DEPARTAMENTO DE DIDACTICA
DE LA MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

PROYECTO FIEMAL - PROGRAMA ALFA

Elementos para una Reflexión acerca del Uso de la Computadora en el Aprendizaje de Estudiantes de Bachillerato vía Resolución de Problemas

MEMORIA DE TERCER CICLO

Antonio Codina Sánchez

GRANADA, 2000

Esta Inve
FIEMAL (
América L

Antonio Codina Sánchez
Depósito Legal GR-1553 /2000
ISBN 84-699-3812-6
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Esta Investigación se ha realizado dentro del Proyecto ALFA, Red FIEMAL (Formación de Investigadores en Educación Matemática para América Latina) de la Unión Europea (Contrato n° ALR/B73011/94.04-7.0124.9).

Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Antonio Rivera Figueroa, quien me ha guiado y ofrecido un mundo de posibilidades que me han enriquecido como estudiante y como persona, gracias.

Al Dr. Luz Manuel Santos Trigo por sus contribuciones, continuas sugerencias y muestras de apoyo para la elaboración de esta Tesis.

Al Dr. Arturo Hernández Ramírez por sus comentarios y por los momentos agradables de charla que hemos compartido.

Al Dr. Luis Rico Romero quien me ofreció su confianza y apoyo.

A mis amigos mexicanos, por la compañía tan agradable y por las ayudas en los momentos débiles que han sido llevaderos gracias a vosotros. Os llevaré siempre en el corazón.

A Jose Luis Lupiáñez Gómez, por todo el apoyo que me has brindado en mí estancia en México y en la elaboración de esta Tesis.

A mi familia, por la confianza depositada en mí y por todo el amor que transmiten desde la distancia.

A Ángeles, tuyos son mis pensamientos y tu apoyo siempre me ha hecho avanzar ante las adversidades.

A Ángeles

Todo es, nada es,

entonces sé.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Planteamiento del Problema

1.1 Introducción

El ser humano vive inmerso en un mundo que avanza rápidamente debido en gran parte al avance tecnológico. La sociedad demanda de las instituciones educativas sujetos con capacidad para integrarse plenamente en la sociedad actual y al mundo laboral y, las nuevas propuestas educativas y la formación del docente deben adaptarse a dichas demandas.

En la actualidad, las nuevas propuestas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas están basadas en una práctica docente vía resolución de problemas (NCTM, 2000; MEC, 1991; Rivera & Santos, 2000), entendida ésta bajo la premisa de formar sujetos capaces de participar activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas escolares, con una actitud crítica en su trabajo, disponiendo de heurísticas para la resolución de problemas en diferentes contextos y capaces de trabajar en grupo.

Por otro lado, debido a que las computadoras están siendo incorporadas como herramientas laborales habituales; las nuevas propuestas educativas incorporan los nuevos medios tecnológicos, y en particular el uso de la computadora, como un instrumento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000; MEC, 1991; Rivera & Santos, 2000).

Nuestro interés es realizar una exploración de una enseñanza de las matemáticas vía resolución de problemas con el uso de la computadora centrándonos en cómo los alumnos interactúan con la computadora a la hora de resolver problemas. Por ello, nuestro **objetivo** fundamental en esta investigación es el siguiente:

Cómo son entendidos los términos problema, resolución y solución en Educación Matemática y analizar la resolución de problemas con el uso de la computadora como herramienta de mediación y observar las habilidades, toma de decisiones y comportamiento de alumnos a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas con apoyo de esta tecnología.

Para ello realizamos una revisión teórica acerca de los términos y un estudio de carácter exploratorio con estudiantes de primer y segundo curso de bachillerato.

1.2 Pertinencia de la Investigación

El Grupo "*Cognition and Technology at Vanderbilt*" (CTGV, 1996) realizó en el año 1996 un documento en el que reflexionaban sobre dos preguntas base: ¿Qué sabemos de los efectos de las tecnologías sobre el aprendizaje y las prácticas docentes? ¿Cuál es el futuro de la investigación sobre tecnologías y cómo podrían diferir de lo hecho en el pasado?

En su análisis, realizado desde la perspectiva de un marco constructivista, afirman que para responder a esas preguntas se requiere de la exploración simultánea de al menos tres campos de acción: a) la tecnología, b) las teorías de aprendizaje y c) la práctica docente, pensándose éstas sobre tres situaciones de instrucción: 1) el laboratorio de Matemáticas, 2) el grupo-clase y 3) la comunidad educativa (red de instituciones).

Para este trabajo hemos adoptado el esquema organizativo con ciertas restricciones. En cierto sentido buscamos acercarnos a responder las preguntas anteriores ya que nuestras componentes son "subclases" de los niveles de análisis de ese estudio, nosotros consideraremos: a) las nuevas tecnologías, b) estudiantes de bachillerato, y c) la resolución de problemas.

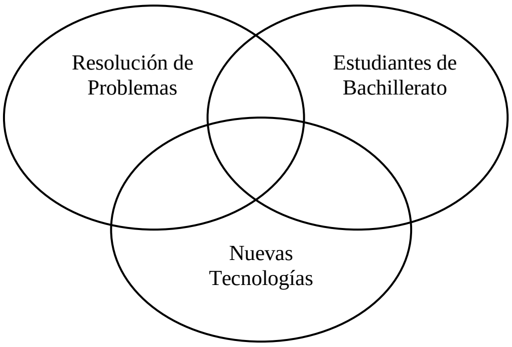


Figura 1.1: Niveles de análisis.

Las Nuevas Tecnologías, la Resolución de Problemas

En 1993, J. Fey realiza un resumen de cómo ha ido evolucionando el número de investigaciones con nuevas tecnologías en el campo de la Educación Matemática, destacando que las futuras investigaciones deberían, entre otros temas, centrarse en describir y documentar los efectos de éstas, los atributos de los estudiantes y la implementación en el aula.

Preocupados por la problemática señalada en numerosos artículos de que los alumnos gastan tiempo usando las computadoras y, en general, las nuevas tecnologías, para llevar a cabo tareas fáciles que tienen pocas consecuencias significativas para su aprendizaje (Callahan, 1999; CTGV, 1996; Fey, 1993; NCTM, 1998), Santos (1999) señala la necesidad de continuar explorando las formas en las que estas tecnologías pueden ayudar a los estudiantes. Así, nosotros nos planteamos preguntas acerca de cómo aprovechar el recurso de la computadora para que el alumno, a través de la resolución de problemas, realice un uso significativo de la misma y cómo afecta ésta al trabajo de los estudiantes.

Por otro lado, en los recientes cambios curriculares la instrucción matemática es entendida vía la resolución de problemas (NCTM, 1989; NCTM, 2000; MEC, 1991). Se han escrito numerosos artículos acerca de esta nueva propuesta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pero un hecho innegable es que la resolución de problemas se encuentra en un estado incipiente en el ámbito de implementación en el aula. En nuestra revisión bibliográfica, a pesar de que hemos encontrado bastantes referencias a estudios relacionados con la resolución de problemas, se observa que la gran mayoría de ellos se han centrado en analizar la conducta de sujetos resolviendo problemas y pocos son los que reflexionan también acerca del uso de nuevas tecnologías en la resolución de problemas. Por ello nos preguntamos acerca de la resolución de problemas por parte de los estudiantes con el apoyo de la computadora como herramienta mediadora. Para nuestro trabajo utilizaremos el software de geometría dinámica *Cabri-Géomètre*.

1.3 Preguntas de Investigación

En este trabajo pretendemos dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo son entendidos los términos problema, resolución y solución en la investigación en Resolución de Problemas?

Para contestar esta pregunta realizaremos una revisión teórica de los conceptos desde distintos campos científicos.

¿Qué aspectos del aprendizaje de las matemáticas se destacan en el trabajo de estudiantes de bachillerato cuando usan *Cabri-Géomètre* en la resolución de problemas?

Describiremos el trabajo de unos estudiantes a la hora de resolver determinadas tareas y un problema de optimización de funciones.

¿Cómo aprovechar el recurso de la computadora para que se realice un uso significativo del mismo?

Reflexionaremos acerca del uso de la computadora como recurso con base en las observaciones recogidas en nuestro estudio de campo.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

2.1 Introducción

El estudio de la resolución de problemas como medio para una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares es un campo de investigación en Educación Matemática que se está desarrollando profundamente desde hace 20 años. Las investigaciones han revertido sus conclusiones y hallazgos en las propuestas educativas y así, en la mayoría de los países, se promueve una enseñanza vía resolución de problemas.

Por otro lado, los avances en tecnología han proporcionado nuevas herramientas para la educación que han abierto nuevos campos de investigación. Nos interesa especialmente estudiar cómo puede afrontarse la resolución de problemas con el apoyo instrumental de lo que llamaremos ‘nuevas tecnologías’. En la actualidad, puede observarse cómo elementos externos a la educación están permeando la escuela y el aula, siendo incorporados éstos a la rutina diaria de docentes y alumnos. Gran parte de dichos elementos externos provienen de los grandes avances de la sociedad en el área tecnológica. Es indudable que el ser humano vive inmerso en una sociedad de la información, y el hecho de que la sociedad avance y utilice recursos nuevos no es ajeno al mundo educacional y, en particular, los escolares y profesores están introduciendo dichos elementos a la vida cotidiana del salón de clase.

Entenderemos por nuevas tecnologías a las calculadoras graficadoras y las computadoras, pero para nuestro interés, cuando nos refiramos a nuevas tecnologías tendremos en mente a las computadoras y, en particular, a los programas y paquetes informáticos de matemáticas para éstas. Concretamente, nos centraremos en el programa de geometría dinámica *Cabri-Géomètre*.

De este modo, nos interesarán aquellas actividades en las que la computadora desempeñe un papel importante, viéndose ésta no solamente para producir representaciones o como un instrumento que permite realizar cálculos, sino como generadora de conocimiento, que facilita el tránsito entre distintos sistemas de representación o capaz de modificar las estrategias de resolución.

La computadora respecto de la calculadora posee elementos de mayor interés, como pueden ser: la velocidad de cálculo, la resolución de gráficas o la posibilidad de programar con un mejor soporte; pero también es patente que los programas matemáticos para computadora poseen características desfavorables respecto de las calculadoras, como pueden ser su manejabilidad, la necesidad de conocer el funcionamiento de los comandos del programa (que en general son más complejos), el costo, así como el hecho de que la calculadora es más fácilmente transportable. Nos hemos inclinado por la utilización de la computadora debido a que posiblemente y no a largo plazo, la mayoría de la gente y en particular de los alumnos dispondrá de una computadora de escritorio o de un portátil.

En este capítulo realizamos una revisión curricular, algunos antecedentes teóricos y unas reflexiones referentes a nuestros ámbitos de actuación. Así, el capítulo está divido en tres grandes bloques: en el primero trabajamos la concepción de las matemáticas desde el punto de vista de la resolución de problemas, en el segundo revisamos el papel de las nuevas tecnologías y en particular de la computadora, y en el tercero reflexionaremos acerca del papel del docente dentro del currículo y su relación con las nuevas propuestas educativas.

2.2 El Aprendizaje de las Matemáticas en Términos de Resolución de Problemas

2.2.1 Hacia una Instrucción Basada en la Resolución de Problemas

El estudio de la Resolución de Problemas como campo de investigación en Matemática Educativa está teniendo un gran auge desde la década de los años ochenta. El número de documentos que versaban sobre éste tópico se incrementó notablemente a partir del documento *An Agenda For Action* del NCTM de 1980 donde se afirma: *"(...) la resolución de problemas debería ser un eje para las matemáticas escolares (...)"* (Lester, 1994, p. 661). Nótese, por ejemplo, que en el ICME-4 de 1980 celebrado en Berkeley, California, sólo existió una sesión sobre resolución de problemas, mientras que en el siguiente ICME-5 de 1984 celebrado en Adelaida, Australia, la resolución de problemas fue uno de los mayores temas de discusión estando entre los siete más importantes del congreso.

Este fuerte incremento se puede observar también en el número de libros que versan sobre este tópico, como son *Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición* (Mayer, 1983), *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985) y compilaciones como *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective* (Ed. Silver E., 1985). Debido a la investigación producida en este campo, en 1989 el NCTM en su documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, recoge como uno de los ejes curriculares inmerso en todos los niveles de enseñanza la resolución de problemas bajo la denominación *"Las Matemáticas como Resolución de Problemas"*. En una versión más reciente y que ahora lleva por título *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), aparece un estándar titulado *"Resolución de problemas"*, indicando que los estándares deberían promover en todos los estudiantes:

- *La construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.*
- *La resolución de problemas que surjan desde la matemática y otros contextos.*
- *Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas.*
- *Controlar y reflexionar sobre el proceso matemático de resolver problemas.* (NCTM, 2000, p. 52)

Asimismo, la instrucción basada en la resolución de problemas está siendo incorporada en programas educacionales de distintos países; por ejemplo, analizando el curriculum español, en el Boletín Oficial del Estado nº 220 (MEC, 1991, p. 75) se señala:

> "(...) Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje de las matemáticas con la experiencia de los alumnos y alumnas, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista en esta resolución."

En México, Rivera y Santos (2000) como parte de un proyecto de la Sociedad Matemática Mexicana llevado a cabo entre los años 1997 y 1999, revisaron los planes y programas de estudio de veintiocho instituciones mexicanas con relación a la educación matemática del nivel medio superior entre los que encontraron la resolución de problemas como propuesta de enseñanza. Es importante hacer notar que la investigación en resolución de problemas ha revertido, en parte, sus resultados en los sistemas educativos de los países a través de los diseños curriculares que son, en primera instancia, los que vertebran y dirigen el proceso educativo del país.

Ahora bien, estas investigaciones y estudios se encuentran en un estado incipiente en el ámbito de implementación en los centros de enseñanza. Como metodología, es un recurso a través del cual se desean generar los contenidos de enseñanza y es considerada como parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, y no como una parte aislada de los programas instruccionales (NCTM, 2000).

Es nuestra impresión, así como la que obtuvieron Rivera y Santos en su estudio, que los programas educacionales se quedan a nivel declarativo y de intenciones, sin profundizar ni reflexionar acerca de cómo llevar a cabo la propuesta de enseñanza basada en la resolución de problemas, dejando toda o casi toda la responsabilidad de dicha implementación a los profesores. Por ejemplo, en el estándar dedicado a la resolución de problemas (NCTM, 2000) se puede observar cómo se dirigen al profesor con frases como: *el profesor debería..., el profesor tiene que...,* pasando después a la descripción de lo que significa una metodología basada en la resolución de problemas, tomando como base el análisis de diversos ejemplos para los distintos niveles. Así, para los grados 9-12, utilizan tres ejemplos para reflexionar sobre la resolución de problemas para esos niveles.

Si bien es cierto que dicho documento ha producido un cambio sustancial en el tratamiento pedagógico-didáctico de la resolución de problemas, ya que proporciona guías para el docente a través de ejemplos concretos, es conveniente que se realice una reflexión de mayor profundidad sobre lo que significa una instrucción basada en la resolución de problemas.

2.2.2 Los Términos Problema, Resolución y Solución

Toda reflexión acerca de un tópico en Educación Matemática debe empezar con la revisión y análisis de los términos involucrados en dicho tópico; así pues, comenzaremos por realizar una discusión sobre los términos problema, resolución *y* solución *de un problema.*

Concepción Coloquial

Los humanos se caracterizan, entre otras cosas, por la capacidad de hablar y expresarse mediante signos orales y escritos. El lenguaje hablado cotidiano es el principal medio de comunicación entre los humanos, teniendo una fuerte repercusión sobre los demás medios de comunicación, dirigiendo y sirviendo de eje interpretativo. Por otra parte la matemática, como muchas otras disciplinas, crea su propio lenguaje, el cual comienza a construirse desde los primeros años de la matemática escolar. El lenguaje matemático se caracteriza por su precisión en los significados, indispensable para la efectiva comunicación de las ideas; sin embargo, como expresa Maier, *"(...) los principios del lenguaje 'matemático' no pueden y no sabrían reemplazar simplemente a aquellos del lenguaje común o cotidiano utilizado"* (Maier, 1999, p. 4). En particular, en el terreno de la Educación Matemática y para este trabajo, el término problema merece una reflexión sobre su significado, para ello será útil comenzar con la revisión del término desde el punto de vista del uso coloquial en la Lengua Española.

Según el *Diccionario Griego-Español* (DGE, 1988) y *The Shorter Oxford English Dictionary on Historical Principles* (DHP, 1959), la palabra *problema* proviene del griego $\pi\rho o\beta\lambda\eta\mu\alpha$ ("castellanizado" como *problema*), la cual es composición de $\pi\rho o$ que significa <<delante de>> y de $\beta\alpha\lambda\lambda\varepsilon\iota\nu$ que significa <<lanzar, tirar>>. Originariamente significaba algún objeto físico que una persona encontraba en su camino, un obstáculo. Fácilmente se comprende la analogía entre el sentido físico y el psicológico; *problema* viene a ser algo que se interpone en el camino entre la realidad y lo que necesita o desea una persona. Observemos el significado que atribuye el *Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, en su vigésima primera edición* (RAE, 1992, p. 1184):

Problema: *(Del lat. Problema, y éste del gr. $\pi\rho o\beta\lambda\eta\mu\alpha$.) m. Cuestión que se trata de aclarar. // **2**. Proposición o dificultad de solución dudosa. // **3**. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin. // **4**. Disgusto, preocupación. Ú. m. en pl. Mi hijo sólo da PROBLEMAS. // **5**. Mat. Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos. //* **Determinado.** *Mat. Aquel que no puede tener sino una solución, o más de una en un número fijo. //* **Indeterminado.** *Mat. Aquel que puede tener indefinido número de soluciones.*

Por otra parte, el *Diccionario Enciclopédico Santillana* (DES, 1991, p. 2272) expresa:

***Problema** (del lat. problema, y éste del gr. problema, de proballo, lanzar hacia adelante) s. m.* ***1**. Cuestión que se intenta resolver o en la que hay algo que averiguar, particularmente aquella en la que se conocen ciertos datos que hay que estudiar y manejar según unas reglas para obtener la respuesta o el resultado que se pide: Tengo que hacer un problema de matemáticas y otro de física...* ***2**.Situación negativa o perjudicial que tiene difícil solución: el problema del paro, el problema económico, el problema del terrorismo.* ***3**. Hecho o circunstancia que impide o dificulta que se logre un fin determinado: Con tantos problemas no vamos a poder acabar el trabajo.* ***4**. Disgusto, preocupación: Sus hijos le crearon muchos problemas.*

Como podemos extraer de las descripciones que hacen estos diccionarios, el término problema tiene una gran variedad de usos y acepciones coloquiales, entre los que destacan: <<cuestión que se trata de aclarar o resolver, existencia de una dificultad, un disgusto,...>>. Algunas de las acepciones se expresan en un contexto matemático, por ejemplo: <<proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos>>. Desde el punto de vista matemático, Castro (1991) establece que el término *problema* involucra coloquialmente:

a) Una proposición o enunciado.
b) Unos datos conocidos que hay que estudiar.
c) Una acción: que alguien o algunos sujetos debe(n) averiguar.
d) Una meta u objetivo: obtener un resultado.
e) Un proceso: el modo de actuación para alcanzar el resultado.

Y nosotros añadiríamos:

f) Unas reglas: que se deben seguir para alcanzar la meta.

Por otro lado, asociados al término *problema*, aparecen otros términos como son *resolver*: *hallar la solución de un problema* (RAE, 1992, p. 1263); *solución: acción y efecto de resolver (...), cada una de las cantidades que satisfacen las condiciones de un problema o de una ecuación* (RAE, 1992, p. 1347)*; solvente: que resuelve* (RAE, 1992, p. 1347). Según estos diccionarios, por *solución* o *resolución* se entiende a la acción y el efecto de resolver un problema y por *solvente* al sujeto que está inmerso en la tarea de resolverlo. Para este trabajo, usaremos el término *resolutor* en vez de *solvente* para designar al sujeto o sujetos que tratan de resolver un problema.

Concepción Científica

El término problema es utilizado coloquialmente de un modo muy similar a la metáfora de *obstáculo en el camino del sujeto o sujetos*, pero ha sido adoptado por las ciencias dotándolo de distintas acepciones y usos.

Comenzaremos mostrando qué recoge *El Diccionario de Filosofía de José Ferrater Mora* (Ferrater, 1980, p. 1147) acerca del término problema: *"(...) dado que la ciencia sólo trabaja con hipótesis comprobables, un problema debe ser resoluble; es decir: a) puede proponerse una hipótesis verificable (susceptible de ser verdadera o falsa), y b) la hipótesis puede ser verificable con un determinado grado de probabilidad (puesto que ninguna proposición empírica suele ser absolutamente falsa o verdadera)"*. Ferrater declara que, en las ciencias, todo problema se puede resolver.

Ahora bien, la resolución de un problema puede ser de orden epistémico, y por tanto, la verificación de la hipótesis (en el sentido de Ferrater) es difícil de establecer, incluso con algún grado de probabilidad, por lo que en principio, no se conoce si realmente se ha resuelto el problema y si se dispone de una solución del mismo.

Para aclarar esto mostraremos un "círculo vicioso" o "juego de palabras" extraído de unas reflexiones realizadas por una corriente filosófica. Según el *Diccionario de las Ciencias de la Educación, Vol. 2* (DCE, 1983), el planteamiento de problemas es una de las mayores tareas de la filosofía, señalando que existió una corriente filosófica denominada *problematicismo*, la cual tenía como principal misión la problematización de todo, *"(...) lo único que se puede hacer en filosofía es ver los problemas como problemas, es decir, examinar la significación de todos los problemas y de todo lo problemático. Y como lo más problemático es la filosofía misma, ella se convierte en su principal problema"* (DCE, 1983, p. 2698).

Para dicha corriente filosófica, el término problema presentaba la acepción de ser una cuestión que se trata de aclarar, de este modo se encontraron con el reto de comprender y resolver su principal problema, la naturaleza de la filosofía. Para esta corriente filosófica, la resolución de su principal problema era de orden epistémico y, en caso de que fuera posible encontrar una solución, los conceptos resolución y solución deberían ser considerados equivalentes.

