CINVESTAV-IPN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EDUCATIVA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

COMISION EUROPEA

Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario

Editores
Fernando Hitt
Arturo Hernández

Programa ALFA
Proyecto FIEMAL
COMISIÓN EUROPEA

Experimentación en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario

Editores: Fernando Hitt Espinosa y Arturo Hernández Ramírez

Publicado por:
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN

Diseño y Diagramación
Sara Daza Maya

Reproducción
Allan M. Cortez Ortega

Serigrafía
Juventino Ibáñez

Impreso en México

ISBN: 968-5226-02-4

La reproducción de esta obra fue realizada en el Taller
del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN,
ubicado en Av. Instituto Politécnico Nacional 2508,
Col. San Pedro Zacatenco, C. P. 07360
México, D. F.

Índice

Introducción

La investigación educativa ha proporcionado valiosos resultados sobre problemas concretos de aprendizaje. Sin embargo, datos sobre fenómenos ligados al aprendizaje en general y sobre el aprendizaje de las matemáticas en lo particular son poco divulgados en los países de habla hispana. Por ejemplo, en lo que respecta al sistema educativo mexicano se sabe muy poco, y de lo poco que se sabe, las estadísticas son aterradoras; por mencionar algunos datos, tenemos por ejemplo que la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI, 1986, p. 19) compara al sistema educativo mexicano con el sistema educativo japonés: *«De hecho, cerca del 60% de los niños mexicanos continúan en la escuela primaria después del primer año. Aproximadamente el 10% inicia la secundaria* [básica y media superior] *y cerca del 3% finaliza estudios superiores. En contraste, prácticamente todos los niños japoneses completan la educación básica, y cerca del 95% permanecen a tiempo completo estudiando hasta la edad de 18 años».* Ibargüengoitia publicó (Periódico Excélsior, 19/julio/71) que de cada 22 millones de mexicanos en edad escolar, exclusivamente 10 millones asistían a la escuela. O este otro comentario de Carlos Fuentes (1997, p. 70) *«En México, la tasa de escolaridad es de seis años y medio. En Argentina es de nueve y en Canadá de doce. En la secundaria y preparatoria, sólo 28 de cada 100 jóvenes entre los 16 y los 18 años reciben instrucción en México; y en las universidades, sólo el 14% de los jóvenes entre 19 y 24 años alcanza ese nivel educativo. Y en el posgrado, sólo el 2% de los egresados de las universidades hace maestrías y un 0.1% doctorados».*

Hernández V. (1999) *Los procesos de resolución de problemas aritmético-algebraicos, de enunciado, en alumnos de secundaria y de bachillerato: Un estudio cuantitativo y cualitativo*. Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México.

Hitt F. (1997) Sistemas semióticos de representación. *Revista Avance y Perspectiva*, Vol. 16, mayo-junio, Cinvestav, México.

Hitt F. (En prensa) *Funciones en Contexto*. Versión preliminar, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Santos L. M. (1996) An exploration of strategies used by students to solve problems with multiple ways of solution. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 15, pp. 263-284.

The Economist (March, 1997) World Education League. Who's top? *Review The Economist*.

NCTM (1998) Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, USA.

Demostración en matemáticas y su relación con el uso de contraejemplos

Fernando Hitt Espinosa
Matemática Educativa
Cinvestav-I.P.N, México
fhitta@data.net.mx

Antonio Codina Sánchez [1]
Cinvestav-I.P.N, México
Universidad de Granada, España
acodisan@yahoo.es

Resumen

Los fundamentos de la matemática han sufrido una cantidad considerable de cambios y sólo se conoce muy comúnmente la fundamentación final. La enseñanza de las matemáticas influida por este proceso de formalización y fundamentación, ha perdido con ello la riqueza en pro de la enseñanza que nos puede proporcionar el desarrollo histórico de las ideas matemáticas y su transformación en una ciencia deductiva. Sabemos que las ideas ingenuas, la intuición y procesos empírico-prácticos, por decir los más conocidos, tuvieron que ver en el inicio de la matemática; sin embargo, en la fundamentación en definiciones y axiomas se pierde todo lo anterior. ¿Es necesaria esta pérdida? Dentro de la incomprensión de la matemática, la dificultad para utilizar la negación de un enunciado juega un papel preponderante. La demostración indirecta y el uso de contraejemplos es un requerimiento indispensable en el desarrollo de un pensamiento matemático avanzado. En este trabajo abordamos esta problemática desde dos puntos de vista, uno es el histórico y el otro es en el contexto de la experimentación en educación matemática.

Fundamentos de la matemática griega

Los fundamentos de la matemática, como lo entendemos ahora, sufrieron transformaciones para convertirse en una ciencia deductiva (ver Szabó, 1960). Lo anterior se llevó a cabo en la época de oro de los griegos, la cual se sitúa aproximadamente entre el siglo VI y II antes de Cristo.

[1] Trabajo apoyado por proyecto ALFA de la Comunidad Europea de la Red FIEMAL

El método axiomático apareció entre los siglos VI y III a.C. y, en forma concreta, dentro de los Elementos de Euclides, marcando así el comienzo de una ciencia matemática deductiva (lo que hoy se llama "el milagro griego").

