $\underline{k}, \overline{k} > 0$ siendo*

$$e_i = \frac{1}{1-\alpha_i} \quad \underline{k} = \left(\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_0}\right)^{e_1} = \left(\frac{e_0}{e_1}\right)^{e_1}, \overline{k} = \left(\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^{e_0} = \left(\frac{e_1}{e_0}\right)^{e_0},$$

se tiene que $\frac{r^{e_0}}{r_0^{e_0}} \leq \frac{H(r)}{H(r_0)} \leq \frac{r^{e_1}}{r_0^{e_1}}$, *además de* $\underline{k}\frac{r^{e_1}}{r_0^{e_1}} \leq \frac{H(r)}{H(r_0)} \leq \overline{k}\frac{r^{e_0}}{r_0^{e_0}}$.

Con el siguiente teorema obtenemos una cota superior del valor absoluto de la solución dual que no depende del dato inicial.

Teorema 4.3. *(Cota superiores del valor absoluto). Sea u una solución débil dual no negativa asociada al dato inicial $u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$, entonces existen constantes $K_0, K_1, K_2 > 0$ que dependen de N, s, a_0, a_1, tal que para $t > 0$:*

$$F(\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq F^*\left(\frac{K_1}{t}\right).$$

En la anterior desigualdad F^* es la transformación de Legendre de F, definida como

$$F^*(z) = \sup_{r\in\mathbb{R}}(zr - F(r)) = z(F')^{-1}(z) - F((F')^{-1}(z)) = F'(r)r + F(r).$$

Con $r = (F')^{-1}(z)$.

Además, existe un tiempo, τ_1 con $0 \leq \tau_1(u_0) \leq K_0$ tal que $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \forall t \geq \tau_1$ y

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{K_2}{t^{\frac{1}{m_i - 1}}},$$

con $i = 0$ si $t \leq K_0$, e $i = 1$ si $t \geq K_0$.

Demostración:

Dividiremos la demostración en varias partes.

1. No supone ninguna restricción asumir que $u \in S_p$ para $p > \frac{N}{2s}$.

   Consideremos una sucesión de datos iniciales $0 \leq u_{0,n} \in L^1_{\phi_1}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ que converge inferiormente a $u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponderá por el Teorema 4.1 para ese $u_{0,n} \in L^\infty(\Omega)$ una solución única mild u_n que pertenecería a $L^1_{\phi_1}(\Omega)$ gracias a la Proposición 4.2. Por la misma proposición $u_n \in L^\infty(\Omega)$, pues $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

   Por otra parte como $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, para $p > \frac{N}{2s}$, por ello $u_0 \in L^p(\Omega)$ y al ser u_n una solución mild sabemos que será de la clase S_p, por lo tanto una solución débil no negativa. Así para u_n se mantendría que $F(\|u_n(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq F^*\left(\frac{K_1}{t}\right)$. A lo que haciendo limite en n junto con la semicontinuidad de la norma de $L^\infty(\Omega)$ se obtendrá la desigualdad para la solución límite u, que por la unicidad (que veremos más adelante) será la solución débil dual de partida, lo que nos diría que podemos usar $u \in S_p$.

2. Cotas superiores fundamentales

   Como ya hemos visto, $u \in S_p$ con $p > \frac{N}{2s}$, por lo que podemos usar el Lema 4.2. Entonces para todo t_0 tal que $0 \leq t_0 \leq t_1$, $x_0 \in \Omega$, en nuestro caso escojamos $t_1 = 2t_0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a_0}}(t_0)F(u(t_0, x_0)) \leq \int_\Omega u(t_0, x)\mathbb{K}(x, x_0)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(2t_0, x)\mathbb{K}(x, x_0)\mathrm{d}x.$$

Entonces $F(u(t_0,x_0)) \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\int_\Omega (u(t_0,x)-u(2t_0,x))\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x$.

Por otra parte $u(t_0,x)-u(2t_0,x) \leq u(t_0,x)$, pues $0 \leq u(2t_0,x)$ ya que u era no negativa. Así

$$F(u(t_0,x_0)) \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\int_\Omega (u(t_0,x))\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x.$$

Entonces $\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\int_\Omega (u(t_0,x))\mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x = \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\mathbb{K}(x,x_0)\|_{L^1(\Omega)}$.

También teníamos que $\mathbb{K}(x,y) \in L^q(\Omega)$ pues nos lo asegura la hipótesis (K1). Entonces usando la desigualdad de Hölder con $q = \frac{p-1}{p}$ tenemos que

$$\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\mathbb{K}(x,x_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\|_{L^p(\Omega)}\|\mathbb{K}(x,x_0)\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si usamos el Lema 4.3 con $q = \frac{p-1}{p} \in (0, \frac{N}{N-2s})$ (recordemos que $p > N/2s$ y $N > 2s$) y la definición de la clase S_p por la que tenemos que u también pertenecerá a $L^p(\Omega)$ con $p > N/(2s) > 1$

$$\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\|_{L^p(\Omega)}\|\mathbb{K}(x,x_0)\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\|_{L^p(\Omega)}c_{2,\Omega}(q) \leq \infty.$$

Por lo tanto $F(u(t_0,x_0)) \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\|u(t_0,x)\|_{L^p(\Omega)}c_{2,\Omega}(q)$.

Como $u(t_0) \in L^p(\Omega)$ entonces la desigualdad anterior garantiza que $u(t_0) \in L^\infty(\Omega)$.

Esto implica que S_p y S_∞ son iguales, pues lo único que las diferencian es que si $u(t) \in S_p$ entonces $u(t) \in L^p(\Omega)$ mientras que si $u(t) \in S_\infty$ entonces $u(t) \in L^\infty(\Omega)$, luego $S_\infty \subset S_p$ pues por la propiedad (2.1) de los espacios $L^p(\Omega)$ al ser Ω acotado $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y con la desigualdad demostrada tendríamos la implicación contraria.