Con este ejemplo queremos resaltar que, en las ciencias, "no todo problema puede resolverse" ya que, para el *problematicismo*, encontrar una solución a su principal problema requiere de conocer la naturaleza de la filosofía y entonces: ¿Cómo se puede establecer la veracidad, con algún grado de probabilidad, de la solución?

Para un matemático, los problemas son aquellas cuestiones o interrogantes no totalmente aclaradas o resueltas y la Matemática hace de los problemas y su resolución su campo de actuación y estudio, como señala Kilpatrick (1985, p. 3): *"(...) todas las matemáticas son creadas en un proceso de formulación y resolución de problemas"*. Estas ideas se pudieron observar hace ya casi un siglo, en la ponencia de Hilbert *"Problemas matemáticos"* dictada en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900. Por otra parte, al referirse sobre los requisitos que debe cumplir la solución de un problema matemático, Hilbert (1902, p. 439) declara:

"Diré antes de todo esto: que deberá ser posible establecer la validez de la solución por medio de un número finito de pasos, basados en un número finito de hipótesis, que sean deducidas del enunciado del problema y siempre formuladas de manera precisa."

Hilbert entiende que el concepto de solución lleva implícita la validez y que ésta deberá sustentarse en las hipótesis mediante un número finito de pasos o deducciones. En general, el avance y desarrollo de las ciencias se debe en buena medida a la resolución o intentos de resolución de problemas sin éxito de la disciplina o de otros campos disciplinarios; la misión del científico es resolver dichos problemas, pero éstos, como señala Castro (1991, p. 17), *"(...) no hacen de la propia actividad de resolución de problemas el objeto de su investigación"*. Esta caracterización de la actividad del científico choca con la visión de aquellos psicólogos e investigadores en Educación que están preocupados por entender cómo los humanos resuelven problemas, es decir, hacen de la actividad propia de resolver problemas su objeto de estudio.

Desde el Punto de Vista de la Psicología

En Psicología, según Kilpatrick (1985, p. 3), un problema es una situación o tarea en la cual una meta quiere ser lograda y una ruta directa a ella está bloqueada, añadiendo que usualmente la psicología requiere de sujetos que "tienen" el problema. De este modo, para la mayoría de los psicólogos, ya no se puede ver el concepto problema aislado del resolutor y así, el objeto de estudio debe ser la *resolución de problemas como actividad de un sujeto o sujetos.* Como señala Puig (1996), en psicología se consideran, en general, situaciones o tareas independientes del contenido de la misma y el carácter de problema es entendido en base al sujeto, definiéndose más qué es "tener un problema" que "problema".

Una definición desde esta visión es proporcionada por Brownell (Ver Kilpatrick, 1985, p. 3), quien entiende por problema una situación que se le presenta a un sujeto, donde éste, en ese momento, desconoce un medio directo de realización y experimenta perplejidad pero no una total confusión. Por otra parte, la resolución del problema se entiende como el proceso por el cual un sujeto se desprende del problema.

Brownell considera un problema como un concepto relativo, supeditando el carácter del mismo al sujeto que lo enfrenta, por lo que una misma tarea se puede encontrar dentro de las situaciones familiares para un sujeto, y para otro puede ser un enigma.

Por otra parte, según Mayer (1983, p. 19) la mayoría de los psicólogos concuerdan en que un problema tiene ciertas características y que cualquier definición de problema debería contener tres ideas:

1) El problema está dado actualmente en un estado, pero
2) se desea que esté en otro estado, y
3) no hay una vía directa y obvia para realizar el cambio.

Y poseer:

1. ***Datos**: El problema tiene en un primer momento determinadas condiciones, objetivos, trozos de información, etcétera, que están presentes al comienzo del trabajo en el problema.*
2. ***Objetivos:** El estado final del problema es el estado de alcanzar el objetivo, y el pensamiento*[1] *deberá transformar el problema desde el estado inicial dado al estado final.*
3. ***Obstáculos:** El que piensa tiene a su disposición algunas vías para modificar el estado inicial o el estado final. Sin embargo, todavía no sabe la respuesta correcta, es decir, la secuencia correcta de comportamientos que resolverían el problema no es inmediatamente obvia* (Mayer, 1983, p. 18).

Por tanto, para Mayer la resolución de problemas se refiere al proceso de transformar el estado inicial dado del problema al estado final, siendo dicha transformación realizada por el *pensamiento*. De este modo, si se entiende la resolución de problemas como transformaciones de estados (transformar el estado inicial en el final), se puede observar una clara delimitación entre la resolución (las distintas transformaciones de los estados) y la solución del problema (el estado final).

Respecto de los psicólogos de la Gestalt, Mayer (1983) señala que de acuerdo con ellos, el proceso de resolución de un problema es un intento por relacionar y reorganizar los elementos de la situación problemática, de forma que se adquiere una comprensión estructural de la situación conllevando esto a la resolución y solución del mismo. En este marco, y para aclarar lo anterior, tomamos una cita de Greeno en la que establece lo que significa el término problema para los Gestaltistas:

"Los problemas se analizaban como situaciones cuyas representaciones cognitivas tienen brechas o inconsistencias, y la resolución de problemas encuentra un camino para organizar la situación, para proporcionar una estructura buena, incluyendo la consecución de la meta del problema" (Citado en Puig, 1996, p. 22).

---

[1]Mayer (1983, p. 21) en su trabajo toma como equivalentes las definiciones de *pensamiento, resolución de problemas y cognición*, señalando que una definición general de pensamiento incluye tres ideas básicas; primera, el pensamiento es *cognitivo* pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente, en la mente o el sistema cognitivo, y debe ser inferido indirectamente. Segunda, el pensamiento es un *proceso* que implica alguna manipulación de, o establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo. Tercero, es *dirigido* y tiene como resultado la "resolución" de problemas o se dirige hacia una solución.

Para los psicólogos de la Gestalt, los términos resolución y solución se identifican plenamente y adoptan por resolución al proceso cognitivo de adquirir una comprensión estructural y a la reorganización de la situación problemática, la cual conduce a la meta.

Castro (1991) destaca como una de las principales aportaciones de los psicólogos de la Gestalt a la resolución de problemas, cómo la experiencia pasada puede jugar un papel negativo en determinadas ocasiones al intentar resolver un problema. Esto es lo que se ha llamado "transferencia negativa": *"(...) La experiencia pasada es útil en situaciones muy parecidas a las experimentadas y es un obstáculo en los problemas que requieren una forma nueva de resolución"* (Castro, 1991, p 22).

Para los Gestaltistas, la resolución de problemas implicaba descubrir cómo se relacionaban entre sí los elementos del problema (las relaciones internas de esos elementos). Desde la Teoría del Significado, la resolución de problemas es descrita como un proceso mediante el cual se relaciona el problema con las ideas y experiencias del resolutor y su interés es analizar las relaciones externas entre los elementos y los esquemas cognitivos del resolutor, por tanto, la resolución de problemas consiste fundamentalmente en:

"(...) un proceso de descubrir un esquema o un conjunto de experiencias pasadas con el que ha de relacionarse el nuevo problema y luego interpretar y reestructurar la situación nueva de acuerdo con el esquema particular que se haya seleccionado" (Mayer, 1983, p. 92).

Castro (1991) destaca de la teoría de significado la aportación de ésta a la investigación en resolución de problemas de los conceptos de esquema lógico, organizaciones de experiencias y asimilación (búsqueda adecuada del esquema).

Una de las principales dificultades de los estudios cognitivos es la observación y análisis del pensamiento humano. Las distintas teorías psicológicas han realizado sus estudios utilizando diversas técnicas: protocolos escritos, hablar en voz alta u observación de comportamientos. En el intento por caracterizar cómo los humanos resuelven problemas y debido a los recientes avances tecnológicos y en particular, con la aparición de las computadoras, surgió la Teoría del Procesamiento de la Información que asume que los resolutores son procesadores de información y postula que el pensamiento humano puede ser simulado por programas de computador, traduciendo la actuación del resolutor a un programa informático, observando cómo éste actúa para inferir posibles comportamientos en los humanos. De este modo, la resolución de un problema, es concebida como *"(...) una tarea en la que hay que recorrer una sucesión de estados sobre los que actúan los operadores"* (Castro, 1991, p. 25). Las componentes principales de la teoría según Newell y Simon (Extraído de Castro, 1991, pp. 25-31) son:

1. *El sistema de procesamiento de la información*; el sujeto que resuelve el problema; compuesto por unos receptores que reciben el problema desde el entorno, un procesador que lo traduce a una representación interna sobre la que actúan las técnicas de resolución, una memoria de almacenamiento y de unos emisores por donde se transmite la solución.
2. *El entorno de la tarea*, que puede ser explícita o implícita así como el conjunto de reglas "legales" de los estados y operadores.
3. *El espacio del problema*; una representación interna del entorno de la tarea que se hace el resolutor, constituido por el conjunto de operadores y estados que él conoce.

Para la teoría del procesamiento de la información, la resolución de problemas, en términos generales consiste, al igual que había señalado Mayer, en la transformación del estado inicial (entorno de la tarea) al estado final (estados finales deseados) y, por lo tanto, la resolución es dicha transformación, mientras que la solución es el estado final.

A continuación mostramos algunas definiciones y usos que provienen de paradigmas científicos diversos. Es nuestra intención que éstas sirvan para ampliar la visión que hasta ahora hemos ido recogiendo:

1. *Un ser humano se enfrenta con un problema cuando ha aceptado una tarea pero no sabe de antemano cómo realizarla* (Simon, 1978, citado en Castro, 1991, p. 18).

2. *Un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo* (Chi & Glaeser, 1985, citado en Castro, 1991, p. 18).
3. *Un problema es una cierta meta que uno intenta conseguir, tal que quien lo intenta no conoce cuál es el procedimiento que es necesario para conseguirlo en el momento en que se le plantea el problema* (Brown, 1985, citado en Puig, 1996, p. 26).
4. *Un problema es una tarea para la cual:*
    i. *El individuo o grupo que se enfrenta con ella quiere o necesita encontrar una solución,*
    ii. *no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución, y*
    iii. *el individuo o grupo debe realizar intentos para encontrar la solución* (Lester, 1983, citado en Castro, 1991, p. 65).
5. *La misma tarea puede suponer grandes esfuerzos para algunos estudiantes y ejercicios rutinarios para otros. Así, ser un "problema" no es una propiedad inherente a una tarea matemática. Es más, hay una relación particular entre el individuo y la tarea la que hace que ésta sea un problema para esa persona. La palabra problema es usada aquí con un sentido relativo, como una tarea que es difícil para el individuo que lo está intentando resolver. De cualquier forma, la dificultad debe ser una prueba intelectual más que computacional (...) Por decir las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, ésta es un ejercicio y no un problema* (Schoenfeld, 1985, p. 74).
6. *Tener un problema significa "buscar conscientemente con alguna acción apropiada, lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"* (Polya 1962, citado en Santos 1994, p. 30).
7. *Un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor no tiene un procedimiento o algoritmo que le lleva a la solución* (Kantowski 1981, citado en Borasi, 1986, p. 132).

Podemos observar algunas coincidencias en las anteriores definiciones; una de ellas es que se requiere la presencia de, al menos, un resolutor para que una tarea sea considerada como problema, dependiendo de los conocimientos y experiencias previos del sujeto así como de conocer la existencia de un camino de resolución, la tarea podrá o no ser un problema. Por otro lado, los problemas son caracterizados porque hay que realizar una acción, partiendo de un enunciado, para conseguir un objetivo o meta.

A diferencia de las concepciones mostradas a lo largo de este capítulo, existen definiciones en las que un problema viene caracterizado por una descripción formal y su calidad de problema es independiente del sujeto, del tiempo y de que se haya resuelto o se sepa cómo resolverlo, como ocurre en la teoría de la Inteligencia Artificial (Ver Puig, 1996).

Hemos podido observar cómo no siempre es usado el término problema del mismo modo por diferentes autores, desprendiéndose de ello que no existe una definición concisa y universalmente aceptada del término en las ciencias y, en particular, dentro de la investigación en Educación Matemática. Antes de presentar el significado que el término tendrá en este trabajo realizaremos una discusión sobre los términos resolución y solución, elementos que bajo nuestro entendimiento, son claves para aclarar nuestra posición respecto del término problema.

2.2.3 Resolución Vs. Solución

Como ya mencionamos, para este trabajo estamos usando el término *resolutor* en vez de *solvente* para designar al sujeto que está resolviendo el problema, pero consideramos necesario realizar una distinción entre *resolución* y *solución.*

Entenderemos por *resolución* a la acción y proceso de resolver el problema que tiene como fin la meta que llamaremos solución. La *solución* designará el resultado o efecto de la acción de resolver, siempre y cuando verifique las condiciones supuestas en el problema. Para precisar ideas, veamos un ejemplo: Si el problema es:

¿Cuál es la suma de los primeros 100 números naturales?

La solución será la respuesta *5050*, mientras que la resolución del problema será la acción y el proceso que condujo a ella, por ejemplo, *aplicar la fórmula n(n+1)/2, ir sumando uno a uno, o aplicar el ingenioso recurso de Gauss de listar los 100 números,* *ir sumando los extremos y reducir la expresión resultante por medio del factor común.* Hay situaciones, sin embargo, donde podría coincidir la solución con la resolución misma, por ejemplo, problemas en los que se pide demostrar algún hecho. Veamos un ejemplo:

En un examen de cálculo se pide:

Demostrar que toda función real de variable real derivable es continua,

y un alumno escribe en el examen lo siguiente:

Sea f una función real, de variable real, derivable en un punto *a*, entonces se tiene que el siguiente límite existe y es finito, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ahora bien, de las propiedades de los límites se tiene que;

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=0.$$

Por lo tanto,

$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=0,$ entonces $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$. Esto prueba que f es continua en a.

> Aunque, ciertamente, nosotros consideramos como parte de la resolución aquellos procesos mentales y pensamientos lógicos que el resolutor emplea en la búsqueda de la solución; tal y como está presentada la resolución de nuestro hipotético alumno, desconocemos la estrategia y métodos de aproximación o pensamientos que él utilizó. Ante esta situación y sin más información que lo escrito por el alumno, podemos considerar coincidentes la resolución y solución para este caso.

Durante el proceso de resolución, el resolutor puede realizar pruebas erróneas o acudir a pruebas visuales, acercarse a la solución mediante "aproximaciones sucesivas" o por ensayo y error. Estos recursos, todos legítimos, son técnicas o herramientas que el resolutor utiliza en su intento por resolver el problema y deben considerarse como parte de la resolución. En ocasiones, el resolutor puede utilizar razonamientos que le conducen a conclusiones falsas que no son solución del problema, un proceso como éste lo llamaremos *intento de resolución sin éxito*. De este modo, cuando hablemos de resolución de un problema, ésta llevará implícita el éxito, es decir, la consecución de la solución del problema.

En una instrucción basada en la resolución de problemas, un proceso donde el alumno no consigue alcanzar la solución de un problema puede resultar un recurso significativo de enseñanza para el docente, y puede ser aprovechado por el profesor como fuente de análisis y reflexión los intentos de resolución sin éxito. Quizá en algunos casos el profesor puede provocar estas situaciones, por ejemplo, planteando problemas con carencia de datos o puede plantear enunciados de problemas con información innecesaria, tratando de llevar a los alumnos a un análisis de la formulación del problema para discriminar lo irrelevante de lo relevante. Otra situación interesante, es la que se genera con problemas que tienen más de una solución y, nótese que no decimos soluciones correctas ya que nuestra definición lleva implícita esta cualidad. Para nosotros, solución significa lo que otros autores llaman *solución correcta*, en contraposición de lo que llaman soluciones incorrectas, a éstas simplemente les llamaríamos *respuestas incorrectas* de los alumnos.

Por otra parte, la distinción que hacemos entre *solución* y *resolución* no siempre es compartida por los investigadores y autores de textos. Por ejemplo, Castro (1991) lo adopta como equivalentes y de alguna manera, Polya (1945) también, pues aunque no realiza análisis alguno de estos conceptos, los identifica como tales, como podemos deducir de su texto: *"Las soluciones no conllevan sólo las respuestas sino también el procedimiento que conduce a ellas"* (Polya, 1945, p. 233). Sin embargo, otros autores hacen tal distinción, por ejemplo, Puig (1996) no solamente establece diferencias entre estos términos, sino que adopta una convención más fina; Puig distingue entre resultado, solución y resolución:

"Usaremos el término resultado para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica, etcétera. El término solución lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión. Finalmente, usaremos el término resolución para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no" (Puig, 1996, p. 34).

Para nosotros la resolución conduce a la meta buscada o resultado, lo cual denominamos solución, y para distinguir un proceso que no conduce a la solución lo llamamos *intento de resolución sin éxito*. Puig no distingue entre resolución e intento de resolución sin éxito de un problema y su sentido de solución, de alguna manera es parte del proceso de resolución, ya que es la presentación final del conjunto de pasos que previamente el resolutor debe haber realizado durante el proceso de resolución del problema. Según entendemos, para Puig la solución es una versión "limpia" de la resolución.

La distinción que hacemos entre resolución, solución y resolución sin éxito es simplemente con el propósito de generar una reflexión sobre los procesos que intervienen en los intentos por resolver los problemas y destacar la importancia que puede tener para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, no solamente el análisis de las resoluciones de un problema por parte de los alumnos, sino también los intentos de resolución sin éxito, los problemas "mal" planteados, o los problemas con más de una solución. Esta reflexión seguramente permitirá avanzar hacia lo que significa una enseñanza y aprendizaje basada en la resolución de problemas. Por otro lado, la distinción realizada ofrece un marco de análisis de la resolución de problemas en la investigación permitiendo realizar una distinción nítida en las variables resolución y solución de un problema.

El Término Problema

Situándonos en el continuo de Brownell (que va desde las situaciones familiares en un extremo, hasta los enigmas en el otro), los problemas se encuadran como un intervalo intermedio entre lo familiar y lo enigmático. Así adoptaremos por problema, una tarea o situación en la cual necesariamente interviene un sujeto (o sujetos) que se apropia del "problema", que está presentado a través de un enunciado (verbal, gráfico, simbólico, o combinación de éstos), descrito en un contexto (explícito o implícito), con unos datos y una meta u objetivo a alcanzar (solución), para la cual se requiere de acciones, en principio desconocidas para el sujeto, sobre los datos del problema que conduzcan a la resolución y solución del problema.

De este modo, el carácter de que una tarea sea un problema no la consideramos independiente del sujeto y la existencia de un solo camino o métodos de resolución, así como la existencia de una o varias soluciones, no hace que un enunciado pierda el carácter de problema ya que, como hemos considerado, esto en principio puede o es desconocido para el resolutor. Otra variable que tampoco consideramos como característica de un problema es el tiempo que invierte un resolutor en resolver el problema y encontrar una solución. Ciertamente, si un sujeto emplea menos de 30 segundos para resolver una determinada tarea puede hacernos sospechar que realmente no era un problema para él, sino un ejercicio. Somos conscientes de que este hecho es difícil de establecer. En la práctica, es labor del docente tener "alguna" idea del conocimiento que presentan sus alumnos en determinado momento, y gran parte de la responsabilidad de que una tarea resulte ser un problema para sus alumnos, depende de la elección de la misma por parte del profesor.

Adoptaremos por ejercicio (matemático) una tarea similar en todos los aspectos señalados para problema pero con la particularidad de que el sujeto (o individuos) tiene conocimiento de la regla o procedimiento a seguir que conduzca a la solución. Gráficamente y situándonos en el continuo de Brownell, nosotros podemos ver los problemas y los ejercicios esquemáticamente como sigue:

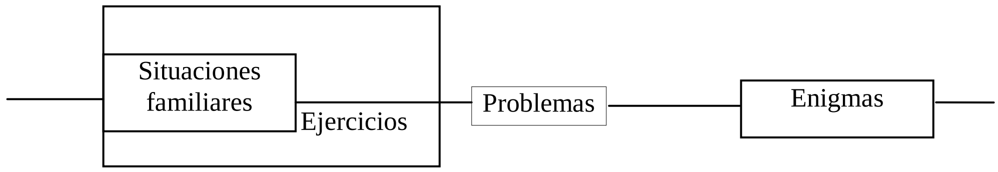


Figura 2.1: Esquema del continuo de Brownell.

2.2.4 Criterios de Clasificación de los Problemas

Toda clasificación va precedida y está condicionada por la definición previa del conjunto de elementos que va a ser clasificado. En este caso, el concepto "problema". Nosotros presentaremos cuatro clasificaciones, las dos primeras debidas a Polya, la tercera debida a Borasi y la cuarta proporcionada por Reitman.

Polya utiliza la noción "tener un problema" como "*(...) buscar conscientemente, a través de acciones, una meta concebida pero no inmediata de alcanzar*" (Citado en Santos, 1994, p. 30). Polya (1945) distingue en primer lugar dos tipos de problemas: *problemas de resolver*, aquellos cuyos elementos principales son la incógnita, los datos y la condición, y cuyo propósito es descubrir la incógnita y, *problemas de demostrar*, aquellos cuyos elementos principales son la hipótesis y la conclusión, siendo el objetivo de estos problemas mostrar la veracidad o falsedad de una afirmación.

Como comenta Puig (1996), la distinción entre estos dos tipos de problemas, aunque en apariencia es clara, en realidad no lo es tanto. Nótese cómo un problema de resolver se puede considerar un problema de demostrar; basta establecer una conjetura sobre la solución y, por tanto, se tiene la necesidad de probarlo a través de los datos y la condición sí se quiere resolver el problema, y viceversa; tómese ciertos objetos de la hipótesis como datos y algunas propiedades o relaciones como condiciones, de forma que la incógnita sea una relación entre los objetos tomados y sus relaciones.

