Utilización de cópulas para encontrar contraejemplos en funciones de distribución

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Rocío Sáez Cortés

Tutor:
Manuel Úbeda Flores

Grado en Matemáticas

Mayo, 2021
Universidad de Almería

Índice general

Resumen

En este trabajo haremos uso del concepto de cópula para encontrar contraejemplos en conjeturas relacionadas con funciones de distribución.

Sabemos que si partimos de una función de distribución conjunta de un vector aleatorio conocida, podemos obtener, de manera única, las funciones de distribución marginales correspondientes a cada variable aleatoria del vector. Sin embargo, conociendo las respectivas funciones de distribución marginales de cada variable no se conoce, de forma única, la función de distribución conjunta. De aquí surge el interés en el estudio del tipo de dependencia entre las distribuciones marginales, pues el objetivo es encontrar la función de distribución conjunta, a partir de estas, que mejor explique la relación de dependencia entre las variables aleatorias del vector.

En la búsqueda de una solución aparece el concepto de cópula, herramienta que se usará para describir la relación de dependencia entre un cierto número de variables aleatorias, de las cuáles conocemos su comportamiento de forma individual, es decir, las cópulas están relacionadas con el estudio de las distribuciones multivariantes con distribuciones marginales dadas.

En el trabajo nos centraremos en los vectores aleatorios de dimensión 2, es decir, trabajaremos con funciones de distribución bivariantes. Se expondrán las definiciones y resultados básicos sobre cópulas, así como sus principales propiedades. Destacaremos el *Teorema de Sklar*, resultado central de la teoría de cópulas, el cual define la relación entre una función de distribución conjunta y, sus marginales unidimensionales mediante cópulas.

También, se presentarán algunas medidas de asociación para mostrar la relación de dependencia entre variables aleatorias, así como algunos conceptos de dependencia. Además, se introducirán un par de familias de cópulas. Finalmente, mostraremos dos contraejemplos, uno sobre una conjetura y otro sobre la reciprocidad de un resultado, ambos problemas relacionados con funciones de distribución.

Abstract

In this work we will make use of the copula concept to find counterexamples in conjectures related to distribution functions.

We know that if we start from a joint distribution function of a known random vector, we can obtain, in a unique way, the marginal distribution functions corresponding to each random variable of the vector. However, knowing the respective marginals distribution functions of each variable, the joint distribution function is not uniquely known. Hence the interest in studing of dependency the marginal distributions arises, since the objective is to find the joint distribution function, from these, that best explains the dependency relationship between the random variables of the vector.

In the search for a solution, the concept of copula appears, a tool that will be used to describe the dependency relationship between a certain number of random variables, of which we know their behavior individually, that is, copulas are related to the study of multivariate distributions with given marginal distributions.

In the work we will focus on random vectors of dimension 2, that is, we will work with bivariate distribution functions. The definitions and basic results on copulas, as well as their main properties, will be presented. We will highlight *Sklar's Theorem*, a central result of copulas theory, which defines the relationship between a joint distribution function and its one-dimensional marginals through copulas.

Also, some association measures will be presented to show the dependency relationship between random variables, as well as some dependency concepts. In addition, a couple of copula families will be introduced. Finally, we will show two counterexamples, one about a conjecture and the other about the reciprocity of a result, both problems related to distribution functions.

1 Antecedentes bibliográficos

La teoría de cópulas, como tal, viene siendo una teoría relativamente joven. Esta teoría ya forma parte de distintos trabajos en áreas como son la teoría de probabilidad [20, 6], la teoría de espacios métricos probabilísticos [10, 18], el estudio de medidas no paramétricas de dependencia para variables aleatorias [16, 19, 5] o, el estudio de propiedades de dependencia [11, 15], entre otros.

Un estudio completo sobre la teoría de cópulas, incluyendo medidas de asociación, conceptos de dependencia o algunas de sus principales aplicaciones; se puede encontrar en [13, 17, 4, 8, 9].

Actualmente, las cópulas se han convertido en una herramienta muy útil en la construcción de modelos estadísticos, como por ejemplo en el ámbito de las finanzas [8, 1], donde las cópulas se utilizan en la asignación de activos, modelado y administración de riesgos o, calificación de créditos; o, también, en el ámbito de la hidrología [7], donde las usan, por ejemplo, para la prevención de catástrofes.

Además, sirven para demostrar la veracidad o no de ciertas conjeturas relacionadas con distribuciones de probabilidad, ya que son fáciles de manejar. En la búsqueda de contraejemplos son útiles las distintas familias de cópulas que existen y sus propiedades. Como ejemplos de estas, podemos mencionar las cópulas con secciones cúbicas [14] o, las shuffles of min [12, 2, 3].

2 Introducción

Expresar las relaciones de dependencia entre variables aleatorias viene siendo un problema difícil de manejar desde hace décadas. En 1959, Abe Sklar propone la definición de cópula en el teorema que llevaría su nombre, dando así solución a dicho problema. Este concepto no empieza a ser relevante hasta la década de los 90, donde las cópulas ya comienzan a mencionarse en estudios sobre cómo obtener una distribución conjunta a partir de marginales dadas, o sobre modelado de dependencia.

El concepto de cópula, palabra que viene del latín y significa lazo, se remonta a años anteriores al teorema de Sklar. Sin ser llamadas cópulas, Fréchet, Dall'Aglio o Féron, ya utilizaban en sus trabajos funciones para el estudio de una distribución multivariante mediante distribuciones univariantes dadas.

Las cópulas son funciones del cuadrado unidad al intervalo unidad (hecho que las hace manejables) que, a partir de distribuciones unidimensionales de variables aleatorias dadas, aportan una expresión para la distribución conjunta de las variables aleatorias mencionadas. Es decir, como a partir de distribuciones marginales dadas no obtenemos una distribución conjunta única, interesa estudiar el tipo de dependencia entre las variables aleatorias para obtener la "mejor" distribución conjunta. Entra aquí en juego el papel de las ya mencionadas cópulas, pues para variables aleatorias continuas X e Y, por el *teorema de Sklar* se tiene que la cópula asociada a dichas variables es única, es decir, tenemos una expresión única de la función de distribución conjunta.

Bien, haremos una introducción a la Teoría de Cópulas donde mencionaremos y demostraremos el ya nombrado *teorema de Sklar*, uno de los resultados más importantes de esta teoría, ya que ofrece la relación entre funciones marginales y función conjunta mediante cópulas,

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)),$$

para todo $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}$. H es una función de distribución conjunta, F y G marginales y C es una cópula.

Definiremos algunas medidas de dependencia o asociación relacionadas con las cópulas, las cuáles miden el grado de dependencia entre variables aleatorias, X e Y, con funciones de distribución marginal asociada F y G, respectivamente. Y, aportaremos ciertos conceptos de dependencia. Además, añadiremos unas familias de cópulas, que son conjuntos de cópulas con propiedades semejantes, que nos servirán en la aportación de los contraejemplos.

Tras la introducción a la Teoría de Cópulas, expondremos dos problemas:

1. La dependencia en cuadrantes positiva no implica la monotonicidad en colas.

   Se trata de dos conceptos de dependencia de los cuales se sabe que monotonicidad en colas implica dependencia en cuadrante pero el recíproco no es cierto, y esto lo vemos con un contraejemplo.

2. Conjetura de Hutchinson y Lai.

Enuncian que a partir de variables aleatorias estocásticamente crecientes (otra propiedad de dependencia), las medidas de asociación ρ y τ verifican la desigualdad

$$\rho < \frac{3\tau}{2}.$$

Lo cuál vemos que no es cierto con otro contraejemplo.

3 Teoría de cópulas

Comenzaremos con la introducción de las definiciones necesarias para entender los conceptos básicos sobre la teoría de cópulas, además introduciremos algunas propiedades sobre las cópulas para exponer y demostrar el resultado más relevante de esta teoría, ya mencionado previamente, el *Teorema de Sklar*.

Además, se definirán las medidas de dependencia y, se explicarán las familias de cópulas que se utilizarán en el objetivo de este trabajo.

3.1 Conceptos previos

Primero aclaremos que con $\overline{\mathbb{R}}$ nos referimos a la recta real ampliada, es decir, al intervalo $[-\infty, +\infty]$.
Ahora, mencionaremos unos conceptos que son necesarios para introducir la teoría de cópulas:

Definición 3.1. *Una función F definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* ***función de distribución*** *si es monótona no decreciente y continua a la derecha.*

Definición 3.2. *Una función real F definida en $\overline{\mathbb{R}}$ no decreciente, continua a la derecha y que satisface $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$, se dice que es una* ***función de distribución de probabilidad unidimensional****.*

Definición 3.3. *Una* ***variable aleatoria*** *X es una función que depende de un suceso aleatorio, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, donde hay una medida de probabilidad P sobre el espacio muestral Ω.*

Definición 3.4. *El* ***soporte*** *de una variable aleatoria X será el conjunto de valores que esta puede tomar. En función del soporte las variables aleatorias pueden ser:*

- ***Variable aleatoria discreta*** *cuando su soporte es numerable y,*
- ***Variable aleatoria continua*** *cuando su soporte es no numerable.*

Definición 3.5. *Sea X una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con función de distribución F, esto es, $F(x) = P[X \leq x]$. Diremos que X es una variable aleatoria* ***absolutamente continua*** *si F es absolutamente continua, es decir, si $\exists f(x) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

A la función f se le denomina ***función de densidad*** *de probabilidad de la v.a X.*

Si la v.a X es continua, entonces F es continua.

