CENTRO DE POSTGRADO Y FORMACIÓN CONTINUA

MÁSTER DE PROFESORADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

EL PENSAMIENTO INDUCTIVO Y LA GENERALIZACIÓN EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR

INDUCTIVE THINKING AND GENERALIZATION IN SCHOOL ALGEBRA

ESTUDIANTE	Fernández López, Ainoa
ESPECIALIDAD	Matemáticas

DIRECTOR Prof. D. Francisco Javier Peralta Sánchez

CODIRECTOR Prof. D. Manuel Cortés Izurdiaga

Convocatoria de: mayo de 2022

RESUMEN

Hoy en día, en nuestras aulas es cada vez más habitual la necesidad de innovar y de apostar por nuevas formas de enseñanza. Los docentes buscan nuevas técnicas o estrategias con la intención de mejorar el rendimiento de los estudiantes y de aumentar el interés y la motivación, ofreciendo un nuevo enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje. La metodología escogida para llevar a cabo este Trabajo Fin de Máster ha sido las situaciones problema, que se caracteriza por involucrar de forma activa a los estudiantes en procesos que faciliten la construcción de conocimientos e ideas matemáticas, y potenciar la autonomía del alumno con el objetivo de desarrollar aprendizajes más significativos. En concreto, el tema tratado es el de la generalización y el pensamiento inductivo en el álgebra escolar.

En la construcción de conocimiento matemático y científico, el razonamiento inductivo posee un papel fundamental; comienza con la observación de situaciones particulares, para posteriormente advertir regularidades, y, finalmente, llegar a la generalización. En el ámbito educativo, estudios que atienden a este asunto identifican dificultades significativas en el alumnado respecto a tareas de generalización, lo cual se atribuye al déficit de trabajo sistemático de dicha cuestión en las aulas. El diseño estratégico de situaciones problema supone un escenario natural para alcanzar la generalización, por tratarse de espacios destinados a argumentar, particularizar, conjeturar y demostrar; constituye la mejor forma de llevar al aula temas que involucran procesos generales de pensamiento. Por este motivo, en este documento elaboramos una propuesta de investigación e intervención aplicada al curso 3º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, mediante la cual buscamos mejorar el desempeño del estudiantado en esta temática.

Palabras clave: álgebra, aprendizaje, enseñanza, generalización, metodología, situaciones problema.

ABSTRACT

Nowadays, the need for innovation and new ways of teaching is becoming more and more common in our classrooms. Teachers are looking for new techniques or strategies with the intention of improving student performance and increasing interest and motivation, offering a new approach to the teaching-learning process. The methodology chosen to carry out this Master's final project has been the problem situations, which is characterized by actively involving students in processes that facilitate the construction of mathematical knowledge and ideas, and to improve student autonomy with the aim of developing more meaningful learning. Specifically, the topic covered is the generalization and inductive thinking in school algebra.

In the construction of mathematical and scientific knowledge, inductive reasoning plays a fundamental role; it begins with the observation of particular situations, to subsequently notice regularities and, finally, to arrive at generalization. In the field of education, studies addressing this issue identify significant difficulties in students with respect to generalization tasks, which is attributed to the lack of systematic work on this issue in the classroom. The strategic design of problem situations is a natural setting for achieving generalization, as they are spaces for arguing, particularising, conjecturing and proving; they are the best way to bring issues involving general thinking processes into the classroom. For this reason, in this document we have developed a research and intervention proposal applied to the 3rd ESO course of Mathematics Oriented to Academic Education, through which we seek to improve the performance of students in this issue.

Key Words: algebra, learning, teaching, generalization, methodology, problem situations.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

"La matemática es el trabajo del espíritu humano
que está destinado tanto a estudiar como a conocer,
tanto a buscar la verdad como a encontrarla".

E. Galois.

I. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

"La única forma de aprender matemáticas
es hacer matemáticas"
Paul Halmos

En el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) se aborda la temática general de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, centrándose en la subtemática "El pensamiento inductivo y la generalización en el álgebra escolar". El álgebra escolar abarca los contenidos propios del álgebra que se trabajan en los niveles educativos previos al universitario, y es claro que el grado de abstracción de la materia es mínimo. En esta coyuntura, el simbolismo algebraico comienza a actuar como personaje principal, labrando el camino para lo que sucede en estudios superiores. Las actividades fundamentales vinculadas al álgebra escolar son la manipulación, la generalización y la búsqueda de patrones. Pero, ¿qué entendemos realmente por razonamiento inductivo? "El razonamiento inductivo es un medio potente de construcción de conocimiento tanto en el medio científico como en el social. Su potencialidad se debe, fundamentalmente, a que la generalización es una de las componentes del mismo. Es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común en los sucesos y los hechos científicos, a partir del descubrimiento de patrones que constituyen el germen de leyes propias del nuevo conocimiento" (Cañadas et al., 2010, p. 55). Algunos matemáticos de renombre como Pólya, Poincaré y Whitehead (citado en Cañadas et al., 2010) tratan la inducción y señalan su papel como una vía de producción de conocimiento matemático y científico. Nuestro interés por tratar esta cuestión se debe a varias circunstancias o razones, de entre las cuales podemos señalar las siguientes:

1. Durante nuestro período de prácticas en el centro educativo I.E.S. Bahía de Almería, uno de los cursos que asignados estaba abordando el bloque de álgebra, lo que nos ha llevado a observar de manera recurrente la dificultad del alumnado para generalizar situaciones mediante un razonamiento lógico-matemático.

2. Los informes de evaluación internacionales nos indican las tasas de ocurrencia de los diferentes tipos de dificultades que conciernen a conceptos algebraicos. De manera incesante y respecto al contenido matemático, cada vez se acentúa más el salto de la educación primaria a la educación secundaria; los estudiantes llegan menos preparados. Asimismo, también durante mi periodo de prácticas, he podido observar cómo alumnos que están finalizando sus estudios en el centro presentan fallos básicos en la comprensión de esta materia. Adicionalmente, se observa la influencia desfavorable de la pandemia Covid-19.
3. Durante la formación universitaria, tanto grado como máster, se proporcionan escasas estrategias, procedimientos y metodologías para intervenir sobre esta cuestión: la enseñanza del álgebra en la ESO.

En relación a cuestiones metodológicas, veremos cómo mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra a través de la metodología denominada **situaciones problema**, al adecuarse a las características y necesidades especiales de los estudiantes y de la cuestión a tratar. La propuesta de intervención será orientada en torno a un proceso de investigación, evaluación e intervención educativa. En concreto, el foco de estudio estará centrado en un aula de 3º ESO, formado principalmente por alumnos/as[1] de entre 14 y 16 años. Entonces, es natural que surja la pregunta: ¿qué pretendemos mejorar exactamente en el mundo educativo abordando este asunto?. Principalmente, este Trabajo Fin de Máster contribuye a la consecución de diversos fines relacionados con la enseñanza del álgebra escolar. Pueden destacarse, entre otros, los siguientes:

1. Proporcionar un corpus teórico que contribuya mejorar el razonamiento inductivo y lógico-matemático, además de desarrollar el pensamiento abstracto del estudiantado.
2. Recoger los principales errores y dificultades de los alumnos en la

[1] En lo que sigue de este documento, se utilizará el término alumno para referirnos indistintamente al género masculino o femenino, con el objetivo favorecer una redacción y lectura fluida de este, y de acuerdo a lo establecido por la Real Academia Española. Análogamente sucederá con el término de profesor o docente.

generalización de conceptos matemáticos.

3. Procesar un procedimiento diferente de intervención que pueden ser útil para el futuro profesional docente en relación a la enseñanza del álgebra en secundaria.

Por todo ello, los objetivos que pretendemos alcanzar con la realización de este estudio, relacionados con los establecidos por el Máster de Profesorado de Educación Secundaria (Universidad de Almería, 2022), son:

1. Fomentar el desarrollo de una visión global y analítica del pensamiento inductivo y la capacidad de generalización en el ámbito matemático por parte del alumnado de secundaria.
2. Integrar experiencias profesionales relacionadas con la enseñanza del álgebra a través de una reflexión crítica sobre lo vivido y aprendido durante el periodo de prácticas.
3. Recopilar técnicas y estrategias de intervención para facilitar la comprensión del álgebra por parte del alumnado.
4. Saber realizar búsquedas de información especializadas, utilizando bases de datos científicas, relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar para llevar a cabo la elaboración del marco teórico.
5. Aprender a confeccionar un trabajo académico con ciertos cánones previamente establecidos.

Las competencias de carácter básico que buscamos llevar a efecto, son las recogidas en el Real Decreto 1393/2007, del 29 de octubre:

i. CB6. Poseer y comprender conocimientos.
ii. CB7. Aplicación de conocimientos.
iii. CB8. Capacidad de emitir juicios.
iv. CB9. Capacidad de comunicar y aptitud social.
v. CB10. Habilidad para el aprendizaje.

A continuación, establecemos la estructura en la que se organiza el documento. En concreto, el TFM se divide en las siguientes partes. En la primera, se lleva a cabo una introducción y justificación de la temática y metodología escogidas para llevar a cabo la propuesta de investigación; en ella se exponen las causas y finalidades generales que nos llevan a abordar esta temática, además de establecer ciertos objetivos particulares que procuramos lograr con el desempeño de este trabajo. La segunda parte atiende al marco teórico. En esta, se precisa en primer lugar la fundamentación teórica, que integra los conocimientos matemáticos y metodológicos necesarios, coherentes con el contenido aplicado y desarrollado posteriormente. En esta parte también se incluye la fundamentación legal para conocer qué regula la legislación educativa en los aspectos que se abarcan en el documento, y también cómo es tratada la cuestión en el centro educativo donde se llevaron a cabo las prácticas correspondientes al Máster de Profesorado. La tercera parte ocupa la propuesta de intervención e investigación educativa, basada en la metodología situaciones problema, y que se divide en tres fases: prueba inicial, intervención pedagógica y prueba final. En la cuarta parte manifestamos las conclusiones obtenidas tras el proceso de elaboración del trabajo; en ellas detallaremos en qué medida han sido cumplidos los objetivos planteados e indicamos propuestas de mejora para el futuro. Por último, informamos sobre la gran variedad de referencias bibliográficas empleadas. Además, al final se incluirán los anexos I, II y III, en los que se detallan las actividades llevadas a cabo en las distintas partes de la investigación e intervención.