En la segunda de las clasificaciones debidas a Polya (Kilpatrick, 1985) se establecen cuatro categorías en función de cómo se resuelven los problemas:

1. *Una regla a la vista*, son aquellos problemas que se resuelven por aplicación directa o mecánica de alguna regla.
2. *Aplicación con alguna elección*, son aquellos que pueden ser resueltos por reglas que el resolutor conoce pero sobre las que debe realizar algunos juicios.
3. *Elección de una combinación*, son aquellos que requieren de la combinación de reglas que el resolutor conoce y de la realización de juicios sobre la combinación.
4. *Un acercamiento al nivel de investigación*, aquellos que requieren un alto grado de combinación de reglas y de juicios por parte del resolutor, requiriendo independencia y un uso plausible del razonamiento.

La tercera clasificación debida a Borasi (1986) es obtenida a través de un estudio sobre diferentes ejemplos en los que, por identificación de estructuras, elementos constitutivos o nociones relacionadas, se establecen categorías básicas para la clasificación y análisis de problemas. De este modo, Borasi establece cuatro criterios básicos:

1. *La formulación del problema*, la definición explícita o no de la tarea a llevar a cabo. La formulación puede aparecer en el texto del problema, o con específicas preguntas dadas. Cada formulación puede afectar profundamente al acercamiento del problema y por consiguiente a su resolución y solución.

2. *El contexto del problema*, la situación en la que se encuentra enmarcado. Usualmente el contexto es dado, al menos parcialmente, en el texto del problema.

3. *El conjunto solución (o conjunto de soluciones)*, que pueden ser consideradas como aceptables para el problema dado. Borasi especifica que es más correcto hablar de soluciones respecto a una formulación específica que hablar de soluciones en general, y que los problemas pueden diferir en términos del número alternativo de soluciones que se pueden obtener.

4. *Los métodos de aproximación*, que pueden ser usados para alcanzar la solución. Considerar todos los métodos, estrategias o actividades que pueden ser usadas cuando se intenta resolver un problema.

Cabe destacar que estos criterios pueden a la vez interrelacionarse, por lo que los criterios de clasificación se ven multiplicados dependiendo de las relaciones que queramos establecer, por ejemplo, se puede considerar dentro del cuarto criterio que la solución pueda alcanzarse a través de una estrategia, varias estrategias o un acto de insight sólo.

La cuarta clasificación, situándonos en la definición general de problema en función de estados y operadores (elementos que facilitan o permiten el tránsito entre los estados) y, fijándonos en el criterio "estado inicial y final bien o mal definidos", es proporcionada por Rietman en 1965 (Mayer, 1983, p. 19-20)[2]:

1. *Estado inicial y final bien definidos*: ¿Cómo se podría convertir la oreja de una cerda en una cartera de seda? Estado inicial: la oreja de cerda, estado final: cartera de seda.
2. *Estado inicial bien definido y estado final mal definido:* ¿Cómo se podría diseñar el Cadillac El Dorado para obtener un mejor kilometraje en gasolina? Estado inicial: el automóvil citado, estado final: mejor rendimiento en gasolina.
3. *Estado inicial mal definido y estado final bien definido:* Explique los mecanismos responsables de las manchas solares. Estado inicial: la causa de las manchas, estado final: las manchas solares.

[2] Los ejemplos son del propio Rietman.

4. *Estado inicial y final mal definidos:* ¿que es rojo y hace "chufchuf" ? (Una manzana fuera de borda).

Esta clasificación se puede hacer más reducida considerando sólo dos categorías, problemas bien definidos y mal definidos, los problemas bien definidos son aquellos que tienen el estado inicial, final y los operadores bien definidos.

Aunque en las definiciones y usos del concepto problema hemos apreciado, en general, cómo se hace mención al sujeto o resolutor, observamos cómo de las cuatro clasificaciones presentadas, sólo la segunda de Polya, toma en consideración al sujeto o resolutor. En un intento por caracterizar y clasificar los problemas buscando realizar una clasificación válida y coherente para cualquier problema, es lógico que se describan con independencia del resolutor, quien se muestra para dichas clasificaciones como una variable no controlada ya que, establecer cierta dependencia al resolutor hace imposible una asignación, a priori, de un problema en alguna de las categorías descritas. De este modo, las clasificaciones mostradas independientes del sujeto se centran en propiedades inherentes al problema: el método de resolución, el conjunto de soluciones, métodos de aproximación o el enunciado del problema.

2.2.5 Caracterizaciones del Proceso de Resolución de Problemas

La investigación en resolución de problemas aislada del contexto escolar o instruccional de la matemática tiene como base caracterizar, de forma general, el proceso de resolución que un resolutor lleva a cabo cuando se enfrenta a un problema. En la mayoría de los casos, estas modelizaciones o caracterizaciones son presentadas a través de sintetizar los procedimientos del resolutor en fases o etapas. Dichas caracterizaciones sirven como base para el estudio y elaboración teórica del proceso de resolución.

Uno de los primeros personajes en preguntarse cómo los humanos resuelven problemas fue Poincaré, H. (1854 - 1912), cuando en 1908, a través del análisis y reflexión de su propio modo de actuación a la hora de resolver problemas establece tres fases en las que describe cómo él resuelve un problema. A continuación presentamos un cuadro con diversas clasificaciones que se pueden encontrar en la literatura, estas clasificaciones han sido extraídas de Castro (1991, p. 39) y Mancera (1996, pp. 221-225).

Las clasificaciones que presentamos pertenecen a diversos autores y a distintas épocas; éstas, con independencia del contexto teórico en las que fueron realizadas y entendiéndolas fuera del contexto instruccional, sirven para mostrar y obtener regularidades. Con esto no pretendemos señalar que se podría extraer una clasificación general y válida que describiese cómo los humanos resuelven problemas; es más, al haber considerado anteriormente que no se puede entender la resolución de un problema con independencia del sujeto, intentar realizar una caracterización universal estaría fuera de lugar.

Poincaré, 1908 1. Un período de trabajo consciente. 2. Un período de trabajo inconsciente. 3. Un segundo período de trabajo consciente.	**Osbom, 1963** 1. Pensar todas las fases del problema. 2. Seleccionar los subproblemas. 3. Pensar qué información puede ayudar. 4. Seleccionar las fuentes más probables de información. 5. Pensar en todas las ideas posibles como claves para el problema. 6. Pensar en todas las formas posibles de probar. 7. Seleccionar las formas más seguras de probar. 8. Imaginar todas las contingencias posibles. 9. Decidir la respuesta final.
Dewey, 1910 1. Se siente una dificultad. 2. La dificultad es definida y localizada. 3. Se sugieren las posibles soluciones. 4. Se consideran las consecuencias. 5. Se acepta una solución.	**Centro de Humanidades, 1977** 1. Estado del problema. 2. Recabación de hechos. 3. Generar ideas para solucionar el problema. 4. Verificar cada idea con respecto a los hechos para ver cuán factible es. 5. Encontrar una solución y asegurarse que es correcta.
Wallas, 1926 1. Un período de preparación. 2. Una etapa de incubación. 3. Una etapa de iluminación. 4. Verificación.	**Brightman, 1980** 1. Conciencia del problema. 2. Diagnóstico del problema. 3. Definición de objetivos de decisión. 4. Diseño de acciones alternativas. 5. Predicción de consecuencias de acciones. 6. Juicio de soluciones alternativas. 7. Solución aceptable. Pre-implementación. 8. Acción de implementación. 9. Supervisión del logro de meta (s).

	10. Acciones correctivas o reciclaje del problema.

Rossman, 1931 1. Observación de una necesidad o dificultad. 2. Formulación del problema. 3. Revisión de la información disponible. 4. Formulación de soluciones. 5. Examen crítico de las soluciones. 6. Formulación de nuevas ideas. 7. Examen y aceptación de las nuevas ideas.	**Hayes, 1981** 1. Encontrar el problema. 2. Representar el problema. 3. Planificación de la solución. 4. Llevar a cabo el plan. 5. Evaluación de la solución. 6. Consolidación de los beneficios.
Polya, 1945 1. Comprender el problema. 2. Concebir un plan. 3. Ejecutar el plan. 4. Examinar la solución obtenida.	**Hayes, 1981** 1. Encontrar el problema. 2. Representar el problema. 3. Planificación de la solución. 4. Llevar a cabo el plan. 5. Evaluación de la solución. 6. Consolidación de los beneficios.
Vinacke, 1952 1. Confrontación con el problema, darse cuenta de que existe el problema. 2. Trabajo en búsqueda de la solución. 3. Solución.	**Majmutow, 1983** 1. Organización de la situación problemática. 2. Determinación y formulación del problema. 3. Búsqueda de las vías de solución. 4. Establecimiento de hipótesis y su comprobación. 5. Constatación de la solución hallada.
Johnson, 1955 1. Preparación. 2. Producción. 3. Juicio.	**Bransford y Stein, 1984** 1. Identificación del problema. 2. Definición y representación del problema. 3. Exploración de posibles estrategias. 4. Actuación, fundada en una estrategia. 5. Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

Merrifield, 1962	Escareño y Mancera, 1993
1. Preparación. 2. Análisis. 3. Producción. 4. Verificación. 5. Replicación.	1. Planteamiento de un problema. 2. Estimación del resultado. 3. Resolución del problema de maneras diversas. 4. Planteamiento de problemas que se resuelven de manera similar pero con los mismos datos. 5. Planteamiento de problemas que se resuelven de manera similar pero con distintos datos. 6. Detección de los métodos de resolución que se plantearon antes y siguen siendo aplicables o no. 7. Introducción de los contenidos apoyados en la etapa anterior. 8. Determinación de todos los datos o parte de ellos para obtener una respuesta dada.

Tabla 1: Caracterizaciones del proceso de resolución de problemas.

Se puede observar que en estas clasificaciones, el primer paso o fase es que el resolutor necesita percatarse y ser consciente de la existencia del problema, es decir, hacer suyo el problema. Una vez admitido que tiene un problema, el segundo paso o fase es la comprensión del mismo, la revisión e identificación de los datos e información que presenta, estas fases corresponderían a la preparación del resolutor para abordar la resolución del problema. El tercer paso o fase es en el que existe menos claridad, dicho paso corresponde al conjunto de acciones que el resolutor realiza con el fin de obtener la meta (la solución). Algunos autores lo han seccionado estableciendo subfases, a modo general comprende la concepción del plan de acción, la formulación de posibles soluciones y la puesta en práctica del plan. El cuarto paso o fase corresponde a la evaluación de lo realizado y, en particular, de las soluciones obtenidas. Un hecho importante es que Rossman (1931), señala que después del examen crítico de las soluciones se deben formular nuevas ideas, es decir, aparece por primera vez señalando que encontrar la solución de un problema no tiene por qué ser el fin de la tarea, sino que es necesario realizar conexiones y extensiones del mismo.

Aunque hemos declarado que dichas clasificaciones las estamos analizando independientes del contexto escolar y en particular de la instrucción, dicha asunción presenta un claro limitante. Las clasificaciones mostradas también pueden servir como marco para realizar estudios acerca de cómo implementar la resolución de problemas en un salón de clases y, por tanto, tampoco se pueden considerar completamente aisladas del contexto escolar, es más, la clasificación de Polya (1945) es un claro ejemplo de esto. Polya en su libro *How to solve it* describe su clasificación y señala que el principal objetivo del libro, y por ende de la clasificación, es servir de ayuda al alumno a resolver problemas así como servir de guía al profesor de matemáticas de cómo puede ayudar al estudiante a resolver problemas; por tanto, existe una componente didáctica-pedagógica tanto en su libro como en su clasificación.

A lo largo de la reflexión llevada a cabo hasta ahora, hemos destacado la necesidad de profundizar acerca de lo que implica una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas, en particular, nos hemos centrado en analizar los términos problema, resolución y solución. El hecho de que no exista una definición concisa y universalmente aceptada de dichos términos en Educación Matemática hace necesario concretar sus significados.

Hemos considerado el carácter de que una tarea sea un problema dependiente al sujeto, debido a que se requieren de acciones sobre los datos del problema para poder alcanzar la solución del mismo y, si estas acciones son conocidas por el individuo, entonces no se tratará de un problema para él, sino de un ejercicio.

Esto conlleva una dificultad: ¿Cómo establecer, anticipadamente, cuándo una tarea es un ejercicio o un problema para un individuo? En la práctica es misión del profesor tener "alguna idea" del conocimiento de sus alumnos y gran parte de la responsabilidad de que una tarea sea un problema recae en la elección de la misma.

Por otro lado, a la hora de analizar el desempeño de resolutores se hace necesario identificar claramente que se entiende por resolución y solución. Nosotros hemos adoptado por *resolución* a la acción y proceso de resolver el problema que tiene como fin la meta que llamaremos *solución*. Y por *solución* al resultado o efecto de la acción de resolver, siempre y cuando verifique las condiciones supuestas en el problema.

De este modo afirmamos que la resolución de un problema conduce a la obtención de la solución, y por tanto, establecemos una distinción con aquellos procesos que no conducen a la solución, denominando a dichos procesos por *intentos de resolución sin éxito*. Con ello, disponemos de un marco para poder identificar cuando se realiza la resolución y cuando no, y si se ha obtenido una solución o una *respuesta incorrecta* (resultado o efecto del intento de resolución sin éxito) de un problema. Un hecho que destacamos en nuestro análisis es que en determinadas ocasiones, los términos resolución y solución tienen que considerarse equivalentes.

2.3 Nuevas Tecnologías

2.3.1 Análisis Curricular

Las nuevas tecnologías están hoy en día permeando por completo la educación dentro y fuera del salón de clase. Los continuos avances en informática y la baja en los precios de tecnologías básicas han llevado consigo que éstas estén cada vez más presentes en las aulas y en el trabajo de alumnos y profesores. Prácticamente todo alumno dispone de al menos de una calculadora de bolsillo con las funciones más básicas (suma, resta, multiplicación y división). Los recientes cambios curriculares se han hecho eco de la importancia de las nuevas tecnologías introduciéndolas como una herramienta importante en la instrucción matemática. Continuando con el análisis realizado en las anteriores secciones, observaremos qué papel desempeñan las nuevas tecnologías en tres diseños curriculares, el NCTM (2000), el currículo español (MEC, 1991), y la situación de México (Rivera & Santos, 2000).

NCTM (2000)

Comencemos con el Borrador de los Estándares y Principios de la Matemática Escolar en el que se establece la necesidad de incorporar las nuevas tecnologías: *“(...) La discusión considera no sólo cómo la tecnología implica cambiar el énfasis en el contenido matemático y el camino del pensamiento matemático puede ser cualitativamente diferente (...)”* (NCTM 1998, p. 17) y establece, un *Principio de Tecnología*: *“(...) Los programas de instrucción matemática deberían usar la tecnología para ayudar a todos los estudiantes en el entendimiento de las matemáticas* *y deberían preparar a éstos para usar las matemáticas en un mundo tecnológicamente cambiante (...)"* (NCTM 1998, p. 40) .

Pero en una revisión de los diferentes estándares que aparecen en este documento se observa cómo en ningún nivel aparecen referencias claras y concretas acerca de cómo implementar las tecnologías en el aula, básicamente se alude a ellas mediante generalidades o consideraciones muy globales referentes casi siempre a que, sin duda, su uso mejoraría y ampliaría las posibilidades de los estudiantes. Como señala Waits (1998): *"No hay una visión clara respecto al más importante agente de cambio en la educación matemática -los avances tecnológicos"*.

Recientemente, en el documento definitivo y que reemplaza al anterior (NCTM, 2000) las nuevas tecnologías han sido consideradas con un mayor énfasis y todo el documento está repleto de ejemplos y formas de usarlas, añadiéndose a la versión de papel la posibilidad de adquirir una versión electrónica donde se ejemplifican las propuestas realizadas con la tecnología. Nuevamente es desarrollado el principio de tecnología en el que se declara: *"La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influyen sobre las matemáticas que son enseñadas y favorecen el aprendizaje de los estudiantes"* (NCTM, 2000, p. 24).

Es interesante el cambio de posicionamiento respecto del uso de las nuevas tecnologías; en la versión definitiva, se apuesta firmemente por el empleo de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, mientras que en 1998 se aconsejaba su uso ya que 'podrían aumentar el aprendizaje de las matemáticas'. En el documento del 2000 se afirma que aumentan el aprendizaje, transformando los contenidos a enseñar así como la metodología: *"la existencia, versatilidad y poder de la tecnología hace posible y necesario reexaminar qué matemáticas deberían ser aprendidas por los alumnos y también cómo ellos pueden aprenderlas mejor"* (NCTM, 2000, p. 25). Es nuestra impresión que sus afirmaciones son categóricas, concediéndole extremada importancia a la tecnología. Nosotros nos preguntamos: ¿es esencial la tecnología para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas? ¿Quiere decir que sin ellas no se puede enseñar matemáticas? Nosotros pensamos que las tecnologías (siempre que se realice un aprovechamiento significativo de las mismas) pueden ser un complemento para la enseñanza pero no que sean esenciales o que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, el papel del profesor es de suma importancia, para realizar un aprovechamiento significativo de las nuevas tecnologías es necesario que el desarrollo de las actividades mediadas por estas tecnologías sean realizadas por un profesor experto en ellas. No se debe de entender que el mero uso de calculadoras o computadoras, produzca y aumente el aprendizaje de las matemáticas en los escolares sin el apoyo y guía del docente experto.

Ministerio de Educación y Ciencia de España, MEC (1991)

De manera análoga al ejemplo anterior, en este documento del Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC, 1991) se señala respecto de las nuevas tecnologías:

"(...) Los más recientes progresos, así como un mejor conocimiento de la naturaleza misma del conocimiento matemático, tienen también consecuencias sobre la educación en matemáticas, un área que, si bien ha estado presente tradicionalmente en la enseñanza académica, sin embargo, puede y merece ser enseñada con contenidos y mediante procedimientos a menudo bien distintos de los tradicionales. La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente tanto en los contenidos como en la forma de enseñanza" (MEC, 1991, p. 74).

México

Con respecto a México, nos centraremos en el trabajo realizado por Rivera y Santos (2000) llevado a cabo entre los años 1997 y 1999. En el trabajo se revisaron los planes y programas de estudio de veintiocho instituciones mexicanas en relación con la educación matemática del nivel medio superior, en los que se encontraron propuestas de enseñanza en las que se incitaba a la utilización de las nuevas tecnologías pero, como señalan, limitándose la gran mayoría de las propuestas educativas a indicar que sería útil y provechoso, dando una lista de calculadoras o software apropiados, dejando toda o casi toda la responsabilidad de la implementación de las nuevas tecnologías al docente.

2.3.2 Las Nuevas Tecnologías

Toda actividad cognitiva del ser humano (entendida como un conjunto articulado de acciones que tienen un propósito) está mediada por instrumentos (Wertsch, 1991), como por ejemplo el lápiz y el papel o el lenguaje. Consideramos a los nuevos instrumentos tecnológicos como instrumentos de mediación en la construcción y estructuración del conocimiento matemático. Los significados de los objetos y las acciones se manipulan y modifican mediante un proceso interpretativo que es desarrollado por las personas; cuando el sujeto trabaja con una herramienta tecnológica, en función del anterior criterio, éste orientará su trabajo atendiendo a lo que para él significan los objetos y acciones que se representan en la pantalla. De este modo, el significado se deriva o surge como consecuencia de la interacción entre el individuo, su experiencia y el instrumento empleado.

Consideramos que las nuevas tecnologías suministran un nuevo ambiente que permite realizar distintas representaciones semióticas de un concepto u operación matemática y, lo que es más importante, permiten el tránsito de una representación a otra (Lupiáñez, 2000).

Cuando se trabaja con nuevas tecnologías, la actividad es situada en un contexto particular y con las especificaciones del instrumento (en nuestro caso utilizamos el programa *Cabri* con las características y especificaciones de dicho programa), haciendo que la actividad sea distinta a como se trabaja en lápiz y papel e inclusive, como señala Balacheff y Kaput, ofreciendo un nuevo realismo matemático: *"(...) Balacheff y Kaput (1996) han hablado sobre un 'nuevo realismo matemático' debido a las nuevas experiencias mientras trabajamos en un ambiente computacional"* (Moreno 1999, p. 101).

Un ejemplo de cómo el ambiente computacional puede transformar la forma de pensar, reflexionar y actuar de un sujeto es proporcionado por Moreno (1999, p. 101) *"(...) Consideramos, por ejemplo, el ambiente proveído por Cabri-Géomètre. Allí* *podemos transformar (por dragging) un triángulo en otro mientras intentamos invalidar una propiedad (por ejemplo, que las bisectrices siempre se intersectan en un punto interior del triángulo). La imposibilidad de invalidar la propiedad nos permite hacer una proposición que nosotros llamaremos ‘teorema’ "*. Esa representación (el triángulo con sus bisectores) la denomina Moreno (1999), ‘*representación ejecutable*’.

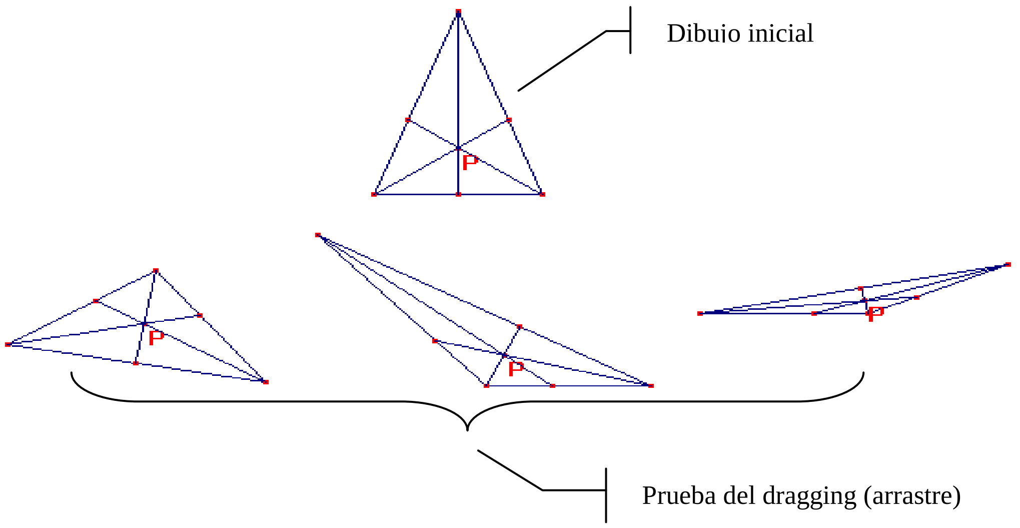


Figura 2.2: Prueba de soporte del dragging (arrastre).