3. Prueba de la primera desigualdad

   De antes teníamos que

$$F(u(t_0,x_0)) \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\int_\Omega u(t_0,x)K(x,x_0)\mathrm{d}x \leq \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\int_\Omega \mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x.$$

   Realizamos el supremo respecto a x_0. En nuestro caso F era continua y creciente por lo que se cumplirá que $\sup_{x_0\in\Omega} F(u(t_0,x_0)) = F(\sup_{x_0\in\Omega}(u(t_0,x_0)) = F(\|u(t_0)\|_{L^\infty})$, entonces

$$F(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\sup_{x_0\in\Omega}\int_\Omega \mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x.$$

   Ahora usando el Lema 4.3 para $p = 1$, tendríamos que

$$\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\sup_{x_0\in\Omega}\int_\Omega \mathbb{K}(x,x_0)\mathrm{d}x \leq \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}\sup_{x_0\in\Omega} c_{2,\Omega}.$$

Recordemos (A0) nos decía que $F \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $F/F' \in Lip(\mathbb{R})$ y existen $a_0, a_1 > 0$ tal que $1 - a_1 \leq \left(\frac{F(r)}{F'(r)}\right)' \leq 1 - a_0$, donde $\frac{F(r)}{F'(r)}$ se anula si $F(r) = F'(r) = 0$ o $r = 0$.

Por otro lado por como se ha definido la transformada de Legendre de F, F^*, se va a cumplir (lo que sería la propiedad que cumplen la transformadas de Legendre) cada una de sus primeras derivadas serán la función inversa de la otra, teniendo así que

$$(F^*(z))' = (F')^{-1}(z) = r. \tag{4.5}$$

La ultima igualdad nos lo dice la hipótesis (A0), y la primera se obtiene de que

$$(F^*(z))' = (z(F')^{-1}(z) + F((F')^{-1}(z)))' = (F')^{-1}(z) + z((F')^{-1}(z)+$$

$$z((F')^{-1}(z))' - z((F')^{-1}(z))' = (F')^{-1}(z).$$

Usando ahora la desigualdad de Young se tiene que $ab \leq \epsilon F(a) + \epsilon F^*\left(\frac{b}{\epsilon}\right)$ si solo si $a\frac{b}{\epsilon} \leq F(a) + F^*(\frac{b}{\epsilon})$ lo que es equivalente a $a\frac{b}{\epsilon} - F(a) \leq F^*(\frac{b}{\epsilon})$.

Teniendo esta desigualdad la usamos para $\epsilon = 1/2$, entonces

$$F(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq \frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0} c_{2,\Omega} \|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq$$

$$\frac{1}{2} F(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) + \frac{1}{2} F^*\left(\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0} c_{2,\Omega}\right) \leq \frac{1}{2} F^*\left(\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0} c_{2,\Omega}\right).$$

4. Segunda desigualdad

   Gracias a la hipótesis (A0) que cumplía F podemos aplicar el Lema 4.4, entonces pasamos de

$$\frac{r^{e_0}}{r_0^{e_0}} \leq \frac{H(r)}{H(r_0)} \leq \frac{r^{e_1}}{r_0^{e_1}},$$

$\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 1$ y con $\underline{k} < 1$ a

$$\underline{k}\frac{r^{e_1}}{r_0^{e_1}} \leq \frac{H(r)}{H(r_0)} \leq \overline{k}\frac{r^{e_0}}{r_0^{e_0}}.$$

Ahora sustituyendo H por F, r por $(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})$, r_0 por 1 , e_0 por m_0 y considerando el caso general en el que $\underline{k} < 1$ no se cumpla, o que $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 1$ se puede escribir como

$$\max\{1, \underline{k}\} \frac{(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_1}}{1^{m_1}} \leq \frac{F((\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}))}{F(1)} \leq \max\{1, \underline{k}\} \frac{(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_0}}{1^{m_0}}.$$

Entonces como F es creciente $F(1) > 0$, se puede escribir como

$$\max\{1, \underline{k}\}(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_j} F(1) \leq F((\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})), \tag{4.6}$$

con $m_j = \frac{1}{1-a_j} < 1$. Recordemos que $a_0, a_1 \in (0,1)$, siendo $j = 0$ si $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 1$ o $j = 1$ si $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Vamos a hacer lo mismo para la transformada de Legendre F^*.

Para ello veamos que cumple (A0), es decir, $F \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, $F/F' \in Lip(\mathbb{R})$ y existen $a_0, a_1 > 0$ tal que $1 - a_1 \leq \left(\frac{F(r)}{F'(r)}\right)' \leq 1 - a_0$, donde $\frac{F(r)}{F'(r)}$ se anula si $F(r) = F'(r) = 0$ o $r = 0$.

Entonces integrando respecto a r (entre 0 y r) obtenemos

$$(1 - a_1)r \leq \frac{F(r)}{F'(r)} \leq (1 - a_0)r.$$

Como F era creciente entonces $F' > 0$, pudiendo rescribir la expresión de arriba:

$$a_0 r F'(r) \leq rF'(r) - F(r) \leq a_1 r F'(r).$$

Por otro lado ya teníamos que

$$(F^*(z))' = (F')^{-1}(z) = r. \tag{4.7}$$

Además usando la función de la derivada de la inversa también tenemos que

$$(F^*(z))'' = ((F')^{-1})'(z) = \frac{1}{F''((F')^{-1}(z))} = \frac{1}{F''(r)} \geq 0. \tag{4.8}$$

La desigualdad última se obtiene por convexidad. Así usando las igualdades (4.7) y (4.8):

$$a_0 z(F^*)'(z) = a_0 r F'(r) \leq F^*(z) = rF'(r) - F(r) \leq a_1 = a_1 z(F^*)'(z) rF'(r).$$

Entonces como F^* creciente tenemos que su derivada es positiva convirtiendo la desigualdad anterior en

$$a_0 z \leq \frac{F^*(z)}{(F^*)'(z)} \leq a_1 z.$$

Derivando la expresión anterior, tenemos que

$$a_0 \leq \left(\frac{F^*(z)}{(F^*)'(z)}\right)' \leq a_1.$$

Se obtiene así la hipótesis (A0) pero para las transformaciones de Legendre. Pues por la propiedad de (A0) de que si $r = 0$ entonces $\frac{F(r)}{F(r)}$ se anula, en ese caso entonces $\frac{F^*(0)}{(F^*)'(0)} = 0 = \frac{F'(r)r + F(r)}{r} = \frac{F(r)}{F(r)}F' + \frac{F(r)}{F'(r)}\frac{F(r)}{r}F'(r)$ cuando $r = 0$.