Szabó (1960) considera que al inicio de la matemática griega la visualización jugó un papel preponderante, y que posiblemente las contradicciones entre las diferentes posturas filosóficas de esa época motivaron la construcción de una matemática deductiva. Por ejemplo, se considera que Zenón (discípulo de Parménides, Siglo V a.C.) quería llamar la atención sobre las ideas filosóficas de los pitagóricos al proponer sus famosas paradojas (por ejemplo la de Aquiles y la Tortuga). En este contexto, Szabó (idem, p. 40) señala:

Hipócrates de Quios en su Quadratura Lunularum, tuvo el cuidado de probar teóricamente aún desigualdades que podrían haberse hecho obvias mediante ilustración. Esta observación muestra que Hipócrates ya no confiaba en la evidencia de la simple visualización.

El trabajo de Hipócrates de Quios (460 a.C.) es anterior a Euclides, por tanto podemos suponer que antes de la aparición de los *«Elementos de Euclides»* ya había indicios de demostración matemática diferente a la simple ilustración. De hecho, Szabó considera que de acuerdo a los estudios históricos, alguna clase de libro sobre una matemática sistemática debería existir en el siglo V a.C. y que el contenido de dicho libro seguramente fue compilado en el libro VII de los Elementos de Euclides *sin cambio alguno esencial.* Queda de manifiesto que la demostración en matemáticas la podemos situar hacia el siglo V a.C. ¿Pero esta idea de demostración incluye a las llamadas demostraciones indirectas?

La demostración de la proposición 4 del libro I de Euclides es por reducción al absurdo, pero según lo apuntado por Szabó, pareciera que el contenido del libro VII de Euclides es anterior al del libro I. En el libro VII existen seis teoremas que son demostrados por reducción al absurdo. Ello indica que los pitagóricos ya utilizaban el método de demostración por reducción al absurdo.

Se considera a Parménides (≈ 500 a. C.) como uno de los filósofos que utilizaba en sus argumentaciones ideas sobre reducción al absurdo. En uno de los diálogos de Platón, *El Parménides* (escrito por Platón después de la muerte de Sócrates, en el año 369 a. C.), se puede leer lo siguiente:

Perfectamente, Sócrates, manifestó Parménides. Pero es necesario hacer todavía algo más que eso. No sólo debes suponer la existencia de cada una de las ideas que consideres y examinar las consecuencias que de esta hipótesis resultan, sino también, si quieres ejercitarte mucho mejor, suponer la no existencia de la misma idea.

Se considera que el principio del tercer excluido (que dada una proposición solamente puede ser o verdadera o falsa, que no existe una tercera opción) tuvo su origen en la filosofía de Parménides, que influyó en los pitagóricos y trascendió hacia los Elementos de Euclides. De acuerdo a Szabó, en los Elementos hay una resistencia al uso de consideraciones visuales, dando lugar a un desarrollo de la matemática en una ciencia deductiva, en donde el principio del tercer excluido ya es utilizado de manera sistemática en las demostraciones por reducción al absurdo.

¿Por qué son necesarias las demostraciones?

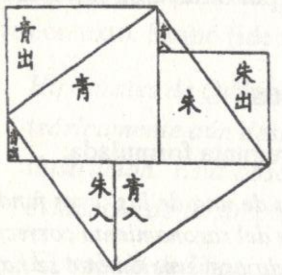
Fetisov (1954) menciona lo siguiente en relación a la pregunta formulada:

«La necesidad de la demostración es una consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (la lógica es la ciencia de las leyes del razonamiento correcto) -la ley de la razón suficiente-. Esta ley requiere que toda aseveración que se haga debe estar bien fundada, es decir, debe presentarse junto con argumentos lo suficientemente fuertes que apoyen su veracidad, o sea, su concordancia con los hechos y con la realidad. Tales argumentos pueden basarse en experimentos o bien en el razonamiento correcto basado en deducciones sistemáticas. En matemáticas, nos interesan principalmente los argumentos de este último tipo.

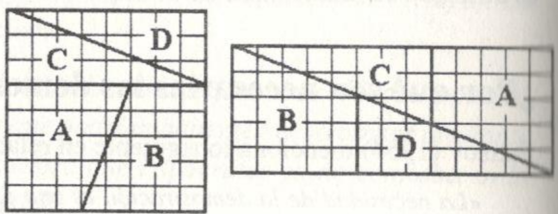
¿Fue razonable el cambio de una matemática que se apoyaba en consideraciones visuales a una matemática axiomática deductiva? La respuesta es que para el desarrollo de la matemática en una ciencia libre de contradicciones era necesario formalizarla bajo un proceso axiomático. ¿Es razonable enseñar matemáticas bajo ese mismo enfoque axiomático? La respuesta parece indicar que solo un número reducido de estudiantes podría acceder a la matemática bajo una enseñanza como tal.

Queremos remarcar aquí un punto muy importante mencionado en párrafos anteriores. Las consideraciones visuales tuvieron una fuerte ingerencia en el descubrimiento y desarrollo de la matemática griega, en la época actual con el desarrollo de la psicología y de la investigación en educación matemática se ha llegado a concluir sobre la importancia de promover en los estudiantes la construcción de conceptos a través de tareas de conversión entre las representaciones del mismo concepto matemático. Cómo equilibrar la balanza, por un lado demostraciones con cierto grado de formalidad son necesarias para no caer en contradicciones, y por otro lado, en el contexto del aprendizaje de las matemáticas las representaciones figurales son necesarias. Asumiendo que las consideraciones visuales son absolutamente necesarias en el aprendizaje de las matemáticas, una pregunta importante emerge de todo esto: ¿Bajo qué condiciones es pertinente las demostraciones visuales?