Consideraremos solamente variables aleatorias continuas a partir de ahora. Además, como trabajaremos en el caso bidimensional:

Definición 3.6. *Sean X, Y dos variables aleatorias continuas definidas en $\mathbb{R}$. Se define la* ***función de densidad de probabilidad conjunta*** *del vector (X, Y) como la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando*

a) $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Una ***función de distribución de probabilidad conjunta*** *es una función $F : \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que vendrá dada por:*

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, \forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Y, se dice que el par (X, Y) es absolutamente continuo.
Es decir, F verifica,

1. *F monótona,*

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$,

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x,y) = 1$.

Las funciones $F(x,+\infty)$ y $F(+\infty,y)$ son ***las funciones de distribución de probabilidad marginales*** *de F, las cuales denotaremos por H y G, respectivamente.*

Definición 3.7. *Un* ***rectángulo*** *B en $\overline{\mathbb{R}}^2$ es el producto cartesiano de dos intervalos cerrados, es decir, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \overline{\mathbb{R}}^2$.*

En particular, el ***cuadrado unidad****, que denotaremos por I^2, es el producto cartesiano $I \times I$ donde $I = [0,1]$.*

Definición 3.8. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $F : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, con $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ un rectángulo cuyos vértices están en el Dom F. Entonces, el* ***F−volumen*** *de B es la función V_F tal que*

$$V_F(B) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1).$$

Definición 3.9. *Una función real F tal que Dom $F \subset \overline{\mathbb{R}}^2$, se dice* ***2-creciente*** *si $V_F(B) \geq 0$, para todo rectángulo B cuyos vértices están en Dom F.*

Presentamos los siguientes resultados, que nos servirán para comprender propiedades sobre cópulas más adelante:

Lema 3.1. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y, sea F una función 2-creciente con dominio $S_1 \times S_2$. Sean $x_1, x_2 \in S_1$ con $x_1 \leq x_2$ e $y_1, y_2 \in S_2$ con $y_1 \leq y_2$. Entonces, la función dada por $t \longmapsto F(t,y_2) - F(t,y_1)$ es no decreciente en S_1, y la dada por $t \longmapsto F(x_2,t) - F(x_1,t)$ es no decreciente en S_2.*

Lema 3.2. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ con mínimo y, sean a_1, a_2 dichos mínimos de S_1 y S_2, respectivamente. Sea F una función real 2-creciente con Dom $F = S_1 \times S_2$ tal que verifica*

$$F(x, a_2) = 0 = F(a_1, y), \forall (x, y) \in S_1 \times S_2.$$

Entonces, F es no decreciente en cada argumento.

Lema 3.3. *Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$ y sea F una función 2-creciente que verifica que $F(x, a_2) = 0 = F(a_1, y), \forall (x, y) \in S_1 \times S_2$, con a_1 y a_2 los mínimos de S_1 y S_2. Supongamos que F tiene marginales, H y G, y que $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de $S_1 \times S_2$. Entonces,*

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |H(x_2) - H(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

3.2 Cópulas

Ya estamos en condiciones de presentar los primeros conceptos y resultados sobre la teoría de cópulas. Antes de exponer qué es una cópula, veamos qué es una subcópula.

Definición 3.10. *Una* ***subcópula*** *es una función C' que verifica las siguientes propiedades:*

1. *Dom $C' = S_1 \times S_2$, donde $S_1, S_2 \subseteq I : 0, 1 \in S_i, i = 1, 2$.*
2. *C' es 2-creciente y verifica que $C'(0, v) = 0 = C'(u, 0), \forall (u, v) \in I^2$.*
3. *Para todo $u \in S_1, v \in S_2$, $C'(u, 1) = u$ y $C'(1, v) = v$.*

Notemos que $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, $\forall (u, v) \in$ Dom C', por lo que Ran C' es subconjunto del intervalo unidad I.

Los siguientes resultados muestran la acotación, continuidad y lipschitzianidad de las subcópulas:

Teorema 3.1. *Sea C' una subcópula. Entonces,*

$$\forall (u, v) \in \textit{Dom } C', \quad \max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \tag{3.1}$$

Demostración:

Sea $(u, v) \in$ Dom C' arbitrario.
Entonces, por un lado se tiene que $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$, y que $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, es decir $C'(u, v) \leq \min(u, v)$.

Además, por otro lado $V'_C([u, 1] \times [v, 1]) = C'(1, 1) - C'(1, v) - C'(u, 1) + C'(u, v) = 1 - v - u + C'(u, v) \geq 0 \Rightarrow C'(u, v) \geq u + v - 1$ y, como Ran $C' \subseteq I$, entonces $C'(u, v) \geq 0$. Por tanto se tiene que $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$.

Así, $\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v), \forall (u, v) \in$ Dom C'.

■

Teorema 3.2. *Sea C' una subcópula. Entonces, para todo $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in$ Dom C' se tiene*

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

Es decir, C' es uniformemente continua en su dominio.

Como vemos, este resultado es consecuencia directa del lema 3.3. Presentemos ya a las cópulas:

Definición 3.11. *Una **cópula** es una subcópula con dominio I^2. Es decir, es una función $C : I^2 \longrightarrow I$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $C(u,0) = C(0,v) = 0, \forall u,v \in I.$
2. $C(u,1) = u$, *y* $C(1,v) = v, \forall u,v \in I.$
3. *(2-creciente) Sean $u_1,u_2,v_1,v_2 \in I$ cualesquiera tales que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$, entonces*

$$V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]) = C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0.$$

Observemos que, por la segunda propiedad, una cópula es una función de distribución bidimensional con soporte en I^2 que tiene marginales uniformes $\mathcal{U}(0,1)$.

De la tercera propiedad de la definición anterior podemos ver a $C(u,v)$ como una asignación de un elemento de I al rectángulo $[0,u]\times[0,v]$, ya que $C(u,v) = V_C([0,u]\times[0,v])$. Por lo que, se tiene una fómula para el número asignado por la cópula C al rectángulo $[u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$ en I^2. Además, dicha asignación es un número no negativo.

Del teorema 3.2 deducimos que las cópulas son funciones continuas. Además, por la definición de cópula sabemos que toda cópula es una subcópula, por lo que podemos acotar, teniendo en cuenta 3.1, estas de modo que si $M(u,v) = \min(u,v)$ y $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$, entonces para cualquier cópula C y para todo $(u,v) \in I^2$,

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v), \tag{3.2}$$

donde M, W se conocen como **cotas de Fréchet-Hoeffding** para cópulas. En 3.1 se muestran las gráficas de estas y las curvas de nivel correspondientes a las mismas, correspondiéndose M con la que está en la parte superior y en la inferior W.

Teorema 3.3. *Las cotas de Fréchet-Hoeffding M y W son cópulas.*

Demostración:

Sean $u,v \in I$.

Pirmero, $M(0,v) = \min(0,v) = 0$, $M(u,0) = \min(u,0) = 0$ y $W(0,v) = \max(v-1,0) = 0$, $W(u,0) = \max(u-1,0) = 0$.

Ahora, $M(1,v) = \min(1,v) = v$, $M(u,1) = \min(u,1) = u$ y $W(1,v) = \max(1+v-1,0) = \max(v,0) = v$, $W(u,1) = \max(u+1-1,0) = \max(u,0) = u$.

Faltaría comprobar la tercera propiedad de la definición de cópula. Sea $B = [u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$ un rectángulo en I^2.
Supongamos que $u_1 \leq v_1$ sin pérdida de generalidad. Entonces,

$$V_M(B) = M(u_2,v_2) - M(u_2,v_1) - M(u_1,v_2) + M(u_1,v_1) =$$

$$M(u_2,v_2) - M(u_2,v_1) - u_1 + u_1 = M(u_2,v_2) - M(u_2,v_1) \geq 0.$$

Por tanto, M es 2-creciente. Es decir, M es una función cópula.

Veamos si W es 2-creciente. En primer lugar, la función $f(u,v) = u+v-1$ es creciente en ambas coordenadas. Así, si $W(u_2,v_2) = 0$, entonces $W(u_i,v_j) = 0, \forall i,j = 1,2$. De forma análoga, si $W(u_1,v_2) = 0$, o $W(u_2,v_1) = 0$, entonces $W(u_1,v_1) = 0$. En todos

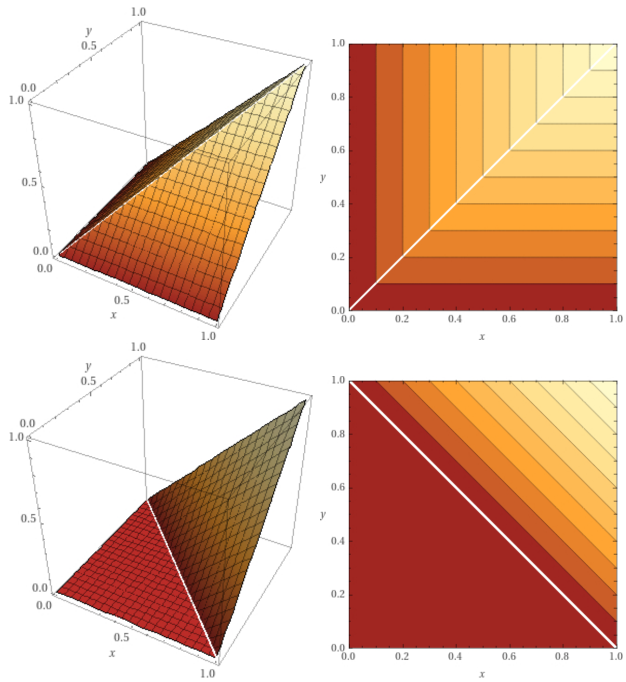


Figure 3.1: Cotas Fréchet-Hoeffding.

estos casos se cumple que $V_W(B) \leq 0$.
Supongamos, pues, que $W(u_i, v_j) > 0, \forall i, j = 1, 2$. Entonces,

$$W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) =$$

$$(u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) + (u_1 + v_1 - 1) = 0.$$

Por tanto, W también es 2-creciente y, por ende, tanto M como W son cópulas.

