



Cuadriláteros con el *software* 3D NeoTrie VR de realidad virtual inmersiva

Carmen Santos Morales

CEIP Andalucía. Santa M.^a de Águila (Almería)

Antonio Codina Sánchez

Isabel María Romero Albaladejo

Universidad de Almería

Los cuadriláteros generan dificultades en los escolares de primaria. Presentamos un experimento de enseñanza donde, utilizando NeoTrie VR, un *software* de geometría dinámica 3D de realidad virtual inmersiva, mostramos cómo los estudiantes evolucionan en el razonamiento espacial y la conceptualización de los cuadriláteros a través de la comparación-manipulación mental y física de objetos 3D virtuales.

PALABRAS CLAVE

- GEOMETRÍA DINÁMICA
- REALIDAD VIRTUAL INMERSIVA
- CUADRILÁTEROS
- NEOTRIE VR

La legislación educativa incide en el aprendizaje de las propiedades de figuras geométricas a través de la exploración y la elaboración de conjeturas mediante materiales manipulables, lúdicos y herramientas digitales, pero la geometría se aborda casi exclusivamente a través del aprendizaje memorístico de nociones básicas y la exploración mecánica de las propiedades de las figuras, normalmente de forma inconexa y



Ryutaro Tsukata (Pexels)

descontextualizada, lo que lleva a la falta de significatividad de los supuestos aprendizajes (Romero y Cañadas, 2015). Esto ocurre a pesar de que también la investigación enfatiza la necesidad de fomentar el razonamiento espacial, la geometría de las transformaciones y la construcción activa de significados, incluida la composición-descomposición de figuras, la orientación espacial y la comparación-manipulación mental de figuras 2D y 3D (Sinclair y Bruce, 2015).

En este marco, nos planteamos si la utilización de *software* de geometría dinámica 3D de realidad virtual inmersiva (SGD-3D RVI) estimulará en estudiantes de primaria procesos de un nivel superior a aquellos que se ponen en juego con metodologías tradicionales y técnicas 2D para trabajar el tema de los cuadriláteros. Para ello utilizaremos el *software* NeoTrie VR (www2.ual.es/neotrie/) en un experimento de

■
Es necesario fomentar el razonamiento espacial, la geometría de las transformaciones y la construcción activa de significado

enseñanza, pues, según recientes estudios, NeoTrie VR aborda tareas difícilmente posibles con materiales tradicionales, a la vez que potencia en los estudiantes el aprendizaje de la geometría de las transformaciones y el razonamiento espacial (Rodríguez, Romero y Codina, 2021; Codina et al., 2022).

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

El experimento de enseñanza, desarrollado como una actividad extraescolar de cinco lecciones distribuidas en diez sesiones, está diseñado en colaboración con maestras de matemáticas, especialistas en didáctica de la matemática y los desarrolladores de NeoTrie VR; se elaboró un pretest, un postest y se consensuó el trabajo en el aula de los contenidos de geometría para los cursos de 4.º, 5.º y 6.º de primaria de un colegio público de Andalucía. Participan 100 estudiantes (27 de 4.º, 25 de 5.º y 48 de 6.º curso), de entre ellos, 15 trabajan voluntariamente en las sesiones con NeoTrie VR (2 de 4.º, 6 de 5.º y 7 de 6.º curso) distribuidos en grupos.

Las lecciones priman la construcción activa de conceptos a través de la observación, manipulación, el análisis de las situaciones y el empleo de lenguaje geométri-

co. Cada sesión presenta cuatro momentos:

- 1 Exposición de la situación con ejemplos y contraejemplos.
- 2 Fase guiada con descripción verbal mediante preguntas que se responden y discuten grupalmente.
- 3 Fase experimental.
- 4 Reflexión final.

El diseño propuesto solicitaba argumentar las respuestas y, dado que solo un componente del grupo podía llevar las gafas de realidad virtual, inducía a los estudiantes a emplear vocabulario geométrico para hacer efectiva la comunicación y el trabajo colaborativo centrándose en el diálogo, la argumentación y la búsqueda del consenso entre compañeros durante la resolución de las situaciones planteadas. A continuación, describimos brevemente las cinco lecciones:

Primera lección. Iniciación a NeoTrie VR

Diseñada para conocer el *software*: cómo moverse, menú del dorso (imagen 1), crear paralelas, medir ángulos, distancias, etc.

