

---

---

El método TA para estimar el exponente de Hurst  
de procesos autosimilares con incrementos  
estacionarios

The TA method for estimating the Hurst  
exponent of self-similar processes with stationary  
increments

---

---

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Autor:

Agustín Gómez Águila

Tutor:

Miguel Ángel Sánchez Granero y Antonio Jiménez Vargas

MÁSTER EN MATEMÁTICAS



FEBRERO, 2022  
Universidad de Almería



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
<b>2.1.</b>	<b>Teoría de la Probabilidad y Procesos Estocásticos</b>	<b>5</b>
<b>2.2.</b>	<b>Procesos autosimilares</b>	<b>7</b>
	Movimientos brownianos fraccionales, 11.	
<b>2.3.</b>	<b>Procesos con memoria</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Métodos para estimar el exponente de Hurst</b>	<b>17</b>
<b>3.1.</b>	<b>Métodos GHE(q)</b>	<b>17</b>
<b>3.2.</b>	<b>Métodos FD</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Introducción del método TA</b>	<b>25</b>
<b>4.1.</b>	<b>El método TTA</b>	<b>25</b>
<b>4.2.</b>	<b>El método TA</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Evaluación de la precisión del método TA</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



## *Abstract in English*

The goal of this paper is to explain the operation and mathematical justification of the TA (Triangle Area, [9]) algorithm, which is used to estimate the Hurst exponent of self-similar processes with stationary increments. The multiple applications of the Hurst exponent in fields as diverse as economics, hydrology, medicine, etc., can be reviewed in the literature. Therefore, the correct estimation of the Hurst exponent is not a trivial problem and advances in this field contribute to improve the results obtained in the procedures involving this exponent.

In order to understand well this method, which has been recently introduced, a review of the self-similar processes with stationary increments is carried out. Starting from Probability Theory, all the previous concepts are introduced in order to understand well the details of the mathematical foundation of the algorithm.

In addition to the TA method, the procedure of other methods to estimate the Hurst exponent is detailed. In this way, the justification of the TA method can be put into context. One of the methods discussed is the TTA method, whose mathematical justification allows us to understand the precursor idea of the TA method.

By Monte Carlo simulations, we study the advantages and disadvantages of the TA algorithm with respect to other algorithms in terms of algorithm accuracy. In this way we can observe under which situations the TA method achieves more accurate results than other commonly used methods.



## *Resumen en español*

Este trabajo tiene como objetivo exponer el funcionamiento y la justificación matemática del algoritmo TA (Triangle Area, [9]), que sirve para estimar el exponente de Hurst de procesos autosimilares con incrementos estacionarios. En la literatura se pueden revisar las múltiples aplicaciones que tiene el exponente de Hurst en campos tan diversos como la economía, la hidrología, la medicina, etc. Por tanto, la correcta estimación del exponente de Hurst no es un problema baladí y las aportaciones en este campo contribuyen a mejorar los resultados que se obtienen en los procedimientos que involucran a este exponente.

Para poder entender bien este método, que ha sido introducido recientemente, se realiza una revisión de los procesos autosimilares con incrementos estacionarios. Partiendo de la Teoría de la Probabilidad, se introducen todos los conceptos previos para poder entender bien los detalles del fundamento matemático del algoritmo.

Además del método TA, se detalla el procedimiento de otros métodos para estimar el exponente de Hurst. De esta forma, se puede poner en contexto la justificación del método TA. Uno de los métodos que se tratan es el método TTA, cuya justificación matemática nos permite comprender la idea precursora del método TA.

Mediante simulaciones de Monte Carlo, estudiamos las ventajas y desventajas que presenta el algoritmo TA respecto a otros algoritmos en cuanto a la precisión del algoritmo se refiere. De esta forma podemos observar bajo qué situaciones el método TA consigue resultados más precisos que otros métodos que se suelen usar.





# Introducción

Los procesos con memoria larga o memoria a largo plazo han sido objeto de estudio durante mucho tiempo y presentan una infinidad de aplicaciones para las series temporales que encontramos en nuestro entorno. Uno de los procesos más utilizados con memoria larga es el proceso autosimilar, para el que se usa el exponente de Hurst como herramienta para analizar esta memoria larga. A lo largo de este capítulo veremos una breve introducción histórica de los conceptos más importantes del trabajo, una motivación y justificación del enfoque empleado y un breve resumen de la importancia de cada uno de los capítulos que componen el presente trabajo.