Por lo tanto estamos en condiciones para usar el Lema 4.4, con $H = F^*$, $r = \frac{K_1}{t_0}$, $r_0 = r_0$, $e_1 = \frac{m_j}{m_j - 1}$, expresando de forma general como lo habíamos hecho antes, en el caso de que $\overline{k} > 1$ no se cumpla quedando

$$F^*\left(\frac{K_1}{t_0}\right) \leq \text{mín}\{\overline{k}, 1\} F^*(r_0) \left(\frac{\frac{K_1}{t_0}}{r_0}\right)^{\frac{m_j}{m_j - 1}}, \tag{4.9}$$

con $j = 0$ si $t_0 \leq K_1/r_0$ y $j = 1$ si $t_0 \geq K_1/r_0$ con $m_j = \frac{1}{a_j - 1} > 1$ (recordemos que $a1, a0 \in (0, 1)$). Apliquemos ahora las ecuaciones (4.6) y (4.9) a la desigualdad ya demostrada

$$\text{máx}\{1, \underline{k}\}(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_j} F(1) \leq F(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq$$

$$\frac{1}{2}F^*\left(\frac{2^{\frac{1}{a_0}}}{t_0}c_{2,\Omega}\right) = F^*\left(\frac{K_1}{t_0}\right) \leq \text{mín}\{\overline{k},1\}F^*(r_0)\left(\frac{\frac{K_1}{t_0}}{r_0}\right)^{\frac{m_i}{m_i-1}}.$$

Entonces

$$\|u(t_0)\|^{m_j}_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)}F^*(r_0)\left(\frac{\frac{K_1}{t_0}}{r_0}\right)^{\frac{m_i}{m_i-1}}. \tag{4.10}$$

Con $i = 1$ si $K_1/t_0 \leq r_0$, $i = 0$ si ocurre lo contrario y $j = 0$ si $\|u(t_0)\|_{L^\infty} \geq 1$, $j = 1$ en caso contrario.

a) Si $r_0 = K_1$, entonces

$$\|u(t_0)\|^{m_j}_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)}\frac{F^*(K_1)}{t_0^{\frac{m_i}{m_i-1}}} = \frac{K_0'}{t_0^{\frac{m_i}{m_i-1}}}. \tag{4.11}$$

Cumpliendo esta vez que $i = 0$ si $t_0 \leq 1$ e $i = 1$ si $t_0 \geq 1$.
Por lo que puede existir un valor de tiempo τ_1 tal que $\forall t_0 \geq \tau_1$ se tenga que $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ este puede ser 0 (por ejemplo cuando $\|u(0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$), pudiéndose suponer que τ_1 depende de u_0. Por otro lado tenemos que $m_j = \frac{1}{1-a_j} > 1$ pues tanto a_1 como $a_0 \in (1,0)$, por tanto $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(0)\|^{m_j}_{L^\infty(\Omega)}$.
Por lo tanto usando la desigualdad (4.11), tendremos que $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ si solo si $\text{máx}_{i=0,1}\{(K_0')^{\frac{m_i-1}{m_i}}\} \leq t_0$.
Para calcular el máximo tenemos que $\frac{m_i-1}{m_i} = a_i$ y como $a_1 \geq a_0$ entonces el máximo exponente es para $i = 1$.
No es restrictivo asumir $K_0' \geq 1$

$$K_0' = \frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)}F^*(K_1).$$

Con $F(1) \geq 1$, $\frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)} \leq 1$ y K_1 de manera que el resultado K_0' sea mayor igual que uno $K_1 = c_{2,\Omega}\left(\frac{2^{\frac{1}{a_0}+1}}{t_0}\right)$.

Entonces $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ si solo si $(K_0')^{\frac{m_1-1}{m_1}} \leq t_0$.

Teniendo así que $0 \leq \tau_1(u_0) \leq (K_0')^{\frac{m_1-1}{m_1}} = K_0$, pudiendo obtener una cota superior de τ_1 que no depende de u_0.

b) Si $r_0 = K_1/K_0$ en la desigualdad (4.10) para $t_0 \geq K_0$ siendo $i = j = 1$ pues para esos t_0 se cumple que $\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ y $K_1/t_0 \leq r_0$ entonces

$$\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_1} \leq \frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)}F^*(K_1/K_0)(\frac{\frac{K_1}{t_0}}{K_1/K_0})^{\frac{m_1}{m_1-1}} = \frac{K_2'^{m_1}}{t_0^{\frac{m_1}{m_1-1}}}.$$

Cumpliendo la segunda desigualdad de la proposición $\forall t_0 \geq K_0$.

Para el otro caso:
Consideramos que $t_0 = K_0$ en la desigualdad anterior y que $m_1 > 1$ tendríamos que

$$(\|u(K_0)\|_{L^\infty(\Omega)})^{m_1} \leq \frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\underline{k}\}F(1)}F^*(K_1/K_0)\left(\frac{\frac{K_1}{K_0}}{K_1/K_0}\right)^{\frac{m1}{m1-1}} = \frac{K_2^{\prime m_1}}{K_0^{\frac{m_1}{m_1-1}}}.$$

Entonces

$$\|u(K_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\frac{\text{mín}\{\overline{k},1\}}{\text{máx}\{1,\}F(1)}F^*(K_1/K_0)\right)^{1/m_1} = K_2''.$$

Ahora considerando el Teorema 4.1 de Crandall-Pierre, sabemos que la aplicación $t \rightarrow t^{\frac{1}{m_0-1}}u(t,x)$, $\forall t > 0$, es no decreciente $a.e.x \in \Omega$.
Entonces para el caso que nos quedaba $0 \leq t_0 \leq K_0$ usando la desigualdad anterior tenemos que

$$t_0^{\frac{1}{m_0-1}}(u(x,t_0)) \leq t_0^{\frac{1}{m_0-1}}(\|u(t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq K_0^{\frac{1}{m_0-1}}(u(x,K_0)) \leq K_0^{\frac{1}{m_0-1}}(\|u(K_0)\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Ahora usando la desigualdad dada cuando $K_0 = t_0$ tenemos que

$$K_0^{\frac{1}{m_0-1}}(\|u(K_0)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq K_0^{\frac{1}{m_0-1}}K_2''.$$

Obteniendo el caso que nos faltaba, $0 \leq t_0 \leq K_0$.