Segunda lección. Paralelismo y perpendicularidad

Se identifican y crean segmentos, planos paralelos y perpendiculares, y se analizan sus posiciones relativas y cómo estas se modifi-



Imagen 1. Menú de acciones con manos virtuales

can al realizar «arrastres» (imagen 2). Finalmente, se identifican aristas, caras paralelas y perpendiculares del cubo.

Tercera lección. Hacia la noción de cuadrilátero

Se aborda a través de la identificación de estos como parte de figuras 3D, de las características diferenciadoras (criterios) y de las relaciones entre paralelismo y ángulos rectos en las figuras. Después, utilizan un sistema de proyección ortogonal para identificar y visualizar dinámicamente diferentes cuadriláteros en función de la posición de las figuras. Finalmente, a modo de síntesis, identifican en las caras de los prismas diferentes cuadriláteros según su paralelismo y ángulos (imagen 3).

Cuarta lección. Cambio de dimensiones

Los estudiantes, a través de la extrusión dinámica ($1D \rightarrow 2D \rightarrow 3D$),

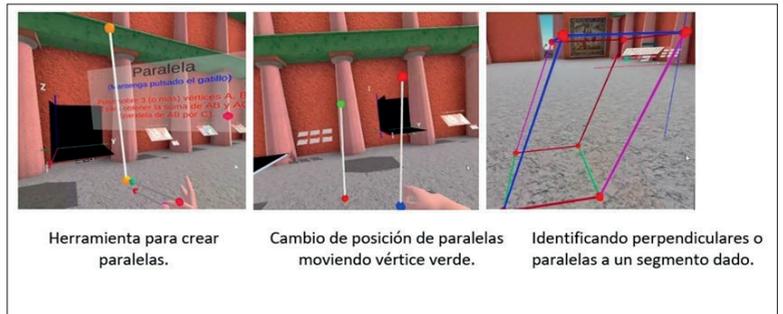


Imagen 2. Trabajo con las nociones de paralelismo y perpendicularidad en 3D

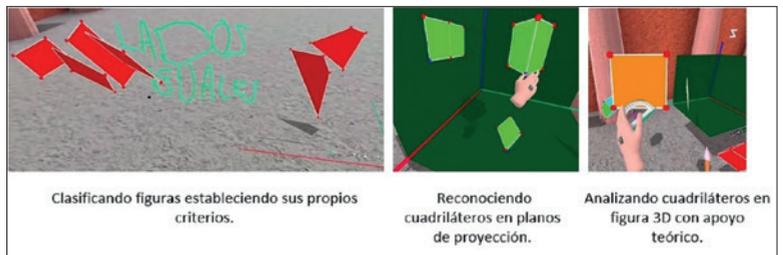


Imagen 3. Clasificando y reconociendo



Imagen 4. Modificación dinámica de 2D a 2D y extrusión de figuras 2D a 3D

obtienen: de un punto un segmento; de este un paralelogramo, y de este un prisma (imagen 4).

Tras ello, por «aplastamiento» continuo y rígido ($3D \rightarrow 2D$) transforman poliedros en los cua-

driláteros solicitados, para lo que deben seleccionar tanto el poliedro como la cara a partir de la cual aplastar. Durante ambos procesos, deben verbalizar, describir y analizar el proceso y las figuras (imagen 5).