Le proponemos al lector las siguientes demostraciones (ver Commission INTER-IREM, 1989, p. 145 y 153) que descansan en consideraciones visuales (ver Figura 1), ¿Usted está de acuerdo en la prueba visual del teorema de Pitágoras? ¿Está de acuerdo en la prueba visual de que $8 \times 8 = 5 \times 13$?



Demostración visual del Teorema de Pitágoras (Liu Hui, 270 a.C.)



Demostración visual de que $8 \times 8 = 5 \times 13$ Lewis Carroll (1961, pág. 316)

Figura 1

Hemos mostrado a profesores la prueba visual del Teorema de Pitágoras, señalando paso a paso la construcción de los cuadrados y demostrando la igualdad de áreas por medio de superposición de áreas, los profesores en general quedan convencidos de la prueba visual (experimento ya realizado con profesores de manera informal). Utilizando un proceso de argumentación similar, los mismos profesores se convencen de que el área del cuadrado es igual a la del rectángulo, pero señalan de inmediato que algo debe estar mal ya que $8 \times 8 \neq 5 \times 13$.

La aceptación de la argumentación en un caso y el rechazo en el otro, tiene que ver con nuestro conocimiento anterior que en un caso ya hemos aceptado el Teorema de Pitágoras, y en el otro, ya hemos aceptado que $64 \neq 65$.

La demostración matemática en el contexto de la enseñanza

En la época actual en la enseñanza de las matemáticas se da por entendido de que toda proposición será o bien verdadera, o bien falsa (de acuerdo al principio del tercer excluido), y las reglas de negación sobre las proposiciones cuantificadas con predicado serán:

— "Invertir" los cuantificadores ($\forall \leftrightarrow \exists$)

— Substituir el predicado por su opuesto $\neg P(x)$

En general, la negación es incorporada al lenguaje, por ejemplo: $\notin$ (negación de $\in$), $\neq$ (negación de $=$), $\leq$ (negación de $>$); etc.

Si nosotros tenemos una proposición A en nuestra teoría y $\neg$ A representa una negación, entonces se dice que A y $\neg$A *son contradictorias.* Ejemplo:

$$\text{Prop. A: } \forall x \in N, (x^2+2)^2 > 5 \quad \text{y} \quad \text{Prop.} \neg \text{ A: } \exists x \in N, (x^2+2)^2 \leq 5$$

Pero la matemática misma ha sido obligada a admitir proposiciones indecidibles y ha dado pie a nuevas teorías para explicar tales proposiciones (ver teoría de modelos). Un ejemplo de una proposición indecidible o independiente en geometría es el famoso 5o. postulado de Euclides (referente al paralelismo entre rectas). Nosotros, por ahora, no detallaremos tales conceptos.

Los procesos de demostración en matemáticas quedan como un elemento implícito por desarrollar en el estudiante. En general, poco a poco el estudiante aprende a hacer demostraciones directas, y para él/ella no queda claro el principio del tercer excluido, la demostración por reducción al absurdo, y el papel del contraejemplo.

Si el estudiante optara por desarrollar una demostración por reducción al absurdo, para percatarse de la existencia de un hecho contradictorio dentro de una aserción que trata de objetos o entes matemáticos, es necesario conocer, al menos, un *hecho verdadero* dentro de nuestra teoría que *contradiga* lo que la aserción afirma.

Nuevamente citando a Fetisov (1954, p. 49), él señala lo siguiente:

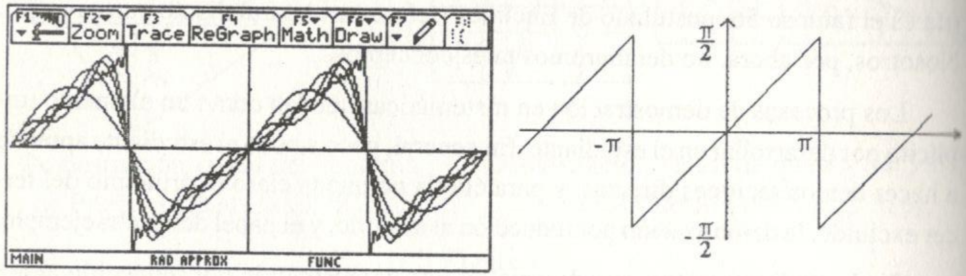
En una demostración directa, se establece la veracidad de la proposición que debe probarse, demostrando que es una consecuencia de proposiciones previamente probadas. En una demostración indirecta, se supone que la proposición que debe probarse es falsa y, a continuación, se prueba que esta suposición es contradictoria a la hipótesis o bien a alguna proposición probada con anterioridad.