II. MARCO TEÓRICO

"El arte de hacer matemáticas es encontrar ese caso especial
que contiene todos los gérmenes de la generalidad"
David Hilbert

2.1. Fundamentación teórica

Para comprender la ciencia matemática, es de vital importancia desarrollar la capacidad de razonar, la cual se encuentra ligada al pensamiento y es propia de los seres humanos. De forma general, el razonamiento es considerado un modo de encadenar conceptos e ideas que posibilitan alcanzar una determinada conclusión (Cañadas y Castro, 2004). En un contexto utópico de la Educación Matemática, el texto Principios y Estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000), apunta: “Los profesores ayudan a sus alumnos a formular, perfeccionar y explorar conjeturas partiendo de evidencias y a utilizar diferentes tipos de razonamiento, así como distintas técnicas de demostración para confirmarlas o refutarlas” (p. 3). Con el objetivo de abordar el pensamiento inductivo y la generalización en el aula de secundaria, comenzaremos introduciendo la noción de pensamiento algebraico, sus focos y qué es el álgebra escolar, para después tratar el razonamiento inductivo, cómo se afrontan estas cuestiones actualmente, y, finalmente, la base teórica en la que se fundamenta la metodología que trata de poner en práctica en este Trabajo Fin de Máster, las **situaciones problema**.

2.1.1. Introducción al pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico está íntimamente relacionado con el álgebra escolar; dota a los estudiantes de la oportunidad de entender las matemáticas lejos de metodologías o enfoques meramente procedimentales, consiguiendo de esta manera que desarrollen distintos modos de aproximarse y trabajar con elementos algebraicos (Cañadas et al., 2012). En sí, el pensamiento algebraico trata las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra; comprende el desarrollo de modelos matemáticos y el uso de representaciones propias del álgebra, incluyendo el simbolismo algebraico (Cañadas et al., 2012). Sin embargo, actualmente hablar de pensamiento algebraico no hace referencia al simbolismo algebraico como único sistema de representación tal y como sucedía décadas atrás (Kieran, 1996). Por otro lado, a través de dos cuestiones clave, Kaput et al. (2008) caracterizan el pensamiento algebraico como: la generalización hasta lograr expresiones algebraicas formales, y el razonamiento y la manipulación de expresiones simbólicas. Además, este mismo autor menciona los siguientes procesos con los cuales se vincula el pensamiento algebraico: razonamiento y generalización, desarrollo de modelos mentales, construcción de ideas algebraicas, búsqueda de patrones y resolución de problemas. En esta coyuntura, podemos concluir que “el pensamiento algebraico es un proceso cognitivo que permite a los estudiantes establecer y construir relaciones matemáticas generales, que pueden ser expresadas de diferentes formas, que van evolucionando con el tiempo, y pudiendo ser una de ellas el simbolismo algebraico" (Cañadas, 2019, p. 1).

2.1.2. ¿Qué es el álgebra escolar?

Dentro de la literatura de Educación Matemática, el álgebra escolar recibe numerosas concepciones o perspectivas, entre las cuales existen numerosas conexiones. Estos enfoques no pueden ser separados de forma drástica e independiente en la práctica educativa, ya que, en ocasiones, un determinado contexto puede involucrar actividades algebraicas asociadas a diferentes visiones del álgebra (Drijvers y Hendrikus, 2003). Bell (1988), Vergnaud (1989) y Bednarz et al. (1996) señalan que para comprender en detalle la pertinencia del álgebra, los conceptos algebraicos primordiales, su estructura y el uso del razonamiento algebraico, debe existir un equilibrio entre estas componentes. La identificación de las mismas se ha empleado para proponer distintos enfoques en la introducción y enseñanza de esta materia, además de reflexionar sobre las relaciones con otras áreas del currículo. Autores como Usiskin (1998), Bednarz, et al. (1996), Kaput (1999), Drijvers y Hendrikus (2003), Kaput, Carraher y Blanton (2008) o Drijvers, Goddijn y Kindt (2011) han tratado este asunto y, analizando sus trabajos, podemos separar las siguientes cinco concepciones o aproximaciones fundamentales del álgebra escolar:

- <u>*Concepción 1*</u>*: Aritmética generalizada y Estudio de patrones.*
  La aritmética generalizada y el estudio de patrones se apoyan en la idea de que la generalización es la raíz del álgebra, y en la exploración, identificación y expresión de regularidades y patrones como actividades algebraicas. Puede emplearse el simbolismo algebraico para describir patrones y estructuras a través de letras con significado de variables (Molina, 2015). En esta visión, Usiskin (1998) acredita la importancia del aprendizaje del álgebra y afirma: "Si haces algo una sola vez, probablemente no necesites el álgebra. Pero si haces un proceso repetidamente, el álgebra te facilita un lenguaje muy simple para describir lo que estás haciendo" (p. 23).

- *Concepción 2: Funciones.*

  Esta perspectiva propone un estudio del álgebra basado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en circunstancias cotidianas donde las relaciones cuantitativas pueden describirse mediante esos modelos (Heid, 1996). En este contexto, sí interviene el simbolismo algebraico que representa dichas relaciones. De esta forma, la identificación de patrones y la generalización mediante dichas relaciones funcionales es promovida por el pensamiento funcional en los estudiantes (Cañadas, 2019).

- *Concepción 3: Resolución de problemas.*

  La resolución de problemas siempre ha sido el corazón de la actividad matemática e, históricamente, el álgebra una herramienta privilegiada para llevar a cabo dicha tarea, en concreto para aquellos que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones (Kieran, 2007; citado en Molina, 2015).

- *Concepción 4: Estudio de estructuras.*

  Dentro de esta perspectiva, el álgebra se concibe como el estudio de estructuras a través de las propiedades de las operaciones con números reales y polinomios (Molina, 2015), y se aborda, por ejemplo, cuando se trabaja con el manejo de identidades algebraicas. Sin necesidad de vinculación a números o cantidades como referentes, las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura (Usiskin,1998). Esta perspectiva está vinculada estrechamente con la concepción del álgebra como aritmética generalizada.

- *Concepción 5: Lenguaje algebraico.*

  Como bien indica el epígrafe, este último enfoque considera el álgebra como un sistema de representación, es decir, como un instrumento para expresar ideas matemáticas (Molina, 2015). Arcavi (1994) indica que una ventaja de este enfoque es que nos permite separarnos del contexto inicial para producir resultados de manera más efectiva, lo cual favorece que este lenguaje sea altamente aplicable a otras áreas.

> Por su parte, Drouhard y Teppo (2004) emplean el término lenguaje algebraico para referirse al lenguaje matemático formado por simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas -como gráficos o tablas-; sin embargo, otros aluden únicamente al simbolismo algebraico, e incluso algunos autores como Drouhard (2001) y Kirshner (1987) han manifestado que puede considerarse como un lenguaje independiente (Molina, 2015).

2.1.3. Focos del pensamiento algebraico: patrones, generalización y sistemas de representación

Patrones

Como se ha podido ver en la sección anterior, uno de los enfoques del álgebra considera la ciencia matemática como aquella que estudia las regularidades. El termino patrón se define como toda situación repetida con regularidad y que se prevé que pueda volver a repetirse (Cañadas et al. 2010). Los patrones son asociados con el pensamiento algebraico por la presencia de la abstracción y la generalización en ellos (Cañadas et al., 2018). En Educación Matemática, la importancia otorgada en la enseñanza radica en dos hechos principales: su abundancia en el mundo que nos rodea, y que la habilidad para reconocer patrones matemáticos ayuda a desarrollar estrategias de pensamiento que mejoran las habilidades cognitivas abstractas de los sujetos o las necesarias para el entendimiento de diferentes operaciones (Castro, 1995). Es decir, los patrones tienen un peso considerable en el desarrollo del proceso de pensamiento de los estudiantes. En efecto, Papic (2007) señala que la destreza de los alumnos para trabajar con patrones potencia positivamente su rendimiento matemático. No obstante, el álgebra no es la única vía para expresar de forma general un patrón (Cañadas et al., 2012).

Generalización

En matemáticas, el concepto de generalización es muy amplio y se encuentra estrechamente relacionado con la inducción. En concreto, la generalización es indispensable en el álgebra; conlleva inferencia y en ella juega un papel primordial la conjetura (Cañadas et al., 2018). Dentro de lo que denominamos álgebra escolar, la generalización de patrones es considerada un elemento fundamental del pensamiento algebraico, y puede expresarse mediante diversos sistemas de representación. De hecho, el currículo actual de matemáticas en Educación Secundaria dota a procesos de razonamiento como la generalización de una gran importancia. Pólya (1966) afirma que se habla del concepto de generalización cuando, una vez observada cierta regularidad, se busca un patrón que sea válido para más casos. En particular, este autor ilustra dicha idea a través del siguiente ejemplo. ¿Podemos obtener una expresión genérica para la suma de los cubos de los n primeros números naturales? Nótese que

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$

Luego, parece ser que se verifica la igualdad

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2,$$

lo que aparentemente, a falta de una prueba formal y detallada, nos lleva a construir conocimiento matemático acerca de una propiedad de los números naturales. Es decir, nos encontramos ante una conjetura que aún exige una demostración para constatar su validez.

Como podemos dilucidar del ejemplo anterior, la generalización supone la afirmación de una propiedad o técnica para un gran conjunto de objetos (Cañadas et al., 2018). Por su parte, Kaput (1999) define la generalización como una extensión del rango de razonamiento más allá de los casos considerados a partir de la similitud entre ellos, poniendo el foco en las relaciones existentes, patrones, procedimientos y estructuras.

Normalmente, primero se lleva a cabo una generalización verbal e "informal", y, posteriormente, se traduce al lenguaje algebraico. Ahora bien, numerosas investigaciones han puesto de manifiesto que la adquisición del dominio y la comprensión del lenguaje algebraico supone una cuestión problemática para el alumnado (Cañadas et al., 2012). Aunque, dicho sistema de representación no es la única manera de expresar este fenómeno. Radford

(2010), Mason y Pimm (1984) consideran que el lenguaje natural, las expresiones verbales y gestos, constituyen para los alumnos una parte esencial del proceso de generalización.

Dörfler (1991) apoya la misma idea de generalización de Pólya, y la denomina **generalización empírica**; inicia el trabajo con casos particulares y, está relacionada con la identificación de patrones y el razonamiento inductivo (Cañadas et al., 2012). En concreto, las autoras Cañadas y Castro (2007), basándose en los estudios de Pólya (1965) y Reid (2002), establecen un vínculo entre el razonamiento inductivo y la generalización: desarrollan un modelo de razonamiento inductivo para someterse a tareas de generalización, y que será tratado con mayor profundidad en la siguiente sección del trabajo.