■

Definición 3.12. *Sea C una cópula y sea $a \in I$. La* ***sección horizontal de C en a*** *es la función de I en I dada por $t \mapsto C(t, a)$.*
La ***sección vertical de C en a*** *es la función de I en I definida por $t \mapsto C(a, t)$.*
La ***sección diagonal de C*** *es la función $\delta_C : I \longrightarrow I$ tal que $\delta_C(t) = C(t, t)$.*

Una consecuencia del teorema 3.2 afirma que

Corolario 3.1. *Las secciones horizontales, verticales y diagonal de una cópula C son no decrecientes y uniformemente continuas en el intervalo unidad I.*

Las secciones de una cópula se utilizan para construir cópulas y para interpretar algunas propiedades de dependencia.

A continuación, añadimos ciertas características de las derivadas parciales de una cópula. Estos resultados serán de utilidad para el estudio de las propiedades de dependencia.

Teorema 3.4. *Sea C una cópula. Sea cualquier $v \in I$, entonces $\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$ existe para casi todo u, y para cada u, v se tiene que*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1.$$

De forma similar, sea cualquier $u \in I$*, entonces* $\dfrac{\partial}{\partial v}C(u,v)$ *existe para casi todo* v*, y para cada* u,v *se tiene que*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v}C(u,v) \leq 1.$$

Además, las funciones $v \mapsto \dfrac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ *y* $u \mapsto \dfrac{\partial}{\partial v}C(u,v)$ *son no decrecientes en casi todo* I*.*

Teorema 3.5. *Sea* C *una cópula. Si las derivadas parciales* $\dfrac{\partial}{\partial v}C(u,v)$ *y* $\dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u,v)$ *son continuas en* I^2 *y* $\dfrac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ *existe para todo* $u \in (0,1)$ *cuando* $v = 0$*, entonces* $\dfrac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ *y* $\dfrac{\partial^2}{\partial v \partial u}C(u,v)$ *existen en* $(0,1)^2$ *y*

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u}C(u,v).$$

Este último teorema es consecuencia del *Teorema de Schwarz*.

Ya estamos en condiciones de enunciar el *Teorema de Sklar*.

Teorema de Sklar

Como ya hemos mencionado en algún momento, el teorema que da nombre a este apartado es el eje central de la *teoría de cópulas* y la base de muchas de las aplicaciones en estadística. Este teorema revela el papel de las cópulas en la relación existente entre una función de distribución bidimensional y sus funciones de distribución marginales (unidimensionales).

Para la demostración de este resultado necesitaremos dos lemas previos,

Lema 3.4. *Sea* H *una función de distribución bivariante con marginales* F *y* G*. Entonces existe una única subcópula* C' *tal que*

a) $Dom\ C' = Ran\ F \times Ran\ G$

b) $\forall x,y \in \overline{\mathbb{R}}, H(x,y) = C'(F(x),G(y))$.

Demostración:

Sean $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$ los subconjuntos del lema 3.3, entonces la función de distribución H verifica las hipótesis de dicho lema, así que para cualesquiera $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ se tiene que

$$|H(x_2,y_2) - H(x_1,y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Ahora, si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$, entonces $H(x_1,y_1) = H(x_2,y_2)$, de donde se deduce que $(F(x),G(y)) \mapsto H(x,y)$ es una asignación unívoca. Esto es, existe una función C' de manera que $C'(F(x),G(y)) = H(x,y)$. Por definición, el C'–volumen es positivo, luego es 2-creciente y, teniendo en cuenta que

$$C'(F(x),1) = C'(F(x),G(+\infty)) = H(x,+\infty) = F(x)$$

$$C'(F(x),0) = C'(F(x),G(-\infty)) = H(x,-\infty) = 0$$

(de manera análoga con $G(y)$)
se cumple que C' es una subcópula con dominio Ran $F\times$ Ran G.

■

Y la extensión del lema anterior:

Lema 3.5. *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que $C(u,v) = C'(u,v)$ para todo $(u,v) \in$ Dom C'. Es decir, cualquier subcópula puede ser extendida a una cópula, pero dicha extensión no es, por lo general, única.*

Demostración:
Sea Dom $C' = S_1 \times S_2$. Entonces, teniendo en cuenta que C' es uniformemente continua (3.2) y que es no decreciente en cada variable, podemos extender, por continuidad, dicha subcópula a una función C'' cuyo dominio sea $\overline{S_1} \times \overline{S_2}$, donde $\overline{S_i}$ se corresponde con el cierre de S_i $(i = 1,2)$. De este modo, es claro que C'' es otra subcópula.

Ahora, extendemos la función C'' a una cópula C con dominio I^2. Sea $(a,b) \in I^2$, y sean a_1, a_2 el mínimo y máximo de $\overline{S_1}$, respectivamente, satisfacciendo $a_1 \leq a \leq a_2$. De igual forma, sean b_1, b_2 mínimo y máximo de $\overline{S_2}$, satisfacciendo $b_1 \leq b \leq b_2$. Sean

$$\lambda(a) = \begin{cases} \dfrac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{si} \quad a_1 < a_2 \\ 1 & \text{si} \quad a_1 = a_2 \end{cases}$$

y

$$\mu(b) = \begin{cases} \dfrac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{si} \quad b_1 < b_2 \\ 1 & \text{si} \quad b_1 = b_2 \end{cases}$$

Entonces, definimos

$$C(a,b) = (1-\lambda(a))(1-\mu(b))C''(a_1,b_1) + (1-\lambda(a))\mu(b)C''(a_1,b_2)+$$

$$\lambda(a)(1-\mu(b))C''(a_2,b_1) + \lambda(a)\mu(b)C''(a_2,b_2),$$

que es una interpolación bilineal, es decir, lineal en cada variable.
Es claro que Dom $C = I^2$, $C(a,b) = C''(a,b), \forall (a,b) \in$ Dom C'' y que C satisface las propiedad 1 y 2 de la definición de cópula 3.11, por lo que sólo faltaría probar la tercera propiedad de esta.

Sea $(c,d) \in I^2$ tal que $a \leq c$ y $b \leq d$. Sean c_1, d_1, c_2, d_2 los respectivos valores relacionados con c y d como a_i, b_i (i=1,2) con a y b. Distinguimos casos:

1. Supongamos que no existe ningún punto de $\overline{S_1}$ entre a y c, y ninguno de $\overline{S_2}$ entre b y d.

   Entonces se cumple que $a_1 = c_1, a_2 = c_2, b_1 = d_1, b_2 = d_2$ y se obtiene que

   $$V_C([a,c]\times[b,d]) = C(c,d) - C(c,b) - C(a,d) + C(a,b) =$$

   $$(\lambda(c) - \lambda(a))(\mu(d) - \mu(b))V_{C''}([a_1,a_2]\times[b_1,b_2]) \geq 0$$

   ya que como $c < a$ y $d < b$ entonces $\lambda(a) \leq \lambda(c)$ y $\mu(b) \leq \mu(d)$.

2. Supongamos que hay al menos un punto de $\overline{S_1}$ entre a y c estrictamente, y al menos otro de $\overline{S_2}$ estrictamente entre b y d, es decir, $a < a_2 \leq c_1 < c$ y $b < b_2 \leq d_1 < d$. Entonces,

$$V_C([a,c]\times[b,d]) = (1-\lambda(a))\mu(d)V_C([a_1,a_2]\times[d_1,d_2]) + \mu(d)V_C([a_2,c_1]\times[d_1,d_2]) +$$
$$\lambda(c)\mu(d)V_C([c_1,c_2]\times[d_1,d_2]) + (1-\lambda(a))V_C([a_1,a_2]\times[b_2,d_1]) +$$
$$V_C([a_2,c_1]\times[b_2,d_1]) + \lambda(c)V_C([c_1,c_2]\times[b_2,d_1]) +$$
$$(1-\lambda(a))(1-\mu(b))V_C([a_1,a_2]\times[b_1,b_2]) + (1-\lambda(a))V_C([a_2,c_1]\times[b_1,b_2]) +$$
$$\lambda(d)(1-\mu(d))V_C([c_1,c_2]\times[b_1,b_2]) \geq 0$$

ya que todos los términos son no negativos.

El resto de casos se razonan de manera análoga.

Así queda demostrado el lema.

■

Teorema 3.6 (de Sklar.). *Sea H una función de distribución bivariante cuyas marginales son F y G. Entonces, existe una cópula C tal que $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)). \tag{3.3}$$

Si además, F y G son continuas, entonces C es única. En caso contrario, C está determinada únicamente sobre Ran $F\times$ Ran G.
Recíprocamente, sea C una cópula y F y G funciones de distribución univariantes, entonces la función H definida por $H(x,y) = C(F(x), G(y))$ es una función de distribución bivariante con marginales F y G.

Demostración:

Primero, dada la función H, por el lema 3.4 sabemos que existe una única subcópula C' definida en Ran $F\times$ Ran G y, por el lema 3.5 podemos extender dicha subcópula a una cópula C. Por tanto, la existencia de la cópula C tal que $H(x,y) = C(F(x), G(y))$ queda garantizada. Ahora, si F y G son continuas se tiene que Ran F = Ran $G = I$, lo que implica que Ran $F\times$ Ran $G = I^2$, de modo que la subcópula es una cópula, y como era única, $C' = C$ y es única.