■

Lema 4.5. *Según la hipótesis (K2), existe una constante $K_6 > 0$ dependiendo de N, m_i, s, γ tal que se cumple*

$$F(\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq K_6 \frac{\|u(t_0)\|_{L^1_{dist(\cdot,\partial\Omega)}(\Omega)}^{2sm_i v_{i,\gamma}}}{t^{m_i(N+\gamma)v_{i,\gamma}}},$$

con $i = 1$ si $t \geq \|u(t_0)\|_{L^1_{dist(\cdot,\partial\Omega)}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$ y $i =$ si $t \leq \|u(t_0)\|_{L^1_{dist(\cdot,\partial\Omega)}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$, con

$$v_{i,\gamma} = \frac{1}{2s+(N+\gamma)(m_i-1)} \qquad m_i = \frac{1}{1-a_i} > 1.$$

El exponente $\gamma \in [0,1]$ es una característica del operador que en nuestro caso seria s.

Proposición 4.4. *Sea $u \geq v$ dos soluciones duales débiles a nuestro problema de Cauchy Dirichlet correspondientes a dos valores iniciales no negativos, $u_0, v_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$. Entonces para cada $0 \leq t_0 \leq t_1$ se tiene que:*

$$\int_\Omega [u(t_1,x)-v(t_1,x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x \leq \int_\Omega [u(t_0,x)-v(t_0,x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

Además $\forall 0 \le \tau_0 \le \tau, t < \infty$ *tal que o* $t, \tau \le K_0$ *o* $\tau_0 \ge K_0$ *tenemos que*

$$\int_\Omega [u(\tau,x) - v(\tau,x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x \le \int_\Omega [u(t,x) - v(t,x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x$$

$$+K_8[u(\tau_0)]|t-\tau|^{2s\nu_{i,\gamma}} \int_\Omega [u(\tau_0,x) - v(\tau_0,x)]\phi_1\mathrm{d}x.$$

Con i=0 si $t, \tau \le \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$ *e* $i = 1$ *si* $t, \tau \ge \|u(\tau_0)\|_{L_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$. *Con*

$$K_8[u(\tau_0)] = \frac{\lambda_1(\text{máx}\{\overline{k}, 1\}F(K_7)}{2s\nu_{i,\gamma}}\|u(\tau_0)\|_{L_{\phi_1}(\Omega)}^{2s(m_i-1)},$$

y $\gamma = s$ *en nuestro caso de operador fraccionario restringido.*

Demostración:

Dividamos la demostración en varios pasos.

1. Forma alternativa de la identidad de soluciones duales débiles

   Consideremos para esas soluciones (que son duales débiles) la Definición 4.4, con una función test $\psi(x,t) = \psi_1(t)\psi_2(x)$, tal que $\psi_1 \in C_c^1(0,\infty)$, $\psi_2/\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$ cumpliendo lo que debía satisfacer ψ, es decir $\psi/\phi_1 \in C_c^1((0,T) : L^\infty(\Omega))$, teniendo la identidad:

$$\int_0^T \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u(x,t))(\psi_1)'(t)\psi_2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega F(u)\psi_1(t)\psi_2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

   Por tanto

$$\int_0^T (\psi_1)'(t) \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u(x,t))\psi_2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \psi_1(t) \int_\Omega F(u)\psi_2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

   Como $\mathcal{L}^{-1}$ es simétrico, es decir, $\langle \mathcal{L}^{-1}(u), \psi_2\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, \mathcal{L}^{-1}(\psi_2)\rangle_{L^2(\Omega)}$, entonces

$$\int_0^T (\psi_1)'(t) \int_\Omega u(x,t)\mathcal{L}^{-1}(\psi_2(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \psi_1(t) \int_\Omega F(u)\psi_2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.12}$$

   Veamos que la parte de la izquierda es acotada. Escribimos la función test $\psi_2 = \phi_1$ y usamos la simetría de $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\psi_2(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\phi_1(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega L^{-1}(\phi_1(x))u(x,t)\mathrm{d}x.$$

   Ahora recordemos que ϕ_1 era una autofunción positiva por lo que $\mathcal{L}(\phi_1) = \lambda_1\phi_1$ así $\phi_1 = \mathcal{L}^{-1}(\lambda_1\phi_1) = \int_\Omega \mathbb{K}(x,y)\lambda_1\phi_1(y)\mathrm{d}y = \lambda_1\mathcal{L}^{-1}(\phi_1)$.

   Entonces $\mathcal{L}^{-1}(\phi_1) = \phi_1/\lambda_1$. Si consideramos $c \le 1/\lambda_1$, y como estamos trabajando con soluciones u positivas, entonces

$$\int_\Omega L^{-1}(\phi_1(x))u(x,t)\mathrm{d}x \le c\int_\Omega u(x,t)\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

Así, podemos expresar que para todo $0 \le t_0 \le t_1$, se tiene usando (4.12):

$$\int_\Omega u(t_0,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_1,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega F(u(\tau,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.13}$$

Aquí hemos tomado una sucesión $\psi_{1,n}$ de manera que converjan a $\psi_1(t) = \chi_{[t_0,t_1]}(t)$ en $L^\infty(0,\infty)$, siendo $\psi'_{1,n}$ convergente a $\psi'_1 = (\delta_{t_0} - \delta_{t_1})(t)$, con

$$\chi_{[t_0,t_1]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in (t_0,t_1) \\ 0 & t \notin (t_0,t_1) \end{cases}$$

Como se cumple que $\psi_{1,n}/\phi_1 \in C_c^1((0,\infty) : L^\infty(\Omega))$ podemos aplicar lo anterior a estas sucesiones y aplicar después limite obteniendo el resultado deseado:

$$\int_0^\infty \psi'_{1,n}(\tau,x)\int_\Omega \mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \to \int_\Omega u(t_0,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_1,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega F(u(t,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \to \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega F(u(t,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

2. <u>Monotonía de $\|.\|_{L^1_{\phi_1}}$</u>

   En este paso obtendremos la primera desigualdad de la proposición. Para ello, primero usamos ahora la expresión que hemos obtenido (4.13). Así

$$\int_\Omega u(t_0,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_1,x)\mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)\mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega F(u(t,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

   Como $\mathcal{L}^{-1}(\phi_1) = \phi_1/\lambda_1$ entonces

$$\int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_1,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x = \lambda_1\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega F(u(t,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

   Le aplicamos lo mismo a la solución v. Y obtenemos que

$$\int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_1,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x - \left(\int_\Omega v(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega v(t_1,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x\right) = \tag{4.14}$$

$$\lambda_1\int_{t_0}^{t_1}\int_\Omega (F(u(t,x)) - F(v(t,x)))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega [u(t_0,x) - v(t_0,x)]\phi_1\mathrm{d}x$$
$$-\int_\Omega [u(t_1,x) - v(t_1,x)]\phi_1\mathrm{d}x.$$