En el caso de que se tenga un enunciado, por el principio del tercer excluido, si el enunciado es considerado como verdadero, realizamos una demostración (prueba directa o indirecta); si el enunciado es falso, se puede demostrar su falsedad asumiendo que es verdadero y llegando a contradecir un resultado verdadero ya conocido, o se busca un contraejemplo que muestre la no veracidad del enunciado. Una lectura recomendable en este contexto es el libro de Solow (1987) titulado *«Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas».*

El papel del contraejemplo en algunos episodios históricos de la matemática

La idea de contraejemplo no es fácil rastrearla en la historia de la matemática, pero era de uso común en la correspondencia entre matemáticos, un ejemplo interesante es la correspondencia entre Euler y D'Alambert (siglo XVIII) sobre la noción de función logaritmo. Otro ejemplo que ha pasado a la historia es el Teorema de Cauchy (1821):

"Cuando los diferentes términos de la serie $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1}, \ldots$, son funciones de una misma variable x, continuas con respecto a esta misma variable en la región de un valor particular para la cual la serie converge, la suma s de la serie es también en la vecindad de ese valor particular, función continua de x".



$\text{sen } x; \text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x;$

El teorema de Cauchy de 1821 sugiere este tipo de convergencia

$\text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x;$

$\text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x - \frac{1}{4}\text{sen } 4x + \frac{1}{5}\text{sen } 3x - \text{etc.}$

$\text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x - \frac{1}{4}\text{sen } 4x$

$\text{sen } x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x - \ldots - \frac{1}{30}\text{sen } 30x$

Figura 2

De acuerdo a Bottazzini (1986, p. 89), Abel en Enero 16 de 1826, escribió una carta en la que menciona excepciones al teorema de Cauchy (ver Figura 2), proporcionando (ver Figura 3) un contra ejemplo:

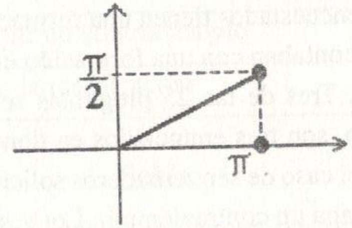
"Se puede rigurosamente demostrar que

$$\frac{x}{2} = sen\, x - \frac{1}{2} sen\, 2x + \frac{1}{3} sen\, 3x - etc.,$$

para todos los valores de x menores que π. Pareciera que la misma fórmula será cierta para x = π; pero esto nos lleva a

$$\frac{\pi}{2} = sen\, \pi - \frac{1}{2} sen\, 2\pi + \frac{1}{3} sen\, 3\pi - etc. = 0,$$

se pueden encontrar una gran cantidad de ejemplos de esta clase. En general la teoría de series infinitas, hasta el presente, está pobremente establecida. Uno realiza cada una de las clases de operaciones sobre las series infinitas, como si fueran finitas, pero ¿ello es permisible? Nunca del todo...".



Abel (1826) señala excepciones al Teorema de Cauchy:

$$\frac{\pi}{2} = \text{sen } \pi - \frac{1}{2}\text{sen } 2\pi + \frac{1}{3}\text{sen } 3\pi - \text{etc.} = 0$$

Figura 3

Es importante señalar aquí que Abel sugería restringir el tipo de series para las cuales el teorema de Cauchy fuera verdadero y proponía las series de potencia. Desde otro punto de vista, el teorema de Cauchy era falso y requería un análisis de la demostración para ver en qué paso se encontraba el error. De acuerdo a Robinson (1966, Capítulo X) señala que no hubo tal error, que el teorema de Cauchy es verdadero dentro de una teoría del Análisis No-Estándar (Teoría desarrollada por Robinson en donde se formaliza el uso de infinitésimos). En el contexto del Análisis, Hitt (1997, 2000) menciona lo siguiente:

Las series de funciones se manipulaban como si fueran uniformemente convergentes (concepto todavía no descubierto hasta 1847 con el trabajo de Seidel) y ello producía errores como el mencionado por Abel. El propio Cauchy en su libro de 1844 modifica las hipótesis de su teorema para quitar la contradicción. De hecho, tenemos tres tipos de acercamientos para evitar esa contradicción; Uno tiene que ver con la restricción del tipo de funciones a un dominio seguro como Abel sugiere a las series de potencia exclusivamente, otra es la modificación de las hipótesis del teorema, como Cauchy lo hizo en *su obra de 1844, exigiendo una propiedad mayor a las funciones, equivalente a funciones uniformemente continuas, pero sin descubrir ese nuevo concepto y, la última, la posición de Seidel (1847) la cual trata sobre la detección del error en la demostración de Cauchy y el descubrimiento del concepto de convergencia uniforme.*

Estudio experimental (primera parte)

Se diseñó un cuestionario de 25 preguntas relativas al concepto de función con una población de 29 profesores de matemáticas de enseñanza media en México. En general, los profesores encuestados tienen una formación en ingeniería (26 de entre ellos) y tres de ellos contaban con una formación en una escuela de ciencias en el área de matemáticas. Tres de las 25 preguntas se refieren a la problemática abordada en este trabajo, son tres enunciados en donde se solicita decidir si son verdaderos o falsos. En el caso de ser verdaderos solicitamos una demostración, en caso contrario, se solicitaba un contraejemplo. Los resultados relativos al resto de las preguntas están reportados en Hitt (1994) y una primera versión resumida de las tres preguntas con esta población se desarrolló en Hitt (1988).

Enunciados propuestos y análisis de respuestas

Pregunta 19

Sean f y g dos funciones de $\Re$ en $\Re$. Suponiendo que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$ para toda $x \in \Re$.

¿Esto implica que $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

☐ SI ☐ NO

Justifique su respuesta ya sea dando una argumentación a favor de la implicación o dar un ejemplo de dos funciones f y g que cumplan con la primera condición pero que f y g no sean funciones que se anulan en toda $x \in \Re$.