Por el otro lado, como

$$H(x,+\infty) = C(F(x), G(+\infty)) = C(F(x), 1) = F(x)$$

y

$$H(x,-\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0$$

(de igual modo para G(y)), es inmediato que el recíproco es cierto.

■

De la ecuación (3.3) obtenemos una expresión de una función de distribución bidimensional H en función de una cópula y sus dos marginales unidimensionales F y G. Pero, podemos pensar en expresar la función cópula en términos de la función de distribución conjunta H. Para ello es necesaria la siguiente definición:

Definición 3.13. *Sea F una función de distribución unidimensional. Una función **quasi-inversa** de F es una función F^{-1} con dominio I tal que*

1. *Si $t \in$ Ran F, entonces $F^{-1}(t)$ es cualquier $x \in \overline{\mathbb{R}}$ verificando que $F(x) = t$, esto es,*

$$F(F^{-1}(t)) = F(x) = t, \forall t \in \ \textit{Ran} \ F.$$

2. *Si $t \notin$ Ran F, entonces*

$$F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\} = \sup\{x : F(x) \leq t\}.$$

Si F es estrictamente creciente, entonces la quasi-inversa F^{-1} es única.

Ahora si, el siguiente corolario nos da una definición de una subcópula C' expresada mediante una función de distribución conjunta H y las quasi-inversas de sus marginales F y G:

Corolario 3.2. *Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G, sea C' una subcópula y sean F^{-1} y G^{-1} las quasi-inversas de F y G, respectivamente. Entonces, para cualquier $(u,v) \in$ Dom C', se tiene que*

$$C'(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

Cuando F y G son continuas, el corolario anterior es cierto para una cópula C. Así se tiene una forma de construir cópulas a partir de funciones de distribución conjuntas.

Además, cuando se tiene una extensión adeacuada para el dominio $\mathbb{R}^2$, entonces toda cópula es una función de distribución con marginales uniformes en I. Concretamente, si C es una cópula se define la función H_C en $\mathbb{R}^2$ como

$$H_C(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \vee y < 0 \\ C(x,y) & \text{si } \ (x,y) \in I^2 \\ x & \text{si } \ y > 1, x \in I \\ y & \text{si } \ x > 1, y \in I \\ 1 & \text{si } \ x > 1 \wedge y > 1 \end{cases}$$

Así, H_C es la función de distribución asociada a la cópula C cuyas marginales son uniformes en I. Por lo que podemos deducir que las cópulas son restricciones de funciones de distribución a I^2 cuyas marginales son uniformes en I.

En el contexto particular de las variables aleatorias también podemos dar una versión del *Teorema de Sklar*:

Teorema 3.7. *Sean X, Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con funciones de distribución F, G, respectivamente, y función de distribución conjunta H. Entonces, existe una cópula C de manera que*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si las variables aleatorias X e Y son continuas, entonces C es única.

A la cópula del resultado anterior la denotaremos por C_{XY} y la denominaremos **cópula de X e Y** o **cópula del par aleatorio (X,Y)**.

A partir de este resultado, podemos dar otra definición de cópula:

Una cópula es una función que expresa la dependencia entre dos variables aleatorias, ya que las funciones de distribución las caracterizan de manera unívoca.

Ahora bien, sabemos que las componentes de un vector aleatorio (X,Y) son independientes si la función de distribución conjunta es el producto de las marginales, esto es, $H(x,y) = F(x)G(y)$. Existe un resultado alternativo en términos de cópulas, pero antes de enunciarlo necesitaremos conocer la cópula producto:

Definición 3.14. *A la cópula definida por $\Pi(u,v) = uv, \forall u,v \in I$, se le conoce como* ***cópula producto*** *(3.2) .*

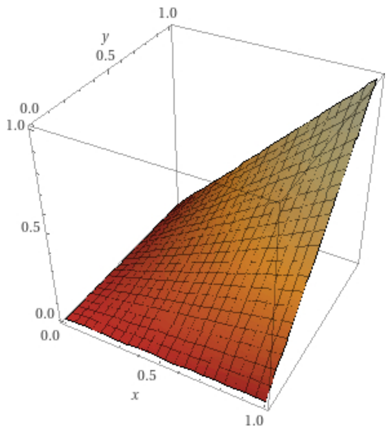
Teorema 3.8. *Sea (X,Y) un vector aleatorio, sus componentes son independientes sí, y sólo si la cópula de X e Y es la cópula Π.*

Demostración:

Usamos la cópula producto Π en el teorema de Sklar y obtenemos lo deseado:

$$H(x,y) = \Pi(F(x), G(y)) = F(x)G(y).$$

■



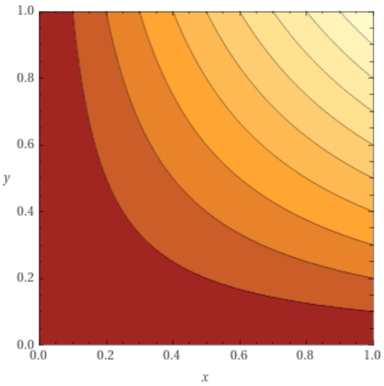


Figure 3.2: Cópula producto.

3.3 Medidas de asociación

Dedicaremos esta sección a hablar de las medidas de asociación o de dependencia, las cuáles son medidas que proporcionan información sobre el grado de asociación entre variables aleatorias.

Como medida de dependencia conocemos la *correlación de Pearson*, la cual mide la relación de dependencia lineal entre dos variables aleatorias, pero no necesita el uso de las cópulas. Por lo tanto, nos centraremos en las medidas **ρ de Spearman** y **τ de Kendall**, las cuales sí son medidas asociadas a las cópulas que cuantifican la relación entre variables, pero esta no es necesariamente lineal.

Al igual que el coeficiente de correlación de Pearson, las dos medidas mencionadas se evalúan entre -1 y 1, es decir, las variables tendrán una relación totalmente dependiente cuando $|\kappa| = 1$ (con κ nos referimos a cualquiera de las medidas) y, existirá una falta de dependencia cuanto más próximas a 0 se encuentren.

Un concepto a tener en cuenta va a ser el de *concordancia*, el cual, de manera coloquial, podemos definir como la correspondencia entre valores de una variable aleatoria y los valores de otra siendo estos del mismo "tipo". Formalmente, decimos que:

Definición 3.15. *Siendo (X,Y) un vector aleatorio continuo y siendo $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ dos observaciones de dicho vector, (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son* ***concordantes*** *si $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, o bien, $x_1 > x_2$ e $y_1 > y_2$. O equivalentemente, se dirán concordantes si $(x_1-x_2)(y_1-y_2) > 0$.*

En otro caso, $(x_1-x_2)(y_1-y_2) < 0$ y, se dirá que (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son ***discordantes****.*

Como estamos trabajando con vectores aleatorios continuos, que las desigualdades de las definiciones anteriores sean estrictas está justificado ya que la probabilidad de un punto es nula y, por tanto, no se puede dar que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Otra definición necesaria en esta sección es la siguiente:

Definición 3.16. *Una medida numérica $\kappa_{X,Y}$ de asociación entre dos variables aleatorias continuas X e Y, cuya cópula es C (también podemos notar κ_C), es una* ***medida de concordancia*** *si satisface las siguiente propiedades:*

1. *$\kappa_{X,Y}$ está definida para todo vector aleatorio continuo (X,Y).*
2. *$-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ y $\kappa_{X,-X} = -1$.*
3. *$\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.*
4. *Si X e Y son independientes, entonces $\kappa_{X,Y} = 0$.*
5. *$\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.*
6. *Si C_1, C_2 son cópulas tal que $C_1 \leq C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.*
7. *Si (X_n, Y_n) es una sucesión de variables aleatorias continuas con cópulas C_n y, C_n converge puntualmente a C, entonces*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C.$$

Las medidas de asociación ρ de Spearman y τ de Kendall verifican las propiedades de la definición anterior, por lo que son, además, medidas de concordancia. Vamos a presentar estas dos medidas mencionadas.

ρ de Spearman

Definición 3.17. *Sean $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(X_3,Y_3)$ vectores aleatorios continuos, independientes e idénticamente distribuídos. Se define la medida* ***ρ de Spearman*** *para el vector aleatorio (X,Y) como*
$$\rho_{X,Y} = 3\left(P[(X_1-X_2)(Y_1-Y_3) > 0] - P[(X_1-X_2)(Y_1-Y_3) < 0]\right).$$

Notemos que la función de distribución conjunta del vector (X_1,Y_1) es $H(x,y)$ mientras que la del vector (X_2,Y_3) es $F(x)G(y)$ por independencia.

Es decir, ρ mide la diferencia entre la concordancia y la discordancia de los vectores aleatorios (X_1,Y_1) y (X_2,Y_3) (también se podría hacer con (X_3,Y_2)). Además, también por independencia, la cópula de X_2 e Y_3 es Π.