   Como F es creciente, $u \ge v$ y $\phi_1 > 0$

$$\int_\Omega [u(t_1,x) - v(t_1,x)]\phi_1(\Omega)\mathrm{d}x \le \int_\Omega [u(t_0,x) - v(t_0,x)]\phi_1(\Omega)\mathrm{d}x$$

   Para todo t_0, t_1 tal que $0 \le t_0 \le t_1$.

   si $v = 0$ entonces obtendríamos la monotonía de la norma de $L^1_{\phi_1}(\Omega)$:

$$\|u(t_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)} \le \|u(t_1)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}.$$

3. <u>Prueba desigualdad intermedia</u>

   Vamos a probar para todo $0 \le u \le v$ la siguiente desigualdad (con nuestro operador recordemos que $\gamma = s$):

$$F(u) - F(v) \le K_7'(u-v)\frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1(\Omega)}}^{2s(m_i-1)v_{i,\gamma}}}{t^{(N+\gamma)(m_i-1)v_{i,\gamma}}}.$$

   Con $K_7' = (\text{máx}\{\underline{k}, 1\})F(K_7)$, $i = 1$ si $t \ge \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1(\Omega)}}^{2s+\gamma}$ e $i = 0$ si ocurre lo opuesto.

   Como F es convexa entonces podemos asegurar

$$F(v) \ge F(u) + F'(u)(v-u).$$

   Sea $v = 2u$, entonces $F(u) + F'(u)u \le F(2u)$.

   Por como es nuestra $F(u) = u^m$ para $m > 1$ tenemos que $u^m \le mu^m \to F(u) \le F'(u)u$. Por tanto $F(u) \le uF'(u) \le F(2u)$.

   Usemos ahora el Lema 4.4 con $r = x, r_0 = 2r_0$

$$F(x) \le \text{máx}\{\overline{k}, 1\}F(2r_0)\left(\frac{x}{2r_0}\right)^{m_i}$$

   con $i = 0$ si $x \in [0, 2r_0]$ si no sería $i = 1$. Por lo tanto, combinando las dos desigualdades anteriores, tenemos

$$F'(U) \le \frac{F(2U)}{U} \le \text{máx}\{\overline{k}, 1\}\frac{F(r_0)}{r_0^{m_i-1}}U^{m_i-1}. \tag{4.15}$$

   Con $i = 0$ si $U \in [0, r_0]$, e $i = 1$ en caso contrario.

   Como F es convexa y $F \in C^1(R\backslash\{0\})$, en particular $F \in C^1(0,\infty)$ su derivada será creciente en ese intervalo. Sea $0 \le v \le u \le U$ tenemos $F(u) - F(v) \le F'(u)(u-v)$. Por ser convexa, y por ser la derivada creciente junto a la desigualdad (4.15):

$$F(u) - F(v) \le F'(u)(u-v) \le F'(U)(u-v) \le \text{máx}\{\overline{k}, 1\}\frac{F(r_0)}{r_0^{m_i-1}}U^{m_i-1}(u-v). \tag{4.16}$$

   Por otro lado se tiene un corolario del Lema 4.5 (demostrado en el corolario 6.3 de [2]) que para todo $0 \le \tau_0 \le t$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le K_7\frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{j,\gamma}}}{t^{(N+\gamma)v_{j,\gamma}}} = U_j. \tag{4.17}$$

   Con $j = 1$ si $t \ge \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$, o equivalentemente si $U_j \ge K_7$ y $j = 0$ en caso contrario. Recordemos que en nuestro caso $\gamma = s$.

Elegimos $K_7 = r_0$ con $i = j$ unimos (4.17) y (4.16):

$$F(u) - F(v) \leq \text{máx}\{\overline{k}, 1\} \frac{F(K_7)}{K_7^{m_i - 1}} U^{m_i - 1}(u - v) = \text{máx}\{\overline{k}, 1\} \frac{F(K_7)}{K_7^{m_i - 1}} U^{m_i - 1}(u - v) \quad (4.18)$$

$$= \text{máx}\{\overline{k}, 1\} \frac{F(K_7)}{K_7^{m_i - 1}} (K_7)^{m_i - 1} \frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i - 1)}}{t^{(d+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}}(u - v).$$

Con $i = 1$ si $t \geq \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{d+\gamma}}$ en caso contrario.

4. Aplicar la desigualdad anterior.

Recordemos la fórmula deducida en el paso de la monotonía de la norma $L^1_{\phi_1}(\Omega)$

$$\int_\Omega [u(t_0, x) - v(t_0, x)]\phi_1 dx - \int_\Omega [u(t, x) - v(t, x)]\phi_1 dx = \lambda_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_\Omega (F(u) - F(v))\phi_1 dx dt.$$

Vamos aplicarle la desigualdad anterior a la parte derecha de la ecuación. Sea $0 \leq \tau_0 \leq t_0 \leq t$, tal que ni $t, t_0 \leq \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$, $t, t_0 \geq \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{\frac{2s}{N+\gamma}}$, por tanto i no es ni 0 ni 1.

Entonces de (4.18) multiplicando por ϕ_1 e integrando respecto a x y t, tendríamos para un i que

$$\int_{t_0}^{t} \int_\Omega (F(u) - F(v)))\phi_1 \leq \int_{t_0}^{t} \int_\Omega \text{máx}\{\overline{k}, 1\} F(K_7) \frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i - 1)}}{\epsilon^{(N+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}}(u - v) dx d\tau$$

$$= K_7' \int_{t_0}^{t_1} \frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i - 1)}}{\epsilon^{(N+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}} d\tau \int_\Omega (u(t, x) - v(t, x))\phi_1(x) dx. \quad (4.19)$$

En la segunda parte, la parte de monotonía comprobamos la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega [u(t, x) - v(t, x)]\phi_1(x) dx \leq \int_\Omega [u(t_0, x) - v(t_0, x)] dx \quad \forall 0 \leq t_0 \leq t. \quad (4.20)$$

Usando esta igualdad tendríamos que

$$K_7' \int_{t_0}^{t_1} \frac{\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i - 1)}}{\epsilon^{(N+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}} d\tau \int_\Omega (u(t, x) - v(t, x))\phi_1(x) dx$$

$$\leq K_7' \int_{t_0}^{t_1} \|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i - 1)} \frac{1}{\epsilon^{(N+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}} d\tau \int_\Omega (u(t_0, x) - v(t_0, x))\phi_1(x) dx.$$