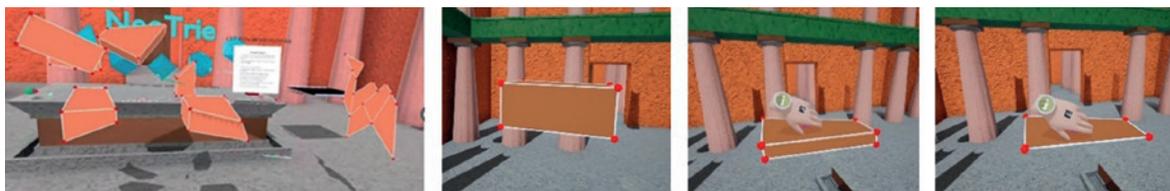


Imagen 5. Transformación de 3D a 2D

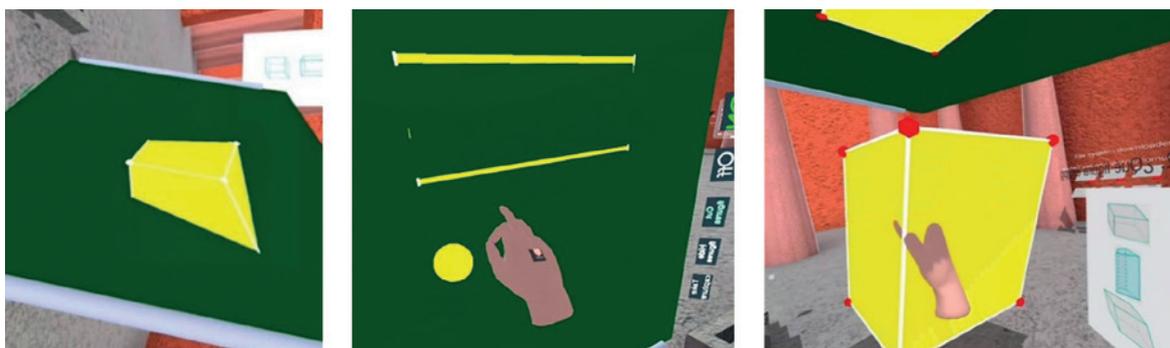


Imagen 6. Cortes de un prisma no visible y visible con el escáner

Quinta lección. Visualizando figuras ocultas

Se trabaja la conexión entre figura y su representación mental. De un listado de figuras, se pide descubrir cuál está oculta por el escáner. Los estudiantes pueden desplazar el escáner para obtener diferentes «cortes» de la figura. Primero, mueven el escáner horizontal y verticalmente, tras ello se pide una respuesta. Después, pueden mover libremente el escáner y obtener cortes oblicuos, se pregunta si mantienen la respuesta. Finalmente verifican la respuesta visualizando los cortes con la figura visible (imagen 6).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Respecto de las sesiones, tal y como se refleja en la imagen 7, detectamos que la verbalización de procesos, construcciones 3D y explicaciones entre los estudiantes conlleva un aumento de su capacidad argumentativa y del uso de lenguaje geométrico. Además, el empleo no memorístico de vocabulario geométrico provoca la necesidad de explicar los conceptos, facilitando su asimilación y la necesidad de verificación de las conjeturas, que a su vez fomenta el desarrollo de aptitudes de autorregulación de su aprendizaje.

También se detecta un cambio de actitud durante las sesiones. En la primera, hablaban bajo, sin querer responder, mientras que, en la última, intervenían asiduamente, además de admitir de manera natural que el error es una oportunidad de aprendizaje, lo que lleva a potenciar su confianza y a creer en sus capacidades de aprendizaje (imagen 8). En este proceso, el docente asume un papel vital en la regulación de la cantidad y duración de las intervenciones, ofreciendo oportunidades a todos para exponer sus ideas, solicitando constantemente el consenso en las respuestas.



En busca de cuadriláteros (sesión 3)

Pinta las caras con forma de cuadrilátero de las figuras. Azul: con lados paralelos dos a dos, 4 lados iguales y 4 ángulos rectos. Blanco: con lados paralelos dos a dos, lados iguales 2 a 2 y 4 ángulos rectos...

Clases de cuadriláteros

Paralelogramos			
Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
Trapezios		Trapezoides	
Trapezoides	Deltoides	Deltoides	Deltoides

Tabla de apoyo



Figura a analizar

[1] Alumno 1: Esta cara tiene todos sus lados iguales y ángulos agudos y obtusos.

[2] Alumno 3: ¿Estás segura de que todos los lados son iguales?

[3] Alumno 2: Tiene lados iguales 2 a 2. Según como se mire parece una figura u otra.

[4] Alumno 1: Miden todos igual (*lo comprueba con el metro porque sigue pensando que son los 4 lados iguales*).

[5] Docente-investigadora: ¿Qué figura es?

[6] Alumno 1: Es un rombo (*consulta con la tabla visual*).

[7] Alumno 2: Es un rombo.

[8] Alumno 3: Es un cuadrado.

[9] Docente-investigadora: ¿qué diferencia hay entre un cuadrado y un rombo?