Por tanto, teniendo en cuenta todo esto, introducimos la relación de la medida ρ de Spearman con las cópulas:

Teorema 3.9. *Sean* $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ *vectores aleatorios continuos, independientes e idénticamente distribuídos,* F *y* G *las marginales correspondientes y* C *la cópula asociada. Entonces,*

$$\rho_{X,Y} = 12 \int\int_{I^2} uv dC(u,v) - 3 = 12 \int\int_{I^2} C(u,v) du dv - 3. \tag{3.4}$$

Demostración:

Partimos de que $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0]$, entonces por la definición de ρ

$$\rho = 3\left(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]\right) =$$

$$3\left(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - 1 + P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0]\right) =$$

$$3\left(2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - 1\right) = 6\left(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0]\right) - 3.$$

Además, por definición de concordancia sabemos que $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] = P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_3] + P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_3]$, así que

$$\rho = 6\left(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0]\right) - 3 = 6\left(P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_3] + P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_3]\right) - 3.$$

Por otra parte, tenemos que

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_3] = \int\int_{\mathbb{R}^2} C(F(x), G(y)) d\Pi(F(x), G(y)),$$

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_3] = \int\int_{\mathbb{R}^2} (1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y))) d\Pi(F(x), G(y)),$$

donde F y G son las marginales correspondientes. Por lo que

$$\rho = 6\left(P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_3] + P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_3]\right) - 3 =$$

$$6 \int\int_{\mathbb{R}^2} C(F(x), G(y)) d\Pi(F(x), G(y)) +$$

$$6 \int\int_{\mathbb{R}^2} (1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y))) d\Pi(F(x), G(y)) - 3 =$$

$$6\left(\int\int_{\mathbb{R}^2} [C(F(x), G(y)) + (1 - F(x) - G(y) + C(F(x), G(y)))] d\Pi(F(x), G(y))\right) - 3 =$$

$$6\left(\int\int_{I^2} [C(u,v) + 1 - u - v + C(u,v)] du dv\right) - 3 = 6\left(\int\int_{I^2} 2C(u,v) du dv + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 3 =$$

$$12 \int\int_{I^2} C(u,v) du dv - 3.$$

Se ha realizado el cambio $u = F(x)$ y $v = G(y)$ en la cuarta igualdad. Ya se tiene lo deseado.

■

Podemos interpretar la medida ρ como sigue:

$$\rho = 12 \int\int_{I^2} C(u,v) du dv - 3 = 12 \int\int_{I^2} C(u,v) du dv - 12 \int\int_{I^2} uv du dv =$$

$$12 \int \int_{I^2} [C(u,v) - uv] du dv = 12 \int \int_{I^2} [C(u,v) - \Pi(u,v)] du dv,$$

esto es, ρ es una medida proporcional a la diferencia entre el volumen de la cópula C y la cópula producto Π, por lo que podemos decir que ρ mide la distancia media entre variables aleatorias y, la independencia entre estas.

τ de Kendall

Comenzaremos con una versión muestral de la definición de la medida de concordancia que da nombre a este apartado y, seguidamente, proporcionaremos una versión poblacional de la misma.

Definición 3.18. *Sea $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de n observaciones del vector aleatorio continuo (X, Y). Por tanto, todos los pares distintos posibles de dichas observaciones son $\binom{n}{2}$, de las cuales c será el número de pares concordantes y d el número de pares discordantes. Entonces, la **τ de Kendall** para dicha muestra es*

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}}.$$

Es decir, podemos ver a τ como la probabilidad de la concordancia menos la discordancia entre un par de observaciones.

Definición 3.19. *Sean $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ dos vectores aleatorios continuos independientes e idénticamente distribuídos. Entonces, se define **τ de Kendall** como*

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Ahora veamos la caracterización de esta medida de concordancia mediante cópulas:

Teorema 3.10. *Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios continuos independientes e idénticamente distribuídos cuya cópula asociada es C. Entonces se tiene que*

$$\tau_C = 4 \int \int_{I^2} C(u,v) dC(u,v) - 1. \tag{3.5}$$

Demostración:

Como los vectores aleatorios son continuos tenemos que $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$. Entonces,

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] =$$

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 + P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1.$$

Por la definición de concordancia tenemos que $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] + P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2]$ y,

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int\int_{\mathbb{R}^2} C(F(x), G(y))dC(F(x), G(y))$$

donde F y G son las distribuciones marginales correspondientes. Del mismo modo, se obtiene el otro sumando.
Haciendo el cambio $u = F(x)$ y $v = G(y)$ se tiene que

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int\int_{\mathbb{R}^2} C(F(x), G(y))dC(F(x), G(y)) = \int\int_{I^2} C(u,v)dC(u,v).$$

Por tanto,

$$\tau_C = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 = 2\left(P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] + P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2]\right) - 1 =$$

$$2\left(2\int\int_{I^2} C(u,v)dC(u,v)\right) - 1 = 4\int\int_{I^2} C(u,v)dC(u,v) - 1.$$

■

Es decir, la medida τ de Kendall queda totalmente determinada por la cópula sin tener en cuenta las marginales de los vectores aleatorios.

No siempre es sencillo calcular 3.5, por lo que proporcionamos una manera mas fácil de calcular τ:

Teorema 3.11. *Sea C una cópula tal que $\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)$ es integrable en I^2, entonces*

$$\int\int_{I^2} C(u,v)dC(u,v) = \frac{1}{2} - \int\int_{I^2} \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)dudv.$$

Como consecuencia de los teoremas 3.10 y 3.11 se obtiene:

Corolario 3.3. *Sea C una cópula tal que $\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)$ es integrable en I^2, entonces*

$$\tau = 1 - 4\int\int_{I^2} \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)dudv. \tag{3.6}$$

Aunque las dos medidas presentadas miden la probabilidad de la diferencia entre la concordancia y la discordancia de dos variables aleatorias a partir de una cópula dada, su valor no tiene por qué ser el mismo. Veamos los siguientes resultados, en los cuales podemos ver algunas relaciones existentes entre las medidas ρ y τ:

Teorema 3.12. *Sean X e Y variables aleatorias continuas y, sean τ, ρ los valores de las medidas τ de Kendall y ρ de Spearman asociadas (3.19, 3.17). Entonces,*

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

Teorema 3.13. *Sean X e Y variables aleatorias continuas y, sean τ, ρ los valores de las medidas τ de Kendall y ρ de Spearman asociadas (3.19, 3.17). Entonces,*

$$\frac{1+\rho}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2$$

y

$$\frac{1-\rho}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2.$$

Como consecuencia de estos,

Corolario 3.4. *Sean X e Y variables aleatorias continuas y, sean τ, ρ los valores de las medidas τ de Kendall y ρ de Spearman asociadas. Entonces*

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \quad \tau \leq 0.$$

De este modo, para cada par de variables aleatorias continuas X e Y, los valores de τ y ρ asociados a estas se encuentran en la región representada en 3.3, región conocida como *región* $\tau - \rho$.

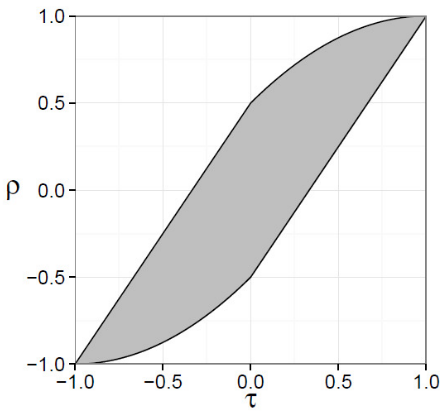


Figure 3.3: Región $\tau - \rho$.

3.4 Conceptos de dependencia

Como ya se ha referenciado en el teorema 3.8, dos variables aleatorias serán independientes si su cópula asociada es la cópula producto Π. Por tanto, teniendo en cuenta este hecho vamos a definir algunos conceptos de dependencia entre variables aleatorias.

Las propiedades de dependencia que veremos a continuación van a ser definidas mediante cópulas, o, identificando alguna propiedad simple de las cópulas, que corresponden a alguna función de distribución del subconjunto de la cópula producto.

- **Dependencia en cuadrante:**

  Con dependencia positiva nos referimos a cómo los valores grandes (o pequeños) de una variable aleatoria aparecen con valores grandes (o pequeños) de la otra y, con dependencia negativa describimos cómo los valores grandes de una variable aleatoria aparecen con valores pequeños de la otra. Ahora,

  Definición 3.20. *Sean X e Y variables aleatorias continuas, decimos que X e Y tienen **dependencia en cuadrante positiva** (PQD), si*

  $$C_{XY}(u,v) \geq \Pi(u,v) = uv, \forall (u,v) \in I^2. \tag{3.7}$$

  *En caso contrario, diremos que X e Y tienen **dependencia en cuadrante negativa** (NQD).*

- **Monotonicidad en las colas:**

  Definición 3.21. *Sean X e Y variables aleatorias continuas. Entonces,*

  *a) Diremos que Y es **decreciente por la cola izquierda en X** (LTD($Y|X$)) sí, y sólo si para cualquier $v \in I$, $\frac{C(u,v)}{u}$ es no creciente en u.*

  *b) Diremos que X es **decreciente por la cola izquierda en Y** (LTD($X|Y$)) sí, y sólo si para cualquier $u \in I$, $\frac{C(u,v)}{v}$ es no creciente en v.*

  *c) Diremos que Y es **creciente por la cola derecha en X** (RTI($Y|X$)) sí, y sólo si para cualquier $v \in I$, $\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-u}$ es no decreciente en u, o equivalentemente, si $\frac{v-C(u,v)}{1-u}$ es no creciente en u.*

  *d) Diremos que X es **creciente por la cola derecha en Y** (RTI($X|Y$)) sí, y sólo si para cualquier $u \in I$, $\frac{1-u-v+C(u,v)}{1-v}$ es no decreciente en v, o equivalentemente, si $\frac{u-C(u,v)}{1-v}$ es no creciente en v.*

  Cada uno de los casos anteriores (LTD($Y|X$), LTD($X|Y$), RTI($Y|X$), RTI($X|Y$)) implica la dependencia en cuadrante positivo,

  Teorema 3.14. *Sean X e Y variables aleatorias. Si X e Y satisfacen alguno de los cuatro casos dados en la definición 3.21, entonces X e Y poseen dependencia en cuadrante positiva.*

  Demostración:

  Supongamos que X e Y son $LTD(Y|X)$ (del mismo modo $LTD(X|Y)$), es decir, para cualquier $v \in I$, $\frac{C(u,v)}{u}$ es no creciente en u. Sean $u, u' \in I$ tales que $u < u'$. Entonces, se cumple que

  $$\frac{C(u,v)}{u} \geq \frac{C(u',v)}{u'}.$$

En particular, si $u' = 1$ se tiene que

$$\frac{C(u,v)}{u} \geq \frac{C(1,v)}{1} = C(1,v) = v,$$

es decir, $C(u,v) \geq uv = \Pi(u,v)$, por lo que X e Y son PQD.