Usamos ahora que $2sv_{i,\gamma} \leq 1$ se satisface

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\epsilon^{(N+\gamma)v_{i,\gamma}(m_i - 1)}} d\tau = \frac{1}{2sv_{i,\gamma}} (t^{2sv_{i,\gamma}} - t_0^2 sv_{i,\gamma}) \leq \frac{(t - t_0)^{2sv_{i,\gamma}}}{2sv_{i,\gamma}}.$$

Así

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega}(F(u)-F(v)))\phi_1 \leq K_7'\frac{(t-t_0)^{2sv_{i,\gamma}}}{2sv_{i,\gamma}}\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i-1)}\int_{\Omega}(u(t_0,x)-v(t_0,x))\phi_1(x)dx.$$

Si combinamos (4.14) y esta desigualdad deducida obtenemos que para cada $t, t_0 \geq \tau$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega}[u(t_0,x)-v(t_0,x)]\phi_1 \mathrm{d}x-\int_{\Omega}[u(t_1,x)-v(t_1,x)]\phi_1 \mathrm{d}x\right|\\ &\leq K_7'\frac{(t-t_0)^{2sv_{i,\gamma}}}{2sv_{i,\gamma}}\|u(\tau_0)\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2sv_{i,\gamma}(m_i-1)}\int_{\Omega}(u(t_0,x)-v(t_0,x))\phi_1(x)dx.\end{aligned}$$

■

5 Resultados de existencia y unicidad

Estudiaremos la existencia y unicidad de las soluciones, para ello, demostraremos paso por paso el Teorema enunciado 4.2 anteriormente, presente en el documento [2]

5.1 Existencia de solución

1. Paso al límite en una sucesión monótona de soluciones mild acotadas.

   Consideremos el dato inicial $0 \leq u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$. Conseguiremos un candidato a solución débil dual a partir de una aproximación por la izquierda de u_0 con soluciones mild en $L^\infty(\Omega)$.

   Para ello consideramos la sucesión monótona no decreciente de datos iniciales $\{u_{0,n}\}_{n\in N}$ con $u_{0,n} \in L^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq u_{0,n} \leq u_{0,n+1} \leq \ldots \leq u_0$, y $u_{0,n} \to u_0$ en $L^1_{\phi_1}(\Omega)$.

   Por el Teorema 4.1 sabemos que para cada dato inicial de $u_{0,n}$ va a existir una única solución mild $u_n(t,x)$ la cual pertenece a $L^\infty(\Omega)$ por la Proposición 4.2. Además por la Proposición 4.3, serán soluciones duales débiles.

   También se va a mantener el orden de las desigualdades para las soluciones mild, es decir, $u_n(t,x) \leq u_{n+1}(t,x)$ para cada $x \in \Omega, t > 0$ (por el Teorema 4.1, por el cual a datos iniciales ordenados le corresponden soluciones ordenadas).

   Ya habíamos visto antes en la sección 3 que esas soluciones mild pertenecen a la clase S_∞. Como pertenece a esta clase podemos usar tanto el Teorema 4.3 como el Teorema 4.5. Específicamente el Teorema 4.3 nos ofrece una cota superior de las soluciones $u_n(t,x)$ a partir de un tiempo τ_1 la cual no va a depender del dato inicial de la solución. Por ello existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t,x)$ en $L^\infty((\tau_1,\infty)\times\Omega)$ que será $u(t,x)$ y por la semicontinuidad de la norma en $L^\infty(\Omega)$ cumplirá las mismas cotas superiores que u_n.

2. Se cumple que $u \in C^0([0,\infty) : L^1_{\phi_1}(\Omega))$

   Por otro lado del Teorema 4.1 obteníamos que si $t_1 \leq t_2$ entonces $t_1^{1/a_0} F(u(t_1,x)) \leq t_1^{1/a_0} F(u(t_2,x))$, y como $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{F'(u)}{F(u)} \geq \frac{-1}{a_0}\frac{1}{t}$ luego $\frac{\partial}{\partial t}(F(u)\ln(t)^{\frac{1}{a_0}}) \geq 0$, sería una formulación débil de

$$\partial_t u \geq \frac{-1}{a_0 t}\frac{F(u)}{F'(u)}.$$

   (En el caso de que $u = 0$, entonces $\frac{F(u)}{F'(u)} = 1$).

   De la hipótesis (A0) obtenemos que $1 - a_1 \leq \left(\frac{F(u)}{F'(u)}\right)' \leq 1 - a_0$, integrando respecto de u, se tendría que $(1-a_1)u \leq \frac{F(u)}{F'(u)} \leq (1-a_0)u$, entonces

$$\partial_t u \geq \frac{-1}{a_0 t}\frac{F(u)}{F'(u)} \geq -\frac{1-a_0}{a_0}\frac{u}{t}.$$

   Por tanto la función $t \to t^{\frac{1-a_0}{a_0}} u(t,x)$ es no decreciente $\forall t > 0$ a.e $x \in \Omega$.

Así, si $0 \leq t_0 \leq t_1$, con $m_0 = \frac{1}{1-a_0}$ entonces

$$u(t_1,x) - u(t_0,x) \geq \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{1}{m_0-1}} u(t_0,x) - u(t_0,x) = -\left[1 - \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{1}{m_0-1}}\right] u(t_0,x).$$

Por lo que para la parte negativa de $u(t_1,x) - u(t_0,x)$, $(u(t_1,x) - u(t_0,x))_-$ se tiene que $0 \leq (u(t_1,x) - u(t_0,x))_- \leq \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{1}{m_0-1}}\right] u(t_0,x)$. Si ahora integramos con la auntofunción ϕ_1, actuando de función peso, obtenemos que

$$0 \leq \int_\Omega (u(t_1,x - u(t_0,x))_- \phi_1(x)\mathrm{d}x) \leq \left[1 - (\frac{t_0}{t_1})^{\frac{1}{m_0-1}}\right] \int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Ahora si usamos el primer resultado de la Proposición 4.4 (sustituyendo v por u_n) tendremos que $\forall \tau_1 \geq 0$

$$\int_\Omega [u(\tau_1,x) - u_n(\tau_1,x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x \leq \int_\Omega [u_0(x) - u_{0,n}(x)]\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