[10] Alumno 1 y 2: tiene todos sus ángulos rectos y los cuatro lados iguales (*señalando lados 2 a 2*)

[11] Alumno 3: Tengo la cabeza ... (*no consigue verlo, hace aspavientos*)

[12] Docente-investigadora: ¿Cómo es un rombo? (*pregunta al alumno 3*)

[13] Alumno 3: Tiene ángulos agudos y obtusos, y el cuadrado, rectos (*se percata de que es un rombo y no un cuadrado*)

Imagen 7. Ejemplo de empleo de lenguaje geométrico y autorregulación

A nivel cognitivo, mejoran sus habilidades y el razonamiento espacial. La variedad de formas de manipulación de figuras ha graduado la dificultad entre el tránsito de las imágenes mentales a las representaciones externas. En la imagen 8, los estudiantes describen oralmente qué visualizan y tratan de consensuar sus decisiones respecto del significado

de los cortes ofrecidos por el escáner, la imagen mental del objeto y la representación externa producida (sección del objeto). Además, la riqueza de representaciones ha permitido trabajar con profundidad la reflexión argumentativa sobre la visualización de los cortes.

Por otro lado, en el pretest los estudiantes muestran habilidades muy

limitadas respecto a la visualización, descripción y clasificación de cuadriláteros, el uso de terminología geométrica era escaso e impreciso y, aunque disponían de ciertos conocimientos acerca de la perpendicularidad y paralelismo 2D, no fueron capaces de identificar más de dos características correctas de los cuadriláteros. Las respuestas reflejan, incluyendo a los estudiantes que participaron en las sesiones con NeoTrie VR, que todos tenían preconcepciones erróneas, lo que refleja un nivel bajo de dominio de los cuadriláteros. A este respecto, por nivel alto entendemos cuando son capaces de clasificar y argumentar; por nivel medio, cuando clasifican o argumentan con errores, y nivel bajo cuando no son capaces de clasificar ni argumentar (imágenes 9, 10 y 11).

Respecto del postest, de los 85 estudiantes que solo habían recibido una enseñanza tradicional, 69 mantienen un nivel bajo de dominio, 14 medio y dos alto. Es decir, los estudiantes o no son capaces o tienen dificultades para identificar y argumentar: a) por qué dos líneas son paralelas o perpendiculares, b) reconocer si una figura es un paralelogramo, cuadrado, etc., c) agrupar cuadriláteros basados en características-criterios comunes. Ejemplos de argumentos dados son: «nunca forman 90 grados»,

¿Qué figura es? (Lección 5)

Mueve con atención el escáner y observa, ¿puedes identificar cuál es la figura que está oculta?

Ficha de opciones

Escáner con prisma oculto (esfera amarilla) y cohorte de este

Prisma visible y su cohorte. Opción correcta C

[1] Alumno 6: Mira la hoja. Es el A o el C.

[2] Alumno 5: Yo creo que no. Es un rectángulo. Cuando mueves la figura es un rectángulo.

[3] Alumno 4: Si te das cuenta, al principio, empieza por arriba y va bajando poco a poco. Y eso es como que está inclinado.

[4] Alumno 5: Síii, no me había dado cuenta de eso.

[5] Alumno 5: Es la figura A.

[6] Alumno 4: Yo creo que sigue siendo la C. Primero se ve un cuadrado y luego se va agrandando.

[7] Alumno 6: Hay 8 vértices.

[8] Alumno 5: Aahhh, no no. Es el C. Si miras los vértices ves que los lados están inclinados.

chocan, no se cruzan, están en frente unos a otros» y de hacer clasificaciones argumentadas con pequeños errores o realizar descripciones incompletas.

Del análisis de las 5 lecciones se extrae que en general todos los estudiantes evolucionan positivamente respecto de los conocimientos y capacidades, especialmente en la utilización de terminología geométrica. Nótese cómo 6 estudiantes evolucionan subiendo de nivel y, de estos, 3 lo hacen de un nivel bajo a alto. Aun así, 6 estudiantes mantienen su nivel bajo (imagen 12, primera gráfica).

En cuanto a la visualización de secciones, mientras que en el pretest solo los dos con nivel alto responden correctamente y argumentan el tipo de cuadrilátero obtenido, en las tareas con NeoTrie VR asociadas, dos de nivel alto y 3 de nivel medio se mantienen, seis evolucionan hasta el nivel alto, tres se mantienen en nivel bajo e incluso un estudiante baja de nivel (imagen 12, segunda gráfica).

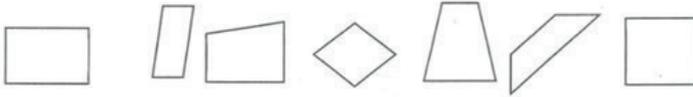
En cambio, todos los estudiantes evolucionan positivamente en el proceso de visualización de transformaciones dinámicas consiguiendo transformar figuras 2D a 3D y viceversa. Durante el proceso, los estudiantes verbalizaban y analizaban grupalmente las dife-

«sus lados son iguales o diferentes», «tienen muchos ángulos», «los romboides son más aplastados que los rombos», «sus lados son largos/alargados», etc.