Sistemas de representación

Para pensar, razonar y comunicar conceptos e ideas matemáticas, es preciso representarlas de algún modo; la comunicación exige que esas representaciones puedan exteriorizarse en forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. Además, para que la mente pueda operar con estas nociones, es necesario representarlas internamente (Carpenter y Hiebert, 1992). Por todo ello, respecto a las formas de expresar el conocimiento en el ámbito de la Educación Matemática, se distingue entre representaciones externas e internas (Cañadas et al., 2012). Las representaciones externas constituyen la vía por la que los individuos hacen accesibles sus representaciones mentales a los demás, como puede ser a través de fórmulas algebraicas, gráficas, enunciados del lenguaje natural, etc. (Rico, 1997). En este trabajo nos centraremos en tratar las representaciones externas producidas por estudiantes de secundaria, donde son fundamentales las representaciones del tipo aritmética, tabular y pictórica. Además, dentro de las representaciones externas, Cañadas y Figueiras (2011) destacan la importancia de las representaciones múltiples, y destacan dos tipos de estas:

- *Representaciones combinadas*. Hacen alusión al uso de diferentes representaciones simultáneamente.
- *Representaciones sintéticas*. Poseen la condición añadida de que

tienen que ser vistas como un todo para que la respuesta de los estudiantes cobre sentido.

En la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático, las representaciones son importantes porque desempeñan un papel destacado en los procesos de construcción de conceptos (Rico, 2009); constituyen sistemas con notaciones, reglas y convenios que expresan ciertos aspectos y propiedades de una noción matemática. Entonces se habla de sistemas de representación (Castro y Castro, 1997).

Uno de los trabajos pioneros en el estudio de la conexión entre el álgebra y los modos de expresar la generalización fue el de Mason et al. (1985), cuyos resultados señalan que esa relación no parece ser directa para el alumnado de secundaria (Cañadas et al., 2012). Comúnmente, el sistema de representación más utilizado es el lenguaje algebraico, y, también cabe destacar que numerosas investigaciones han puesto de manifiesto que la adquisición del dominio y la comprensión del lenguaje algebraico supone una cuestión problemática para el alumnado (Cañadas et al., 2012). No obstante, como ya se ha mencionado previamente, éste no es la única manera de expresar la generalización; Mason y Pimm (1984) y Radford (2002) apoyan que el lenguaje natural es determinante en el proceso de generalización.

2.1.4. El razonamiento inductivo

El razonamiento es un proceso de pensamiento mediante el cual, a partir de premisas establecidas, podemos sacar ciertas conclusiones (Cañadas et al., 2010). La distinción clásica y comúnmente aceptada entre tipos de razonamiento son el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo. El razonamiento deductivo parte de unas premisas y llega a una conclusión como consecuencia de estas. Por su parte, el razonamiento inductivo comienza con sucesos particulares y busca la generalidad -apoyada por unas premisas- a partir de los hechos que ocurren (Cañadas y Castro, 2004); en otras palabras, el razonamiento inductivo es la acción de ver lo general en lo particular.

Como se mencionó en la introducción, los autores Pólya, Poincaré y Whitehead coinciden en señalar el papel vital de la inducción en la construcción de conocimiento matemático y científico, comenzando por la observación de situaciones particulares, advirtiendo las regularidades y posteriormente alcanzando la generalización (Cañadas et al., 2010). En concreto, Pólya (1966) se basa en la idea de "primero intuir, luego probar", y establece cuatro pasos para llevar a cabo un correcto procedimiento de razonamiento inductivo:

1. *Trabajo con casos particulares*.
2. *Formulación de la conjetura*.
3. *Justificación de la conjetura.*
4. *Comprobación de la propiedad con nuevos casos particulares.*

Estudios que conciernen a esta cuestión realizados por Jeffery (1978) y Almeida (1996), identifican considerables dificultades por parte de los alumnos en la ejecución de estos pasos, lo cual lo atribuyen al déficit de trabajo sistemático del estudiantado -en niveles preuniversitarios- sobre la justificación de propiedades matemáticas. A su vez, Baker (1996) afirma que cuando esta cuestión es trabajada en Educación Secundaria y en los primeros cursos de educación superior, la búsqueda de patrones y de la evidencia empírica es reflejada en los alumnos.

Para subsanar la problemática anterior, Cañadas et al. (2010) se basan en las ideas de todos los autores mentados previamente, además de en muestras de investigaciones propias (Cañadas y Castro, 2004), para proponer un modelo teórico de razonamiento inductivo exitoso que consta de los siete pasos que exponemos a continuación:

1. Trabajo con casos particulares. Es el paso que inicia el proceso de razonamiento inductivo y que parte de casos concretos o ejemplos que verifican una determinada propiedad. Habitualmente tienden a ser casos simples y/o fácilmente observables.

2. Organización de casos particulares. Consiste en ordenar (por ejemplo, en tablas) los datos obtenidos en el paso anterior de manera que se facilite la percepción de patrones o pautas.

3. Identificación de patrones. Clarificar aquello que se repite con regularidad y que se pronostica que vuelva a suceder.

4. Formulación de conjeturas. Se establece una proposición que se sospecha que es veraz pero que no ha sido supeditada a análisis para determinar su aceptación o rechazo. Puede expresarse en lenguaje natural.

5. Justificación de las conjeturas. Son presentados argumentos con el objetivo de convencer sobre la veracidad de una determinada afirmación.

6. Generalización. Es el paso que extiende el razonamiento más allá de los casos que se han tratado particularmente. La conjetura es expresada en términos que hacen referencia a todos los casos de una clase o categoría determinada. Puede expresarse de diversas formas, como lenguaje verbal o gestual y mediante representación simbólica o algebraica (Radford, 2010).

7. Demostración. Proceso que establece con certeza la validez de la conjetura. Permite conocer si realmente se está obteniendo nuevo conocimiento o no.

Es de destacar que todos ellos no tienen la misma relevancia dentro del proceso de razonamiento inductivo. En concreto, el sexto paso es el motor para originar nuevo conocimiento y es el que mayor dificultad supone para el alumnado (Cañadas y Castro, 2004). El séptimo y último paso, la demostración, asegura la validez o refutación de la propiedad para garantizar si nos encontramos ante nuevo conocimiento.

Por su parte, Mason et al. (1985) resumen las etapas, desde el punto de vista didáctico (y especialmente para aquellos relacionados con el álgebra escolar), necesarias para llevar a cabo un **proceso de generalización**, en los siguientes puntos (Pérez, 2005):

- ***Ver.*** Observar lo propio de cada caso particular hasta encontrar el patrón o la regularidad del problema.
- ***Describir.*** Exponer las reglas de formación de lo observado, sin necesidad de una sintaxis formal.
- ***Registrar.*** Organización de los resultados: expresión formal de la

propiedad.

2.1.5. Enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, el pensamiento algebraico y el razonamiento inductivo en el aula

En los últimos años, en Educación Secundaria, se ha producido un cambio en la forma de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, con el objetivo de paliar las distintas dificultades ligadas a conceptos algebraicos. Han sido desarrollados enfoques que pretenden fomentar el pensamiento algebraico basándose en las cinco concepciones descritas en el apartado 2.1.1. Drijvers (2011) afirma que, dentro de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, uno de los temas de debate actual es la relación existente entre la comprensión conceptual y las habilidades procedimentales; las diferentes aproximaciones aportan una variedad de enfoques para llevar a cabo dicha tarea (Cañadas, 2019).

El hecho de que el pensamiento algebraico necesite tiempo para desarrollarse ha sido demostrado por numerosos estudios; Cañadas et al. (2016) defienden su instrucción desde los primeros niveles educativos, considerando que es positivo para el progreso del alumnado. En particular, España es uno de los países que ha introducido en su currículo la enseñanza del álgebra a edades tempranas, y se destacan las siguientes tareas para potenciar el pensamiento algebraico:

- Comprensión de patrones, relaciones y funciones.
- A partir de símbolos algebraicos, representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas.
- Uso de modelos matemáticos.
- Analizar escenarios de cambio en distintos contextos.

En diversas investigaciones como la de Davidov (1972/1990), igualmente se apunta la importancia de la generalización y el razonamiento inductivo en el aprendizaje. Esto también se ve reflejado en documentos curriculares, como en los estándares del N.C.T.M (2003), que apunta que hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el camino básico para el descubrimiento. Mason et al. (2005) respaldan el trabajo de las tareas de generalización y de razonamiento inductivo en las aulas, considerándolas esencia de la actividad matemática y que favorecen el manejo de los procesos de validación formales. Sin embargo, no es habitual que los autores de textos escolares introduzcan actividades que requieran el razonamiento inductivo para su realización.

Trujillo et al. (2009) exponen en su estudio la enorme dificultad que supone incluso para los estudiantes universitarios expresar la generalización de un patrón mediante relaciones algebraicas. Como sugerencia para la enseñanza y con motivo de su papel destacado en la obtención de conocimiento, Cañadas et al. (2010) subrayan la importancia de que los alumnos trabajen sistemáticamente desde edades tempranas el razonamiento inductivo mediante tareas, con el objetivo de desarrollar habilidades que se potencian con este proceso. Estas autoras señalan que debe comenzarse por los pasos más accesibles, como empezar tratando casos particulares en ir progresando en búsqueda de patrones, conjeturas y finalmente generalizaciones, e insisten en que no siempre es necesario seguir paso a paso el proceso descrito en la sección 2.1.3, sino que en ocasiones basta únicamente con ceñirse a algunos puntos del mismo. Algunos ejemplos de este tipo de tareas (Cañadas et al., 2010), son:

1. *Tareas que buscan hallar un nuevo elemento*. El objetivo es que, a partir de varios elementos que se presenten, los alumnos identifiquen uno nuevo que tenga una estructura determinada (patrón) por una relación numérica y/o una espacial o visual (disposición de elementos en el plano).
2. *Tareas que incluyen la generalización*. Son proporcionados varios casos particulares que podrían tener lugar en un proceso inductivo para que detecten un patrón de comportamiento, con el propósito de que los alumnos sean capaces de obtener la generalización requerida y que posteriormente la expresen algebraicamente.
3. *Problemas que implican generalización*.

Sin embargo, estas ideas defendidas en la literatura específica no tienen impacto en la práctica, y el objetivo general de este trabajo es plantear una vía de aplicación de estas ideas.

2.1.6. Metodología: las situaciones problema para resolver problemas de generalización matemática

A diario, en el ámbito educativo, estamos hartos de escuchar que hay que cambiar la forma en la que se enseñan las matemáticas en el aula. Ciertamente, si examinamos la situación actual, se puede comprobar cómo con las metodologías tradicionales, que están basadas en la pasividad del estudiante y en memorizar procedimientos, estrategias e información aceptados e impuestos de forma monótona, la mayoría del alumnado pierde el interés y la motivación (Isla, 2004). En consecuencia, estos factores contribuyen a una disminución del esfuerzo por parte del alumno, limitaciones para razonar y adoptar un pensamiento crítico, y dificultad para aplicar conocimientos estudiados a situaciones de la vida real. Como respuesta a este asunto, desde diversos trabajos de investigación se proponen en el aula nuevas relaciones entre los conocimientos matemáticos, el docente y el alumno, que empiezan a hilarse desde prácticas propias de la **pedagogía activa** (Múnera, 2011).