Entonces cuando $n \to \infty$, como $u_{0,n} \to u_0$ en $L^1_{\phi_1}(\Omega)$ se tiene que $u_n(\tau_1) \to u(\tau_1)$ en la topología fuerte de $L^1_{\phi_1}(\Omega)$. Ahora aplicando el segundo resultado que nos proporcionaba la Proposición 4.4 con $v = 0$ obtenemos que para cada $t_1 \geq t_0 \geq 0$

$$\left| \int_\Omega u(t_1,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x \right| \leq K_8[u_0]|t_1 - t_0|^{2sv_{i,\gamma}} \int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

Por otro lado como $|f| = f + 2f_-$, $f_- = \text{máx}\{0, -f\}$, sustituyendo f por $u(t_1,x) - u(t_0,x)$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |u(t_1,x) - u(t_0,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega (u(t_1,x) - u(t_0,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x + 2\int_\Omega (u(t_1,x) - u(t_0,x))_-\phi_1(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ahora usando las ecuaciones (5.1) y (5.2)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (u(t_1,x) - u(t_0,x))\phi_1(x)\mathrm{d}x + 2\int_\Omega (u(t_1,x) - u(t_0,x))_-\phi_1(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \left[K_3[u_0]|t_1 - t_0|^{2sv_{i,\gamma}} + 2\left(\left(1 - \frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{1}{m_0-1}}\right)\right] \int_\Omega u(t_0,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lo que nos garantizaría la continuidad de la función u en $L^1_{\phi_1}(\Omega)$ menos en el punto $t = 0$. Veamos la continuidad en ese punto:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x \leq &\int_\Omega |u(t,x) - u_n(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n(t,x) - u_{0,n}(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega |u_{0,n}(t,x) - u_0(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Representaremos cada sumando con una letra

$$a_n = \int_\Omega |u(t,x) - u_n(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x; \quad b_n = \int_\Omega |u_n(t,x) - u_{0,n}(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x;$$
$$c_n = \int_\Omega |u_{0,n}(t,x) - u_0(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

a) Parte c_n. Puesto que $c_n \to 0$ podemos tener n de manera que $c_n \leq \frac{\epsilon}{3}$.

b) Parte a_n.Usamos el primer resultado de la Proposición 4.4

$$\int_\Omega |u(t,x) - u_n(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |u_0(x) - u_{0,n}(x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x = c_n.$$

Así tendríamos que $a_n < \frac{\epsilon}{3}$.

c) Parte b_n.

$$\int_\Omega |u_n(t,x) - u_{0,n}(t,x)|\phi_1(x)\mathrm{d}x \leq \|\phi_1(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n(t,x) - u_{0,n}(t,x)|\mathrm{d}x.$$

Así que cuando $t \to 0$, esta expresión de arriba tiende a cero. Terminando este paso de la demostración.

3. <u>El límite es una solución débil dual.</u>

Veamos que para cada función test ψ tal que $\psi/\phi_1 \in C_c^1((0,\infty) : L^\infty(\Omega))$ se cumple:

$$\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\frac{\partial \psi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^\infty \int_\Omega F(u)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

Según la Proposición 4.3 las soluciones mild son soluciones duales débiles cumpliendo entonces que

$$\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u_n)\frac{\partial \psi}{\partial_t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^\infty \int_\Omega F(u_n)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

Por lo que nos queda ver que ocurre lo mismo, cuando $n \to \infty$. Dividiremos la demostración en dos pasos.

a) <u>Paso 1.</u> Veamos que se verifica lo siguiente

$$\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u_n)\frac{\partial \psi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u)\frac{\partial \psi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Como $u \geq u_n$, entonces se tendrá que $\mathcal{L}^{-1}(u - u_n) \geq 0$, por como está definido el inverso del operador (como integral de la función con un núcleo K). Por otro lado

$$\left|\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\partial_t\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\frac{\partial_t\psi}{\phi_1(x)}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|.$$

Ahora como $\psi/\phi_1 \in C_c^1 : ((0,\infty) : L^\infty(\Omega))$, podemos decir que el soporte compacto estará en el intervalo $[t_1, t_2]$ así

$$\left|\int_0^\infty \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|.$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Usando que el inverso del operador es simétrico.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}(u-u_n)(t,x)\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)(u-u_n)(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Por otro lado sabemos que $\phi_1 = \lambda_1^{-1}\mathcal{L}^{-1}(\phi_1)$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \mathcal{L}^{-1}\phi_1(x)(u-u_n)(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \lambda_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \phi_1(x)(u-u_n)(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Ahora mediante el primer resultado que nos da la Proposición 4.4 tenemos que

$$\lambda_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \phi_1(x)(u-u_n)(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leq \lambda_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{\partial_t \psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \phi_1(x)(u_0-u_{0,n})\mathrm{d}x.$$

Teniendo finalmente que cuando $n \to \infty$ la expresión de arriba converja a cero. Veamos ahora el segundo paso.

b) Paso 2. Demostremos que se satisface que

$$\int_0^\infty \int_\Omega F(u_n)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \int_0^\infty \int_\Omega F(u)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Para ello usamos que de la definición de solución débil dual tenemos que la función test ψ cumple que $\psi/\phi_1 \in C_c^1((0,\infty) : L^\infty(\Omega))$. Consideramos como antes que el soporte compacto se encuentra en $[t_1, t_2]$, así:

$$\|\psi/\phi_1\|_{L^\infty([t_1,t_2]\times\Omega)} \leq \overline{k}_1. \tag{5.3}$$

Por otro lado también se tiene que según hemos establecido el soporte compacto

$$\left|\int_0^\infty \int_\Omega (F(u)-F(u_n))\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n))\frac{\psi}{\phi_1(x)}\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leq \left\|\frac{\psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty([t_1,t_2]\times\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Como esa norma estaba acotada por (5.3) entonces

$$\left\|\frac{\psi}{\phi_1(x)}\right\|_{L^\infty([t_1,t_2]\times\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leq \overline{k}_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n))\phi_1(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Ahora usamos para $0 \leq t_1 \leq t_2$, en vez de t y t_0 la expresión (4.19) obtenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n)\phi_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leq K_2' \|u_0\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2s(m_i-1)v_{i,\gamma}} \frac{(t_1-t_2)^{2sv_{i,\gamma}}}{2sv_{i,\gamma}} \int_\Omega (u_0(x)-u_{0,n}(x))\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

Quedando

$$\overline{k}_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (F(u)-F(u_n)\phi_1(x) \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leq K_2' \|u_0\|_{L^1_{\phi_1}(\Omega)}^{2s(m_i-1)v_{i,\gamma}} \frac{(t_1-t_2)^{2sv_{i,\gamma}}}{2sv_{i,\gamma}} \int_\Omega (u_0(x)-u_{0,n}(x))\phi_1(x)\mathrm{d}x.$$

Y ya lo tenemos, como $u_{0,n} \to u_0$ cuando $n \to \infty$ la expresión de arriba ya converge a cero en ese caso.