Supongamos, ahora, que X e Y son $RTI(Y|X)$ (del mismo modo $RTI(X|Y)$), es decir, para cualquier $v \in I$, $\dfrac{v - C(u,v)}{1-u}$ es no creciente en u. Sean $u, u' \in I$ tales que $u < u'$. Entonces, se cumple que

$$\frac{v - C(u,v)}{1-u} \leq \frac{v - C(u',v)}{1-u'}.$$

En particular, si $u' = 0$ se tiene que

$$\frac{v - C(u,v)}{1-u} \leq \frac{v - C(0,v)}{1} = v - C(0,v) = v,$$

$$v - C(u,v) \leq v(1-u),$$

$$-C(u,v) \leq -uv$$

es decir, $C(u,v) \geq uv = \Pi(u,v)$, por lo que X e Y son PQD.

■

- **Monotonicidad estocástica:**

  Definición 3.22. *Sean X e Y variables aleatorias continuas cuya cópula asociada es C. Se dice que Y es* ***estocásticamente creciente en X*** *(SI($Y|X$)) sí, y sólo si para cualquier $v \in I$ y para casi todo u,* $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ *es no creciente en u o, equivalentemente, $C(u,v)$ es una función cóncava de u.*
  Del mismo modo, se dice que X es ***estocásticamente creciente en Y*** *(SI($X|Y$)) sí, y sólo si para cualquier $u \in I$ y para casi todo v,* $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ *es no creciente en v o, equivalentemente, $C(u,v)$ es una función cóncava de v.*

  Además, se dirá que Y es ***estocásticamente decreciente en X*** *(SD($Y|X$)) (resp. X* ***estocásticamente decreciente en Y*** *(SD($X|Y$))) sí, y sólo si para cualquier $v \in I$ y para casi todo u,* $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ *es no decreciente en u (resp. sí, y sólo si para cualquier $u \in I$ y para casi todo v,* $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ *es no decreciente en v).*

  La monotonicidad estocástica implica la monotonicidad en las colas,

  Teorema 3.15. *Sean X e Y variables aleatorias continuas cuya cópula asociada es C. Entonces,*

  - *Si X e Y son $SI(Y|X)$, también son $LTD(Y|X)$ y $RTI(Y|X)$.*
  - *Si X e Y son $SI(X|Y)$, también son $LTD(X|Y)$ y $RTI(X|Y)$.*

- **Monotonicidad en las esquinas:**

Definición 3.23. *Sean X e Y variables aleatorias continuas y sea H la función de distribución conjunta de ambas. Entonces, se dice que X e Y son* ***decrecientes en la esquina izquierda*** *($LCSD(X,Y)$) sí, y sólo si $H(x,y)H(x',y') \geq H(x,y')H(x',y)$, $\forall x,y,x',y' \in \overline{\mathbb{R}}$ con $x \leq x', y \leq y'$. Con la desigualdad invertida se dirán crecientes en la esquina izquierda.*
De manera similar, X e Y son ***crecientes en la esquina derecha*** *($RCSI(X,Y)$) sí, y sólo si $\overline{H}(x,y)\overline{H}(x',y') \geq \overline{H}(x,y')\overline{H}(x',y)$, $\forall x,y,x',y' \in \overline{\mathbb{R}}$ con $x \leq x', y \leq y'$, donde $\overline{H} = 1 - H$. Con la desigualdad invertida se dirán decrecientes en la esquina derecha.*

La monotonicidad en las esquinas implica la monotonicidad en las colas,

Teorema 3.16. *Sean X e Y variables aleatorias continuas. Entonces,*

- *Si X e Y son $LCSD(X,Y)$, entonces son $LTD(Y|X)$ y $LTD(X|Y)$.*
- *Si X e Y son $RCSI(X,Y)$, entonces son $RTI(Y|X)$ y $RTI(X|Y)$.*

Finalicemos este apartado con un esquema de las distintas relaciones existentes entre las propiedades de dependencia expuesto en la figura 3.4

$$
\begin{array}{ccccc}
LCSD & \Rightarrow & LTD(Y|X) & \Leftarrow & SI(Y|X) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
LTD(X|Y) & \Rightarrow & PQD & \Leftarrow & RTI(Y|X) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
SI(X|Y) & \Rightarrow & RTI(X|Y) & \Leftarrow & RCSI
\end{array}
$$

Figure 3.4: Relación entre las propiedades de dependencia.

3.5 Algunas familias de cópulas

En esta sección mostraremos un par de familias de cópulas que nos serán de utilidad para poder completar el objetivo de este proyecto. Las familias de cópulas serán conjuntos de estas, las cuales tienen semejanzas entre sí.

Cópulas con secciones cúbicas

Las cópulas cuyas secciones son cúbicas en u (o v intercambiando los papeles) serán de la forma

$$C(u,v) = a(v)u^3 + b(v)u^2 + c(v)u + d(v) \tag{3.8}$$

para ciertas funciones a, b, c, d.

Para obtener dichas funciones, aplicaremos las condiciones de acotación de las cópulas. Así,

$$C(0, v) = d(v) = 0$$

y

$$C(1, v) = a(v) + b(v) + c(v) = v$$

es decir, $c(v) = v - a(v) - b(v)$.

Si notamos $\alpha(v) = -[a(v) + b(v)]$ y, $\beta(v) = -[2a(v) + b(v)]$ se tiene la siguiente expresión:

$$C(u, v) = vu + u(1-u)[\beta(v)u + \alpha(v)(1-u)] \tag{3.9}$$

donde α y β son funciones tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = 0 = \beta(0) = \beta(1)$ ya que $C(u, 0) = 0$ y $C(u, 1) = u$ y C es una cópula, es decir, es 2-creciente.

Esta conclusión se recoge en el siguiente lema

Lema 3.6. *Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\alpha(0) = \alpha(1) = 0 = \beta(0) = \beta(1)$ y, sea C la función definida por 3.9. Entonces, C es una cópula sí, y sólo si*

1. *$\alpha(v)$ y $\beta(v)$ son absolutamente continuas y,*
2. *$1 + \alpha'(v)(1 - 4u + 3u^2) + \beta'(v)(2u - 3u^2) \geq 0$, $\forall u \in I$ y para casi todo $v \in I$.*

Para la construcción de cópulas con secciones cúbicas en u (ó v) vamos a definir un conjunto S como la unión del cuadrado $[-1, 2] \times [-2, 1]$ y la elipse de ecuación $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0$ cuya gráfica es la dada en la figura 3.5.

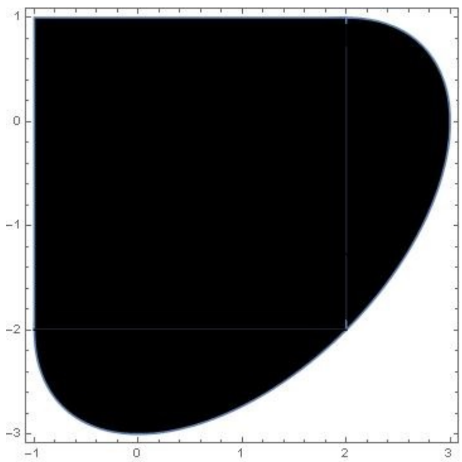


Figure 3.5: Conjunto S.

Bien, conociendo el conjunto S daremos un resultado que se utilizará para dicha construcción:

Teorema 3.17. *Sean α, β y C las dadas en el lema 3.6. Entonces, C será una cópula sí, y sólo si*

1. *$\alpha(v), \beta(v)$ son absolutamente continuas y,*

2. *si para casi todo $v \in I$, $(\alpha'(v), \beta'(v))$ está en S. Esto es,*

$$-1 \leq \alpha'(v) \leq 2 \;\; y \;\; -2 \leq \beta'(v) \leq 1$$

o

$$[\alpha'(v)]^2 - \alpha'(v)\beta'(v) + [\beta'(v)]^2 - 3\alpha'(v) + 3\beta'(v) \leq 0.$$

Además, C es absolutamente continua.

Como consecuencia de este resultado (3.17)

Teorema 3.18. *Supongamos que C tiene secciones cúbicas en u y en v, es decir, C viene dada por 3.9. Entonces,*

$$C(u,v) = uv + uv(1-u)(1-v)[A_1 v(1-u) + A_2(1-v)(1-u) + B_1 uv + B_2 u(1-v)], \quad (3.10)$$

donde $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ son constantes tales que $(A_2, A_1), (B_1, B_2), (B_1, A_1)$ y $(A_2, B_2) \in S$.

Shuffles of Min

Las cópulas que son una colección de segmentos con pendiente $+1$ o -1 en el cuadrado unidad son las "shuffles of Min". Estas se generan a partir del soporte de la cota de Fréchet-Hoeffding M o una permutación de este, el cual viene dado por 3.6.