Justificación:

A continuación mostramos los resultados obtenidos a través de la Tabla 1.

Respuestas a la pregunta 19	Pregunta 19
Sí, y proporcionó una demostración correcta	2
Sí, y demostración incompleta o informal	12
Sí y en lugar de demostración construyó solo un ejemplo	1
Sí, y se abstuvo en la justificación	1
Abstención completa a la pregunta	7
No, e intentaron demostrar la negación de la proposición	1
No, e intentaron construir un contraejemplo	1
No, y se abstuvieron en la justificación	4

Tabla 1

En el problema 19 de entre los 12 profesores que proporcionaron una demostración incompleta o informal, tenemos argumentos que si bien no están afirmando algo falso, les hace falta argumentos para la implicación que quieren establecer, por ejemplo, como los siguientes: «$(f(x))^2$ *es positiva y* $(g(x))^2$ *también, ello implica que* $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$», o «*sabemos que* $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$». El profesor que dijo NO y quiso construir un contraejemplo propuso las funciones $f(x) = [x]$, $0 \leq x < 1$ (parte entera de x) y $g(x) = [x]$, $x \in [0, 1)$ (parte entera de x), resulta que esas funciones al definirlas para el intervalo $[0, 1)$, son las funciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$.

Pregunta 20

Sean f y g dos funciones de $\Re$ en $\Re$. Suponiendo que $(f(x))(g(x)) = 0$ para cada $x \in \Re$.

¿Esto implica que $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

☐ SI ☐ NO

Justifique como en el caso anterior ya sea por medio de una argumentación o un ejemplo que niegue la pregunta.

Justificación:

Respuestas a la pregunta 20	Pregunta 20
No y proporcionó un contraejemplo	1
No y proporcionó un argumento erróneo	2
Abstención completa a la pregunta	3
Sí, y proporcionó argumentos erróneos	17
Sí, y proporcionó un ejemplo erróneo	2
Sí, y se abstuvieron en la justificación	4

Tabla 2

En el problema 20 hubo mucho mayor número de procesos erróneos. El argumento más utilizado entre los 17 profesores que realizaron un proceso erróneo está el siguiente: *«Si alguna de las dos funciones vale cero* $\forall x \in \Re$, *entonces* $(f(x))(g(x)) = 0,\ \forall x \in \Re$ » Este enunciado es diferente al que se solicitaba analizar. De hecho el enunciado propuesto no es verdadero y se requería de la construcción de un contraejemplo (ver Figura 4).

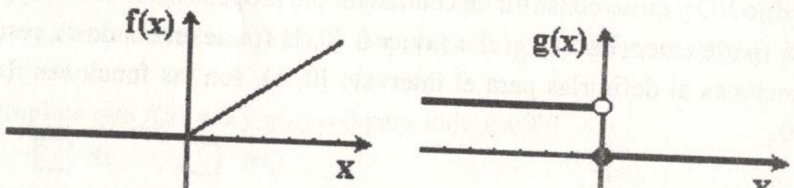


Figura 4

Pregunta 21

Sea f una función de $\Re$ en $\Re$. Si $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0$ para toda $x \in \Re$.

¿Esto implica que $f(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

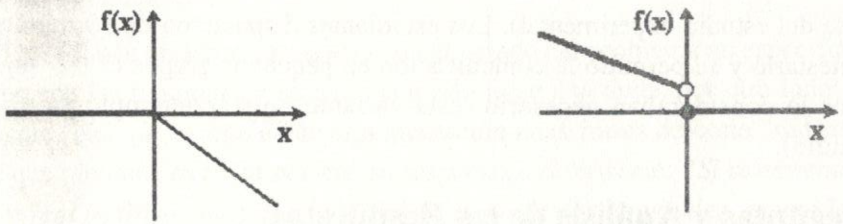
☐ SI ☐ NO

Justifique como en el caso anterior ya sea por medio de una argumentación o un ejemplo que niegue la pregunta.

Respuestas a la pregunta 21	Pregunta 21
No, y proporcionó un contraejemplo	1
No, y construyó un ejemplo en lugar de contraejemplo	3
No, y se abstuvo en la justificación	1
Abstención completa a la pregunta	16
Sí, e intentaron demostrar la proposición sin conseguirlo	8

Tabla 3

Con respecto al problema 21, vemos que hay mayor número de abstenciones. Posiblemente el concepto de la composición de funciones junto con la idea de demostración o de búsqueda de contraejemplo provocó mayor número de abstenciones. Entre los ocho profesores que intentaron proporcionar una demostración creyendo que el enunciado era verdadero, usaron argumentos como los siguientes: «$f(x) \neq 0,\ \forall x \in \Re \Leftrightarrow f(f(x)) \neq 0,\ \forall x \in \Re$ », *o «Supongamos que* $f(x) > 0$ *para algún x, entonces* $f(f(x)) > 0$ *para ese valor de x, en forma análoga en otro caso».* Con respecto a la primera argumentación, es interesante señalar que los profesores querían utilizar el método de demostración por reducción al absurdo y cometieron el error de no cambiar el cuantificador $\forall$ (para todo) por el $\exists$ (existe). En el segundo caso, al suponer que existe un elemento x_0 para el cual $f(x_0) \neq 0$, *suponiendo que para ese* x_0, $f(x_0) > 0$, *ello no implica que* $f(f(x_0)) > 0$. En este problema se requería nuevamente la construcción de un contraejemplo (ver Figura 5).