Una alternativa dinamizadora para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares es la implementación de la metodología denominada **situaciones problema**, caracterizada por involucrar de forma activa a los estudiantes en procesos que faciliten la construcción de conocimientos (Múnera y Obando, 2003), y buscar potenciar el trabajo autónomo del alumno consiguiendo así desarrollar aprendizajes más significativos. Además, esta propuesta metodológica también viene motivada por una de las competencias específicas destacadas en el currículo de Matemáticas de Educación Secundaria: la resolución de problemas. En el aprendizaje de las matemáticas, ésta tiene un papel clave debido a que las reflexiones llevadas a cabo durante este proceso ayudan a la construcción de conceptos matemáticos y al establecimiento de relaciones entre ellos.

¿Qué es una situación problema?

En palabras de Múnera y Obando (2003), una situación problema puede interpretarse como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, que propicia nuevas relaciones, desde el trabajo cooperativo, entre el docente, los conocimientos y el estudiante. Por una parte, las situaciones problema transforman las prácticas pedagógicas del docente y estimulan el desarrollo de la autonomía del alumno hacia la obtención de nuevos conceptos y relaciones, utilizando saberes previos; por otra, se introducen elementos que sirven para reorganizar los conocimientos matemáticos mediante distintas representaciones, que dotan de significado los aprendizajes conceptuales y procedimentales de los estudiantes (Múnera, 2008).

Vigostky (1995) apoya que la presencia de un problema es el factor fundamental que propicia una serie de procesos psicológicos que llevan al establecimiento de palabras y símbolos que generan el concepto, y lo considera como un proceso creativo, no mecánico y pasivo. En consecuencia, las situaciones problema estimulan los niveles de lenguaje algebraico y estructuración simbólica, además de posibilitar el establecimiento de relaciones, generalizaciones, representaciones, etcétera (Múnera y Obando, 2003).

Muchos autores concuerdan en que un diseño estratégico de situaciones problema suponen un escenario natural para llegar a la generalización, al tratarse de espacios destinados a argumentar, particularizar, conjeturar y demostrar (Múnera y Obando, 2003), y la mejor manera de llevar al aula temas que involucran procesos generales de pensamiento (Pérez, 2005).

Las **características** más relevantes de las situaciones problema, establecidas por Moreno y Waldegg (2002), son:

- La interacción entre el alumno, el contenido y el profesor es un elemento vital del proceso.
- Toda situación problema debe comenzar con un motivo o actividad inicial que origine cuestiones relacionadas con el tema a tratar.
- El docente toma la iniciativa en la propuesta de ideas para resolver las cuestiones que se originan en la construcción. Además, debe tratar de mantener el interés del alumnado en la actividad a desarrollar.
- Debe permitir al alumno emplear conceptos previos estudiados.
- Debe involucrar implícitamente conceptos que se quieran aprender.
- Debe suponer un problema para el estudiante, pero también ser accesible

a su nivel.

- La autonomía intelectual del alumno es clave en su desarrollo.

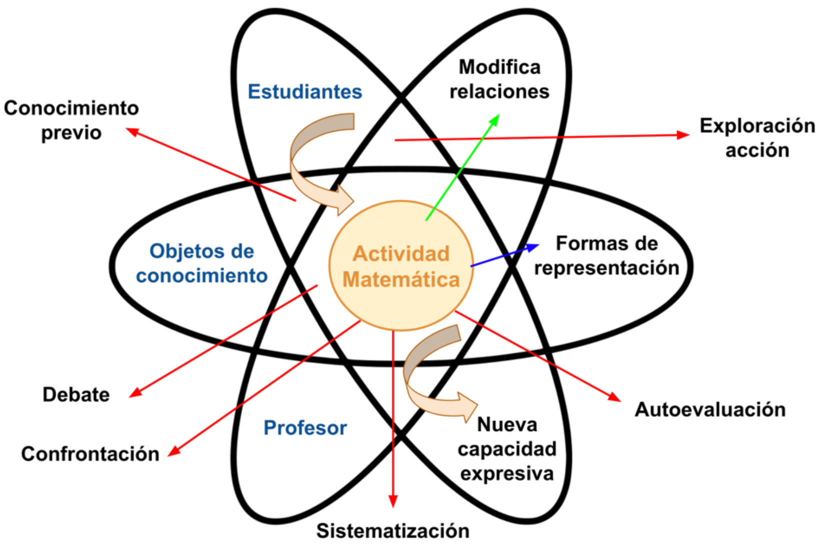


Figura 1. *Relación entre los objetos de conocimiento, el estudiante y el profesor en un enfoque de situaciones problema. Fuente: Múnera (2008).*

Estrategia para el diseño de situaciones problema en matemáticas

Mesa (1997) propone las siguientes pautas o elementos fundamentales para el diseño de situaciones problema en el aprendizaje matemático (Pérez, 2005):

1. **La red conceptual: organización jerárquica y estructurada de los conocimientos.** Seleccionar y organizar la materia que se quiere abarcar, estableciendo a modo de red conceptual relaciones entre los conceptos y estructuras matemáticas.
2. **Elección de un problema inicial: contextualización.** La elección del problema inicial es muy importante, ya que un escenario significativo es clave en la comprensión de la situación por parte del estudiante. Debe ser un problema original, que incluya materia ya trabajadas por el estudiante con anterioridad, y que incorpore aspectos necesarios para la construcción de nuevos conceptos en el alumnado.
3. **Selección de cuestiones y tareas principales.** Las tareas que forman parte de la situación problema son su parte visible, y constituyen el medio

a través del cual el alumno desarrolla su actividad, realizando las elaboraciones conceptuales relativas al problema tratado (Múnera y Obando, 2003). El objetivo es generar estructuras de manera que el conocimiento que se pretende enseñar al alumno sea la herramienta más potente para afrontar la situación propuesta.

4. **Pregunta problémica.** El problema está compuesto por preguntas que orientan al estudiante a la obtención de la solución; les induce a la reflexión en busca de nuevo conocimiento.
5. **Niveles de conceptualización.** El autor diferencia dos niveles:
    a. Nivel de particularización: estudio de casos concretos.
    b. Nivel de abstracción o generalización: construcción matemática formal.
6. **Evaluación.** Es importante que el profesor preste atención a la actividad de los alumnos durante todo el proceso. La evaluación puede basarse en el trabajo individual o colectivo. El trabajo individual puede analizarse por medio de: la actitud, el interés, el nivel de participación, capacidad de adquirir información y desarrollar procedimientos. El trabajo colectivo puede evaluarse de acuerdo a los siguientes puntos:
    a. Capacidad para aplicar conocimientos ya adquiridos.
    b. Estrategias y procedimientos utilizados en el problema.
    c. Cambios en las concepciones mediante la participación activa de los estudiantes en la construcción del conocimiento.
    d. Cómo han adquirido y transmiten los conceptos trabajados.

2.2. Fundamentación legal

Para justificar desde un punto de vista curricular el interés y la voluntad de elaborar este Trabajo Fin de Máster, concretamos el papel de álgebra y las metodologías relacionadas con la resolución de problemas en los documentos curriculares en el contexto nacional y autonómico en un orden descendente.

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (texto consolidado de 23/02/2021). El artículo 26, dedicado a principios pedagógicos, señala que se dedicará parte del horario lectivo de la Enseñanza

Secundaria Obligatoria a la realización de proyectos significativos para el alumnado y a la resolución colaborativa de problemas, con el objetivo de fomentar la integración de las competencias y en consecuencia reforzar también la autoestima, autonomía, reflexión y responsabilidad de los alumnos.

- Real Decreto 227/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE 30-03-2022). En particular, en el Anexo III se señalan las situaciones de aprendizaje como una herramienta eficaz para integrar los elementos curriculares de las distintas materias o ámbitos mediante tareas y actividades reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión crítica y la responsabilidad. Asimismo, se indica que estas deben estar compuestas por tareas complejas cuya resolución lleve a la construcción de nuevos aprendizajes. También, en el apartado dedicado a las Matemáticas (p. 41725), especifica la resolución de problemas como uno de los objetivos del aprendizaje de las matemáticas y una de las principales formas de aprender esta materia. Además, son identificados una serie de sentidos necesarios para emplear los saberes básicos de manera funcional. Entre ellos se encuentra el sentido algebraico, que proporciona el lenguaje en el que se expresan las matemáticas; consiste en ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables, expresándolas mediante distintas representaciones. Finalmente, en la misma sección se indican las competencias matemáticas, las cuales abarcan el tema tratado en este TFM.
- Decretos 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece respectivamente la ordenación y el currículo de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía (BOJA 28-06-2016). El artículo 7 de alude a recomendaciones de metodología didáctica, donde se apunta al uso de metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, relacionen los contenidos y fomenten el aprendizaje por proyectos, centros de interés o estudios

de casos que incrementen la participación e interés del alumnado a dotar de funcionalidad y transferibilidad a los aprendizajes. En este mismo artículo, se precisa que las líneas metodológicas de los centros docentes tendrán la finalidad de favorecer la implicación del alumnado en su propio aprendizaje, estimular la superación individual, el desarrollo de todas sus potencialidades, fomentar su autoconcepto y su autoconfianza, y los procesos de aprendizaje autónomo, y promover hábitos de colaboración y de trabajo en equipo. Por último, también es señalado el desarrollo de actividades para profundizar en las habilidades y métodos de recopilación, sistematización y presentación de la información y para aplicar procesos de análisis, observación y experimentación, adecuados a los contenidos de las distintas materias.

- Orden de 15 de enero de 2021 (BOJA extraordinario nº7 de 18-01-2021) por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía y se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, Anexo II Materias Troncales. Aquí, se establece como estrategia metodológica efectiva presentar los nuevos conocimientos en el contexto de resolución de problemas.

2.3. Cómo es abordada esta cuestión en el centro y en el aula

Dentro de estas programaciones “asfixiantes” a las que estamos acostumbrados en el ámbito educativo, la generalización y el razonamiento inductivo son los grandes olvidados de los libros de texto de Matemáticas. Bien es cierto que, estos son aspectos que están intrínsecos en todo quehacer matemático, especialmente en estos niveles. Pero ¿realmente los alumnos son conscientes de ello? A mi parecer, no.