Nosotros usaremos el término *representación interactiva* para referirnos a las representaciones que produce una computadora y en particular a las representaciones ejecutables. Preferimos usar esta terminología por parecernos más amplia en un contexto computacional, y afirmamos que para que se produzca un aprovechamiento significativo en el aprendizaje de las matemáticas utilizando como herramienta la computadora, el estudiante debe cambiar el objeto de cognición, el cual ya no es la “representación pasiva” sino la “representación interactiva”, (representaciones manipulables producidas por el programa informático, las cuales se pueden replicar, aumentar, achicar, cambiar el punto de observación, ...), estimulando la necesidad de que el estudiante reflexione sobre éstas (Codina & Rivera, 1999).

2.3.3 Tecnologías y Resolución de Problemas

Consideramos necesario utilizar los instrumentos tecnológicos para “*pensar matemáticas*” y, desde el punto de vista del aprendizaje, la resolución de problemas permite realizar un puente entre el uso significativo de las tecnologías y la enseñanza escolar de las matemáticas a través del rediseño de problemas y tareas, como señalan Rojano & Moreno (1999, p. 331):

"El papel de los instrumentos va más allá que el de servir de 'prótesis para la acción'. La presencia de tales instrumentos puede re-organizar todo el funcionamiento cognitivo. Por ejemplo, puede contribuir al re-diseño de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación" (Rojano & Moreno, 1999, p. 331).

Santos (1998, p. 433) acerca de la resolución de problemas comenta que:

"Un principio integrador en la resolución de problemas es que el estudiante debe tener la oportunidad de problematizar su aprendizaje de la disciplina. Es decir, debe enfocar sus actividades alrededor de preguntas en donde se cuestione por qué las cosas se presentan de tal forma, investigar y analizar soluciones, y resolver incongruencias o rediseñar o formular nuevos problemas"(Santos, 1998, p. 433).

Nosotros afirmamos que con las nuevas tecnologías, el estudiante tiene más oportunidad para problematizar su aprendizaje, por ejemplo, en una experiencia (Codina & Rivera, 1999) llevada a cabo con dos alumnos que trabajaron colaborativamente un problema matemático apoyados con el paquete informático *Mathematica*, se pudo observar cómo ellos realizaban parte del análisis del problema en función de lo que se observaba en la computadora, cuestionándose acerca de por qué las cosas se presentan de esa forma, investigaron y analizaron soluciones parciales del problema, resolvieron incongruencias suscitadas a través de su trabajo, rediseñando y formulando nuevos problemas y transitaron entre distintas representaciones de objetos matemáticos. La computadora sirvió como medio fundamental y estuvo presente en casi todo el trabajo de los alumnos, facilitando que éstos consiguieran resolver el problema.

2.3.4 Acerca del Software de Geometría Dinámica *Cabri-Géomètre*

El software de geometría dinámica Cabri-Géomètre *constituye un micromundo en el que la versatilidad en su capacidad de representación de objetos geométricos permite* *que las actividades adquieran una nueva dimensión que realmente escapan a las posibilidades de lápiz y papel.*

La falta de distinción entre el dibujo y el objeto geométrico representado puede producir un primer obstáculo para la comprensión de la geometría. Este ambiente de geometría dinámica ofrece al usuario una profunda interacción entre objeto matemático y la figura o dibujo que lo representa ya que dada una construcción (realizada mediante Cabri*), se puede desplazar, deformar o rotar, lo que permite analizar los invariantes geométricos que el objeto posee. Expliquemos un poco más esto; si construimos un círculo, éste será un representante de la clase geométrica de los círculos ya que, a través del arrastre, lo puedo modificar en otros círculos de distinto radio y distinta posición en la pantalla de la computadora.*

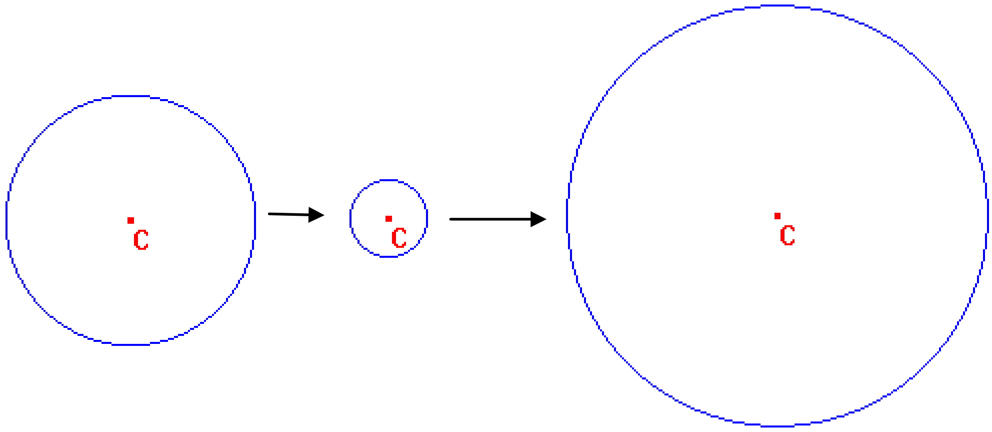


Figura 2.5: Arrastre del círculo.

Por otro lado, *Cabri* permite trabajar simultáneamente con distintos sistemas de representación. Por ejemplo, se construye un segmento AB, sobre él se sitúa un punto P y medimos la distancia AP; cuando se varía el punto P a lo largo del segmento se puede observar cómo la medida proporcionada por *Cabri* también varía; incluso se puede trabajar con dicha medida a través de la calculadora y el resultado nuevamente se altera cuando se mueve el punto.

La posibilidad de animación de objetos hace que se multipliquen las posibilidades de trabajo. En el anterior ejemplo podemos conseguir tabular los datos que se obtienen al variar el punto P mediante la creación de una tabla y su posterior animación cuando el punto se mueve, de este modo tendremos una representación dinámica de las mediciones.

Además, *Cabri* también posibilita la reconstrucción de la secuenciación de trabajo llevado a cabo mediante la orden *Revisar construcción* que nos permite volver sobre lo ejecutado para usarlo nuevamente, modificarlo o analizarlo.

A grandes rasgos, podemos distinguir dos tipos fundamentales de actividades que pueden llevarse a cabo en *Cabri*: aquellas en las que, partiendo de una construcción previa, se estudia alguna propiedad o relación de dicha construcción, y aquellas en las que se trata de modelizar una situación que proviene de un ambiente que puede ser ajeno a *Cabri*. En nuestra investigación deseamos estudiar cómo algunos estudiantes pueden modelar un problema con miras a resolverlo, si bien trataremos con actividades del primer tipo en sesiones de trabajo previas con esos estudiantes.

Debido a las características descritas anteriormente hemos decidido usar este software por parecernos el más adecuado para nuestro trabajo.

El hecho de que los diseños curriculares otorguen a las nuevas tecnologías un peso importante en el aprendizaje de las matemáticas hace necesario realizar una reflexión acerca del papel de éstas.

Nosotros consideramos a los nuevos instrumentos tecnológicos como instrumentos de mediación en la construcción y estructuración del conocimiento matemático cambiando el objeto de cognición de los estudiantes, el cual ya no es la representación pasiva sino la representación interactiva.

Ahora bien, para realizar un aprovechamiento significativo de los instrumentos tecnológicos es necesario que el alumno, a través de ellos, problematice su aprendizaje (en el sentido descrito por Santos (1998, p. 433)) siendo necesario que el estudiante concrete una serie de recursos que le permitan recabar información relevante para la resolución del problema.

Por último, no cabe duda de que las tecnologías son importantes en la actual educación pero, el papel que otorga el NCTM (2000) a éstas nos parece categórico y excesivo ya que, en ocasiones, las tecnologías pueden dificultar el aprendizaje de los estudiantes.

2.4 El Papel del Docente

2.4.1 Currículo y Docencia

Adoptaremos como currículo "*(...) toda actividad que organiza y lleva a cabo un plan de formación (...)*", y en particular, como currículo de matemáticas "*(...) un plan de formación en matemáticas de niños, jóvenes y adultos de un país, que tiene lugar en el sistema educativo, cuya puesta en práctica corresponde a profesores y especialistas*" (Rico, 1998, p. 7). Situándonos en el plano educativo, el curriculum de matemáticas es un objeto que se construye en el proceso de configuración (Diseño), implantación (Desarrollo), concreción y expresión (Implementación) del plan de formación en unas determinadas prácticas pedagógicas y su evaluación.

Todo currículo presenta, al menos, tres niveles básicos organizativos y de análisis: el sistema educativo, los centros escolares y el aula. Los sistemas educativos son los encargados de planificar y gestionar la educación matemática del país, encargándose del diseño del plan de formación. Normalmente es realizado por las instituciones políticas encargadas de la educación del país. Gimeno (1995) lo denomina "*curriculum prescrito*", el cual está presentado sobre mínimos que actúan como referencia organizadora del sistema educativo. Situando entre los sistemas educativos y los centros de enseñanza encuadramos lo que Gimeno (1995) denomina "*curriculum presentado a los profesores*": medios y recursos que suelen traducir el significado y contenido del currículo prescrito a los profesores y a la sociedad en global. Los libros de texto son un ejemplo.

Los centros de enseñanza son el lugar donde se lleva a cabo el desarrollo y puesta en práctica del plan de formación, y Gimeno (1995) denomina "*curriculum moldeado por los profesores*" a la reinterpretación por parte de los profesores tanto del *currículo prescrito* como del *presentado a los profesores* adaptándolos a su entorno cultural y escolar.

El aula es el lugar de trabajo del docente; y Gimeno (1995) llama *currículo en acción* a la puesta en práctica del plan de formación. Como señalan este autor y Rico (1998), dicha puesta en práctica está guiada por los esquemas teóricos y modos específicos de pensamiento del profesor que se concretan en las tareas académicas y acciones pedagógicas-didácticas del mismo. Gimeno (1995) considera dos tipos más de curriculum, el *currículo realizado y el currículo evaluado*, el primero es el efecto del currículo en acción, que se refleja en el aprendizaje de los alumnos, pero también afecta a los profesores e incluso se proyecta en el entorno social. El segundo es donde se refuerza el significado concreto de la práctica, es la evaluación del plan de formación y afecta a todos los niveles organizativos.

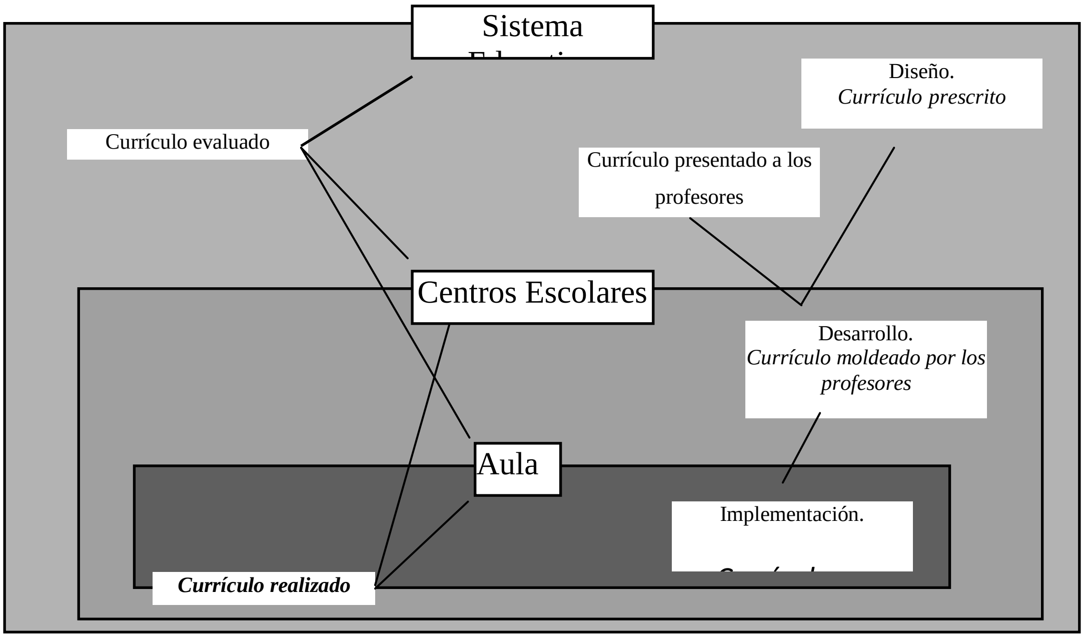


Figura 2.6: Cuadro resumen del currículo, sus niveles organizativos e interacciones.

Ahora bien, *"El profesor es quien, en última instancia, decide los aspectos a cubrir en la clase, específicamente cuánto tiempo dedicará a una determinada materia, qué tópicos va a enseñar, a quién se los enseña, cuándo y cuánto tiempo les concederá y con qué calidad se aprenderán"* (Gimeno, 1995, p. 208); luego, el docente tiene especial incidencia en los niveles de análisis que hemos denominado *Centros Escolares* y *Aula* y, por tanto, en el currículo moldeado por los profesores, en acción y en el realizado.

2.4.2 Competencias y Formación del Profesor

El NCTM (1991) a través de la publicación *Professional Standards for Teaching Mathematics* realiza una reflexión extensa sobre el papel del profesor en el aula y sobre su formación, analizando las características y habilidades que éstos deberían poseer. Según el documento, respecto al desarrollo de la clase, el profesor es responsable de dar forma y de dirigir las actividades, promoviendo y fomentando oportunidades para que el alumno consiga un empleo significativo de las matemáticas en un contexto de resolución de problemas. Para ello, el profesor debería crear un ambiente de aprendizaje que fomente, entre otras cosas, el desarrollo potencial de cada alumno, la exploración matemática, el respecto y valoración de las ideas de los estudiantes, las formas de pensamiento y disposiciones matemáticas, potenciar el trabajo colaborativo y dar sentido a la competencia matemática para validar y soportar ideas con argumentaciones matemáticas.

De forma similar, se describe la labor del docente en el currículo español y dentro del marco educativo que establece la LOGSE "*Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo*" (MEC, 1990), considerando a éste como un elemento participante en el diseño curricular, a través de la elaboración y adaptación de proyectos curriculares a los intereses de sus alumnos y en el contexto concreto en el que realizan sus procesos de aprendizaje (currículo moldeado por el profesor). Por ello, el docente afronta una difícil y ardua tarea en la que sus obligaciones se incrementan y se le exige más.

Asimismo, el documento del NCTM (1991) destaca la importancia de los docentes como figuras claves para cualquier cambio en las formas en las que las matemáticas son enseñadas y aprendidas. Ahora bien, la formación del profesorado de matemáticas para afrontar estos cambios es uno de los grandes problemas de los sistemas educativos ya que, como señala Gimeno (1995, p. 113), "*las exigencias de la educación escolarizada crecen más rápido que la mejora de la calidad de los profesores*". Lo ideal, como señala Rico (1997, p. 110) es que el currículo "*(...) aliente una investigación y un programa de desarrollo personales por parte del profesor, mediante el cual éste aumente progresivamente la comprensión de su propia labor y perfeccione así su enseñanza*".

Cornu (1999) realiza una reflexión acerca de las necesidades y competencias de los futuros profesores de matemáticas, y listó un conjunto de 27 características que todo docente debería de poseer, las cuales son una síntesis de las que podemos encontrar en los diseños curriculares mostrados anteriormente, preguntándose a continuación:

"*¿Nosotros necesitamos que cada profesor sea competente en cada una de las competencias descritas, o necesitamos equipos de docentes que entre todos reúnan todas las competencias?"* (Cornu, 1999, p. 198).

Cornu explora una cuestión que a priori parece difícil de contestar y que se presenta como un futuro campo de investigación que nosotros no analizaremos, sólo queremos mostrarlo y comentar que en los recientes cambios curriculares, se tiende a considerar y a otorgar, mayor peso e importancia a los grupos de trabajo y de profesores interdisciplinares para llevar la práctica educativa de los centros escolares.

Un factor importante para la enseñanza de las matemáticas es la calidad de los materiales con los que el profesor y el alumno trabajan. La dependencia del docente respecto de los materiales presentados al profesor, como los libros de texto, es un motivo de descualificación técnica del docente, éste debe de considerar que estos medios están diseñados fuera del contexto cultural y particular de su práctica. Dentro de estos recursos, nosotros encuadramos a las calculadoras y computadoras: el profesor debe ser consciente de las dificultades y saber que con las nuevas tecnologías se pueden superar dificultades de la educación, pero lo que es más importante, que también aparecen otras relacionadas con su uso.

Cuando un profesor pretende introducir las nuevas tecnologías dentro del salón de clase, debe adoptar el papel de profesor-investigador ya que, en primer lugar, se está trabajando con un material que ofrece amplias expectativas y, en cierto modo, bastante novedoso, que necesita tiempo de aprendizaje, control y evaluación por parte del docente. Y en segundo lugar porque deberá diseñar y rediseñar constantemente y con cuidado las actividades, ejerciendo un control minucioso sobre la evolución de la enseñanza y aprendizaje de sus alumnos con estos instrumentos.

Ahora bien, ante las nuevas indicaciones curriculares basadas en la resolución de problemas y la introducción de las nuevas tecnologías en el salón de clase, las fuentes de seguridad del docente se vuelven inestables y como consecuencia, se pueden fortalecer o bien la dependencia del docente a agentes exteriores (currículo presentado a los profesores), o bien la reproducción del conocimiento por él adquirido, que considera útil y que, desaparece con la nueva propuesta (Gimeno, 1995). Y, por tanto, como señala Rico (1997, p. 223):

"*Desde el interior del aula el profesor ve el currículo de matemáticas sólo como una parte del proceso educativo. El profesor se propondrá cambiar su enseñanza solamente si ve el cambio garantizado tanto por objetivos educativos más amplios como por los más específicos de la enseñanza de las matemáticas*".

CAPÍTULO 3

Metodología de Investigación

3.1 Introducción

Dentro de nuestro trabajo y según los interrogantes planteados en las preguntas de investigación, queremos analizar las prácticas de estudiantes a la hora de resolver problemas matemáticos con el apoyo de la tecnología suministrada por la computadora. Más concretamente, en el plano experimental del estudio observamos el desempeño de un grupo de estudiantes para resolver un problema que relaciona varias facetas de la matemática usando el software de geometría dinámica *Cabri-Géomètre*.

En este capítulo describimos la metodología que empleamos en nuestra investigación con la que pretendemos extraer datos para responder a los interrogantes planteados antes, la muestra de individuos con los que realizamos la fase experimental de la misma, así como las actividades que se desarrollaron en el estudio de campo.

3.2 Metodología de Investigación

La naturaleza de la investigación realizada es de corte cualitativo y podemos encuadrarla dentro de las *investigaciones descriptivas* en el sentido expresado por Best (1970, extraído de Cohen & Manion, 1990) según el cual, este tipo de investigación se preocupa de:

"(...) las condiciones o relaciones que existen; de las prácticas que prevalecen; de las creencias, puntos de vista o actitudes que se mantienen; de los procesos en marcha; de los efectos que se sienten o de las tendencias que se desarrollan. A veces, la investigación descriptiva se preocupa de cómo, lo que es *o lo* que existe, *se relaciona con algún hecho precedente que ha influido o afectado a un suceso o condición presentes"* (Cohen & Manion, 1990, p. 101).

No obstante, nuestro interés no es describir relaciones entre determinadas variables en un momento dado y los cambios que aparecen en dichas relaciones a lo largo del tiempo, sino desde la óptica de la incursión de un elemento desconocido por los sujetos del estudio y analizar la variación en sus hábitos de pensamiento y trabajo.

Consideramos importante señalar el papel de observador que posee el investigador, y que lleva a cabo una observación participante (Buendía et. al., 1997;

Cohen & Manion, 1990), en el sentido que se compromete en las actividades que observa, además de conducir la dirección de dichas actividades.

3.3 Población del Estudio y Recursos

La fase experimental de la investigación se realizó con 9 jóvenes de entre 16 y 19 años de 1º y 2º de bachillerato que no habían cursado ninguna materia de cálculo. Los alumnos procedían de diferentes instituciones de la Ciudad de México. La elección de los sujetos del estudio se realizó a través de una convocatoria pública en la que sólo se exigía ese nivel educativo; por tanto, la muestra fue aleatoria.

La actividad se desarrolló en un laboratorio del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN; los sujetos formaron libremente cuatro parejas y un estudiante trabajó solo; cada una de estas parejas dispuso de una computadora de escritorio Macintosh, con la versión 1.0 del programa informático *Cabri-Géomètre* II. El investigador contó con la colaboración de un ayudante que compartió con él las tareas de observación y dirección de actividades. Asimismo los investigadores disponían de un proyector conectado a otra computadora en el que se mostraban actividades o ejemplos.

3.4 Descripción de la Experimentación

El trabajo con los estudiantes se realizó en forma de taller a lo largo de 5 jornadas consecutivas con una duración de 4 horas por día, con un leve receso de 15 minutos a la mitad de cada sesión.

Nuestro objetivo principal se dirigió hacia la resolución de un problema de optimización en el ambiente geométrico de *Cabri* y, para ello, en las dos primeras sesiones mostramos el funcionamiento del software y de los principales comandos que les serían útiles posteriormente, así como para plantear actividades que, de diferentes maneras, les acercaban pautas de trabajo y posibilidades de este ambiente que les fueran de utilidad para afrontar la resolución del citado problema. A continuación detallaremos algunas de estas actividades y el problema central de optimización.