Si nos fijamos en el desarrollo histórico de los procesos con memoria larga, a finales del siglo XIX ya se empezaron a observar indicios de la posible presencia de memoria en los procesos estocásticos en diversos campos, como la astronomía. El exponente de Hurst es una de las herramientas que se desarrollaron para medir esta memoria larga a mediados del siglo XX. En concreto, esta metodología fue introducida por el hidrólogo inglés Harold Edwin Hurst en 1951 ([1]), con el objetivo de poder comprender y predecir la cantidad de agua que debía albergar un embalse del río Nilo. En los datos obtenidos se podía observar como, a menudo, las crecidas más grandes del Nilo tendían a agruparse, al igual que hacían las crecidas más pequeñas. Los estudios de la época mostraban que no había evidencia de una correlación estadística en los datos obtenidos, motivando la aparición de una nueva metodología para explicar este hecho. A través del desarrollo de este nuevo método, Hurst consiguió analizar las fluctuaciones del río a lo largo del tiempo y llegó a ciertas conclusiones sobre la forma en la que se debía actuar con respecto a aumentar o no la capacidad del embalse, consiguiendo resultados muy buenos. Cabe destacar que su teoría se vio influenciada por el desarrollo del movimiento browniano realizado por Einstein en el siglo XX, mediante el cual logró describir el movimiento de las partículas en un fluido.

En los años 60 del siglo XX, Benoît Mandelbrot, junto con otros colaboradores, recogió los trabajos de Hurst y desarrolló la teoría de los fractales y la autosimilaridad, introduciendo además el exponente de Hurst en el mundo de las finanzas. Los estudios realizados se basaron en el método RS (rango reescalado), que les permitió obtener el exponente de Hurst mediante la razón entre la suma parcial de los rangos de las desviaciones de las medias de una serie de tiempo y las desviaciones típicas correspondientes. Debido a su funcionamiento sencillo, este método fue utilizado durante mucho tiempo para estimar el exponente de Hurst.

Los procesos autosimilares fueron introducidos por Lamperti en [2], y son el tipo de proceso en el que nos hemos basado para desarrollar este trabajo. Existen muchos tipos de procesos autosimilares como los movimientos brownianos, brownianos fraccionales, bifraccionales, subfraccionales... Para más información sobre todos estos tipos de procesos autosimilares resulta muy útil la referencia [3]. En nuestro caso, nos centraremos en los procesos autosimilares con incrementos estacionarios, que describiremos en profundidad más adelante. En particular, usaremos para nuestras simulaciones movimientos brownianos fraccionales, el único proceso autosimilar gaussiano con incrementos estacionarios. Para revisar cómo se trabaja con procesos autosimilares

no gaussianos con incrementos estacionarios se recomienda la referencia [4].

El coeficiente de Hurst, que se suele denotar por  $H$ , recoge el nivel de autosimilaridad del proceso. Este valor se encontrará entre 0 y 1, y en función del valor numérico que tome podremos sacar unas conclusiones u otras sobre el proceso autosimilar que queremos analizar. Distinguimos los siguientes tres casos:

- Si  $0 < H < 0.5$ , tenemos que el proceso es antipersistente. Los incrementos experimentan cierta reversión hacia la media, ya que la trayectoria de los incrementos tiende a retroceder sobre sí misma. La covarianza que obtendríamos en este proceso sería negativa.
- Si  $H = 0.5$ , estaríamos ante un proceso aleatorio, ya que los incrementos que tendríamos serían independientes. La covarianza obtenida sería cero.
- Si  $0.5 < H < 1$ , el proceso sería persistente. Esto significa que las trayectorias que siguen los incrementos del proceso tienden a ir en la misma dirección. La covarianza obtenida en este caso sería positiva.

Aquí se puede observar cómo a través del exponente de Hurst podemos obtener una información muy valiosa sobre el comportamiento de un determinado proceso autosimilar. Esta relación que hemos establecido en torno al valor numérico del exponente de Hurst será debidamente justificada a lo largo del trabajo.