5.2 Unicidad de solución

Proberamos ahora la unicidad de soluciones débiles duales dadas por el método anterior. Para esto vamos a suponer que existe otra solución débil dual al problema, $v(x,t)$ que supongamos que sea el límite de soluciones mild, $v_k(t,x)$ que se obtienen de otra sucesión de valores mayores que u_0, $0 \leq v_{0,k} \leq \ldots \leq u_0 \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$ (que convergen al dato inicial en $L^1_{\phi_1}(\Omega)$), por el Teorema 4.1.

Ahora probemos que $v = u$ en dos pasos:

1. Paso 1. Primero $v \leq u$

   Consideremos el dato inicial $(v_k(0,x)-u_n(0,x))_+$ que según lo razonado anteriormente le correspondería la solución mild $(v_k-u_n)_+$.

Por la Proposición 4.2 sabemos que $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall t > 0$ para u una solución mild. Por lo tanto tenemos que para la parte positiva de $v_k(t,x) - u_n(t,x)$, $[v_k(t,x) - u_n(t,x)]_+$:

$$\int_\Omega [v_k(t,x) - u_n(t,x)]_+ \leq \int_\Omega [v_k(0,x) - u_n(0,x)]_+.$$

Hacemos tender n a infinito

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [v_k(t,x) - u_n(t,x)]_+ \mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega [v_k(0,x) - u_n(0,x)]_+ \mathrm{d}x = \int_\Omega [v_k(0,x) - u_0]_+ \mathrm{d}x.$$

Como ya hemos visto a la sucesión de aproximaciones de datos iniciales por abajo del dato inicial u_0, le correspondía una solución mild cumpliendo que $v_k(0,x) = v_{0,k} \leq u_0$ entonces $[v_k(0,x) - u_0]_+ = 0$. Por ello $\int_\Omega [v_k(0,x) - u_0]_+ \mathrm{d}x = 0$.

Entonces $\int_\Omega [v_k(t,x) - u_n(t,x)] \leq \int_\Omega [v_k(t,x) - u_n(t,x)]_+ \leq 0$. Lo que nos permite afirmar (usando el límite para cuando $k \to \infty$) que $v(t,x) \leq u(t,x)$ $\forall t > 0$.

2. Paso 2. Para la otra desigualdad $u \leq v$ se hace de forma análoga, intercambiando los papeles de v_k y u_n.

Teniendo lo que buscábamos $v(t,x) = u(t,x)$ $\forall t > 0$

6 Conclusiones

Con la realización de este trabajo he podido poner a prueba mi conocimiento en el grado de matemáticas, sobre todo, en asignaturas dentro de la rama del Análisis Matemático pues este es el punto de vista desde el que desarrollo el estudio, como Análisis Vectorial o Ecuaciones Diferenciales I y II. Además he aumentado mis conocimientos en esta rama de Análisis a través de los nuevos conceptos que he tenido que aprender como los espacios de Sobolev, tipos de soluciones, o mediante algunas demostraciones, aparte de mejorar mi vocabulario matemático en inglés ya que todos los libros consultados se encontraban en tal idioma.

También me ha servido como introducción al mundo de la investigación matemática, con la ayuda de mi tutor y mediante las obras de estos matemáticos dándome a conocer investigadores importantísimos en esta materia. He visto aunque solo sea en relación a este trabajo, las numerosas aplicaciones que tiene los avances en Ecuaciones en Derivadas Parciales en otros campos que a priori no suele ocurrir que estén presentes como en biología con procesos como la osmosis. Gracias a esto me he percatado mejor de la real importancia ya no solo únicamente de la difusión o de las ecuaciones diferenciales, sino de las matemáticas en general en el resto de las disciplinas científicas.

Bibliografía

[1] M. Bonforte, A. Figalli, X. Ros-Oston, *Infinite Speed of Propagation and Regularity of Solution to the Fractional Porous Medium Equation in General Domains*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **70**, (2017), pp. 1472-1508.

[2] M. Bonforte, J. L. Vázquez, *Fractional nonlinear degenarate diffusion equations on bounded domains part I. Existence, uniqueness and upper bounds*, Nonlinear Analysis, **131**, (2016), pp. 363-398.

[3] M. Bonforte, Y. Sire, J. L. Vázquez *Existence, Uniqueness and Asymptotic behaviour for frational porous medium equations on bounded domains*, arXiv:1404.6195v3.

[4] H. Brézis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial S. A, (1984).

[5] L. A.Caffarelli, P. R. Stinga *Fractional elliptic equations, Caccioppoli estimates and regularity*, Annales de l'Institut Henri Poincaré / Analyse non linéaire, **33**, (2016), pp. 767-807.

[6] M. Crandall, M. Pierre, *Regularizing Effects for* $u_t + A\phi(u) = 0$ *in* L^1, Journal of Functional Analysis, **45**, (1982), pp. 194-212.

[7] M. Crandall, T. M. Liggett, *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), pp. 265-298

[8] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev space*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **136**, (2012), pp.521-573.

[9] S. Lopez Martinez, *El Teorema de Hille-Yosida y sus aplicaciones en el estudio de problemas de evolución*, UAL, (2014).

[10] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian:Regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. **101**, (2014), pp. 275-302.

[11] R. Servadei, E. Valdinoci, *Mountain Pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **389**, (2012), pp. 887-898.

[12] R. Servadei, E. Valdinoci, *Lewy-Stampacchia type estimates for variational inequalities driven by (non)local operators*, Rev. Mat. Iberoam. **29**, (2013), no. 3, pp. 1091-1126

[13] R. Servadei, E. Valdinoci, *Variational Methods for Non-Local Operators of Elliptic Type*, doi:10.3934/dcds.2013.33.2105.