$f(f(x)) = 0,\ \forall x \in \Re$ $f(f(x)) = 0,\ \forall x \in \Re$

Figura 5

Los resultados con la primera población muestran que solamente un profesor pudo contestar correctamente a las tres preguntas.

Este estudio preliminar mostró dificultades entre los profesores encuestados en México en la búsqueda de contraejemplos o en las demostraciones por reducción al absurdo. Pensando que esta problemática es importante de profundizar, se continuó la experimentación utilizando exactamente los tres problemas antes analizados con profesores en formación de una Universidad Española.

Estudio experimental (segunda parte)

Muestra, tareas, métodos y procedimientos

La muestra en la segunda parte del estudio experimental fue de 43 estudiantes (entre 22-24 años) del último curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada (España), especialidad de Metodología, al finalizar sus estudios, los estudiantes adquieren el título de Matemático. La Licenciatura de Matemáticas en esta Universidad consta de cinco cursos anuales, tres comunes para todas las especialidades y dos para cada especialidad (Fundamental, Estadística e Investigación Operativa y Metodología). Dentro de la especialidad de Metodología (de la que forma parte la muestra seleccionada), los estudiantes cursan 3 asignaturas de corte didáctico-pedagógico. En el momento del desarrollo de la investigación, los estudiantes habían superado una de ellas y cursaban el primer trimestre de las otras dos. La principal salida laboral de estos estudiantes es la función docente.

La investigación es de corte cualitativo, el método de exploración fue a través de un cuestionario de tres preguntas matemáticas relacionadas con el concepto de función de variable real (exactamente las tres preguntas analizadas en la primera parte del estudio experimental). Los estudiantes dispusieron de 10 minutos para contestarlo y se permitió la comunicación en pequeños grupos (2 o 3 sujetos) si estos lo consideraban necesario (esta variante no se contempló en el primer estudio).

Preguntas y Análisis de las Respuestas

El cuestionario con las tres preguntas se entregó en una sola hoja. Las preguntas, como lo señalamos, son exactamente las mismas utilizadas en la primera parte del estudio.

El análisis de las respuestas se realiza en dos fases, primero se observarán las respuestas "SI" y "NO" dadas por todos los sujetos y en la segunda fase se observaron las respuestas dadas por estos dentro de los que respondieron "SI" y dentro

de los que respondieron "NO" para cada pregunta. Estas respuestas han sido agrupadas en categorías según la argumentación que utilizaban.

Primera pregunta (pregunta 19 en el estudio preliminar):

Sean f y g dos funciones de $\Re$ en $\Re$. Suponiendo que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$ para toda $x \in \Re$.

¿Esto implica que $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

☐ SI ☐ NO

Justifique su respuesta ya sea dando una argumentación a favor de la implicación o dar un ejemplo de dos funciones f y g que cumplan con la primera condición pero que f y g no sean funciones que se anulan en toda $x \in \Re$.

Justificación:

De los 43 sujetos encuestados, los 43 respondieron "SI" a esta pregunta, de los cuáles, 35 ofrecieron una justificación correcta, cuatro incorrecta y no argumentaron nada otros cuatro sujetos.

Entre los que proporcionaron una justificación correcta se destacan dos tipos de argumentaciones:

1) Si dos números reales positivos suman cero, entonces ambos son cero (18 respuestas).
2) Por reducción al absurdo (17 respuestas).

Un sujeto (No. 12) que realiza una argumentación del primer tipo anuncia a continuación: *"aunque tendría que analizar con cuidado funciones no continuas ya que no es hipótesis"*.

El estudiante no se percata que en el enunciado del problema no especifica de qué tipo son las funciones y muestra con esta frase una duda, por otro lado, otro estudiante (No. 13) recoge en su argumentación unas frases de corte "didáctico" con el que pretende explicar por qué su respuesta es coherente: *"Si se entiende un número real positivo como una longitud, la suma de dos longitudes, es una longitud mayor. Si es nula es porque las dos longitudes iniciales lo eran"*. Esta argumentación está claramente influenciada por la formación didáctica que está recibiendo el estudiante.

Dentro de los que dieron una argumentación errónea, parece que los estudiantes tienen en mente la primera categoría dada anteriormente, pero no lo especifican claramente. Así por ejemplo, el sujeto (No. 4) señala: *"las* *funciones van de $\Re$ en $\Re$, por lo que a no ser que $f(x)$ y $g(x)$ se anulen para todo $\Re$, el resultado no puede ser cierto"*, o como señala el siguiente sujeto (estudiante No. 10): "$f(x)$, $g(x) \in \Re$, $f(x)^2 + g(x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) = 0$".

También parece ser que tiene en mente la propiedad de los número reales, pero no argumentan nada, es como si les pareciera obvia la respuesta.

Segunda pregunta (pregunta 20 en el estudio preliminar):
Sean f y g dos funciones de $\Re$ en $\Re$. Suponiendo que $(f(x))(g(x)) = 0$ para cada $x \in \Re$.
¿Esto implica que $f(x) = 0$ o $g(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

☐ SI ☐ NO

Justifique como en el caso anterior ya sea por medio de una argumentación o un ejemplo que niegue la pregunta.
Justificación:

Segunda pregunta:
El total de 43 encuestas, 20 sujetos señalaron la opción correcta (NO) y 23 la incorrecta (SI).