Las aplicaciones que se han llevado a cabo con el exponente de Hurst son muy amplias y en campos muy diversos, convirtiendo a esta herramienta en una de las principales para analizar la memoria larga de los procesos. Algunas de las múltiples aplicaciones que se han llevado a cabo lo han hecho en disciplinas como la economía ([5]), psicología ([6]), geodesia ([7]), medicina ([8]), y un largo etcétera.

Como se ha mencionado en el párrafo anterior, hay una gran cantidad de aplicaciones del exponente de Hurst. En la realidad, trabajamos con lo que denominamos series autosimilares, series temporales provenientes de procesos autosimilares. Uno de los aspectos más importantes para poder sacar buenas conclusiones es que la estimación del exponente de Hurst que hagamos sea correcta. Aquí entra en juego el método TA ([9]) que queremos explicar, ya que nos proporciona una herramienta para estimar el exponente de Hurst de procesos autosimilares con incrementos estacionarios.

Por tanto, el objetivo principal de este trabajo es desarrollar, justificar y explicar el funcionamiento y las ventajas del método TA. Para ello, el capítulo 2 lo dedicaremos a establecer una serie de preliminares, comenzando por la Teoría de la Probabilidad y los Procesos Estocásticos, que nos proporcionarán herramientas para poder desarrollar el trabajo. Además, en este capítulo estudiaremos en profundidad los procesos autosimilares, justificando también la relación entre el exponente de Hurst y el comportamiento del proceso que hemos establecido en esta introducción. En el capítulo 3, estudiaremos algunos métodos muy útiles para estimar el exponente de Hurst y que nos ayudarán a comprender el funcionamiento del método TA. En el capítulo 4, describiremos el algoritmo TTA, mostrando la idea mediante la cual se puede introducir el

---

método TA, que será explicado y justificado. En el capítulo 5, realizaremos una serie de simulaciones de Monte Carlo para evaluar la precisión del método TA respecto a otros métodos para comprobar sus ventajas e inconvenientes. Finalmente, en el capítulo 6 se recogen las conclusiones que se han ido obteniendo a lo largo del trabajo.



## Preliminares

Este capítulo tiene como objetivo recopilar los conceptos y resultados matemáticos que necesitaremos para desarrollar el resto del trabajo. Para ello, partiremos de ciertas definiciones y teoremas provenientes de la Teoría de la Probabilidad y los Procesos Estocásticos, para después formalizar el concepto de proceso autosimilar y el exponente de Hurst.

### 2.1 Teoría de la Probabilidad y Procesos Estocásticos

Para el desarrollo de esta sección se han utilizado las referencias [10] y [11], donde se pueden revisar las definiciones y teoremas recogidos con mayor profundidad.

Comenzamos definiendo el concepto de  $\sigma$ -álgebra. Sea  $\Omega$  un espacio muestral, diremos que la clase de subconjuntos  $\mathcal{A}$  de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si verifica:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ .
- Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ .
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de subconjuntos finita o infinita numerable, entonces se tiene que  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Denominamos espacio medible al par  $(\Omega, \mathcal{A})$ . En este caso trabajaremos en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}$ , utilizando para ello el espacio de Borel real  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , donde  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ . De igual forma, para el concepto de proceso estocástico también necesitaremos el espacio de Borel de  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos como  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Veamos ahora la definición de medida.

**Definición 2.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible, una medida  $\mu$  sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$  es una función que satisface:

- $\mu(\emptyset) = 0$ .
- $\mu(A) \in [0, 1]$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .
- Si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión disjunta de conjuntos de  $\mathcal{A}$  y  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ , entonces  $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

A la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  se le denomina espacio medible. En ocasiones, la  $\sigma$ -álgebra que se toma está contenida en las partes de  $\Omega$ . Un problema importante a considerar en estos casos es que este espacio debe ser completo (para todo  $B \subset A \in \mathcal{A}$  con  $\mu(A) = 0$ ,  $B \in \mathcal{A}$ ) y esto no sucede siempre. Para solventar este problema podemos completar nuestra medida inicial hasta una medida que sea completa, en lo que se conoce como completación de un espacio de medida. Además, el método de Carathéodory nos permite extender medidas definidas sobre álgebras a medidas definidas sobre su  $\sigma$ -álgebra minimal.

En nuestro caso trabajaremos con un tipo particular de medidas denominadas medidas de probabilidad ( $P$ ), que son medidas que verifican la condición  $\mu(\Omega) = 1$ . En el

caso de que tengamos una medida de probabilidad sobre un espacio medible, diremos que estamos ante un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , que será sobre el que trabajaremos.