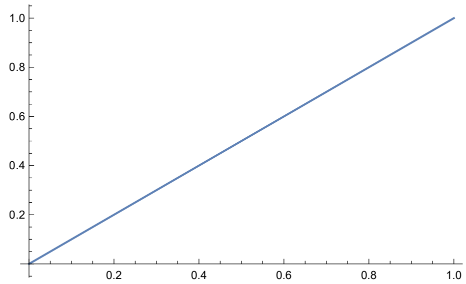


Figure 3.6: Soporte de M.

Informalmente podemos decir que los pasos a seguir para la construcción de una cópula C de este tipo son:

1. Definir el soporte de M en el cuadrado unidad I^2.
2. Dividir dicho cuadrado, I^2, en un número n de rectas. En cada tira de cuadrado quedará un trozo de soporte de M.
3. Giramos los trozos de soporte que quedan en cada tira, con la opción de mantenerlos con pendiente 1 o invertirlos a pendiente -1 (si todos quedan con pendiente 1 no hay ningún cambio).
4. Mezclamos las tiras en las que quedaba dividido I^2, es decir, las barajamos.

De este modo, daremos lugar a una nueva cópula a partir de las cotas de Fréchet-Hoeffding.

Gráficamente, podemos ver este proceso en 3.7.

Formalmente,

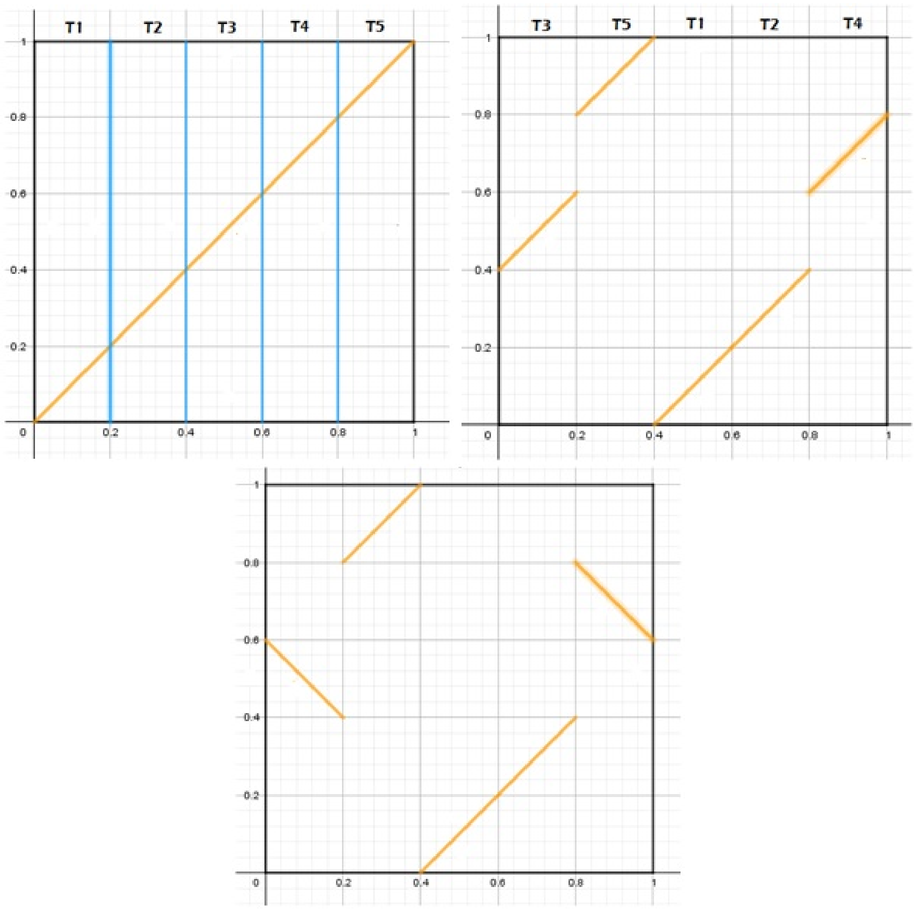


Figure 3.7: Construcción de una Shuffle of M.

Definición 3.24. *Una **shuffle of Min** está determinada por un natural n, una partición finita de n intervalos cerrados $\{J_i\} = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ de I, una permutación π en $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ y, una función $\omega : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$ donde $\omega(i) = \pm 1$ (i = 1,...,n) según si la recta en $J_i \times I$ esta girada o no.*

Denotaremos por $M(n, \{J_i\}, \pi, \omega)$ a la shuffle of M.

Probabilísticamente, podemos interpretar la definición 3.24 mediante biyecciones continuas en una función por partes, de manera que una función es continua por partes si se define en un intervalo no degenerado y tiene, como mucho, un número finito de discontinuidades, siendo dichas discontinuidades saltos.

Teorema 3.19. *Sean X e Y dos variables aleatorias y sea C su cópula asociada. Las siguientes afirmaciones equivalen,*

- *C es una shuffle of Min*
- *existe una función f biyectiva y continua por partes tal que*

$$P(Y = f \circ X) = 1.$$

Definición 3.25. *Una shuffle of M con $\omega \equiv 1$ se denominará **shuffle recta** y, una suffle of M con $\omega \equiv -1$ se denominará **shuffle invertida**.*

Nota: notaremos I_n cuando $\{J_i\}$ sea una partición regular de I, esto es, cuando la medida de cada intervalo $\{J_i\}$ sea $\frac{1}{n}$.

Contraejemplos

4

Vamos a presentar dos problemas que resolveremos utilizando la teoría de cópulas presentada en la sección anterior, probando su falsedad mediante un contraejemplo. El primer problema consistirá en probar que el recíproco del teorema 3.14 no es cierto, es decir, que la dependencia en cuadrante positiva no implica ninguna de las condiciones de la monotonicidad en colas. Y, por otro lado, el segundo problema consistirá en demostrar que la conjetura de Hunchitson y Lai era falsa.

Problema 1:

Dependencia en cuandrante positiva no implica monotonicidad en colas.

Sea $\theta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y, sea C_θ la cópula dada por

$$C_\theta(u,v) = \begin{cases} M(u,v) & \text{si} \quad u,v \in [0,\theta] \\ W(u,v) & \text{si} \quad u,v \in [\theta, 1-\theta] \\ M(u,v) & \text{si} \quad u,v \in [1-\theta, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \max(u+v-1+\theta, \theta) & \text{si} \quad u,v \in [\theta, 1-\theta] \\ \min(u,v) & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.1}$$

cuyo soporte podemos ver en la figura 4.1.

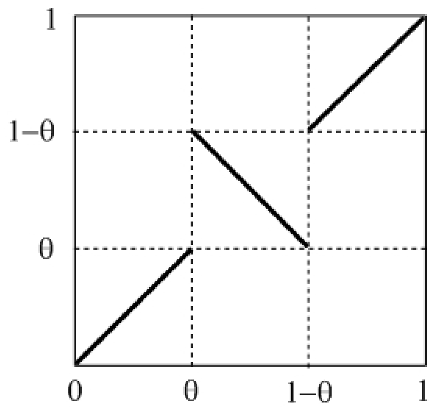


Figure 4.1: Soporte cópula C_θ.

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas y, supongamos que C_θ es su cópula asociada. Comprobemos que dicha cópula es PQD.

Primero, es claro que $\min(u,v) \geq uv = \Pi(u,v)$ para cualesquiera $u,v \in [0,1] \backslash [\theta, 1-\theta]$, pues $\min(u,v) = M(u,v)$ y teniendo en cuenta las desigualdades 3.2 , se confirma lo dicho.

Segundo, si $C_\theta(u,v) = \max(u+v-1+\theta, \theta) = \theta$ con $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [\theta, 1-u]$, se tiene que dar que $\theta \geq uv$, para cualesquiera u,v.

Bien, la cópula producto $\Pi(u,v) = uv$ alcanza su valor máximo cuando $u = \frac{1}{2} = v$, por lo que

$$\theta \geq \max\{uv\} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

lo cual es cierto, pues $\theta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Finalmente, si $C_\theta(u,v) = \max(u+v-1+\theta, \theta) = u+v-1+\theta$ con $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [1-u, 1-\theta]$, se ha de cumplir que $u+v-1+\theta \geq uv$ para cualesquiera u,v.
Notemos que

$$\begin{gathered} u+v-1-uv \geq -\theta \\ (1-u)(v-1) \geq -\theta \\ -(1-u)(1-v) \geq -\theta \\ (1-u)(1-v) \leq \theta \end{gathered}$$

de donde se deduce que la función $(1-u)(1-v)$ alcanza su valor máximo en $u = \frac{1}{2} = v$, es decir, $\frac{1}{4} \leq \theta$, lo cual es cierto por el mismo motivo que en el caso anterior.

Por tanto, podemos concluir que, en efecto, la cópula C_θ es PQD.

Veamos ahora, si dicha cópula verifica alguna de las 4 condiciones de la definición 3.21.
Por un lado, sabemos que C_θ será $LTD(Y|X) \Leftrightarrow \frac{C_\theta(u,v)}{u}$ es no creciente en u. Tomemos $C_\theta(u,v) = u+v-1+\theta$ con $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [1-u, 1-\theta]$. Sea $f(u,v) = \frac{u+v-1+\theta}{u}$, entonces

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = \frac{1-v-\theta}{u^2}$$

y

$$\frac{1-v-\theta}{u^2} \leq 0 \Leftrightarrow 1-v-\theta \leq 0 \Leftrightarrow 1-\theta \leq v$$

pero $v \in [1-u, 1-\theta]$, por lo que $\frac{1-v-\theta}{u^2} \geq 0$.
Luego, C_θ no es $LTD(Y|X)$ y, por simetría de C_θ, tampoco es $LTD(X|Y)$.