Tras entrevistar a cada uno de los docentes de Matemáticas del centro, todos coincidían en el mismo punto: no hay tiempo para innovar debido a que hay que cumplir una programación muy ajustada. Todos me afirmaron que se adaptaban a la línea que siguen los manuales de cada curso para tratar esta cuestión, siguiendo una metodología tradicional y trabajándolo a partir de tareas individuales. Lo único "fuera de lo común" en relación a este asunto me lo comentó mi tutora; para tratar temas como la introducción al lenguaje algebraico de 1º ESO -donde la generalización y abstracción juega un papel fundamental- y que los alumnos participaran activamente en su proceso de aprendizaje, les proponía la visualización de vídeos interactivos, como el canal de "El Sensei de las Mates" o "Angelitoons: Las aventuras de Troncho y Poncho", para que posteriormente pudieran preguntar las dudas ocasionadas en clase.

No obstante, indagando cómo se trata esta cuestión en otros centros y otras comunidades, llegué a la misma conclusión. Lo único que pude encontrar es que se atienda explícitamente la generalización y el pensamiento inductivo en ampliaciones de los cursos de ESO, como por ejemplo ocurre en Donaire et al. (2011).

Por todo lo expuesto previamente, considero que la propuesta que se pretende hacer con este Trabajo Fin de Máster constituye una alternativa más que válida para cambiar la forma en la que se enseñan las matemáticas, y en particular el álgebra, que puede dar un impulso a la concepción de esta cuestión en el centro educativo. Con ella, buscamos aumentar la motivación e interés por parte del alumnado, y como bien diría el divulgador matemático Adrián Paenza, iniciando el proceso de aprendizaje por buscar respuestas a problemas que tenemos, en vez de, como es habitual, buscar respuestas a preguntas que no nos hemos planteado.

III. MARCO APLICADO

"Largo es el camino de la enseñanza por medio de teorías;
breve y eficaz por medio de ejemplos"
Séneca

3.1. Contexto, ámbito de intervención y destinatarios

El marco de intervención está centrado en un aula de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º ESO, con una muestra de estudio de 20 alumnos de entre 14 y 16 años, y en ausencia de estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo. La propuesta de investigación está enfocada a su aplicación en el último trimestre del curso, donde el docente conoce mejor cómo trabajan los alumnos y ya han sido trabajados ciertos aspectos del currículo. Si bien, podría llevarse a cabo en cualquiera de los tres o, incluso, adaptarse a otros cursos de ESO y Bachillerato.

El centro donde se pretende llevar a cabo esta propuesta de investigación es el I.E.S. Bahía de Almería, tipificado como centro ESO con tres líneas (D3) que imparte las enseñanzas: Educación Especial, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Itinerario de Ciencias e Itinerario de Humanidades y Ciencias Sociales), cuyo valor obtenido para el Índice Socioeconómico y Cultural (ISC) en el último estudio realizado, indica que es 0'29, disminuyendo en más de la mitad en los últimos 5 años.

3.2. Objetivos generales y específicos del estudio

Con esta propuesta metodológica se persiguen alcanzar los siguientes objetivos generales y específicos:

1. Desarrollar aptitudes relacionadas con el pensamiento lógico-matemático en los alumnos de 3º ESO del I.E.S. Bahía de Almería, utilizando como estrategia de enseñanza-aprendizaje actividades que implican situaciones de generalización.
2. Establecer el grado de habilidad para realizar generalizaciones en el ámbito matemático en alumnos de 3º ESO.

3. Identificar el modo de razonar del alumnado y analizar las estrategias que los estudiantes utilizan a la hora de realizar tareas de generalización.
4. Examinar las formas de los estudiantes de comunicar y transmitir su razonamiento respecto a tareas de generalización, y clasificar las respuestas de los mismos.
5. Corregir los errores y las carencias iniciales relacionadas con la generalización encontradas en el alumnado.
6. Comprobar la posible mejoría de resultados de los alumnos tras la intervención pedagógica.
7. Interiorizar el proceso de generalización como herramienta útil para la resolución de problemas.
8. Saber aplicar los contenidos matemáticos a situaciones de la vida cotidiana o problemas reales.

3.3. Procedimiento de investigación e intervención en el aula

El mundo educativo está frecuentado por una gran cantidad de casuísticas y problemas; no podemos limitarnos a describir, necesariamente tenemos que plantear estrategias de intervención siempre desde la óptica de no solo recoger información, sino de plantear alternativas de mejora para actuar y solventar estas situaciones. La propuesta que llevamos a cabo en este Trabajo Fin de Máster será de tipo general, en concreto de investigación, evaluación e intervención educativa, que trata el tema de la generalización y el pensamiento inductivo en el marco de las situaciones problema en el alumnado de 3º de Enseñanza Secundaria Obligatoria del I.E.S. Bahía de Almería. La naturaleza de ésta será exploratoria y descriptiva, pues se dispone de escasa información de estudios previos sobre el tema.

Las situaciones problema buscan desarrollar en el alumnado la capacidad de establecer conjeturas, aplicar algoritmos, definir variables, establecer relaciones y resolver problemas. Basándonos en el trabajo de Pérez (2005), dividimos la propuesta de intervención principalmente en tres etapas: una **prueba inicial**, una **intervención pedagógica** y una **prueba final**. La idea es comparar cómo trabaja y razona el estudiante antes de la intervención pedagógica con cómo se desenvuelve después de la misma.

Etapa 1. Prueba inicial (duración: 75 minutos)

La finalidad de esta etapa **es observar los obstáculos y las limitaciones** del alumnado en tareas de generalización, e indagar en sus conocimientos previos respecto a esta cuestión. Es decir, establecer un punto de partida del grupo. Consiste en un test inicial individual constituido por 3 problemas. Cada cuestión está articulada de manera que se puedan dilucidar las tres fases que debe atravesar todo proceso de generalización (Pérez, 2005), de acuerdo a Mason (1999):

- ***Ver.*** El alumno debe estudiar los primeros casos particulares, mediante números o representaciones gráficas, hasta encontrar el patrón o la regularidad del problema.
- ***Describir.*** Consiste en el descubrimiento de las reglas de formación. El alumno enuncia verbalmente las relaciones encontradas entre los distintos casos particulares estudiados.
- ***Registrar.*** Esta fase corresponde a la organización de los resultados: definir las variables, establecer las relaciones simbólicas pertinentes y finalmente formular la generalización.

Nótese que estos aspectos procedimentales son las habilidades que debe adquirir el estudiante cuando finalice la intervención, además de también incorporar estas pautas como un mecanismo práctico para la resolución de problemas. En particular, en cada problema de esta prueba inicial se realizan una serie de preguntas que funcionan como guía para llegar a la solución.

Destacar que, cada problema es tratado y evaluado por parte del docente de una manera diferente para saber cómo el alumno lo afronta, ya que el proceso de alcanzar la solución varía en cada uno de ellos (cómo se definen las variables, cómo las relaciona, manejo de la simbología, establecer conjeturas, etc.). La prueba inicial propuesta se puede ver en el anexo I.

Etapa 2. Intervención pedagógica (duración: 2 horas)

El objeto de esta fase es **subsanar los errores más comunes cometidos por los estudiantes** que fueron detectados en la prueba inicial, y mejorar el rendimiento de los alumnos en tareas de generalización. Como se ha podido ver en dicha prueba, en este nivel nos limitamos a trabajar con conceptos aritméticos y de geometría elemental, en concreto cuestiones de sucesiones numéricas y gráficas, donde se observan regularidades, patrones y relaciones.

Para llevar a cabo esta etapa, utilizamos la metodología o estrategia didáctica de las **situaciones problema**. En ésta, formulamos un problema complejo a fin de que puedan analizarse a través del mismo todos los aspectos y fases de la generalización. La forma de orientar a los estudiantes se basa en ir presentando preguntas problémicas para que ellos descubran por iniciativa propia qué corresponde a cada etapa y aspecto, y formar así esquemas generales de pensamiento. Seguiremos un **esquema** similar al que establece Pérez (2005) en su estudio **para resolver problemas de generalización en el aula**, y que está dividido en ocho pasos:

1. Motivación y problema inicial.
2. Estudio de casos particulares.
3. Descripción verbal del escenario: reglas de formación.
4. Plantear las variables y sus relaciones.
5. Formulación general del problema.
6. Síntesis de los conceptos empleados y los adquiridos durante el proceso de generalización.
7. Propuesta de problemas que incluyen la generalización para afianzar lo aprendido.

En el anexo II puede consultarse la sesión propuesta de esta etapa.

Etapa 3. Prueba final (duración: 75 minutos)

Posee la misma estructura que la prueba inicial, formada también por 3 problemas de generalización, y en contextos semejantes. Sin embargo, en esta ocasión el alumnado únicamente dispondrá de los enunciados de cada problema, ya que en ese momento dispondrá de un bagaje acerca de resolver este tipo de problemas adquirido en la etapa de intervención pedagógica. El motivo de ello es que desarrollen un pensamiento libre y tácticas de resolución propias de cada uno.

Esta etapa sirve para **contrastar con los resultados iniciales la evolución en el razonamiento del alumno y así evaluar el grado de éxito de la intervención**. En esta ocasión, el docente exige al alumno que aplique todas las fases de la generalización y que utilice la simbología matemática conveniente. La prueba final diseñada se puede ver en el anexo III.

3.4. Diseño del instrumento

En las pruebas, tanto inicial como final, cada una de las cuestiones es seleccionada verificando una serie de condiciones:

- Novedosas y motivadoras para el alumno (sobre temas o aspectos que puedan atraer su atención).
- Interesantes en su contenido y que abarquen aspectos del currículo del curso 3º ESO.
- Expresadas en un lenguaje sencillo y accesible para el alumnado con el que se trabaja.
- Adaptadas al nivel de dificultad de 3º ESO, pero que a su vez supongan un "reto" para el estudiante y desarrolle su pensamiento lateral.
- De forma que se puedan vislumbrar las etapas que fueron propuestas por Mason (1999) cuando se trata de un problema de generalización, y también los distintos aspectos procedimentales citados.

Los contextos donde se mueven los problemas planteados serán:

- Geométricos, para examinar tanto cómo perciben los alumnos las características del escenario o situación planteada mediante representaciones gráficas, como el tratamiento de la información.
- Aritméticos, para analizar el trabajo y la organización de los estudiantes respecto a los números y sus propiedades.

Además, en particular en la **prueba inicial**:

- Está constituida por 3 problemas.
- En cada pregunta se realizan una serie de cuestiones que sirven como pautas para llegar a la solución final del problema.
- No se precisará de lenguaje simbólico; pueden utilizarse desde expresiones escritas en lenguaje verbal hasta terminología matemática.
- No habrá indicaciones al alumno sobre cómo definir las variables o establecer relaciones.

Por otro lado, respecto a la **prueba final**:

- Está constituida por 3 problemas con características similares a las del test inicial.
- Se darán únicamente los enunciados; no se proporcionan pautas que ayuden al estudiante a identificar cada etapa de la generalización, a diferencia de la prueba inicial.
- Permite ver la mejora del rendimiento del alumnado.
- Se exige que el alumno emplee el lenguaje simbólico adecuado para expresar la generalización.