Debido a la importancia que tiene el cálculo de probabilidades sobre el espacio de Borel real, cabe destacar la relevancia de la medida de Lebesgue definida sobre este espacio, ya que está relacionada con la función de distribución, que nos permite estudiar las medidas de forma más sencilla. Mediante el Teorema de Correspondencia se puede ver como las funciones de distribución caracterizan a las medidas de Lebesgue. En concreto, en este trabajo trataremos con las funciones de distribución de probabilidad.

Vamos a introducir ahora sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  el concepto de variable aleatoria. Partimos de la siguiente definición previa.

**Definición 2.2.** *Sea  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  dos espacios medibles. Diremos que la aplicación  $X : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$  es medible respecto a las  $\sigma$ -álgebras de los respectivos espacios de sucesos si para todo  $B \in \mathcal{A}_2$ , se tiene que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ .*

Una aplicación medible sobre el espacio de Borel se dice que es una función medible. Veamos ahora la definición de variable aleatoria.

**Definición 2.3.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  el espacio de Borel real. La función medible  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  se denomina variable aleatoria.*

Estas variables aleatorias quedan por tanto determinadas por una distribución de probabilidad  $P_X$  dada por:

$$P_X(B) = P[X \in B] = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

A su vez, la ley de probabilidad de una variable aleatoria también estará determinada por su función de distribución de probabilidad  $F_X$ .

Una vez hemos definido el concepto de variable aleatoria, podemos pasar a revisar el concepto de proceso estocástico.

**Definición 2.4.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad y  $T$  un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$  definidas sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .*

Al conjunto arbitrario  $T$  se le denomina conjunto de índices y en muchas ocasiones se utiliza para designar el tiempo. En adelante, tomaremos este conjunto como  $[0, \infty)$ .

En un proceso estocástico, para cada  $t \in [0, \infty)$  tenemos una variable aleatoria. En los siguientes capítulos usaremos las funciones  $t \rightarrow X(t, \omega)$  definidas en  $t \in [0, \infty)$  sobre  $\mathbb{R}$ , con  $\omega \in \Omega$  fijo. A esta función se le denomina trayectoria o realización del proceso estocástico. Por tanto, para cada  $\omega \in \Omega$  tendríamos una trayectoria del proceso estocástico. En las posteriores aplicaciones, nos encontraremos una realización discretizada de un proceso estocástico, ya que por lo general estaremos ante un conjunto finito de valores. A estas discretizaciones las denominaremos series.

Al igual que una variable aleatoria  $X$  está determinada por su función de probabilidad, un proceso estocástico estará determinado por sus distribuciones finito-dimensionales. Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso estocástico y  $0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n < \infty$ , entonces para para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $\omega \in \Omega$  definimos la distribución finito-dimensional como:

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}[B] = P[(X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)) \in B].$$

Este concepto nos servirá para introducir una definición que será necesaria para algunos desarrollos posteriores del trabajo.

**Definición 2.5.** Sean  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  e  $\{Y(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidad  $(X, \mathcal{A}, \Omega)$ , diremos que estos procesos son iguales en distribución si para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $0 \leq t_1, t_2, \dots, t_n < \infty$  y  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ :

$$P[(X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)) \in B] = P[(Y(t_1, \omega), Y(t_2, \omega), \dots, Y(t_n, \omega)) \in B].$$

Cuando tengamos dos procesos estocásticos que presenten esta igualdad en distribución lo notaremos como  $\sim$ .

## 2.2 Procesos autosimilares

Dedicaremos esta sección a definir los procesos autosimilares y a describir sus propiedades más relevantes que tendremos que utilizar para el posterior desarrollo del trabajo. Para ello serán útiles las referencias [12], [13] y [14].

En primer lugar, veamos a qué nos referimos cuando hablamos de proceso autosimilar.