Por su parte, los 15 estudiantes que realizaron las sesiones con NeoTrie VR fueron capaces de explicar por qué dos líneas son paralelas: «si los prolongas no se



1. Observa estos cuadriláteros y piensa qué propiedades o características tienen en común. Fíjate en los ángulos y los lados. Luego, escribe una lista con todas las propiedades o características que has pensado.



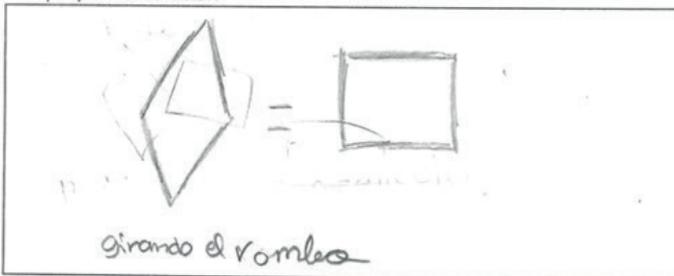
- Todos tienen 4 lados
- Todos tienen 4 vértices
- Las medidas de los ángulos son 60, 90 u 180
-

Ítem de conocimientos sobre cuadriláteros. Ejemplo de la respuesta más detallada y extensa del pretest.

2. Contesta a las siguientes preguntas	
¿Son rectángulos todas las formas siguientes? ¿Por qué?	¿Son trapecios todas las formas siguientes? ¿Por qué?
<p>Respuesta</p> <p>No. Porque el número 1 tiene todos los lados iguales y un rectángulo es 2 igual enfrente.</p>	<p>Respuesta</p> <p>Si. Porque todos tienen 2 lados iguales</p>

Ítem de capacidad de clasificación y uso de vocabulario geométrico. Ejemplo de una de las respuestas que muestra la confusión entre igualdad y paralelismo de lados, error muy común.

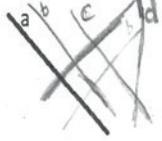
4. Para transformar un rombo en un cuadrado, ¿qué propiedades cambiarías? Dibuja las figuras para que te sirvan de ayuda y luego escribe lo que puedes cambiar.



Ítem de argumentación sobre las diferencias entre rombo y cuadrado. Ejemplo de una de las respuestas que muestra cómo se fijan en un atributo irrelevante (la posición) y no en las características de la figura.

Imagen 9. Ejemplos de respuesta a ítems sobre contenidos 2D del pretest

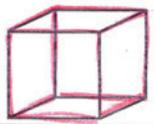
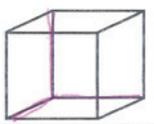
1. Observa la recta a y dibuja otras tres rectas, b, c y d, de forma que:



- a y b sean paralelas
- a y c sean secantes perpendiculares
- a y d sean secantes no perpendiculares

¡No olvidés escribir la letra de cada recta que dibujes!

2. En los siguientes cubos...

Repasa solo las aristas paralelas con el mismo color	Repasa solo las aristas perpendiculares con el mismo color
	