En los anexos I y III pueden verse las propuestas de pruebas inicial y final.

<u>Nota:</u> algunos de los problemas utilizados han sido seleccionados de artículos de estudios relacionados con experiencias en la generalización y el razonamiento inductivo, y adaptados al contexto de nuestro experimento.

3.5. Análisis de los datos

En este apartado de la propuesta de intervención, investigación y evaluación educativa que concierne a este trabajo, ponemos de manifiesto cómo analizaríamos los datos obtenidos en el caso de que pudiera llevarse a cabo el estudio en un contexto real. En concreto, la **prueba escrita individual** es utilizada como instrumento de evaluación para el alumnado. Ésta es confeccionada, de acuerdo a los puntos de la sección anterior, de manera que se puedan advertir las formas de razonar de los estudiantes, los procedimientos y estrategias que siguen, y cómo son capaces de exponerlos a través del lenguaje matemático.

El análisis estadístico que se llevaría a cabo sería **cuantitativo** y **cualitativo** de los resultados obtenidos en ambos test, y la comparación entre estos datos nos informaría en qué grado tuvo éxito la intervención pedagógica. El análisis cualitativo evalúa cómo razonan los estudiantes, qué errores son los más comunes al generalizar, qué estrategias emplean y cómo lo transmiten. El análisis cuantitativo atiende a la puntuación obtenida, el porcentaje de alumnos que la superan y por qué. Los **parámetros de evaluación de las pruebas inicial y final** para dicho análisis, son los siguientes:

- Puntuación de los 5 aspectos de cada problema: cada cuestión refleja un aspecto de las etapas del proceso de generalización (ver, describir y registrar).
    - Particularizar, correspondiente a la etapa ver.
    - Establecimiento de patrones verbalmente, correspondiente a la etapa describir.
    - Definición de variables, establecer conexiones y formulación simbólica de la generalización, correspondientes a la etapa registrar.

  Cada aspecto estará valorado sobre 10 puntos. En consecuencia, cada de ejercicio está valorado sobre 50 puntos.
    - Si no hubo respuesta o es completamente errónea, la puntuación es 0.
    - Si la respuesta presenta parcialmente errores, como puede ser el fallo en algún caso particular de la generalización, pero en general es medianamente correcta, la puntuación es de 5 puntos.
    - Si la respuesta es totalmente correcta, es decir, carece de fallos y posee explicaciones claras y razonadas, entonces la puntuación es 10.
- Puntuación total de cada etapa de cada problema. En el caso de registrar, al evaluarse tres aspectos, se suman y se divide entre 3.

- Puntuación total de cada problema, donde se suman todos los aspectos y se divide por 5.
- Puntuación total de cada aspecto, donde se sumará lo obtenido en cada aspecto de cada problema, y se dividirá por 3.
- Puntuación total de cada etapa, donde se sumará lo obtenido en cada etapa de cada problema, y se dividirá por 3.
- Puntuación total de los problemas, donde se sumará la media obtenida de cada problema y se dividirá por 3.

Para examinar los datos obtenidos, se construirían dos tablas:

- En la primera, se recogería por columnas la puntuación conseguida (0-10) por cada alumno en cada aspecto (clasificado por etapa y problema). En la parte inferior de la tabla, además se mostraría en dos renglones la suma total y el promedio de calificación de cada aspecto.
- En la segunda, por estudiante, se recogería por columnas la puntuación total conseguida (0-50) en:
    - Cada uno de los 3 problemas de la prueba inicial o final.
    - Cada uno de los 5 aspectos.
    - Cada una de las 3 etapas.

  Se reserva la última columna para indicar el promedio global del alumno (la media del total obtenido por aspectos, problemas y etapas). También, en la parte inferior de la tabla, además se mostraría en tres renglones la suma total de puntos, el promedio de calificación (sobre 50) de cada uno de los apartados anteriores, y la puntuación total de cada problema (sobre 10), cada aspecto y cada etapa. En la última entrada de la tabla se refleja el promedio de puntos (sobre 10) grupal de la prueba.

<u>Nota:</u> tanto en la prueba inicial como en la prueba final, los resultados son considerados de **forma grupal**. Esto es, no se analizan por separado las puntuaciones individuales, al no tratarse de un objetivo de esta propuesta de investigación. El resultado será considerado positivo si es superado por al menos el 50% del alumnado.

3.6. Resultados esperados y conclusiones del estudio

Con aplicación de la metodología situaciones problema orientada a los problemas de generalización en el aula de 3º ESO del I.E.S. Bahía de Almería, se esperan obtener los siguientes resultados:

- Mejora del razonamiento lógico-matemático y la capacidad de abstracción del alumnado.
- Aumento del rendimiento académico respecto a problemas de generalización en matemáticas.
- Aumento de la autonomía del estudiante en la resolución de problemas: identificar qué necesitan saber del problema, cómo estructurar la solución y, finalmente, resolverlo con éxito.
- Adquisición de una nueva herramienta de resolución de problemas.
- Fomento de la competencia de trabajo en equipo.
- Resultado positivo y eficaz la estrategia de las situaciones problema para la construcción de ideas matemáticas.

IV. CONCLUSIONES FINALES

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se les revelan a aquellos que tienen valor de profundizar en ella"
Gauss

En primer lugar, llevamos a cabo un balance del grado de consecución de los objetivos indicados al inicio del documento. Haciendo referencia al primer y al tercer objetivo, considero que este trabajo supone una propuesta interesante, adecuada y dinamizadora para mejorar la capacidad de generalización y del pensamiento inductivo en el estudiantado de secundaria, y que además permite comprobar la evolución progresiva del alumnado; la generalización es un aspecto matemático que no se trabaja explícitamente en ningún curso de ESO o Bachillerato, y esta iniciativa fortalece las diferentes formas de abstracción matemática, que son desarrolladas por aprendizaje por descubrimiento. En relación al segundo objetivo, la experiencia durante el periodo de prácticas en el

I.E.S. Bahía de Almería sobre la enseñanza del álgebra, reflejada en la sección 2.3, fue lo que motivó y ayudó a la elección de este tema, al tratarse de una cuestión tan importante en el ámbito matemático y por desgracia tan escasamente trabajada en los centros; la única pega es que no ha podido ser llevado a la práctica en el centro por motivos de planificación. Para terminar, considero que los objetivos 4 y 5 también han sido logrados, ya que se han utilizado fuentes de datos científicas recomendadas por mis tutores, y el documento ha sido elaborado de acuerdo a las orientaciones establecidas por la Universidad de Almería.

A continuación, establecemos en forma de decálogo los principales hallazgos tras la realización de este Trabajo Fin de Máster:

1. El álgebra escolar recibe numerosas concepciones entre las que existen diversas conexiones.	2. Los focos del pensamiento algebraico son los patrones, la generalización y los sistemas de representación.
3. Los patrones son fundamentales en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.	4. Para pensar, razonar y comunicar conceptos e ideas matemáticas es preciso el uso de sistemas de representación.
5. La inducción es la principal vía de construcción de conocimiento matemático y científico.	6. El pensamiento inductivo y la generalización son aspectos no trabajados en Educación Secundaria.
7. La generalización es una herramienta eficaz para la resolución de problemas.	8. Las etapas necesarias del proceso de generalización son: ver, describir y registrar.
9. Las situaciones problema son una alternativa dinamizadora del	10. Una buena forma de conocer la evolución del alumnado es realizar

contenido matemático en el aula, y facilita la construcción de conceptos.	una evaluación antes y después de la intervención pedagógica.

Para finalizar con el TFM, me gustaría destacar que la elaboración de este trabajo me ha llevado a lidiar con una metodología hasta el momento desconocida para mí, las situaciones problema. En mi opinión, es una estrategia que permite reforzar la creatividad y la autonomía del alumno, y que es especialmente apropiada para tratar la generalización en Educación Secundaria. Además, pienso que esta técnica puede serme de gran utilidad en mi futuro en la práctica docente para trabajar los aspectos mencionados de una forma innovadora. Por otro lado, como se ha comentado a lo largo del trabajo, el pensamiento inductivo y la generalización es la vía principal para la construcción de conocimiento matemático, y considero que se debería de trabajar de forma más explícita en las aulas y también darle un mayor peso al aprendizaje por descubrimiento en todos los cursos de ESO y Bachillerato, que los alumnos desarrollen habilidades para llevar a cabo sus propias estrategias para alcanzar cierto objetivo. A modo de propuesta de mejora de esta investigación e intervención educativa, resaltaría la posibilidad de dar una mayor profundidad y dedicar más tiempo a abarcar otros contextos -no solo aritméticos y geométricos- en la etapa de intervención pedagógica, para así impulsar nuevos caminos y posibilidades de crecimiento de los procesos de pensamiento matemático en el alumno. Me gustaría concluir este trabajo y poner fin a la increíble experiencia vivida en el Máster de Profesorado con la siguiente cita del filósofo y pedagogo John Dewey:

"Si enseñamos a los estudiantes de hoy como enseñamos a los de ayer, les estamos robando el mañana".

V. BIBLIOGRAFÍA

Almeida, D. (1996). Proof in Undergraduate Mathematics in the UK: A case of Bridging from the informal to the Formal? *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education.* Sevilla, España.

Arbona, E., Beltrán, M.J., Gutiérrez, Á., Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En A. Codina (Coord.), L. Puig (Coord.), D. Arnau, M. T. Sánchez, A. B. Montoro, J. Claros, M. Arnal y M. A. Baeza (Eds.). *Investigación en pensamiento numérico y algebraico* (pp. 38-47). Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense–making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Baker, J. D. (1996). Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction. *Annual meeting of the American Educational Research Association.* New York, EEUU.

Bell, A. (1988). Algebra choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.). *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol I., pp. 147-153). Ferenc Genzwein OOK.

Bednarz, N., Lee, L. y Kieran, C. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing.* BBC y Penguin Books Ltd.

Cañadas, M. C. (2019). *Unidad 3: Introducción al pensamiento algebraico.* En M. C. Cañadas (Ed.). *Pensamiento Numérico y Algebraico I* (pp. 1-21). Universidad de Granada.

Cañadas, M. C., Castro, E. (2004). Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)*, 173-182. La Coruña, España.

Cañadas, M. C., Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analysing inductive reasoning. *PNA, 1(2),* 67-78.

Cañadas, M.C., Castro E., Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Cañadas, M. C., Castro, E., Molina, M. (2018). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0–6: Educación Matemática en la Infancia, 6(2), 1-13*. https://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/35/30

Cañadas, M. C., Castro, E., Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME*, *15(3),* 561-573.

Cañadas, M. C., Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje*, *34(4),* 409-425.