Dentro de los 20 sujetos que señalaron la opción "NO", 16 ofrecieron un contraejemplo, dos erraron el contraejemplo, uno explicó cómo deberían ser las funciones y uno no justificó su respuesta.

Los contraejemplos más utilizados fueron básicamente funciones discontinuas de los siguientes tipos:

A) $f(x)=\begin{cases} a \text{ si } x\geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\geq 0 \\ a \text{ si } x<0 \end{cases}$

B) $f(x)=\begin{cases} a \text{ si } x\in R\setminus Q \\ 0 \text{ si } x\in Q \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\in R\setminus Q \\ a \text{ si } x\in Q \end{cases}$

Por otro lado, en seis encuestas se observa cómo cambiaron su respuesta del "SI" al "NO", seguramente porque algún compañero les comentó la respuesta correcta (recordemos que en este segundo estudio experimental se permitió la comunicación en pequeños grupos si ellos lo consideraban conveniente). Los dos sujetos que erraron el contraejemplo utilizaron la misma argumentación:

$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in R\setminus Q \\ 1 & \text{si } x\in R \end{cases}$; $g(x)=f(x)^{-1}$ se observa, en primer lugar, que no definen bien la función y, en segundo lugar, que no tienen claro el significado del inverso de una función, nótese que si la función estuviera definida para los racionales y los irracionales y el inverso significara que se intercambian los dominios (como parece ser que los sujetos tenían en mente) la respuesta sería correcta.

Entre las respuestas incorrectas (SI), 13 sujetos justificaron su respuesta a través de una propiedad de los número reales: "dos número reales cuyo producto sea nulo necesariamente, o ambos son nulos o alguno de ellos lo es", cuatro sujetos intentaron probarlo por reducción al absurdo, cuatro intentaron probarlo por otras vías y dos no justificaron sus respuestas.

De los que realizaron una demostración por reducción al absurdo, argumentaron lo siguiente: *"Supongamos que $f(x) \neq 0$ y que $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \Re$, entonces $f(x)g(x) \neq 0$ $\forall x \in \Re$, lo que contradice la hipótesis"*. Realizaron erróneamente la negación de la tesis. Otra justificación que usaron fue: *"supongamos que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \Re$, como $0 = f(x)g(x)$, entonces dividiendo la igualdad por $f(x)$ se obtiene que $0 = g(x)$ $\forall x \in \Re$, y de forma análoga suponiendo $g(x)$ distinto de cero"*. Nuevamente fallan en la negación de la tesis, permitiendo ese hecho el poder dividir la igualdad. Los otros cuatro intentos de justificación son mezcla de los dos anteriores, con algunas modificaciones.

Tercera pregunta (pregunta 21 en el estudio preliminar):
Sea f una función de $\Re$ en $\Re$. Si $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0$ para toda $x \in \Re$.
¿Esto implica que $f(x) = 0$ para toda $x \in \Re$?

☐ SI ☐ NO

Justifique como en el caso anterior ya sea por medio de una argumentación o un ejemplo que niegue la pregunta.
Justifique

De los 43 participantes, siete sujetos se abstuvieron de contestar la pregunta, así pues de los 36 estudiantes restantes, 27 señalaron la opción correcta (NO) y nueve la incorrecta (SI).

Dentro de las 27 respuestas, nueve ofrecieron un contraejemplo correcto, diez ofrecieron justificaciones incorrectas de los cuales siete erraron el contraejemplo y tres intentaron otras vías, ocho sujetos no justificaron su respuesta de forma matemática, de los cuales, tres argumentaron que por intuición y cinco no escribieron nada.

Entre los que ofrecieron un contraejemplo correcto, sólo uno de ellos escribió una función continua y el resto fue una función por partes no continua similar a:

$$f(x)=\begin{cases} a \text{ si } x\in R\setminus Q \\ 0 \text{ si } x\in Q \end{cases} \quad \text{, con } a \text{ racional.}$$

De los diez que erraron con su contraejemplo, un sujeto utilizó la siguiente función, no percatándose que realmente es la función idénticamente cero:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\in R_0^+ \\ |x|+x \text{ si } x\in R^- \end{cases}$$

Por otro lado, dos sujetos no aplican correctamente la composición de la función que proponen, por ejemplo, uno de ellos argumenta como justificación lo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x>1 \\ 0 \text{ si } x\leq 1 \end{cases}; \quad f(f(x))=\begin{cases} f(2)=0 \text{ si } x>1 \\ f(0)=0 \text{ si } x\leq 1 \end{cases}$$

y en las respuestas de otros tres estudiantes, se observa que aunque saben componer correctamente la función, se limitan a comprobar que para un punto se cumple que la composición es nula, extrapolando de ese razonamiento que esa función verifica lo pedido, por ejemplo, un estudiante señala que:

"$f(x)=x-2;\ f(4)=2\neq 0$ y $f(f(4))=f(2)=0$"

Es decir, estos sujetos no comprueban que se cumpla para toda x real.