3.4.1 Sesiones Primera y Segunda del Estudio

Al inicio del taller, los investigadores mostraron el funcionamiento de las distintas funciones que posee el programa y cómo se ejecutan: cómo se construyen objetos geométricos fundamentales, cómo articular varias de esas construcciones, mostrar las propiedades de algunas de ellas, realizar cambios de estilo, ... Se puso especial interés en presentar las peculiaridades de los objetos que dependen de construcciones previas, así una de las primeras actividades que se propusieron fue que construyeran un cuadrado sin usar el comando *Polígono Regular*, que lo puede realizar instantáneamente. Esto nos permitió introducir la noción de arrastre de figuras que posee *Cabri*, como un test para decidir qué construcciones son acreedoras de los invariantes que definen y caracterizan a los objetos geométricos. Por ejemplo, si para crear ese cuadrado sólo señalamos cuatro puntos que *parezcan* pertinentemente colocados y los unimos con segmentos, podremos observar cómo el mover alguno de ellos hará que se pierda la construcción de cuadrado:

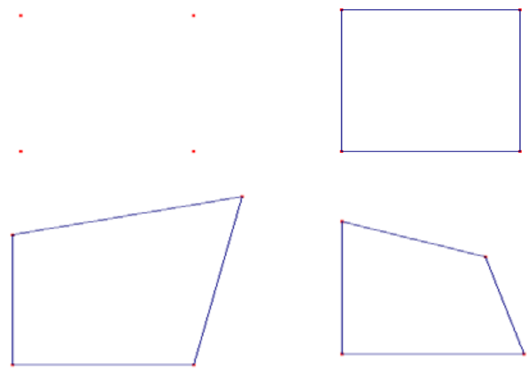


Figura 3.1: Construcción de un cuadrado según cuatro puntos.

A continuación, se dirigió una secuencia de acciones para construir un cuadrado que *soporte* la acción del de arrastre (empleando rectas perpendiculares o paralelas a objetos creados con anterioridad. Ver Figura 3.2). Los estudiantes aportaban sus sugerencias para dicha construcción y eso les sirvió para conocer algunos comandos de gran utilidad en *Cabri* como son la transferencia de medidas y el compás.

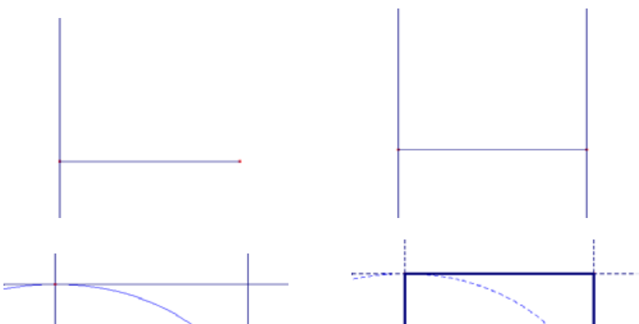


Figura 3.2: Construcción de un cuadrado.

En la segunda sesión se plantearon actividades concretas para el estudio de propiedades geométricas de círculos y triángulos, con las que se perseguía profundizar en las construcciones, presentar funciones importantes de ese ambiente, como la posibilidad de tabular datos y realizar cálculos aritméticos, y llevar a cabo tareas en las que los jóvenes conjeturasen propiedades de dichas construcciones. Asimismo, se introdujeron ejemplos de creación de objetos como lugar geométrico, como la parábola y la función seno, con idea de mostrar las posibilidades de *animación* de objetos en *Cabri*, y de la función *traza*. Centrémonos en algunas de estas tareas:

Estudio del Teorema del Ángulo Central

Con esta actividad perseguíamos que los jóvenes realizaran actividades de medición y de tabulación de datos para observar patrones de comportamiento y en las que se requería mover objetos y usar la calculadora.

Partiendo de un círculo cualquiera y de tres puntos arbitrarios sobre él, pedimos que unieran los puntos con segmentos para formar un ángulo interior al círculo:

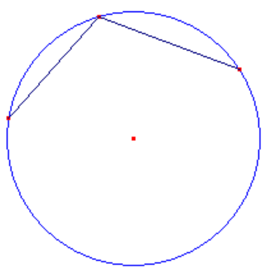


Figura 3.3: Ángulo interior a un círculo.

A continuación se les pidió que movieran el punto en el que convergían los dos segmentos a lo largo de la circunferencia, y les preguntamos acerca de la variación del ángulo situado en ese punto y formado por los segmentos.

El siguiente paso fue construir el ángulo definido por los puntos fijos y el centro de la circunferencia y que lo compararan con el anterior. Esto los llevó a medir ese nuevo ángulo y observar las variaciones simultáneas de uno y otro; aprovechamos para presentar la calculadora que incluye el programa para que "jugaran" con los datos que poseían:

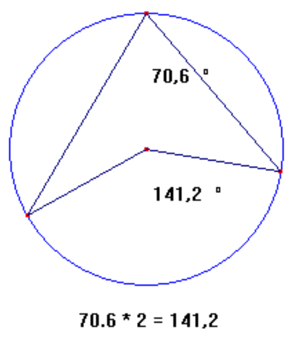


Figura 3.4: Teorema del Ángulo Central.

Finalmente los conducimos a la tesis del Teorema del Ángulo Central según el cual el ángulo construido en segundo lugar es el doble del primero.

Propiedades de los Triángulos

Con los triángulos articulamos diferentes actividades que iban desde la construcción de triángulos determinados como equiláteros o isósceles hasta el estudio de puntos notables como el *baricentro*, el *circuncentro* y el *ortocentro*. El solo hecho de construir triángulos equiláteros, ya generó discusiones interesantes entre todos los estudiantes, y algunos de ellos mostraron en el proyector sus propuestas que luego eran evaluadas entre todos.

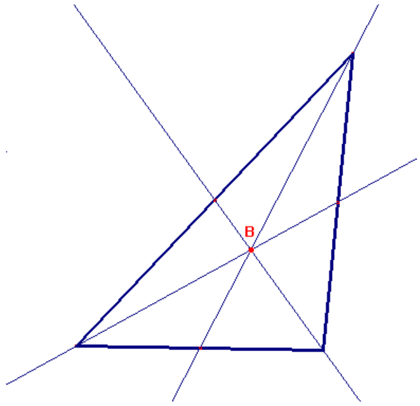


Figura 3.5: Construcción del Baricentro de un triángulo.

Otra tarea fue estudiar la relación entre esos puntos de corte y conjeturaran que éstos estaban alineados. Posteriormente se les indicó que la recta determinada por cualquiera de dos de esos puntos es conocida como la *Recta de Euler*.

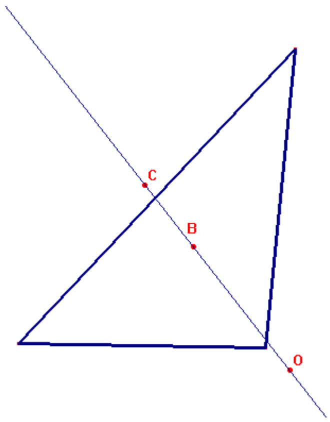


Figura 3.6: La Recta de Euler.

Con estas actividades no pretendíamos ocuparlos mucho tiempo y por eso sólo dedicamos las dos primeras sesiones del taller a ellas, pero logramos el objetivo de que todos conociesen, unos mejor que otros, las posibilidades de *Cabri* sobre todo con idea a que usaran todas esas posibilidades en la resolución del problema que les formulamos en la tercera sesión.

3.4.2 Sesiones Tercera, Cuarta y Quinta del estudio. Planteamiento y Resolución del Problema

A continuación mostramos el enunciado del problema y su resolución (hecha por nosotros), plausible de ser realizada en el ambiente *Cabri*, así como las que se pueden realizar con lápiz y papel. Obviamente, es lógico pensar que esta tarea podrá abordarse de diferentes formas por lo que nuestro interés es sólo mostrar algunas de ellas. En el siguiente capítulo abordaremos la resolución del problema de los estudiantes.

Enunciado del Problema: Una Carrera Singular

Pedro y Juan compiten en una carrera, parte de la cual se realiza sobre tartán y otra parte en fango. Pedro ha participado en olimpíadas internacionales, mientras que Juan solamente ha participado en competencias de su pueblo. Pedro es más veloz que Juan en tartán, pero Juan corre más rápido que Pedro en el terreno lodoso. Ambos corredores partirán de un punto **A**, que se encuentra en la zona de tartán y la meta es un punto **B** que se encuentra en el fango, a una distancia de 100 metros del punto **A** en línea recta.

En carreras de 100 metros, las velocidades que desarrollan en promedio cada uno de los corredores son las siguientes:

En tartán:

Pedro puede correr a una velocidad promedio de 36 kilómetros por hora (100 metros en 10 segundos) y Juan a una velocidad promedio de 30 kilómetros por hora (100 metros en 12 segundos).

En el fango:

Pedro corre, también en promedio, a una velocidad de 12 kilómetros por hora, mientras que Juan es más rápido y corre a una velocidad promedio de 20 kilómetros por hora.

Se pregunta: ¿Quién gana la carrera, Pedro o Juan?

Nota: la distancia más corta entre el punto **A** y la línea divisoria de los dos terreros es 35 metros, mientras que del punto **B** a la misma línea es de 25 metros.

Atendiendo a las clasificaciones de los problemas que mostramos en el capítulo 2 podríamos encuadrar este problema en aquellos en los que se pide encontrar algo, en este caso quién es el ganador de la carrera (primera clasificación de Polya), como un problema con un acercamiento al nivel de la investigación (segunda de Polya) y en la clasificación de Rietman como un problema con el estado inicial bien definido (la carrera) y el estado final mal definido (quién gana).

Resolución del Problema con *Cabri*

En primer lugar nosotros necesitamos aislar la información relevante del enunciado:

- La carrera se realiza en dos tipos de terreno.
- Velocidad de Juan:
  - En tartán: 30 km/h.
  - En fango: 20 km/h.
- Velocidad de Pedro:
  - En tartán: 36 km/h.
  - En fango: 12 km/h.
- La distancia desde el punto A a la línea divisoria de los terrenos es de 35 metros.
- La distancia desde el punto B a la línea divisoria de los terrenos es de 25 metros.
- La distancia desde el punto A al punto B en línea recta es de 100 metros.

A continuación se presenta una figura en la que se representa el problema:

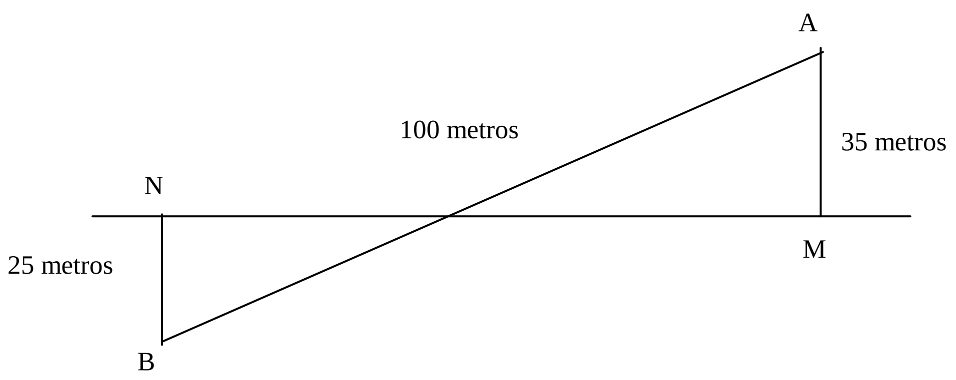


Figura 3.7: Modelo del problema.

Una vez que nosotros hemos analizados los datos del problema continuamos con su resolución, en primer lugar tenemos que realizar conversiones de medidas, o bien las velocidades de los corredores las expresamos en m/s, o bien, las distancias las expresamos en km. Nosotros hemos escogido realizar el cambio de velocidades a metros por segundo así;

Para Juan:

En tartán: 30 km/h = (25/3) m/s.

En fango: 20 km/h = (50/9) m/s.

Para Pedro:

En tartán: 36 km/h = 10 m/s.

En fango: 12 km/h = (10/3) m/s.

Ahora estamos en condiciones de continuar la resolución del problema con el apoyo del *Cabri-Géomètre*.

Para realizar un modelo a escala de nuestra situación necesitamos previamente conocer la distancia que hay entre N y M, para ello aplicaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC (ver figura 3.8)ya que la distancia BC es igual que la MN:

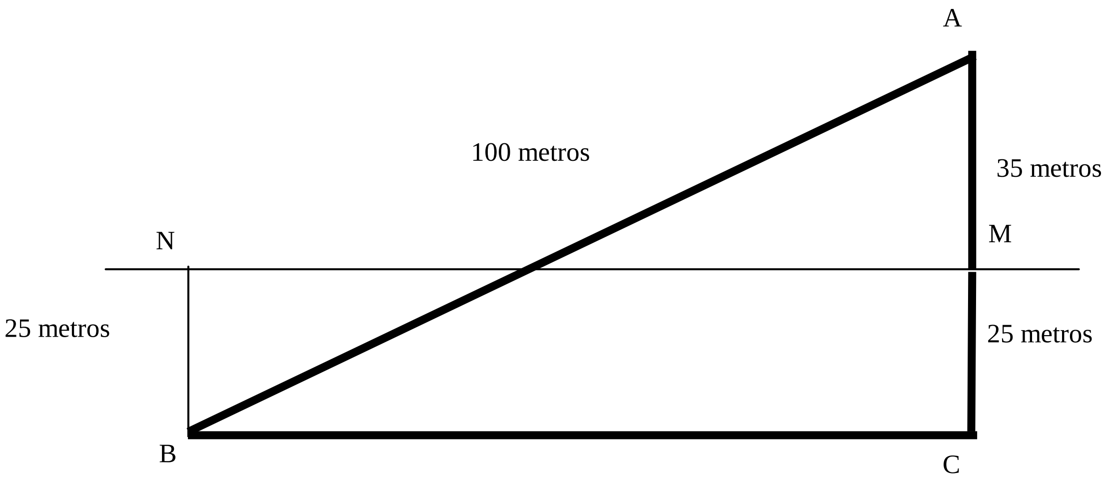


Figura 3.8: Triángulo para la obtención de la distancia NM.

Por lo tanto: $100^2 = BC^2 + AC^2$, luego $BC^2 = 100^2 - AC^2 = 100^2 - 60^2$, así

$$BC = \sqrt{100^2 - 60^2} = \sqrt{6400} = 80$$

Ahora estamos en disposición de realizar nuestro modelo a escala de la situación del problema.

Graficamos en primer lugar una recta, sobre ésta, construimos el punto M, editamos numéricamente el valor 8 (ya que *Cabri* trabaja con centímetros la edición numérica) y transferimos esta medida sobre el punto M obteniendo así un nuevo punto que llamaremos T, sobre M se construye una circunferencia con radio T, la intersección de la misma con nuestra recta será el punto N. Ahora sobre estos dos puntos situamos dos rectas perpendiculares. Editamos numéricamente 2.5 y 3.5 y transferimos las medidas a los puntos M y N obteniendo dos nuevos puntos P y Q. Construimos dos circunferencias, una de centro M y Q y la otra de centro N y radio P, de esta forma, el punto de intersección de la circunferencia y las rectas perpendiculares respectivas serán A y B.

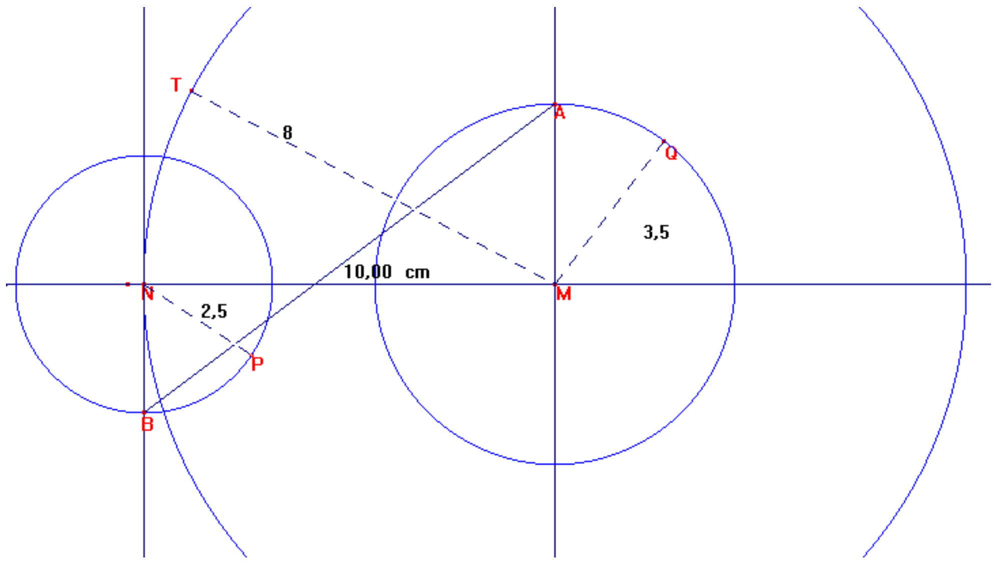


Figura 3.9: Construcción del modelo a escala en Cabri*.*

Ya hemos conseguido la modelización de la situación del problema. Veamos el modelo graficando los segmentos NB, NM, MA y AB y ocultando lo que no necesitamos:

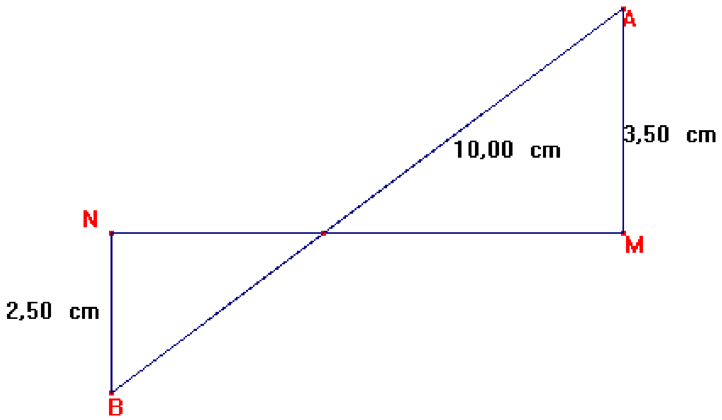


Figura 3.10: Modelo a escala "limpio".

Ahora ya estamos en disposición de poder terminar la resolución de nuestro problema en el ambiente *Cabri*. Dibujemos una trayectoria posible y calculemos el tiempo que tardan para esa trayectoria tanto Juan como Pedro. Para ello, dibujamos dos segmentos AI e IB, donde I será un punto situado entre los puntos N y M, medimos las distancias y utilizando la calculadora de *Cabri*, realizaremos las operaciones correspondientes para obtener los tiempos de cada corredor en cada uno de esos segmentos (AI, IB), es decir, aplicamos la fórmula t = d / v, con la salvedad de multiplicar siempre las distancias *Cabri* por 10 (volver los datos *Cabri* a los datos reales del problema) y sumamos los tiempos parciales obteniendo los tiempos totales para Juan y Pedro:

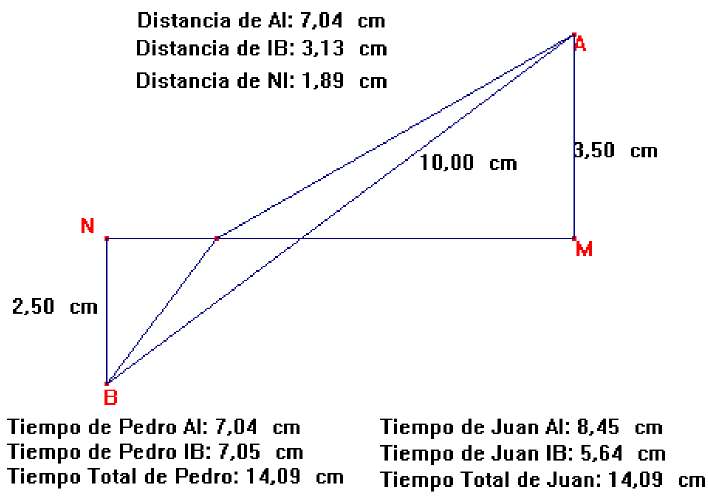
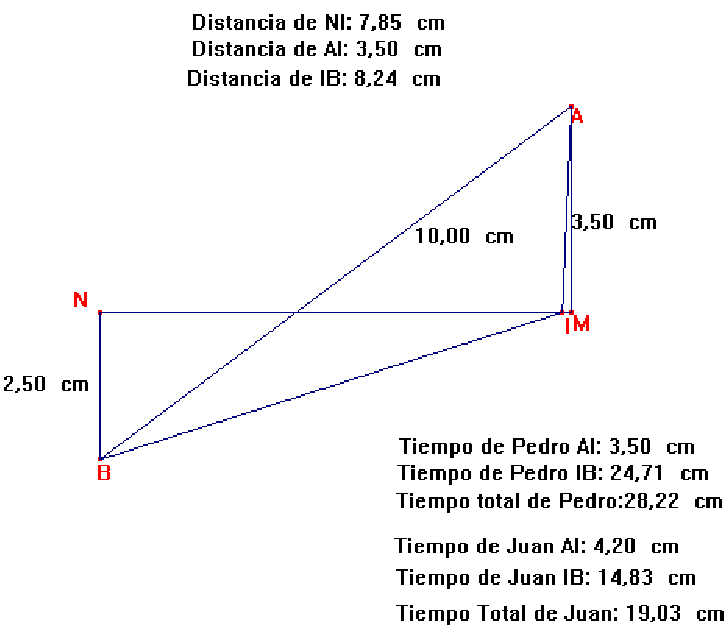


Figura 3.11: Resolución *Cabri* del problema.

Verdaderamente el problema ya se puede considerar resuelto, pues el punto I podemos variarlo sobre el segmento NM y tener los distintos tiempos que realizan los corredores, así se puede observar visualmente que el menor tiempo de Juan es 14.09 segundos y lo hace cuando el punto I está a una distancia aproximada de 18 metros respecto de N. Para Pedro, el menor tiempo es de 15.84 y lo hace cuando el punto I está a una distancia aproximada de 8 metros de N. Con esto podemos concluir que si Juan elige esa trayectoria siempre será ganador.