Ítem sobre paralelismo y perpendicularidad

Ítem sobre paralelismo y perpendicularidad 3D

Imagen 10. Ejemplos de ítems sobre paralelismo y perpendicularidad en el pretest

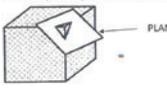
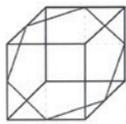
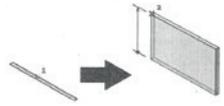
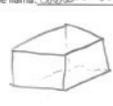
Estudiante de 5° con nivel avanzado	Estudiante de 6° con nivel avanzado
<p>3. Ahora piensa y describe el corte que se hace en la siguiente figura.</p>  <p>¿Cuál es la base del cuerpo geométrico pequeño que se consigue al cortar con el plano? <u>una triángulo</u></p> <p>¿Por qué lo sabes? <u>Porque tiene tres vértices.</u></p> <p>¿Cómo se llama ese cuerpo geométrico? <u>cuadrado</u></p> <p>Dibújalo.</p> 	<p>4. La figura muestra una sección hexagonal de un cubo.</p>  <p>Una sección es el corte de la figura, como si pudieras cortar un dado por los puntos que te indica el dibujo.</p> <p>Escribe si las siguientes oraciones son verdaderas (V) o falsas (F).</p> <p><input type="checkbox"/> Cada cara del cubo contiene un solo lado del hexágono. F</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> La figura es imposible. En realidad, se trata de una figura falsa. ✓</p> <p><input type="checkbox"/> El hexágono es regular. F</p> <p><input type="checkbox"/> Las dos partes en que se divide el cubo son idénticas. ✓</p>
<p>5. Observa cómo se extruye un segmento [es el rasero que deja el segmento al moverlo hacia arriba, obteniendo un rectángulo].</p>  <p>Si repetimos ahora la extrusión, pero con el rectángulo entero, se transformará en otra figura. ¿Sabrías imaginar que figura consigues si extruyes (arrastras) el rectángulo hacia la derecha siguiendo la flecha? Dibuja la nueva figura y escribe cómo se llama</p> <p>Se llama: <u>Cuadrilátero</u></p> 	<p>Si repetimos ahora la extrusión, pero con el rectángulo entero, se transformará en otra figura. ¿Sabrías imaginar que figura consigues si extruyes (arrastras) el rectángulo hacia la derecha siguiendo la flecha? Dibuja la nueva figura y escribe cómo se llama</p> <p>Se llama: <u>Plano</u></p> 

Imagen 11. Ejemplos de respuestas a los ítems de secciones y extrusiones en el pretest

rencias entre cuadriláteros a través de la observación, manipulación y comprobación de características notables de las figuras, negociando significados en torno al reconocimiento y visualización de los cuadriláteros a través de la extrusión o el aplastamiento (imagen 12, tercera gráfica). Un ejemplo de esta evolución se puede observar en la imagen 13.

Finalmente, hemos observado que el trabajo con NeoTrie VR reduce las dificultades asociadas por la perspectiva en la visualización, pues ahora los estudiantes pueden verificar hipótesis observando las figuras desde cualquier posición e incluso introduciéndose en estas. Aun así, consideramos que es un problema de investigación abierto. Por otro lado, los buenos resultados detectados en las sesiones no han sido reflejados en la misma medida en el postest. Una explicación inicial es que durante las sesiones los estudiantes aumentaron su autoconfianza en sus conocimientos en formato 3D y mediante expresión oral, y posteriormente no fueron capaces de trasladarlos al papel en el postest.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos puesto de manifiesto cómo NeoTrie VR ha favorecido la puesta en práctica

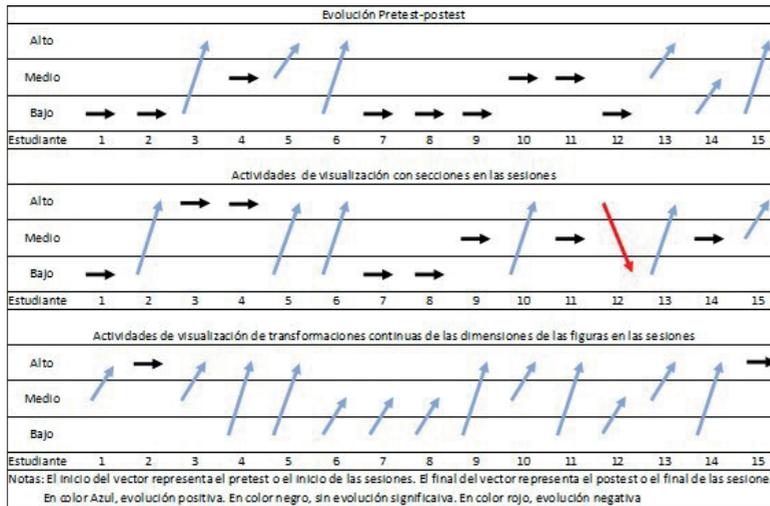


Imagen 12. Evolución de los estudiantes que realizaron las sesiones con NeoTrie

por los estudiantes de tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica:

1 Visualización, cuando se conectan las representaciones de objetos y figuras tangibles con el estatus de objetos

geométricos con los que operar.

2 Construcción, determinado por los instrumentos, en el que los objetos geométricos pasan de ser artefactos cuyo manejo hay que simplemente dominar

a herramientas para construir conocimiento.