Dentro de las nueve respuestas "SI", sólo tres intentaron justificar su posición, las justificaciones utilizadas fueron las siguientes:

"f actúa igual en sobre la x que sobre la f(x)"

"<u>R.A.</u> Sea $f(x)\neq 0$ para $x\in\Re$, entonces $f(f(x))\neq 0$ (ya que $f(algo)\neq 0$)"

"$f(x)\neq 0 \Rightarrow (f(f(x))\neq 0$

$x\neq 0 \quad f(x)\neq 0$

Un sujeto dijo que por intuición y cinco no justificaron su respuesta.

Conclusiones

Desde un punto de vista histórico, hemos mostrado que en la época de oro de los griegos la demostración por reducción al absurdo ya era utilizada en forma sistemática. También hemos mostrado que el uso de contra ejemplos para demostrar la *no veracidad universal de una proposición* tuvo un surgimiento posterior, indicando que esta idea tomó mucho más tiempo en formar parte de las herramientas usuales de los matemáticos. ¿Ello nos indica que la comunidad matemática tuvo que sobrepasar un obstáculo epistemológico? ¿Ello nos puede proporcionar explicaciones del por qué las preguntas planteadas fueron difíciles para ambas poblaciones del estudio experimental?

Los resultados de las experimentaciones realizadas muestran que la demostración directa ha sido mejor asimilada por ambas poblaciones.

En las preguntas donde el enunciado es falso, la tarea relativa a la construcción de contraejemplos aparece como una tarea compleja. La manipulación de los cuantificadores y las reglas de negación no pareció ser simple para las dos poblaciones. Los estudiantes españoles con formación en matemáticas tuvieron menos problemas que los profesores mexicanos de enseñanza media con formación en su mayoría de ingeniería.

Los resultados de los dos experimentos nos muestran en general que es importante profundizar en la problemática planteada. Esta primera aproximación relativa a la demostración en matemáticas y el uso de contraejemplos muestran que la problemática es importante estudiarla desde una perspectiva más amplia.

Es conveniente diseñar un cuestionario más completo exclusivamente enfocado a analizar esta problemática. Ello nos permitirá vincular el desarrollo histórico de la demostración en matemáticas con los problemas de aprendizaje.

Referencias

Bottazzini U. (1986). *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* Springer-Verlag Editors.

Cauchy A. L. (1994). Curso de Análisis. Colección MATHEMA, Traducción del original de 1821 y 1823. México.

Commission INTER-IREM (1989). La Demonstration Mathématique dans l'Histoire. IREM de Besancon et IREM de Lyon, France.

Carroll L. (1961). *The Unknow Lewis Carrol. Eight Major Works and Many Minor. Dover Publications,* Inc., New York.

Fetisov A. (1954). *La Demostración en Geometría.* Editorial Limusa, México.

Hitt F. (1988). The Construction of Functions, Contradiction and Proof. In Vergnaud G. (Ed.) Proceedings of the Psychology of Mathematics Education XIII, Paris, France.

Hitt F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Vol. 16, No. 4, pp. 10-20.

Hitt F. (1997). El concepto de límite y la importancia del infinito potencial y actual. *Memorias del VI Simposio Internacional en Educación Matemática* (A. Carlón, Editora). Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 31-38.

Hitt F. (2000). El Concepto de Infinito: Obstáculo en el Aprendizaje de Límite y Continuidad de Funciones. Documento interno DME-Cinvestav-IPN, México.

Robinson A. (1966). *Non-Standard Analysis.* (Capítulo X: Concerning the History of the Calculus, pp. 260-282). North Holland Publishing Company, Amsterdam.

Solow D. (1987). Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas. Editorial Limusa, México.

Szabò Á. (1960). The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica.* Vol. XXVII, No. I, pp. 27-49, No. II, pp. 113-139.

Concepciones de profesores en formación acerca de la validación del conocimiento matemático con el uso de tecnología

Jose Luis Lupiáñez Gómez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados[1], México;
Universidad de Granada, España
jllupianez@yahoo.com

Resumen

Las discusiones que se plantean al tratar la demostración en matemáticas ocasionan frecuentemente posturas contrapuestas en relación a lo acertado o no de su empleo: ¿Cómo podrían llevarse a cabo en el aula? ¿Cómo discernir qué pruebas enriquecen la formación académica de los estudiantes, y cuáles constituyen un mero ejercicio memorístico? Si además se considera la aportación que las nuevas tecnologías realizan a la enseñanza, es necesario una reflexión acerca de cómo se ve afectada, si es que se altera, la forma de validar el conocimiento matemático en el aula, además de establecer cuál es el rigor y la formalidad de las justificaciones que se desarrollan con estos instrumentos. En este documento se realizan varias consideraciones sobre estas ideas, y se describe una experiencia realizada con profesores de Matemáticas de Secundaria en formación, en la que se trabajó el razonamiento matemático empleando la calculadora TI-92.

Introducción

Se puede constatar una reciente preocupación por incluir en los distintos programas educativos actuales una parte específica relacionada con la demostración; por ejemplo, en los Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft (NCTM, 1998), uno de los estándares propuestos es el de "Razonamiento y Prueba", en el que explícitamente se señala (pág. 80): *"Los programas de instrucción matemática deberían centrarse en el aprendizaje de razonamientos y la construcción de pruebas como parte de la comprensión matemática de forma que todos los estudiantes:*

[1] Trabajo apoyado por el Proyecto ALFA de la Comunidad Europea, dentro de la red FIEMAI.