Solución del problema: Juan es el ganador de la carrera.

Ahora bien, esta información no nos puede dejar satisfechos. Tabulemos los datos de los tiempos de Juan y Pedro cuando el punto I se mueve desde N a M, para lo cual tabulemos la distancia NI, el tiempo de Juan y el tiempo de Pedro y animamos la tabla cuando el punto I se mueve de N a M.



	Distancia (	Tiempo To	Tiempo tot
1	1,62	14,10	16,22
2	0,10	14,87	16,15
3	0,05	14,92	16,19
4	0,00	14,98	16,23
5	0,05	14,92	16,19
6	0,10	14,87	16,15
7	0,15	14,82	16,11
8	0,20	14,77	16,07
9	0,25	14,72	16,04
10	0,30	14,68	16,01
11	0,35	14,64	15,98
12	0,41	14,59	15,96
13	0,46	14,55	15,94
14	0,51	14,52	15,92
15	0,56	14,48	15,91
16	0,61	14,45	15,90
17	0,66	14,41	15,89
18	0,71	14,38	15,88
19	0,76	14,35	15,88
20	0,81	14,33	15,88
21	0,86	14,30	15,88
22	0,91	14,28	15,89
23	0,96	14,25	15,90
24	1,01	14,23	15,91
25	1,06	14,21	15,92
26	1,11	14,20	15,94
27	1,16	14,18	15,95

Figura 3.12: Tabulación de los datos.

De la observación de la Tabla se puede deducir el rango de valores para la distancia NI para los que Juan se asegura que gana la carrera, es decir, si el punto I esta entre 0 y 53 metros, siempre será ganador con independencia de la trayectoria elegida por Pedro pues, el tiempo de Juan siempre será menor que el tiempo mínimo de Pedro.

Cabri ofrece un recurso más, podemos realizar un estudio gráfico de los tiempos para ambos corredores, y para ello dibujaremos un eje de coordenadas. Sobre el eje *X* transferimos la medida NI y sobre el eje *Y* transferimos los tiempos de Pedro y Juan. Se puede realizar la gráfica de los tiempos a través de la animación y traza o como lugar geométrico; veamos las gráficas:

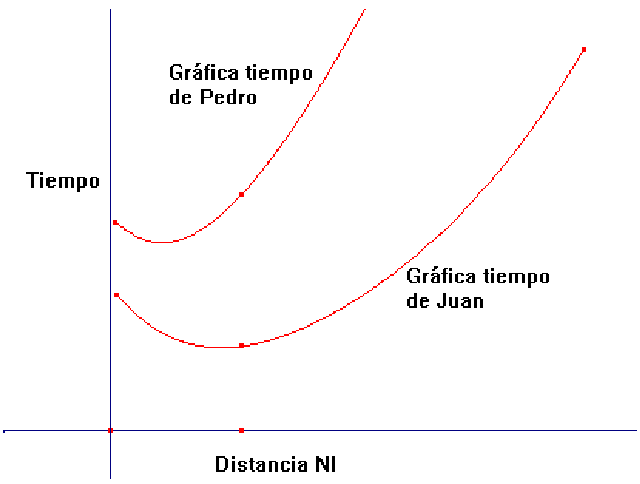


Figura 3.13: Gráficas de tiempos de Juan y Pedro.

Con este tratamiento se puede observar como Juan es el ganador siempre que tome por camino uno cuyo punto de intersección con los terrenos esté más cerca de N que el de Pedro.

Ahora modificamos el problema y proponemos que Pedro tenga una velocidad de 16 km/h cuando corre sobre Fango, con esta modificación se obtiene que Pedro ahora es el que realiza menor tiempo, por lo tanto, si éste elige la trayectoria óptima, ganará la carrera. Veamos las gráficas para esta situación:

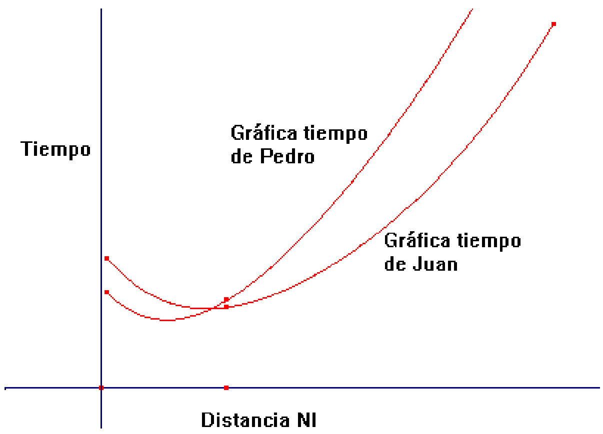


Figura 3.14: Gráficas de tiempos de Juan y Pedro del problema modificado.

Se puede volver a hacer todo lo anterior pero ahora con la velocidad nueva de Pedro en Fango. Para este caso, el tiempo mínimo de Pedro es 13.88 segundos y ocurre cuando I está a una distancia aproximada de 10 metros de N. El rango de valores donde Pedro gana es cuando I se encuentra aproximadamente entre 3.5 metros y 18.6 metros de N.

Con el tratamiento gráfico se puede observar cómo existe un punto donde los tiempos se igualan, ese punto corresponde a cuando I está a 18.5 metros de N. Luego, a partir de ese valor, si Pedro corriese entre I y M; Juan podría elegir una trayectoria en la que sería ganador.

Podríamos continuar realizando reflexiones y construyendo posibilidades pero creemos que con las señaladas son suficientes para mostrar la amplitud de respuestas parciales que pudieran darse.

Resolución del problema con lápiz y papel

Resolvamos ahora el problema, para ello utilizamos parte de los cálculos realizados con anterioridad, así tenemos nuestras velocidades convertidas a m/s y conocemos la distancia NM. Elijamos una trayectoria cualquiera AI-IB y definamos como *x* la distancia NI:

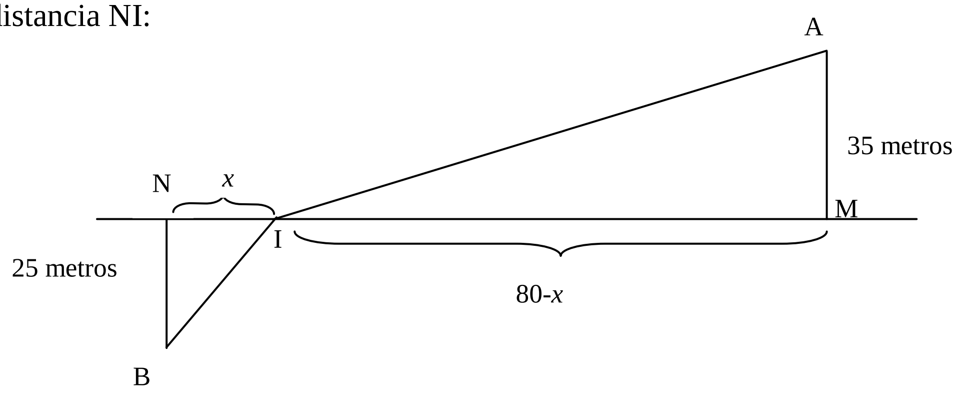


Figura 3.15: Esquema del problema.

Recordemos las velocidades de Juan y Pedro:

Para Juan:

En Tartán: 30 km/h = (25/3) m/s.

En Fango: 20 km/h = (50/9) m/s.

Para Pedro:

En Tartán: 36 km/h = 10 m/s.

En Fango: 12 km/h =(10/3) m/s.

Necesitamos conocer la longitud de AI y IB para poder aplicar la fórmula que involucra al tiempo en función de la distancia y la velocidad (t = d / v). Lo que pretendemos es obtener una función que nos dé el tiempo para Juan y, otra para Pedro, en función de *x*.

Así, para calcular la distancia de AI y IB aplicaremos el teorema de Pitágoras sobre los triángulos rectángulos AIM y IBN respectivamente (ver figura 3.15). De esta forma se tiene que:

$$\mathrm{AI} = \sqrt{35^2 + (80 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 160x + 7625}$$

$$\mathrm{IB} = \sqrt{25^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 625}$$

Por lo tanto, aplicamos nuestra fórmula en cada segmento (AI y IB) y sumamos los tiempos; de este modo tendremos definida una función de *x* cuya imagen es el tiempo para cada corredor.

Para Pedro: $P(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 160x + 7625}}{10} + \dfrac{3\sqrt{x^2 + 625}}{10}$

Para Juan: $J(x) = \dfrac{3\sqrt{x^2 - 160x + 7625}}{25} + \dfrac{9\sqrt{x^2 + 625}}{50}$

A continuación tenemos que buscar el mínimo para estas funciones, para ello derivamos ambas e igualamos a cero. Después de realizar simplificaciones[3] se llega a:

Para Pedro;

P'(x)=0 si y sólo si $3x\sqrt{x^2 - 160x + 7625} + (x-80)\sqrt{x^2 + 625} = 0$, y esto ocurre cuando $x \cong 7.86$. Ahora bien, $P'(x) = \dfrac{3x\sqrt{x^2 - 160x + 7625} + (x-80)\sqrt{x^2 + 625}}{10\sqrt{x^2 - 160x + 7625}\sqrt{x^2 + 625}}$

y, *P'*(*x*)<0 a la izquierda de *7.86* y, *P'*(*x*)>0 a la derecha del valor, luego *P*(*x*) tiene un mínimo en ese valor. Así, Pedro alcanza su mínimo tiempo cuando pasa aproximadamente a *7.86* metros de N y con un tiempo de $P(7.86) \cong 15.84$ segundos

Analogamente para Juan

J'(x)=0 si y sólo si $3x\sqrt{x^2 - 160x + 7625} + 2(x-80)\sqrt{x^2 + 625} = 0$, y esto ocurre cuando $x \cong 17.84$. Ahora bien, $J'(x) = \dfrac{9x\sqrt{x^2 - 160x + 7625} + 6(x-80)\sqrt{x^2 + 625}}{50\sqrt{x^2 - 160x + 7625}\sqrt{x^2 + 625}}$

y, *J'*(*x*)<0 a la izquierda de *17.84* y, *J'*(*x*)>0 a la derecha del valor, luego *J*(*x*) tiene un mínimo en ese valor. Así, Juan alcanza su mínimo tiempo cuando pasa aproximadamente a *17.84* metros de N y con un tiempo de $J(17.84) \cong 14.0886$ segundos

[3] No pondremos los cálculos de simplificación ni el método de resolución de la ecuación con radicales por

De este modo podemos deducir que Juan será el ganador ya que su tiempo mínimo es menor que el tiempo mínimo de Pedro.

Solución: Juan es el ganador de la carrera.

Otra forma de llegar a estos resultados es a través de la tabulación de datos, es decir, a partir de las funciones de los tiempos para Pedro y para Juan. En primer lugar realizamos una partición del segmento NM de diez en diez metros y calculamos el tiempo para Pedro.

Distancia NI	***Tiempos para Pedro***
0	16.232
10	15.903
20	16.551
30	17.818
40	19.466
50	21.380
60	23.531
70	25.939
80	28.644

Tabla 2: Tiempos de Pedro (primera partición).

Podemos observar que los tiempos van aumentando y que en el menor se alcanza cuando I está a diez metros de N, por lo tanto volvemos a realizar una partición pero ahora cuando I está como máximo a 20 metros de N:

Distancia NI	***Tiempos para Pedro***
0	16.232
2	16.073
4	15.962
6	15.899
8	15.880
10	15.904
12	15.967
14	16.066
16	16.199
18	16.361
20	16.551

Tabla 3: Tiempos de Pedro (segunda partición).

ser muy laboriosos y largos.

Ahora en esta nueva tabla, Pedro hace su menor tiempo cuando I se encuentra a 8 metros de N. Nuevamente podríamos subdividir y realizar una tabla para los valores comprendidos entre 7 y 9 pero realmente y a efectos prácticos, con el grado de precisión obtenido nos es suficiente. Realicemos ahora los cálculos para Juan:

Distancia NI	*Tiempos para Juan*
0	14.978
10	14.238
20	14.098
30	14.353
40	14.868
50	15.594
60	16.537
70	17.747
80	19.286

Tabla 4: Tiempos de Juan (primera partición)

El menor tiempo para Juan se alcanza cuando I está a 20 m. de N, por lo tanto volvemos a realizar una partición pero ahora cuando I está entre los 10 m. y los 30 m. de N:

Distancia NI	*Tiempos para Juan*
10	14.238
12	14.169
14	14.122
16	14.096
18	14.088
20	14.098
22	14.123
24	14.162
26	14.214
28	14.278
30	14.353

Tabla 5: Tiempos de Juan (segunda partición)

Juan hace su menor tiempo cuando I está a 18 metros de N, luego, como el tiempo mínimo de Juan es menor que el de Pedro podemos concluir que Juan ganará la carrera.

Nótese que aunque la precisión obtenida respecto del anterior método de resolución es menor, podríamos continuar realizando particiones de los intervalos para conseguir mayor precisión y, las extensiones realizadas con *Cabri*, se pueden volver a hacer con lápiz y papel de igual forma a como se hacen para cada uno de los dos métodos de resolución expuestos.

CAPÍTULO 4

Análisis de la Información del Estudio de Campo

4.1 Introducción

Como ya señalamos anteriormente, el taller se desarrolló a lo largo de 5 jornadas de trabajo en sesiones de 4 horas. En este capítulo describiremos la información relevante que se extrajo de la observación por parte de los dos investigadores de la experiencia.

4.2 Algunas Generalidades

De los 9 alumnos que acudieron a la convocatoria pública realizada, sólo uno de ellos no disponía de computadora en su hogar. Las parejas fueron formadas libremente entre los alumnos siendo la distribución la siguiente:

Pareja 1	Samira - Aideé
Pareja 2	Omar – Mónica
Pareja 3	Israel – Yéssica
Pareja 4	Rodrigo – Yéssica II.
Alumno que trabajó individualmente	Alonso[4]

Tabla 6: Parejas formadas por los alumnos.

Aunque ocho de los alumnos disponían de computadora, ninguno de ellos había manejado un software matemático; la computadora la utilizaban básicamente como máquina de escribir, para realizar operaciones sencillas como calculadora, para jugar, moverse por internet o chatear.

A lo largo del taller se pudo observar cómo el interés fue creciendo y los alumnos, progresivamente, se implicaron en la dinámica del mismo. Asimismo, los jóvenes descubrieron nuevas posibilidades de uso de la computadora y valoraron positivamente la ayuda que puede suministrar a sus estudios de matemáticas.

[4] Alonso trabajó a un nivel distinto respecto de sus compañeros destacándose en sus argumentaciones así como en las construcciones *Cabri* que realizaba, por ello describiremos su actuación independiente de la de los demás compañeros.

Al final del taller se realizó un pequeño convivio informal aprovechando esta ocasión para cuestionarlos acerca de cómo habían visto el taller, qué les había parecido y qué podían resaltar de él. Todos señalaron que les pareció muy interesante, comentaron que para ellos fue toda una sorpresa descubrir la existencia de software matemático con el que podían aprender matemáticas y, afirmaron que el taller les sirvió para recordar y aprender cosas nuevas.

Sorprendente fue la respuesta de Rodrigo cuando se le pidió que diera su impresión acerca del taller; a continuación mostramos parte del diálogo que compartió con todos:

> —. *Yo me siento miserable cuando estoy delante de una computadora (...) El taller me ha hecho ver la máquina distinta a como la veía, ahora se que se pueden hacer cosas más interesantes que sólo escribir, jugar, (...) Me ha resultado muy interesante y provechoso el taller.*

El hecho de conseguir comentarios como los de Rodrigo nos hace sentir que ha merecido la pena la realización del taller, ya que, aunque somos investigadores, también somos educadores.

Durante la realización de la tercera sesión del taller se pudo observar cómo la pareja 3 (Israel – Yéssica) estaba teniendo un desempeño inferior a las demás parejas, lo que condujo a los investigadores a tener que separarlos, hecho que provocó un poco de mal ambiente ya que se puso de manifiesto la autoridad de los investigadores, que hasta entonces habían adoptado un papel de guía y compartían la realización de las tareas con los alumnos.

La pareja 3, después de una conversación con uno de los investigadores, pidieron que no se les separara y que intentarían no distraerse. Se les permitió continuar juntos y el efecto fue positivo, el desempeño de la pareja para las dos últimas sesiones estuvo en consonancia con el resto.

Respecto del software nos enfrentamos a la hora de la realización del taller con dos dificultades: en primer lugar, la versión que teníamos del *Cabri-Géomètre* era una *demo* y por tanto, no pudimos cambiar el idioma, viéndonos obligados a trabajar con los comandos en inglés. A pesar de ello no advertimos dificultades en los estudiantes por la similitud de la escritura de las funciones en inglés con el español. La única que mereció un reforzamiento fue la función *Mediatriz* con su traducción en inglés *Perpendicular bisector*. En segundo lugar, el trabajo con las unidades: En *Cabri* se puede alterar la unidad de medición, y nosotros decidimos que se trabajara con milímetros en vez de centímetros pues, cuando se realizaba alguna medición u operación sólo requería "olvidarse" de los milímetros y entender los resultados como metros. La dificultad se presenta cuando se transfieren medidas a través de la edición numérica, ésta las realiza en centímetros independientemente de que nosotros hubiéramos seleccionado milímetros. Se les advirtió a los estudiantes este hecho y fue superado por todos sin grandes dificultades. También se puso el grado de precisión cero pues consideramos que no era necesaria mayor exactitud.

4.3 Observaciones de las Dos Primeras Sesiones

Recordemos que en estas sesiones nuestro objetivo era mostrar a los estudiantes el funcionamiento del software y de los principales comandos que les serían útiles posteriormente para resolver nuestro problema principal. Para ello, se diseñaron actividades que acercaran a los estudiantes pautas de trabajo y posibilidades del ambiente. A continuación describiremos el trabajo de los alumnos en dichas actividades:

Actividad: Construcción del Cuadrado

Se les pidió a los alumnos que construyeran un cuadrado sin usar la opción *polígono regular* (que lo puede realizar inmediatamente). La construcción que realizaron los alumnos fue la siguiente:

Graficaron una recta (horizontal a la pantalla y sin escalones[5]), y sobre ella un segmento AB; midieron éste y transfirieron la medida del mismo a dos segmentos "verticales" a sus extremos A y B respectivamente, de forma que “parecieran” perpendiculares a la recta. Finalizaron su construcción uniendo los puntos resultantes (ver figura 4.1). En su construcción se puede observar que utilizan propiedades que definen a un cuadrado. Cuando se indicó que alguno explicara a sus compañeros su construcción, todos asintieron afirmando que realmente había construido un cuadrado.

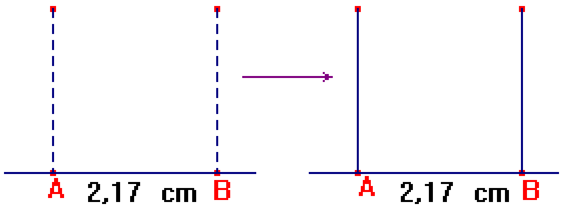


Figura 4.1: Construcción de un cuadrado por los estudiantes.

Dos hechos relevantes se ponen de manifiesto aquí: en primer lugar, las argumentaciones presentadas por los alumnos mostraban atributos sólo visuales (“son perpendiculares por que así parece ser en la pantalla"), en segundo lugar, todos, después de proponer la tarea, a pesar de conocer las funciones *recta perpendicular*, *círculos*, *compás*, realizaron la construcción mostrada anteriormente sin reflexionar sobre la veracidad de su construcción.

Actividad: Teorema del Ángulo Central

A los estudiantes se les indicó el procedimiento a seguir para realizar las construcciones; así, se pidió un círculo cualquiera y sobre éste, tres puntos y que unieran los mismos por medio de segmentos, llamémoslos AI e IB, a continuación se preguntó acerca de la variación del ángulo formado por esos segmentos cuando variamos el vértice I.

[5] Escalones: debido a la resolución de la pantalla, cuando se grafica una recta con un cierto grado de inclinación visualmente aparecen ciertos escalones, lo que no significa que el programa no la identifique como recta a pesar de que en apariencia no se muestre como tal.

La mayoría manifestó que el ángulo decrece cuando el punto I se aproxima a los otros dos y que crece cuando lo traspasa, sólo cuando se sugirió que lo midieran, observaron que el ángulo descrito por los dos segmentos era constante en cada sección circular descrita por los puntos A y B.

A continuación se pidió que construyeran el ángulo definido por los segmentos AC y CB, donde C es el centro de la circunferencia; y se les planteó que describieran qué ocurría con los dos ángulos.

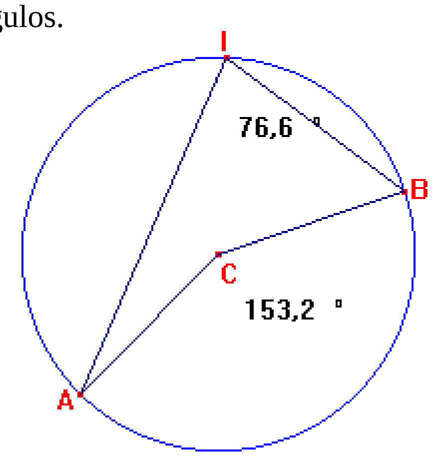


Figura 4.2: Construcción del Teorema del Ángulo Central.

Los estudiantes realizaron algunos movimientos del punto I y observaron que ambos ángulos eran constantes en cada sección descrita por los puntos A y B, pero no fueron capaces de conjeturar su comportamiento. Por ello, se les incitó a utilizar la calculadora que posee *Cabri*; con esta herramienta, un estudiante multiplicó el primer ángulo por 2 y observó que el resultado era la medida del ángulo central, con lo que estableció el teorema.

De esta actividad podemos destacar que los alumnos llegaron al teorema guiados por los investigadores y, casualmente, ya que, el alumno que mostró el resultado no observó el cociente de los ángulos que nos muestra directamente la razón entre ellos, es decir, encontró la razón sin saber que la había encontrado.