Por otro lado, sabemos que C_θ será $RTI(Y|X) \Leftrightarrow \frac{1-u-v+C_\theta(u,v)}{1-u}$ es no decreciente en u. Tomemos $C_\theta(u,v) = \theta$ con $u \in [\theta, 1-\theta]$ y $v \in [\theta, 1-u]$. Sea $g(u,v) = \frac{1-u-v+\theta}{1-u}$, entonces

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} = \frac{\theta - v}{(1-u)^2}$$

y

$$\frac{\theta-v}{(1-u)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \theta - v \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq v$$

pero $v \in [\theta, 1-u]$, por lo que $\frac{\theta-v}{(1-u)^2} \leq 0$.
Luego, C_θ no es $RTI(Y|X)$ y, por simetría de C_θ, tampoco es $RTI(X|Y)$.

□

Problema 2: conjetura de Hutchinson y Lai

En 1990, Hutchinson y Lai conjeturaron lo siguiente

Sean X e Y variables aleatorias tales que $SI(Y|X)$ y $SI(X|Y)$. Entonces, para tales variables aleatorias se cumple que

$$\rho \leq \frac{3\tau}{2}.$$

Sea $\theta \in [0,1/4]$ y, sea C_θ la cópula

$$C_\theta(u,v) = uv + 2\theta uv(1-u)(1-v)(1+u+v-2uv).$$

Note que C_θ es cúbica en u y en v, asi que C_θ es una cópula con secciones cúbicas dada por 3.10, donde $A_1 = B_2 = 4\theta, A_2 = B_1 = 2\theta.$

Supongamos que la cópula de X e Y es C_θ. Entonces,

$$\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = u + 2\theta(1-2u)(1-u)u(1-v)v + 2\theta(1-u)u(1-v)(1+u+v-2uv) -$$

$$2\theta(1-u)uv(1+u+v-2uv), \forall u \in (0,1),$$

y,

$$\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v^2} = 4\theta(1-2u)(1-u)u(1-v) - 4\theta(1-2u)(1-u)uv - 4\theta(1-u)u(1+u+v-2uv) =$$

$$12\theta(1-u)u(2uv-v-u), \forall u \in (0,1).$$

Es decir, se cumple que $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v^2} < 0$ para cualesquiera $(u,v) \in (0,1)^2$, ya que la función

$$2uv - u - v < 0, \forall (u,v) \in (0,1)^2$$

(este hecho lo podemos ver gráficamente en la figura 4.2) y, $12\theta(1-u)u > 0$ para cualquier $u \in (0,1)$.

Por tanto, se verifica que X es estocásticamente creciente en Y, es decir, son $SI(X|Y)$.

Del mismo modo, podemos comprobar que $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u^2} < 0$ para $(u,v) \in (0,1)^2$ y, por tanto X e Y también son $SI(Y|X)$.

Obtengamos ahora, el valor de las medidas de asociación de X e Y, ρ_{XY} y τ_{XY}.

Utilizaremos las expresiones 3.4 y 3.6 para calcularlas. Así,

$$\rho_{X,Y} = 12 \int\int_{I^2} C_\theta(u,v)dudv - 3 =$$

$$12 \int\int_{I^2} (uv + 2\theta uv(1-u)(1-v)(1+u+v-2uv))dudv - 3 = 12\left(\frac{3+\theta}{12}\right) - 3 = \theta,$$

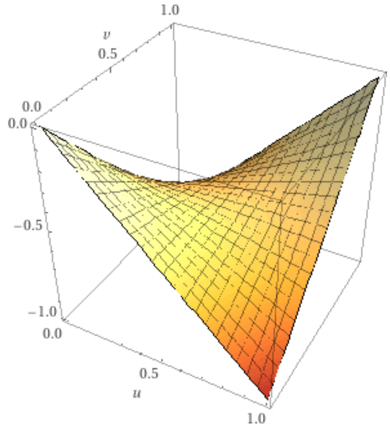


Figure 4.2: F(x,y) = 2xy-x-y.

$$\tau_{XY} = 1 - 4 \int\int_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C_\theta(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C_\theta(u,v) du dv =$$

$$1 - 4\left(\frac{1}{300}(75 - 50\theta + 2\theta^2)\right) = 1 - \frac{1}{75}(75 - 50\theta + 2\theta^2) = \frac{2}{3}\theta - \frac{2}{75}\theta^2.$$

Por tanto,

$$\tau = \frac{2}{3}\theta - \frac{2}{75}\theta^2 = \frac{2}{3}\theta\left(1 - \frac{1}{25}\theta\right) < \frac{2}{3}\theta = \frac{2}{3}\rho$$

para $\theta \in (0, 1/4]$. Es decir,

$$\rho > \frac{3}{2}\tau.$$

Así que, hemos encontrado un contraejemplo que desmiente la conjetura de Hutchinson y Lai.

□

5 Conclusión

Hemos introducido brevemente la Teoría de Cópulas a partir de la relación entre funciones de distribución y cópulas. Dicha relación se presenta con el *Teorema de Sklar*, teorema que, a partir de distribuciones marginales unidimensionales F y G de variables aleatorias X e Y dadas y, una cópula C, ofrece una expresión para la distribución conjunta H, de manera que

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \quad (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Además, también hemos visto como a partir de funciones de distribución conjuntas podemos construir cópulas y, cómo, con una extensión adecuada a $\mathbb{R}^2$, toda cópula es una función de distribución con marginales uniformes.
Nos hemos referido a la cópula C como la cópula asociada a las variables aleatorias X e Y y la hemos denotado por C_{XY}.

Cabe destacar, que en esta introducción a la Teoría de Cópulas hemos presentado las medidas de asociación τ de Kendall y ρ de Spearman, medidas que cuantifican la relación de dependencia, no necesariamente lineal, entre variables aleatorias.

También, se han expuesto ciertos conceptos de dependencia como *dependencia en cuadrantes*, *monotonicidad en colas o*, *monotonicidad estocástica*, que serán un punto relevante en la propuesta de los problemas que resolveremos mediante contraejemplos, objetivo principal del trabajo. Así como la relación que existe entre estas.

Las familias de cópulas: *cópulas con secciones cúbicas y las shuffles of min* serán dos familias de cópulas explicadas en el trabajo para su utilización en la búsqueda de los contraejemplos. Y, finalmente, se proponen los problemas, uno que involucra el recíproco de una relación entre dependencia en cuadrantes y monotonicidad en colas

Monotonicidad en colas implica dependencia en cuadrantes positiva, pero el recíproco no es cierto,

y dos, la conjetura de Hutchinson Lai:

Bajo condiciones de monotonicidad estocástica de las variables aleatorias X e Y, se cumple la relación: $\rho_{XY} < 3\tau_{XY}/2$.

Bibliografía

[1] K. Aas, *Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas*, Norwegian Computing Center, 2004.

[2] Fabrizio Durante, Juan Fernández-Sánchez, *Multivariate shuffles and approximation of copulas*, Statistics and Probability Letters, Elsevier, 2010.

[3] Fabrizio Durante, Peter Sarkoci, Carlo Sempi, *Shuffles of copulas*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 914-921.

[4] F. Durante, C. Sempi, *Principles of Copula Theory*, Chapman & Hall/CRC, 2015.

[5] P. Embrechts, A. McNeil, D. Straumann, *Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls*, in: Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press (2002), pp. 176-223.

[6] M. Fréchet, *Sur les tableaux de corrélation don les marges sont données*, Ann. Univ. Lyon Sect. A 9 (1951), 53-77.

[7] C. Genest, A.C. Favre, *Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask*, J. Hydrol. Eng. 12 (2007), 347-368.

[8] P. Jaworski, F. Durante, W. Hardle, (Eds.), *Copulae in Mathematical and Quantitative Finance*, Lecture Notes in Statistics?Proceedings, Springer, 2013.

[9] P. Jaworski, F. Durante, W. Hardle, T. Rychlik (Eds.), *Copula Theory and its Applications*, Lecture Notes in Statistics?Proceedings, Springer, 2010.

[10] W.H. Kruskal, *Ordinal measures of association*, Amer. Statist. Assoc. 53 (1958), 814-861.

[11] E.L. Lehmann, *Some concepts of dependence*, Ann. Math. Statist. 357 (1966), 1137-1153.

[12] P. Mikusinski, H. Sherwood y M.D. Taylor, *Shuffles of Min*, Stochastica 13, (1992), pp. 61-74.

[13] R.B. Nelsen, *An introduction to copulas (2nd ed.)*, Springer Series in Statistics, New York, 2006.

[14] R.B. Nelsen, J.J. Quesada Molina y J.A. Rodríguez Lallena, *Bivariate copulas with cubic sections*, Nonparametric Statistics, Vol. 7,(1996), pp.205-220.

[15] G. Psarrakos, K. Politis, *Monotonicity properties and the deficit at ruin in the Sparre Andersen model*, Scandinavian Act. J. 4 (2009), 105-118.

[16] M. Scarsini, *On measures of concordance*, Stochastica 8 (1984), 201-218.

[17] Matthias Scherer y Jan-frederik Mai, *Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, And Applications : Stochastic Models, Sampling Algorhythms, and Applications*, World Scientific Publishing Company, Series in Quantitative Finance, Vol. 4, 2012.

[18] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Dover Publications, 2005.

[19] B. Schewizer, E.F. Wolff, *On nonparametric measures of dependence for random variables*, Ann. Statist. 9 (1981), 870-885.

[20] A. Sklar, *Fonctions de répartition a n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8 (1959), 229-231.