3 Discursivo, donde, a través de las argumentaciones, pruebas y uso de lenguaje específico, se dota a los objetos, definiciones y procedimientos geométricos de propiedades y características significativas.

En consecuencia, nuestros resultados sugieren que la inmersión virtual en 3D tiene un impacto positivo en el desarrollo de un trabajo geométrico completo y rico en la conceptualización de cuadriláteros. ◀

Nota

* Este trabajo ha sido financiado por los proyectos Cod. PIV-055/21, Consejería de Educación, y UAL2020-SEJ-B2086, FEDER-Junta de Andalucía.

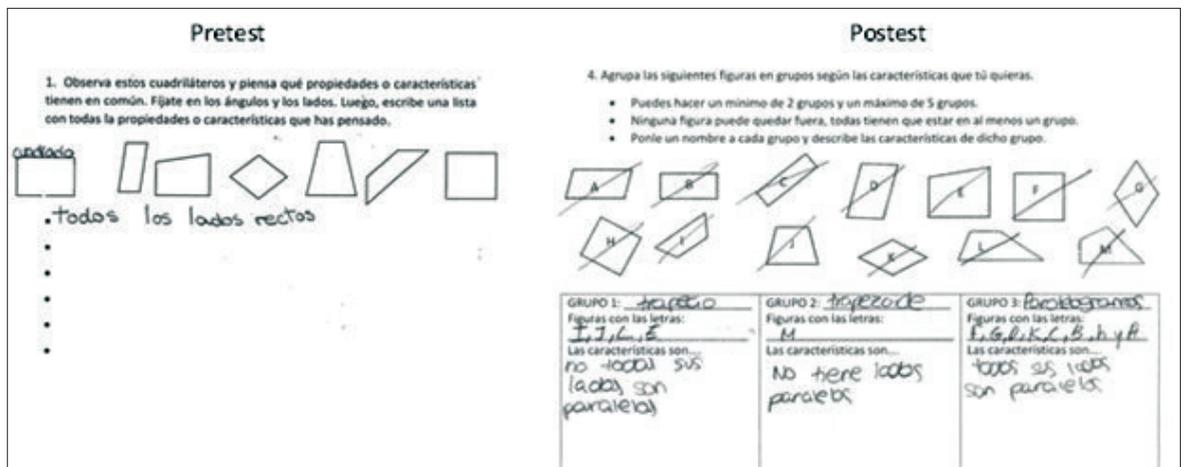


Imagen 13. Evolución del estudiante 6 en ítems asociados a la clasificación de cuadriláteros

Referencias bibliográficas

- Codina, A. et al. (2022). Poliedros con el software de realidad virtual inmersiva Neotrie VR, una experiencia con maestros en formación. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 25(3), 1-14. <https://bit.ly/3J9W6ks>
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 511-517. <https://bit.ly/3NqHJe8>
- Rodríguez, J. L., Romero, I. M. y Codina, A. (2021). The Influence of NeoTrie

VR's Immersive Virtual Reality on the Teaching and Learning of Geometry. *Mathematics*, (9), artículo 2411. <https://doi.org/10.3390/math9192411>

- Romero, I. M. y Cañadas, M. C. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 253-279). Pirámide.
- Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 319-329. <https://bit.ly/3No5W4T>

Direcciones de contacto

Carmen Santos Morales

CEIP Andalucía. Santa M.^a de Águila (Almería)
cmr373@inlumine.ual.es

Antonio Codina Sánchez

Isabel María Romero Albaladejo
Universidad de Almería
acodina@ual.es
imromero@ual.es

Este artículo fue recibido por UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en febrero de 2023 y aceptado en mayo de 2023 para su publicación.

¡SUSCRÍBETE A LA REVISTA UNO!

Modalidades:

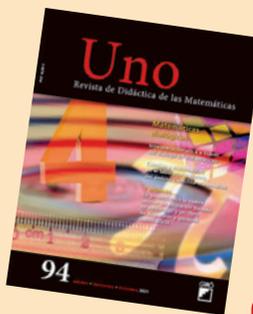
- Formato papel + digital
- Formato digital

La suscripción anual incluye:

4 revistas + acceso digital a todos los artículos publicados en la revista

La suscripción para centros incluye:

5 accesos para profesorado del centro



4 vales descuento de 6 €

por compras directas a la editorial



Descuentos en los cursos de Formación de Graó (Reconocidos/Bonificables)



Pide más información en



revista@grao.com,

o llama al



934 080 464