Actividad: Construcción de Triángulos, Recta de Euler

En este caso se les pidió a los alumnos que construyeran un triángulo equilátero y otro isósceles. Para el primero, todos excepto la pareja 3, utilizaron la opción *polígono regular*. La pareja 3 realizó un acercamiento por ensayo y error, es decir, construyó un segmento, transfirió medidas y, por arrasarte, ajustó su dibujo para que "pareciera" un triángulo equilátero. Nuevamente se comentó el problema de que la figura no soportaba la prueba del arrastre, por lo que no podía reconocerse, para *Cabri*, como un triángulo equilátero.

Para el triángulo isósceles, a pesar de que se había recordado que la figura debía soportar la prueba del arrastre, todas las parejas realizaron una construcción por ensayo y error, ninguno pensó en las propiedades de los triángulos isósceles, sólo Alonso (el alumno sin pareja) realizó una construcción correcta basada en propiedades geométricas (ver figura: 4.3) que se discutió en la clase y fue aceptada por todos como correcta.

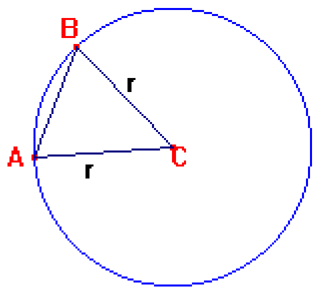


Figura 4.3: Construcción de Alonso de un triángulo isósceles.

La siguiente tarea era que construyeran el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo cualquiera y que observaran dichos puntos. Cabe desatacar que todos recordaban con diferente grado de exactitud las definiciones de medianas y mediatrices, pero ninguno ofreció una definición correcta de altura de un triángulo. La construcción de los puntos notables de los triángulos anteriores no resultó difícil a los estudiantes y la realizaron con éxito. Cuando se les indicó que estudiaran la relación entre esos puntos notables, los alumnos, a través del arrastre del triángulo, afirmaron que los tres puntos estaban alineados corroborándolo después con la función de preguntas de *Cabri*.

Durante la realización de esta actividad se observaron varios hechos importantes relacionados con nuestra investigación. Se pudo observar un salto en el tratamiento que realizaron los sujetos del problema. Utilizaron el software más significativamente para resolver el problema, para ello recabaron información relevante, en primer lugar, que las mediatrices, las alturas y las medianas se cortan en un punto (arrastrando el triángulo) y, en segundo lugar, que tales puntos son colineales (primero a través de una comprobación visual arrastrando el triángulo y después utilizando la función de preguntas de *Cabri*). De este modo, los alumnos infirieron la recta de Euler (ver figura 3.6, p.65), ciertamente con las restricciones lógicas.

4.4 Observaciones de las Tres Últimas Sesiones: La Carrera Singular

Los primeros 30 minutos de la sesión tercera se dedicaron a la presentación y planteamiento del problema. Se invitó a los estudiantes a que tomaran sus propios apuntes y recogieran los datos. El enunciado que se les mostró fue el siguiente:

UNA CARRERA SINGULAR

Problema. Pedro y Juan compiten en una carrera, parte de la cual se realiza sobre tartán y otra parte en fango. Pedro ha participado en olimpiadas internacionales, mientras que Juan solamente ha participado en competencias de su pueblo. Pedro es más veloz que Juan en tartán, pero Juan corre más rápido que Pedro en el terreno lodoso. Ambos corredores partirán de un punto **A**, que se encuentra dentro de la zona de tartán y la meta es un punto **B** que se encuentra en el fango, a una distancia de 100 metros del punto **A** en línea recta.

En carreras de 100 metros, las velocidades que desarrollan en promedio cada uno de los corredores son las siguientes:

En tartán:

Pedro puede correr a una velocidad promedio de 36 kilómetros por hora (100 metros en 10 segundos) y Juan a una velocidad promedio de 30 kilómetros por hora (100 metros en 12 segundos).

En el fango:

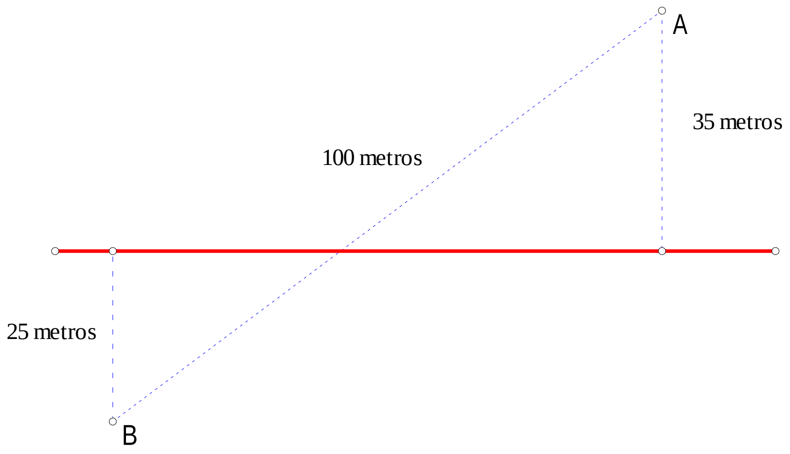
Pedro corre, también en promedio, a una velocidad de 12 kilómetros por hora, mientras que Juan es más rápido y corre a una velocidad promedio de 20 kilómetros por hora.

Se pregunta: ***¿Quién gana la carrera, Pedro o Juan?***

Si la carrera se realizara en un solo tipo de terreno, la respuesta sería muy simple: **en tartán gana Pedro, en fango gana Juan.** Pero en este caso especial la respuesta dependerá de las posiciones relativas de los puntos **A** y **B** respecto a la línea que separa los dos diferentes terrenos.

La figura de abajo está hecha a escala y representa un esquema del terreno donde van a competir. Cada centímetro representa 10 metros. La línea recta que aparece en la figura representa la división entre los dos tipos de terrenos.

La distancia más corta entre el punto **A** y la línea divisoria es de 35 metros, mientras que del punto **B** a la misma línea es de 25 metros. La distancia entre los puntos **A** y **B** es de 100 metros.



Aunque en apariencia todos dijeron comprender el enunciado del problema, en la práctica se observó lo contrario y sólo el estudiante Alonso comprendió el enunciado en su totalidad.

La primera dificultad que se apreció fue la construcción del modelo a escala en *Cabri*. Todos los alumnos realizaron su modelo de la siguiente forma:

1. Graficaron una recta y sobre ella un segmento NM.
2. Editaron numéricamente[6] 3.5 y 2.5.
3. Graficaron rectas perpendiculares sobre N y M.
4. Transfirieron las medidas correspondientes sobre N y M situando visualmente la medida sobre las perpendiculares.
5. Redefinieron los puntos obtenidos situándolos en las perpendiculares, a los puntos los llamaron A y B.
6. Trazaron un segmento que uniera A con B y lo midieron.
7. Ajustan (arrastrando N o M) hasta que la línea AB midiese 100 mm

Los estudiantes consiguieron realizar su modelo a escala aunque nuevamente se realizó a través de ensayo y error. El modelo conseguido fue el siguiente:

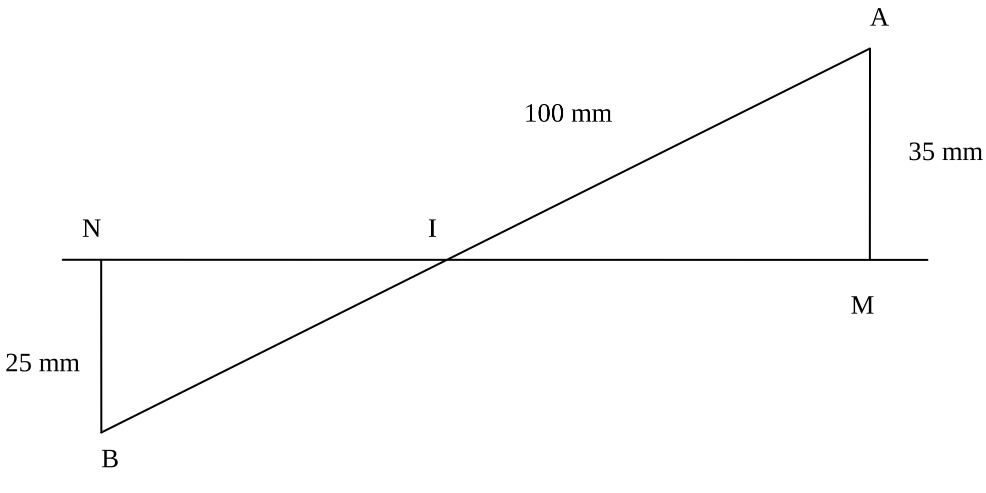


Figura 4.4: Modelo del Problema.

[6] Recordemos que previamente nosotros habíamos puesto el sistema de medición en milímetros y el grado de precisión en cero unidades.

Durante la construcción del modelo, la pareja 3 comentó (al ser interrogados por un investigador) que les era difícil conseguir que el segmento NM fuera “recto” cuando movían el punto N con miras a que la distancia AB fuera 100 mm. En su pantalla aparecía un segmento “escalonado”. El investigador les recordó que para *Cabri*, ese segmento era recto y que se veía así debido a la resolución de la pantalla de la computadora. Lo más interesante no es que hicieran esa pregunta, sino que encontraran totalmente normal que la línea AB tuviera “escalones”.

Una vez todos los alumnos hubieron construido su modelo, se presentó la siguiente dificultad: La conversión de las unidades de las velocidades de km/h a m/s. Todos usaron la calculadora de *Cabri* para realizar sus cálculos. Alonso y la pareja 1 (Samira y Aideé) realizaron bien la conversión de unidades, Samira y Aideé en principio se encontraban 'atascadas' cuando una de ellas sugirió realizarlo a través de la regla de tres. En las demás parejas, los investigadores tuvieron que ayudar a los estudiantes a superar este obstáculo.

Debido a que Alonso trabajó más rápido, a partir de ahora nos centraremos en el trabajo de las parejas y Alonso será tratado posteriormente.

Una vez que tenían todos los datos estaban convenientemente adaptados, las parejas se dieron a la tarea de continuar resolviendo el problema. Todos los grupos trabajaron sobre la trayectoria AI-IB (ver figura 4.4) y realizaron todos sus cálculos suponiendo que ambos corredores van por ella (en el esquema que se facilita en el enunciado, el segmento aparece así como la distancia). Nadie se percató de que en el enunciado no se especifica nada acerca de la trayectoria que siguen Pedro y Juan y tampoco de que éstos pueden seguir trayectorias distintas.

Parece ser que el diagrama que se presentó en el enunciado del problema produjo ruido en las parejas así como la mala comprensión del enunciado, por ello, éstas se centraron sólo en esta trayectoria y que ambos corredores corrieran por la misma.

Durante el trabajo de todas las parejas sobre la trayectoria AI-IB, se encontraron con la necesidad de conocer la medida de ambos segmentos. Lo interesante es que en vez de recurrir a la opción de medición de *Cabri*, todos se dispusieron a realizar cálculos con lápiz y papel intentando involucrar propiedades del seno y del coseno del ángulo que forman el segmento AI con NM (ver figura 4.5), así como tampoco ninguno utilizó el teorema de Pitágoras. Veamos un ejemplo de una pareja:

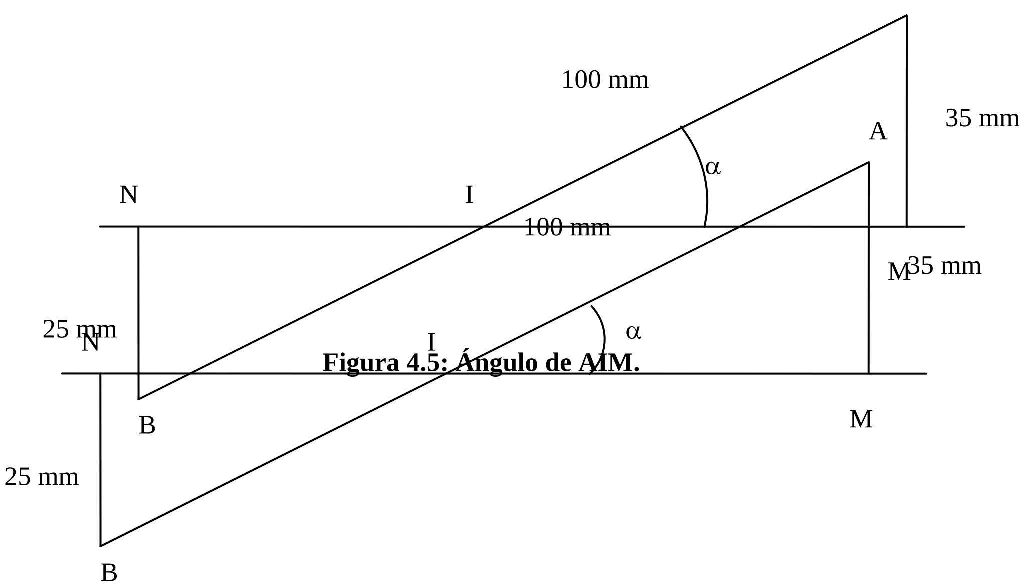


Figura 4.5: Ángulo de AIM.

La pareja 1 midió el ángulo con *Cabri* (α *= 36.9 º*) y con la calculadora de éste realizaron la siguiente operación: *sen(36.9)* 35 = 21*, y dado que ángulos opuestos son iguales, realizaron la operación *sen(36.9)* 25 = 15*. Entonces encontraron que la suma de ambos valores no es 100 como debiera ser y la pareja se bloqueó.

Una vez que midieron los segmentos a través de la orden *Distancia y Longitud*, se dieron a la tarea de obtener los tiempos para Juan y Pedro, y desecharon su técnica anterior sin encontrar ni buscar explicación a su error.

La pareja 3, inmediatamente después de tener las mediciones de AI e IB emitió una respuesta al problema, y así surgió un diálogo entre ellos y un investigador:

P3 —. Gana Juan.

I —. ¿Cómo lo sabéis?

P3 —. AI es 58.3 m ; Pedro va a $\frac{10\ m}{1\ s}$ *y Juan a* $\frac{25\ m}{3\ s}$ *, entonces Pedro le saca una diferencia de casi 2 segundos. Como IB es 41.7 m; Pedro va a* $\frac{10\ m}{3\ s}$ *y Juan a* $\frac{50\ m}{9\ s}$ *, entonces Juan le saca un poco más de 2 segundos, por lo que recupera lo perdido en tartán y por lo tanto, Juan gana la carrera.*

I —. ¿Entonces no importa para nada en nuestro problema y según vuestro razonamiento lo que miden AI e IB?

—. “ Después de ésta pregunta los estudiantes se quedaron callados y se reincorporaron a su trabajo”.

Las parejas realizaron sus cálculos, aplicaron la fórmula t = d / v (una pareja no recordaba la fórmula bien y el investigador tuvo que proporcionársela), y sumaron los tiempos en cada tipo de terreno. Los estudiantes entonces emitieron un resultado:

P —. Juan gana pues hace menos tiempo.

Aquí intervino el investigador realizando al grupo la siguiente pregunta:

I —. ¿Estáis todos seguros? ¿Es la única ruta posible?

Ante este cuestionamiento, los estudiantes reflexionan y se percatan de que pueden existir más rutas. Se ponen a analizarlas pero aún consideran que ambos corredores deben ir por la misma ruta; por ejemplo: La pareja 2 analiza la siguiente:

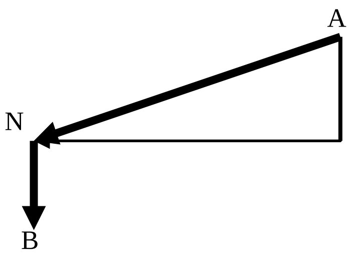


Figura 4.6: Ruta que analizaron los miembros de la pareja 2.

Ante esta ruta, un investigador pregunta a la pareja por qué la han elegido, a lo que contestaron:

P2 —. Como Pedro corre más rápido que Juan en tartán deberá intentar recorrer la menor distancia posible sobre Fango y eso ocurre para esta trayectoria.

En cambio, la pareja 3 se decanta por una ruta que no es realmente acertada (ver figura 4.7):

Figura 4.7: Ruta analizada por la pareja 3.

En este caso, los jóvenes justificaron su decisión argumentando lo siguiente:

P3 —. Como Pedro corre más que Juan en tartán, debe recorrer la mayor cantidad posible en tartán y ésta es la ruta en la que recorre más tartán.

El investigador no dejó que los estudiantes comprobaran que la ruta que ellos habían diseñado sería mala para Pedro y les mostró por qué esa ruta no era conveniente analizarla. Después de un rato de reflexión llegaron a establecer la misma ruta que la pareja 2. Una vez analizada dicha ruta para Pedro y Juan corriendo por ella, los estudiantes observaron la posibilidad óptima (en principio) para Juan (ver figura 4.8).

Figura 4.8: Trayectoria "óptima" para Juan.

Cuando realizaron los cálculos para estos casos, las cuatro parejas afirmaron que nuevamente Juan era el ganador, ya que habían analizado las rutas "óptimas" para Pedro y para Juan y en ambas ganaba Juan. Nuevamente intervino un investigador preguntando:

I —. ¿Necesariamente tienen que ir Pedro y Juan por la misma ruta?

Los alumnos asintieron y observaron la necesidad de capturar todas las rutas posibles, tanto para Juan como para Pedro. En principio propusieron varias rutas distintas para ambos corredores y se encontraron con el problema de poder abarcarlas todas. En ese momento, el investigador construyó un par de segmentos AI-IB, donde I pertenece al segmento NM y movió el punto I sobre el segmento.

En ese instante, los sujetos se percataron de que con el movimiento de I conseguían todas las trayectorias posibles; así pues, se hicieron las cuentas en base a los nuevos segmentos AI y IB con la calculadora de *Cabri* y observaron cómo las distancias variaban cuando se variaba el punto. De este modo, calcularon los tiempos de Juan y de Pedro, desplazaron el punto I a lo largo del segmento NM y obtuvieron el tiempo mínimo para cada uno de ellos. Emitiendo ahora la solución del problema:

P —. Solución: Juan gana la carrera pues realiza menor tiempo que Pedro si toma este camino (señalan el camino en la computadora).

I—. ¿Puedo saber exactamente dónde está el punto I?

La pareja 2 sugirió que se estableciera un sistema de ejes y la pareja 3 sugiere medir el ángulo que forma AI con NM. Al final prevalece la opción de la pareja 2, y se establece un sistema de referencia con origen en N y sentido positivo hacia M, miden la distancia desde N al punto I, y responden satisfactoriamente nuestra pregunta.

A continuación, uno de los investigadores repite el proceso de resolución llevado a cabo. Llegado al punto donde se habían quedado, muestran cómo se pueden tabular los datos (es decir, la distancia de N a I, el tiempo total de Juan y el tiempo total de Pedro) y pregunta:

I —. ¿Existe un rango de valores de la distancia NI para los que Juan siempre será ganador?

Los alumnos primero realizaron sus exploraciones moviendo el punto I y observando los tiempos. Después tabularon los datos a través de la animación a la tabla cuando el punto I se mueve, dando la solución a esta nueva interrogante.

Finalmente, para acabar el problema se cambia la velocidad de Pedro en Fango a 16 km/h y se pide que vuelvan a resolverlo. Nuevamente se observan dificultades en la conversión de las velocidades, a pesar de lo cual los estudiantes responden satisfactoriamente a la nueva tarea, localizando sin esfuerzo el rango de valores donde Pedro le gana a Juan.

Para finalizar el taller, un investigador mostró cómo se puede conseguir realizar la gráfica del tiempo respecto de la longitud de NI y realiza un estudio cualitativo del problema a partir de la gráfica, con lo que concluye el taller.

El Caso de Alonso

Alonso se destacó desde el principio del taller, mostró una disposición excelente para trabajar en un ambiente novedoso como lo era el software de geometría ya que, a pesar de disponer de computadora en su caso, nunca la había utilizado para trabajar matemáticas.

Ya hemos comentado a lo largo de éste capítulo algunas de las intervenciones que tuvo durante el taller, y ahora nos vamos a centrar en su intento de resolución del problema de la carrera singular.

En un principio, Alonso realizó un diagrama de la situación problemática en su cuaderno y estableciendo incógnitas para aquello que desconocía (ver figura 14.9).

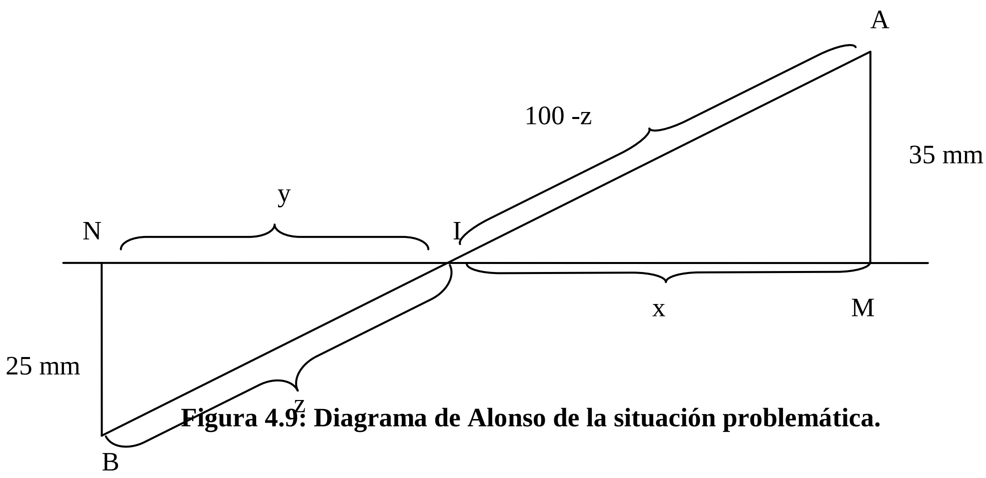


Figura 4.9: Diagrama de Alonso de la situación problemática.