Cañadas, M. C., Morales, R., Brizuela B. M., Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375).

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Carpenter, T., Hiebert, J. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). MacMillan.

Davidov, V. V. (1972/1990). Types of generalization in Instruction: Logical and psychological Problems in the structuring of school curricula. En J. Kilpatrick (Ed.). *Soviet studies in mathematics education* (Vol. II). National Council of Teachers of Mathematics.

Decreto 111/2016, de 14 de junio, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad

Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 122, de 28 de junio de 2016, p. 32. https://www.adideandalucia.es/normas/decretos/Decreto111-2016OrdenacionEducacionSecundaria.pdf

Drijvers, P., Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* Utrecht University.

Drijvers, P., Goddijn, A., Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.)*, Secondary algebra education (pp. 5-26).* Sense Publishers.

Drouhard, J.-P. (2001). Research in language aspects of algebra: a turning point? En K. Stacey, H. Chicks y J. Vincent (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 238-242). University of Melbourne.

Drouhard, J.-P., Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chicks y M. Kendals (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 707-762). Kluwer.

Donaire, J. J., García, J., Gaspar, M., Hernández, J., Martínez, J. A., Moreno, M., Sánchez, M. M., Serrano, E. (2011). *Ampliación de Matemáticas 3º de ESO: Resolución de Problemas* (1.ª ed.). Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop (Ed.). *Mathematical knowledge: Its growth through teaching (pp. 63-85). Kluwer Academic.*

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En A. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (Eds.). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Kluwer Academic Publishers.

Isla, P. (2004). Análisis de la efectividad versus enseñanza tradicional. En A. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (Eds.). *Actas del Congreso "de la teoría a la* *práctica de los cuidados".* Alicante, España.

Jeffery, R. (1978). *A study of the generalization and explanation strategies of 10 and 11 year old children in mathematics* (Tesis doctoral). University of Nottingham, Inglaterra.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En A. Fennema y T. Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades.* Routlege.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures (pp. 271-290).* Sevilla, España: SAEM Thales.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for simbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age Publishing.

Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra* (Tesis doctoral). University of British Columbia, Canada.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de 2021, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 106, de 4 de mayo de 2006, pp. 29 a 30. https://www.adideandalucia.es/normas/leyes/LeyOrganica2-2006TextoConsolidado1abril2022.pdf

Mason, J., Pimm D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15(3),* 277-290.

Mason, J., Graham, A., Pimm D., Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra.* Open University Press.

Mason, J., Graham, A., Johnston-Wilder S. (2005). *Developing Thinking in algebra.* The Open University Press y Paul Chapman Publishing.

Mesa, O. (1997). *Criterios y estrategias para la enseñanza de las matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Molina, M. (2015). *Concepciones del algebra escolar*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Moreno, L., Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. *Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas,* 40-66. México.

Múnera, J. J. (2008). *Situaciones problema en la Matemática Escolar, una estrategia de intervención*. En P. J. Rojas (Ed.). *Memorias del 8º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa,* pp. 167-172. Cali.

Múnera, J. J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Educación y Pedagogía*, *23*(59), 179-193.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Obando, G., Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Educación y Pedagogía*, *15*(35), 183–199.

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía Extraordinario, núm. 7, de 18 de enero de 2021. https://www.adideandalucia.es/normas/ordenes/Orden15-1-2021CurriculoESO.pdf

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian primary Mathematics Classroom, 12(3),* *8.*

Pérez, J. J. (2005). *La generalización como proceso de pensamiento matemático: una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental* (Tesis doctoral). Universidad de Antioquía, Medellín.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. Tecnos.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4(2),* 37-62.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza* (pp. 15-59). Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4(1), 1-14.*

Real Decreto 227/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial del Estado, núm. 122, de 30 de marzo de 2022, pp. 41767 a 41768. https://www.adideandalucia.es/normas/RD/RealDecreto217-2022CurriculoESO.pdf

Reid, D. (2002). Elements in accepting an explanation. *Journal of Mathematics Behavior, 20,* 527-547.

Trujillo, P., Castro, E., Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)*, 511-521. Santander, España.

Universidad de Almería (2022). *Objetivos y competencias.* Máster de Profesorado de Educación Secundaria, Universidad de Almería. https://www.ual.es/estudios/masteres/presentacion/objetivos/7035

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). National Council of

Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nuñes y P. Bryant (Eds.). *Learning and teaching mathematics – an international perspective* (pp. 5-28). Psychology Press.

Vygotsky, L. V. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Booket Paidós México.

VI. ANEXOS

6.1. Anexo I: Prueba Inicial

Duración: 75 minutos.

PROBLEMA 1. Observa la siguiente secuencia de números: 1, 4, 7, 10, …

- ¿Cuál es el siguiente número de la sucesión?
- ¿Y el término que se encuentra en la posición 10?
- Enuncia la regularidad que se presenta de forma verbal.
- Enuncia la regularidad que se presenta de forma simbólica. ¿Qué variables puedes utilizar?
- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia. Justifica tu respuesta.

**Problema extraído y modificado de Cañadas et al. (2012).*

PROBLEMA 2. El día 28 de mayo se juega la final de la Champions League que enfrenta al Real Madrid y al Liverpool, y el bar "La Saeta Blanca" va a emitir el partido. En el bar hay mesitas cuadradas de 4 plazas, de forma que uniendo 3 de ellas pueden sentarse hasta 8 personas. Los dueños del bar están discutiendo sobre cómo organizar las mesas para sentar a los grupos que tienen reserva. Ayúdalos respondiendo a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas personas pueden sentarse si unimos 20 mesas?
- ¿Cuántas mesas son necesarias para sentar a 19 personas? ¿Y para sentar a 233?
- Expresa la regularidad de forma verbal. ¿Ocurre lo mismo para un número de personas par que de un número impar?
- Da una fórmula que indique el número de mesas necesario para sentar a N personas.

**Problema extraído y modificado de Donaire et al. (2011).*

PROBLEMA 3: los triángulos de Sierpinski. Observa las cuatro figuras siguientes:

Nótese que la primera es un triángulo equilátero; cada una de ellas se obtiene de la anterior repitiendo cierto proceso.

- ¿Cómo se forma la siguiente figura? ¿Y las que le siguen?
- Si el área de la zona coloreada es $1u^2$, ¿cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el undécimo?
- ¿Y cuál es el área de la zona blanca en el cuarto y undécimo triángulo?
- ¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura 1200?
- Si el perímetro del triángulo grande es $1u^2$, ¿cuál será el perímetro de la zona roja en la enésima figura?

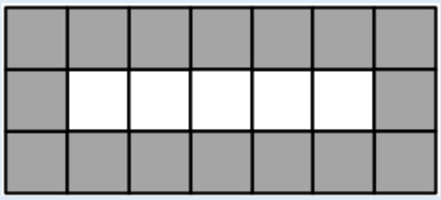
**Problema extraído y modificado de Donaire et al. (2011).*

6.2. Anexo II: Propuesta de Intervención Pedagógica

Duración: 2 horas.

Problema. Imagina que tienes baldosas cuadradas blancas y baldosas cuadradas grises, ambas del mismo tamaño. Hacemos una fila con baldosas blancas:

Después, rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises como se muestra a continuación:



¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas igual que en el dibujo? Justifica tu respuesta.

**Problema extraído de Cañadas et al. (2012).*

Punto 1. La motivación y el problema inicial comienza con sugerirle a los alumnos que consideren que el suelo del aula está formado por baldosas blancas y grises cuadradas del mismo tamaño, de manera que las blancas forman una fila y las grises están situadas rodeando ésta. A cada uno se le entrega una hoja en blanco donde aparece dibujada esta disposición de las losas para que lo visualicen, analicen y describan su composición, además de hacer anotaciones propias e individuales. El tiempo estimado para ello es de 10 minutos. Algunas de las primeras observaciones que podrían señalar, son:

- Mayor cantidad de losas grises, las cuales rodean a las blancas.
- Cada losa gris se encuentra en contacto con una única losa blanca, a excepción de las esquinas.
- Cada losa gris está en contacto con otras dos losas grises.

- Cada losa blanca situada en la esquina es limítrofe con tres losas grises y otra blanca.
- Cada losa blanca situada en medio de la fila está en contacto con dos losas blancas y dos losas grises.

Una vez terminado esto, se les plantea la siguiente cuestión: en un suelo cualquiera, ¿cuántas losas grises son necesarias para un determinado número de losas blancas?

Punto 2. Seguidamente, el docente incita a los alumnos a pasar al estudio de casos particulares para buscar la respuesta a la pregunta. Esto es, un proceso inductivo y empírico para plantear las primeras hipótesis de forma ordenada, que se realizará durante otros 10 minutos. Se les sugiere que realicen dibujos aclaratorios.

- Si tenemos una fila de 5 baldosas blancas:

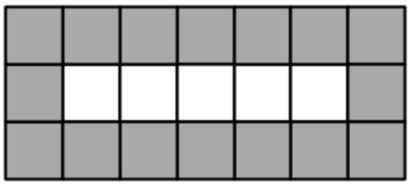


Figura 2. *Dibujo orientativo del problema con una fila de cinco baldosas blancas.*

Son necesarias 16 baldosas grises.

- Supongamos que tenemos 6 baldosas blancas:

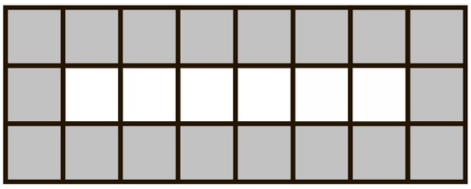


Figura 3. *Dibujo orientativo del problema con una fila de seis baldosas blancas.*

Son necesarias 18 baldosas grises.

- Supongamos que tenemos 7 baldosas blancas:

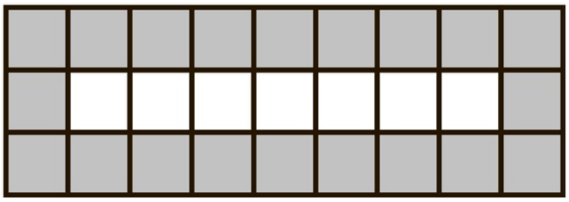


Figura 4. *Dibujo orientativo del problema con una fila de siete baldosas blancas.*

Son necesarias 20 baldosas grises.

Punto 3. Como los alumnos pueden comenzar a observar, ir contando los cuadrados de las baldosas grises se vuelve cada vez más tedioso a medida que aumenta el número de baldosas blancas. En este escenario, resulta una buena idea intentar encontrar un sistema para computarlos de una forma más sencilla. Entonces, se les sugiere a los estudiantes que busquen una regla general para ello, y la expresen verbalmente. En concreto, mediante las siguientes cuestiones se les orienta para llevar a cabo esta tarea:

- ¿Qué patrones de comportamiento se repiten en los casos particulares?
- ¿Cómo se configura cada caso?
- ¿Qué relación hay entre las baldosas al aumentar en una unidad las blancas?