Debido a la dificultad de construir el modelo a escala sin conocer NM, Alonso comenzó a trabajar en lápiz y papel. Su objetivo era conocer el valor de *x* e *y*. Para ello aplicó, en primer lugar, el teorema de Pitágoras sobre los triángulos AIM y NIB obteniendo un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$100 - z = \sqrt{x^2 + 35^2}$$
$$z = \sqrt{25^2 - y^2}$$

Después de realizar varios intentos para resolver dichas ecuaciones, cambió de estrategia e intentó observar si con la medida del ángulo descrito por AI y NM podía obtener algo. Al cabo de veinte minutos se da por vencido y construye su modelo a escala por ensayo y error (es decir, arrastrando N o M hasta que cuadran los números). Una vez conseguido el modelo, mide los segmentos NI, IM, AI e IB comprobando las mediciones realizadas con sus fórmulas anteriores. De este modo Alonso se convence de que el modelo le servía para representar la situación.

Cuando sólo había transcurrido 1 hora de taller, Alonso estaba en disposición de completar la resolución del problema: disponía de un modelo a escala, conocía la fórmula de la velocidad y, por ende, la que expresa el tiempo en función de la distancia y de la velocidad, así como las distancias.

Como los demás muchachos, comenzó trabajando sobre la línea AB y pronto tuvo a su disposición los tiempos de Juan y Pedro para esas trayectorias. Un hecho importante a destacar es que él mismo y sin ayuda de ninguno de los investigadores, realizó diversas trayectorias para Pedro y Juan. En primer lugar analizaba la trayectoria para Pedro y, posteriormente, para ese mismo camino calculaba la de Juan. Las primeras con las que trabajó fueron las “ideales” tanto para Pedro, como para Juan (ver figura 4.6 y figura 4.8).

Una vez que tenía comprobadas las rutas ideales se dispuso a estudiar otras alternativas. Un investigador, observando la rapidez con que se acercaba a la resolución del problema y para que no se aburriera, mostró la sugerencia de que realizara una trayectoria arbitraria y desplazara el punto de intersección de los dos terrenos a través de NM. Alonso consideró la sugerencia del investigador y desarrolló sus cálculos, ahora bajo una hipotética trayectoria AI-IB. Después de obtener diversos datos procedentes de las notas que él tomaba de los tiempos que hacía cada corredor, estableció la solución del problema:

Alonso —. Solución: Juan gana la carrera siempre y cuando se vaya por el punto en el que hace mínimo su tiempo ya que éste es menor que el tiempo mínimo de Pedro.

Lo interesante es que el alumno que trabajó solo completó el problema en un tiempo bastante inferior al de los demás compañeros. Una vez que emitió su solución, un investigador le planteó la siguiente interrogante:

I —. Imagina que yo soy el entrenador de Juan. ¿Por dónde tengo que avisarle para que cruce del terreno de tartán al terreno lodoso?

Alonso advirtió que se necesitaba conocer otro dato, bien *y* o bien *x* y para ello midió con *Cabri* la distancia NI (es decir, estableció un sistema de ejes con centro en N). Llegado a este punto se le propuso que realizara una tabulación de los datos (un investigador tuvo que ayudarlo ya que no se acordaba de cómo hacerlo), y se le cuestionó acerca del rango de valores en los que Juan se aseguraba ganar la carrera con independencia de la ruta que tomara Pedro.

Ya para finalizar este problema, se mostró a Alonso cómo graficar la función que nos da el tiempo en función de la distancia NI. Una vez realizada la gráfica, Alonso realizó un estudio cualitativo del mismo y llegó a similares conclusiones.

Para el problema modificado, (ahora Pedro va a 16 km/h en Fango), Alonso aprovechó los datos con los que ya había trabajado y modificó sólo lo necesario, resolviendo el problema rápidamente y realizando un estudio cualitativo acerca de las gráficas del tiempo en función de la distancia NI. Alonso llegó a establecer para este caso el intervalo de distancias a NI en las que Pedro se aseguraba ser el ganador de la carrera así como cuándo podía ser ganador Juan en función de la trayectoria que tomase Pedro.

Resumiendo, este estudiante fue conducido con algunos comentarios y llegó lejos en su estudio del problema, realizó análisis reflexivos de las distintas fuentes de información de las que disponía cuando atacaba el problema y siempre buscó corroborar sus datos. Podríamos decir que realizó un aprovechamiento significativo de la computadora, puso en juego distintas técnicas heurísticas, realizó argumentaciones en base a lo que tenía en la pantalla de la computadora, observando y recabando información relevante para la resolución del problema.

CAPÍTULO 5

Conclusiones

Para concluir este trabajo presentamos las reflexiones que permiten responder a nuestras preguntas de investigación realizadas en el capítulo primero.

Pregunta primera

¿Cómo son entendidos los términos problema, resolución y solución en la investigación en Resolución de Problemas?

En el segundo capítulo revisamos cómo eran entendidos los términos problema, resolución y solución desde diferentes acercamientos, en cierto modo, la respuesta a la primera pregunta de investigación son las reflexiones mostradas en el capítulo segundo. Queremos destacar nuevamente la distinción realizada entre los términos anteriores ya que pueden permitir controlar las variables resolución, solución, intento de resolución sin éxito y respuesta errónea para investigaciones en resolución de problemas.

Preguntas segunda y tercera

A lo largo del trabajo hemos ido observando diversas actividades planteadas en un ambiente de resolución de problemas y cómo los estudiantes interactuaron con la computadora. Para concluir este trabajo, reflexionaremos en torno a las preguntas de investigación que nos llevaron a realizarlo, centrándonos fundamentalmente para nuestro análisis en el problema que llamamos *la carrera singular*. Recordemos cuáles eran dichas preguntas:

¿Qué aspectos del aprendizaje de las matemáticas se destacan en el trabajo de estudiantes de bachillerato cuando usan *Cabri-Géomètre* en la resolución de problemas?

¿Cómo aprovechar el recurso de la computadora para que se realice un uso significativo del mismo?

La resolución del problema de optimización con lápiz y papel, como ya vimos, es de considerable dificultad, inclusive para alumnos universitarios. Para tener éxito se requiere de conocimientos de cálculo en una variable que no se estudian profundamente hasta los primeros semestres de carreras universitarias, a pesar de lo cual nosotros afrontamos la resolución del problema con alumnos de bachillerato que no habían cursado ninguna asignatura de cálculo.

Una de las mayores dificultades de la resolución del problema, que se encuadra dentro de los llamados de optimización, con lápiz y papel, es su complejidad conceptual, pues requiere de aunar diversos conocimientos: construcción de funciones, derivabilidad, máximos y mínimos relativos, propiedades de los triángulos, etcétera. El trabajar dentro del ambiente *Cabri* nos permitió abordar la resolución del problema sin requerir tantos conocimientos por parte de los alumnos; es más, se trabajó sin hacer siquiera referencia alguna a la construcción de las funciones ni a la derivabilidad.

El trabajo con lápiz y papel de este problema suscitaba varias dificultades de cómputo: la resolución de una ecuación con radicales y lo complejo de los números con los que se tenía que trabajar; no eran "manejables" y los cálculos se 'llevaban' mucho tiempo además de que se podían cometer errores que produjeran respuestas incorrectas al problema. Por otro lado, y debido a las funciones de la distancia con respecto al tiempo que se obtienen para Juan y para Pedro, su tratamiento gráfico es complejo, por lo que sólo se podría trabajar en un sistema de representación, a saber, el algebraico. Sin un trabajo en el ambiente gráfico, la posibilidad de realizar un estudio global del comportamiento de los tiempos respecto de las diversas trayectorias es complejo.

La resolución del problema utilizando la tabulación de los distintos tiempos, aunque no requiere de conocimientos de cálculo, requiere de sistematicidad en la elección de la particiones. Aunque éste método de resolución depende del grado de exactitud numérica con la que deseemos trabajar, nos proporciona la solución a nuestro problema así como que tampoco requeriría de conocer cálculo en una variable. La dificultad estribaría en obtener las funciones del tiempo de Pedro y de Juan así como el problema de cómputo relacionado con la evaluación de dichas funciones para lo que sería recomendable el uso de una calculadora o computadora.

El tratamiento del problema con *Cabri,* requería superar básicamente dos dificultades: por una parte la construcción del modelo a escala, y por otra el tratamiento de la información (es decir, trabajar adecuadamente la conversión de los datos). Pero dentro del ambiente geométrico suministrado por la computadora, y una vez superados ambos escollos, la resolución del problema (aunque siempre de forma aproximada pero suficiente para el nivel de los estudiantes) se facilitó enormemente: permitió realizar un estudio desde varios sistemas de representación (tabular, gráfico y algebraico), y el tránsito de uno a otro con plena libertad. Se pudo conducir a los alumnos (a unos más y a otros menos), a la resolución del problema sin recurrir al cálculo, lo cual ya es un hecho de importancia muy significativa, e imposible de satisfacer sólo con lápiz y papel.

Pudimos observar cómo los alumnos se comprometieron en la resolución del problema desde el principio, debido en parte a la novedad que representaba trabajar matemáticas con un ordenador. Los alumnos mostraron una buena predisposición hacia el problema. No obstante, la máquina también influyó negativamente en el comportamiento de los alumnos ya que no facilitó una lectura reflexiva del enunciado del problema; los alumnos se fueron directamente a considerar la primera opción que les vino a la mente y perdieron sistematicidad en el tratamiento y en la resolución del problema.

A pesar de que la construcción del modelo fue por medio de aproximaciones, la computadora sirvió de instrumento de validación de las suposiciones de los estudiantes, pues todos aceptaron los resultados que devolvía la máquina y ninguno se puso a comprobar si efectivamente eran correctos o no, ni buscó vías alternativas de validar lo realizado (salvo en el caso de Alonso). De hecho, en algunos casos aparecieron usos muy curiosos de la computadora como medidor de la veracidad de proposiciones: cuando la pareja Samira y Aideé (Pareja 1) estaban representando el problema, trataron de medir algunos segmentos usando trigonometría para lo cual realizaron mediciones de ángulos. Se encontraron con la situación de dos rectas: una horizontal y otra secante a ella y tenían medido el ángulo (α) que había entre la secante y la horizontal por un lado, y necesitaban el otro (β):

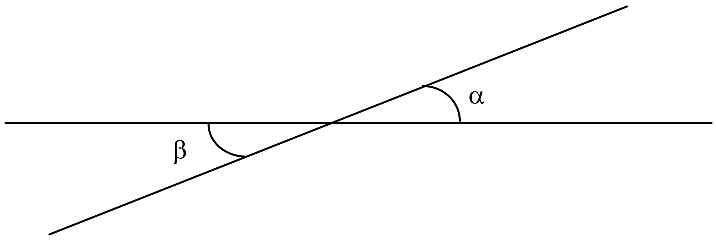


Figura 5.1: Ángulos opuestos.

Una de ellas argumentó que dado que los ángulos eran opuestos, debían de ser iguales, a lo que la otra respondió que eso era cierto, pero ya que era fácil medir con *Cabri* podrían quedarse más seguras. Y así fue como lo hicieron, quedando satisfechas con la comprobación obtenida. Esto da idea de la falta de seguridad que tenían sobre su propio conocimiento, y cómo la computadora puede consolidar sus creencias en relación a diversas nociones matemáticas; cabe advertir que en ocasiones se produce el efecto contrario, imaginemos que los alumnos reflexionan sobre un diagrama erróneo, en cuyo caso, pueden llegar a obtener conclusiones falsas que refuercen su error. Por otro lado, la existencia de la orden *Revisar construcción* (nos permite volver sobre lo ejecutado para usarlo nuevamente, modificarlo o analizarlo) facilitó que los alumnos emplearan la técnica de resolución consistente en el ensayo y error.

La función de animación que dispone el software permitió que los alumnos, abarcaran todo el rango de trayectorias posibles de los dos corredores, hecho que con técnicas de lápiz y papel no podría obtenerse y, facilitó que los estudiantes realizaran una abstracción desde una situación particular a una general, es decir, cuando observaban el resultado para una trayectoria, ellos sabían que dicha trayectoria era una arbitraria pues podían modificarla por el arrastre para obtener otra trayectoria.

Se pudo observar que a pesar de que los alumnos tuvieron la oportunidad de problematizar su aprendizaje, en el sentido de que reflexionaron acerca de lo que veían en la pantalla (Santos, 1998). no lo consiguieron sin ayuda, es decir, reflexionaban sólo cuando eran cuestionados por un investigador. Por otro lado, ciertamente se pudo llevar a los alumnos a un nivel de reflexión sobre la resolución del problema que difícilmente se podría haber conseguido con lápiz y papel. Ya que la computadora facilitó las conexiones con diferentes áreas de la matemática (geometría y cálculo), permitió abordar problemas en un contexto no matemático (en este caso era físico) y establecer discusiones guiadas acerca de lo que se representaba en la pantalla, si era correcto o cómo comprobarlo.

Además, con el uso de la computadora se facilitó el trabajo en grupo, el respeto a las opiniones de los demás, y el trabajo crítico. La clase funcionó como una comunidad en la que la autoridad local era el grupo y no el investigador (salvo en contadas excepciones).

Aunque se han descrito muchas virtudes respecto del uso de la computadora como herramienta para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, nosotros en nuestra investigación, concluimos que la máquina no ayudo a los estudiantes a resolver el problema (a excepción del caso de Alonso). Los estudiantes piensan que la computadora les va a resolver el problema y encontramos que éstos tuvieron serias dificultades para encontrar y concretar, por sí mismos, recursos como el arrastre de figuras para validar propiedades geométricas (salvo en el caso de la recta de Euler que si la infirieron gracias al arrastre) o, la utilización de la animación (para el problema de los corredores), sobre los que reflexionar y que podrían facilitarles la resolución del problema. Creemos necesario continuar reflexionando acerca de cómo conseguir un aprovechamiento significativo de la computadora, y en particular, cómo conseguir que los estudiantes problematicen su aprendizaje con este recurso, como fue el caso de Alonso.

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, C., et al. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral. Colección: Educación Matemática en Secundaria.* (Ed. Rico, L. & Guzmán, M.) Síntesis, Madrid.

Borasi, R. (1986). 'On the nature of problems in Educational Studies'. En *Mathematics education nº 17*, pp. 125-141.

Branca, A. (1985). 'Mathematical Problem Solving: Lessons from the British Experience'. En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective.* (Ed. Silver E.A.) Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 71-82.

Buendía, L., et. al. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía.* McGraw-Hill, Madrid.

Callahan, P. (1999). 'Technology, Tools, and Multiple Representations: Pre-Service Teacher's Understanding of Functions and Modeling'. En *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting P.M.E.-N.A. Vol. 1.* (Ed. Hitt, F. & Santos, M.) ERIC, Columbus, pp. 689-702.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada*, Facultad de Ciencias, Granada.

Codina, A. & Rivera, A. (1999). 'Una Experiencia con Mathematica'. En *Actas del IV Evento Internacional Científico Metodológico de Matemática y Computación*. Universidad de Matanzas, Matanzas (Cuba).

Codina, A. & Hitt, F. (2000a). 'Demostración en matemáticas y relación con el uso de contraejemplos'. En *Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y Universitario.* (Ed. Hitt, F. & Hernández, A.) Cinvestav-IPN, México D.F. (por aparecer)

Codina, A. (2000b). ‘El papel de la tecnología en la resolución de problemas para futuros
profesores de matemáticas’. En *Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y Universitario.* (Ed. Hitt, F. & Hernández, A.) Cinvestav-IPN, México D.F. (por aparecer)

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa.* La muralla, Madrid.

Cornu, B. (1999). ‘Training Today the Teacher of Tomorrow’. En *Studies in Mathematics Education Series: 10, Rethinking the Mathematics Curriculum.* (Ed. Hoyles, C., Morgan, C. & Woodhouse, G.) Falmer Press, Hong Kong, pp. 195-203.

CTGV (Cognition and Technology Group at Vanderbilt), (1996). ‘Looking at Technology in Context: A Framework for Understanding Technology and Educational Research’. En *Handbook of Educational Psychology.* (Ed. Berline, D. & Calfee, R.) MacMillan, Prentice Hall International, New York, pp. 807-840.

DCE (1983). *Diccionario de las Ciencias de la Educación, Vol. 2.* Santillana, Madrid.

DES (1991). *Diccionario Enciclopédico Santillana, Vol VII.* Santillana, Madrid.

DGE (1988). *Diccionario Griego Español.* Sopena, Madrid.

DHP (1959). *The Shorter Oxford English Dictionary on Historical Principles.* Oxford at the Claredon Press. Glasgow.

Ferrater, J. (1980). *Diccionario de Filosofía, Vol. 3.* Alianza Editorial, Madrid.

Fey, J. (1993). ‘Technology and Mathematics Education at ICME-7’. En *American Perspectives on the Seventh International Congress on Mathematical Education.* University of Maryland, College Park: Maryland, pp. 6-11.

Gimeno, J. (1995). *El curriculum: Una reflexión sobre la práctica.* Morata, Madrid.

Hilbert, D. (1902). ’Mathematical Problems’. En *Bulletin of the American Mathematical Society*, pp. 437-479.

Kilpatrick, J. (1985). ‘A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving’. En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective.* (Ed. Silver, E.A.) Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 1-15.

Kutzler, B. (1996). *Introduction to Derive for Windows*. Bernhard Kutzler, Austria.

Laborde, C. (1996). ‘Geometry as modeling tool for simple mechanisms’. En *Cabri Géomètre II. Geometry for the world*. Texas Instrument, pp. 1-6

Lester, F. (1985). ‘Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction’. En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective.* (Ed. Silver, E.A.) Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 41-70.

Lester, F. (1994). ‘Musing about mathematical problem-solving research: 1970-1994’. En *Journal for research in mathematics education. Vol. 25, nº 6*, pp. 660-675.

Lupiáñez, J. (2000). *Concepciones de Profesores en Formación acerca de la validación del conocimiento matemático con el uso de tecnología.* En *Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y Universitario.* (Ed. Hitt, F. & Hernández, A.) Cinvestav-IPN, México D.F. (por aparecer)

Maier, H. (1999). *El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común.* Iberoamérica, México D.F.

Mancera, E. (1996). *Concepciones de maestros expertos en la enseñanza de la matemática por medio de la resolución de problemas.* Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México D.F.

Mayer, R. (1983). *Thinking, Problem Soving, Cognition*. Ed. Freeman and Company. New York. (Traducido por Baravalle G. (1986). *Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición*. Paidós, Barcelona).

Mayer, R. (1985). ‘Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving’. En *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective,* (E.d. Silver E.A.) Hillsdale NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 123-138.

M.E.C. (Ministerio de Educación y Ciencia), (1990) *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo*. BOE 4 octubre 1990, pp.462-478.

M.E.C. (Ministerio de Educación y Ciencia), (1991) *Real Decreto 1345/1991 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Suplemento del BOE número 220 de 13 de Septiembre, pp. 72-82.

Moreno, L. (1997). ‘Reflexiones sobre la geometría mediada por la computadora (Cabri II)’ En *Memorias del VIII Seminario Nacional de Calculadoras y microcomputadoras en Educación Matemática.* (Ed. Hitt, F., Hernández, V. & Villalba, M.) Hermosillo, Sonora, México.

Moreno, L. (1999). ‘On representations and situated tools’. En *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting P.M.E.-N.A. Vol. 1*. (Ed. Hitt, F. & Santos, M.) ERIC, Columbus, pp. 97-104.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Polya, G. (1945). *How to Solve it.* Princeton University Press, Estados Unidos (Traducción de Zugazagoitia J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México D.F.)

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. *Colección Mathema.* Comares, Granada.

RAE (Real Academia de la Lengua), (1992). *Diccionario de la Lengua Española, Vigésima primera edición,* Madrid.

Rico, L., et al. (1997). *Bases Teóricas del currículo de Matemáticas de Educación Secundaria*. (Ed. Rico, L.) Síntesis, Madrid.

Rico, L. (1998). 'Concepto de curriculum desde la Educación Matemática'. En *Revista de Estudios del Curriculum, Vol. 1, nª 4,* pp. 7-41.

Rivera, A. & Santos, M. (2000). 'El curriculum de matemáticas en el nivel medio superior en México'. En Actas del Foro *Las matemáticas en México: Educación y Desarrollo*. En Prensa, Cocoyoc, Morelos, México (por publicar)

Rojano, T. & Moreno, L. (1999). 'Educación Matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo'. En *Avance y Perspectiva Vol. 1*8, CINVESTAV-IPN, pp. 325-334.

Romberg, T. (1994). 'Classroom Instruction that Foster Mathematical Thinking and Problem Solving: Connections Between theory and Practice'. En *Mathematical thinking and problem solving*. (Ed. Schoenfeld, A. & Erlbaum, E.) Hillsdale, New Jersey, pp. 287-304.

Santos, M. (1994). 'La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas'. En *Cuadernos de investigación nº 28,* CINVESTAV-IPN. México.

Santos, M. (1998). 'Problematizar el estudio de las matemáticas: Un aspecto esencial en la organización del curriculum y en el aprendizaje de los estudiantes'. En *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (Ed. Hitt, F.) Iberoamérica, México D. F. pp. 425-444.

Santos, M. (1999). ‘The use of technology as a means to explore mathematics qualities in proposed problems’. En *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting P.M.E.-N.A., Vol. 1.* (Ed. Hitt, F. & Santos, M.) ERIC, Columbus, pp. 139-146.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic press, Orlando.

Schoenfeld, A. (1998). ‘Reflection on a Course in Mathematical Problem Solving’. En *CBMS Issues in Mathematical Education, Vol. 7, Research In Collegiate Mathematics Education III.* (Ed. Schoenfeld, A, Kaput, J., & Dubinsky, E.) pp. 81-113.

Waits, B. (1991). *A critic: What is Missing in the Discussion Draft of the Standards 2000 Principles and Standards for School Mathematics*. Documento On-Line en la dirección: http://www.ohio-state/~waitsb/Papers.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach of mediated action,* London: Harveser (Traducción de Silvestri A. (1993). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada.* Visor Distribuciones: Madrid).