Los alumnos deben intentar establecer una hipótesis de la secuencia. A modo de recomendación, el profesor propone que construyan una tabla y completen con algunos casos más de los estudiados en el punto 2. Para esta parte de la sesión disponen de 35 minutos.

Tabla 1

Ejemplo de tabla con casos particulares del problema.

Número de baldosas blancas	Número de baldosas grises
5	$5{\cdot}2+3+3=16$
6	$6{\cdot}2+3+3=18$
7	$7{\cdot}2+3+3=20$
8	$8{\cdot}2+3+3=22$
9	$9{\cdot}2+3+3=24$

10	$10{\cdot}2+3+3=26$

Lo siguiente que deben hacer buscar qué regularidades se observan en ella. En esta parte de la clase, los alumnos pueden organizarse libremente por grupos (de máximo 4 personas) y poner ideas en común. Algunas de las características que podrían extraer de la tabla, son:

- Por cada baldosa blanca que se añade, el total de baldosas grises aumenta en dos unidades.
- El número de baldosas grises siempre es par.
- La primera y la última columna permanecen constantes, siempre están formadas por tres baldosas cada una, independientemente del número de baldosas blancas.

En este momento, el alumno ya está en condiciones de establecer una conjetura del problema, el cual debe expresar verbalmente de una forma similar a la que sigue:

> *"El número de baldosas grises necesarias para rodear la fila de baldosas blancas es el doble de baldosas blancas más las de los extremos."*

Tras ello, el profesor lanza una pregunta al aire, dejándola como actividad: ¿Se puede calcular así el número de baldosas grises necesarias para 11, 12, 13, 14 y 15 baldosas blancas? ¿Podemos ya resolver el problema inicial?

Punto 4. A continuación, se plantea la siguiente pregunta: ¿cuántas baldosas grises son necesarias para una fila de N losas blancas? Con ello, el docente impulsa a los alumnos que expresen algebraicamente la generalización verbal del punto anterior, de forma individual. En esta parte, deben ser capaces de plantear las variables involucradas y establecer relaciones entre ellas. Se les orienta a través de cuestiones y apartados como:

- ¿Qué variable es la que queremos calcular? ¿De qué depende?
- ¿Cuántas variables son necesarias para formalizar la relación? ¿Cuáles son esas variables?
- Simbolizar cada variable. Cuando se trata de secuencias de números naturales, es habitual utilizar N.

Las variables a definir, son:

- N: número de baldosas blancas.
- $\mathrm{G_N}$: número de baldosas grises.

El tiempo dedicado a este punto es de 25 minutos. Al término de éste, los alumnos deben ser capaces de establecer la relación:

$$\mathrm{G_N} = 2 \cdot \mathrm{N} + 6, \quad \mathrm{N} \geq 1.$$

Hasta aquí, se han seguido con detenimiento cada una de las etapas propuestas por Mason en tareas de generalización.

Punto 5. El siguiente paso es formalizar[2] la relación de generalización y comprobar su validez a partir del estudio de más casos particulares. Como sugerencia, el docente indica que construyan una nueva tabla de acuerdo a las variables establecidas y con terminología funcional (pues ya ha sido estudiado al pertenecer al currículo del curso de 3º ESO):

Tabla 2

Ejemplo de tabla con casos particulares del problema expresados con una relación funcional.

N	1	2	3	4	5	…	1320	…	N
G(N)	8	10	12	14	16	…	2646	…	$2 \cdot \mathrm{N} + 6$

Se les incita a obtener conclusiones de lo trabajado hasta ahora, como:

- La relación entre las variables es lineal. La gráfica de la función representa una recta en el plano.
- Puede utilizarse para calcular cualquier número de baldosas grises.

Finalmente, con la participación de la totalidad del grupo se trata de enunciar la ley general del problema, semejante a:

[2] No se pretende estrictamente demostrar la validez de la expresión, ya que sería necesario emplear de forma rigurosa el método de inducción para ello, y no es constituye un objetivo en estos niveles educativos ni en esta propuesta de investigación. La finalidad de este apartado es comprobar con casos concretos que la ley general funciona.

"El número de baldosas grises necesarias para rodear la fila de N baldosas blancas es el doble de N más seis."

Y, se responde a lo pedido en el problema para concluir: "son necesarias 2646 baldosas grises para rodear una fila de 1320 baldosas blancas."

El tiempo estimado en esta parte de la sesión es de 25 minutos. Al término de este punto, ya se habrían trabajado las etapas de ver, describir y formular.

Punto 6. Una vez trabajada la generalización matemática desde una perspectiva geométrica y analítica, lo siguiente de la sesión es llevar a cabo un debate sobre la conceptualización durante aproximadamente 15 minutos. Es decir, qué nociones se han utilizado y qué se ha aprendido nuevo en esta sesión por parte del alumnado. De lo primero:

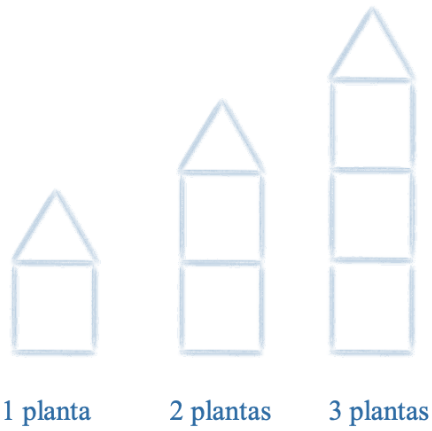
- *Número natural.* Fue el concepto más utilizado y clave para la simbolización de las relaciones en las sucesiones y funciones.
- *Funciones.* Se ha trabajado el concepto de variable dependiente e independiente, su expresión y cómo se representaría la relación en una gráfica.

De lo segundo puede destacarse el conocimiento de una nueva herramienta para la resolución de problemas que involucren secuencias y patrones: construcción relaciones y fórmulas generales.

Punto 7. Después, son propuestas actividades para realizar en casa con el objetivo de trabajar y afianzar lo visto durante la intervención pedagógica.

Ejercicio 1. Consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ (contando a partir de 1). ¿Cuánto suman los diez primeros números naturales? ¿Y los 20? Obtén una fórmula general para calcular la suma de los N primeros números naturales.

Ejercicio 2. Halla el número de palillos necesarios para construir una torre de N plantas como las del dibujo.



**Problema extraído y modificado de Arbona et al. (2017).*

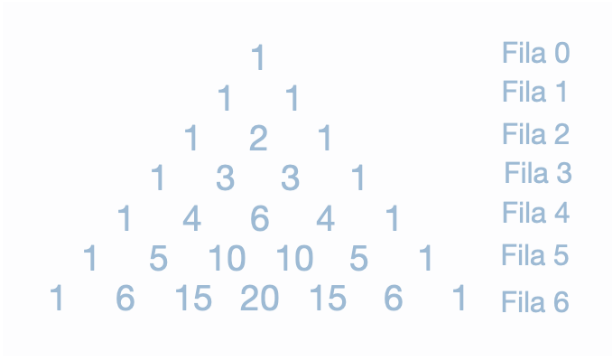
Ejercicio 3. En una fiesta de cumpleaños había un total de 36 niños. Todos se saludaron mutuamente chocándose con el puño. ¿Cuántos saludos hubo en total?

**Problema extraído y modificado de Múnera (2008).*

6.3. Anexo III: Prueba Final

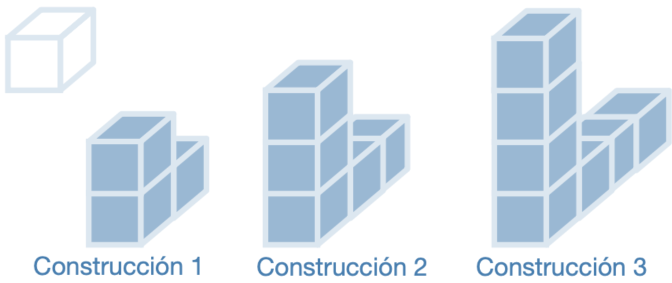
Duración: 75 minutos.

PROBLEMA 1: el triángulo de Pascal. Observa la siguiente pirámide y calcula cuánto suman los números de la fila N.



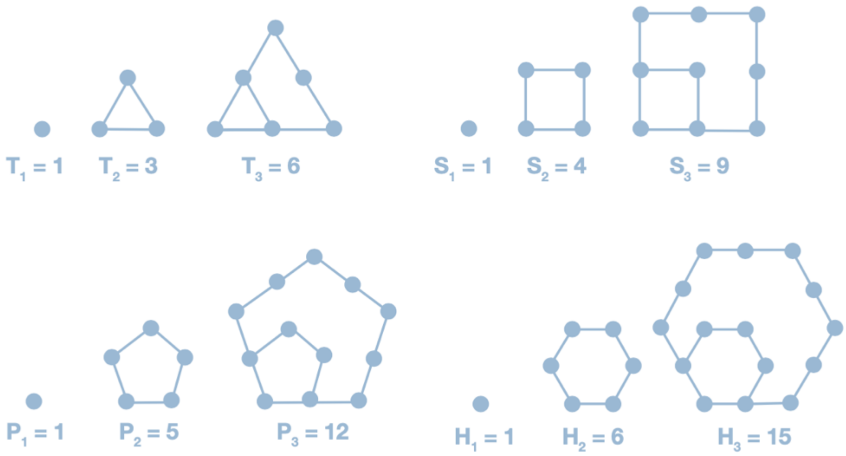
**Problema extraído y modificado de Donaire et al. (2011).*

PROBLEMA 2. Un grupo de arquitectos está construyendo bloques de edificios en forma de L y cuya unidad de estructura es el cubo (véase la imagen). Una vez armados, son pintadas de color azul las caras visibles (las que se apoyan en el suelo no son visibles). En la construcción N, ¿cuántas caras se pintarán?



**Problema extraído y modificado de Donaire et al. (2011).*

PROBLEMA 3: números poligonales. Algunos números naturales están asociados a polígonos y tienen nombres geométricos. En la siguiente figura están representados los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales:



Responde a los siguientes apartados.

- Encuentra una fórmula para T_N.
- Encuentra una fórmula para S_N.
- ¿A qué número cuadrado es igual $T_N + T_{N+1}$?
- Busca una relación entre los números pentagonales y los triangulares. ¿Puedes encontrar una fórmula que nos dé un número pentagonal cualquiera?
- Busca una relación entre los números hexagonales y los triangulares. ¿Puedes encontrar una fórmula que nos dé un número hexagonal cualquiera?

**Problema extraído y modificado de Donaire et al. (2011).*