**Definición 2.6.** Diremos que un proceso estocástico  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  es autosimilar con parámetro de autosimilaridad  $H > 0$  si  $\forall c > 0$  y  $\omega \in \Omega$ , tenemos que:

$$X(ct, \omega) \sim c^H X(t, \omega), \quad \forall t > 0.$$

Al parámetro de autosimilaridad  $H$  se le denomina coeficiente o exponente de Hurst. Como se puede observar, la definición de proceso autosimilar implica una igualdad en distribución, lo que será un aspecto a tener en cuenta para el desarrollo de algunas secciones posteriores. Si tenemos una realización o trayectoria del proceso autosimilar y la discretizamos obtendríamos lo que denominamos como serie autosimilar. A estas series autosimilares serán a las que le estimaremos el exponente de Hurst de forma práctica en los siguientes capítulos.

Si tenemos que  $X(t, \omega)$  es un proceso autosimilar, entonces  $X(0, \omega) \sim c^H X(0, \omega)$  para todo  $c > 0$ , por lo que  $X(0, \omega) = 0$  con probabilidad uno.

Una propiedad muy interesante que pueden verificar los procesos autosimilares es que sus incrementos sean estacionarios. Veamos de forma rigurosa esta definición.

**Definición 2.7.** Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso estocástico. Diremos que los incrementos de este proceso son estacionarios si se verifica:

$$X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega) \sim X(\tau, \omega) - X(0, \omega)$$

para todo  $t > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ .

Atendiendo a esta definición, los incrementos de un proceso serán estacionarios cuando su distribución solo dependa del lapso  $\tau$  y no del instante  $t$ . Durante el presente trabajo trataremos con procesos autosimilares que verifiquen esta propiedad. Cabe mencionar que un proceso autosimilar  $X(t, \omega)$  no nulo nunca podrá ser estacionario, ya que aplicando la autosimilaridad y la estacionariedad en la siguiente igualdad llegaríamos a un absurdo:

$$E[|X(t, \omega)|^2] = E[|X(ct, \omega)|^2] = c^{2H} E[|X(t, \omega)|^2].$$

Nótese que en este caso tendríamos que  $X(t, \omega) = 0$  casi seguro, lo que es una contradicción.

El siguiente teorema nos aporta información sobre los valores en los que puede variar el exponente de Hurst de un proceso autosimilar con incrementos estacionarios.

**Teorema 2.1.** (ver [15]) Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con índice de autosimilaridad  $H$  e incrementos estacionarios, tal que  $P[X(t, \omega) \neq 0] > 0$ . Si existe  $\gamma > 0$  tal que  $E[|X(1, \omega)|^\gamma] < \infty$ , se tiene que:

- i) Si  $0 < \gamma < 1$ , entonces  $0 < H < \frac{1}{\gamma}$ .
- ii) Si  $\gamma \geq 1$ , entonces  $0 < H \leq 1$ .

Demostración:

- i) Sea  $0 < \gamma < 1$ . En primer lugar, destacar que para la demostración usaremos la siguiente desigualdad:

$$(a_1 + a_2)^\gamma < a_1^\gamma + a_2^\gamma \tag{2.1}$$

para todo  $a_1, a_2 > 0$  y  $\gamma < 1$ . Como se tiene por hipótesis que  $P[X(1, \omega) \neq 0] > 0$ , podemos asumir que  $P[X(1, \omega) \neq 0] = 1$  sin pérdida de generalidad, ya que  $P[X(1, \omega) = 0] = P[X(t, \omega) = 0]$  para todo  $t \geq 0$  (ver lema 3 de [19]). Nótese que por ser un proceso autosimilar tenemos que  $P[X(0) = 0] = 1$ . Como los incrementos del proceso  $X(t, \omega)$  son estacionarios:

$$P[X(2, \omega) - X(1, \omega) \neq 0] = P[X(1, \omega) - X(0, \omega) \neq 0] = P[X(1, \omega) \neq 0] = 1.$$

Se sigue utilizando la desigualdad 2.1:

$$|X(2, \omega)|^\gamma \leq (|X(2, \omega) - X(1, \omega)| + |X(1, \omega)|)^\gamma < |X(2, \omega) - X(1, \omega)|^\gamma + |X(1, \omega)|^\gamma.$$

Tomando esperanzas en la anterior expresión, se tiene

$$E[|X(2, \omega)|^\gamma] < E[|X(2, \omega) - X(1, \omega)|^\gamma + |X(1, \omega)|^\gamma],$$



y por las propiedades de autosimilaridad e incrementos estacionarios del proceso:

$$\begin{aligned}
 E[|X(2, \omega)|^\gamma] &= 2^{H\gamma} E[|X(1, \omega)|^\gamma] \\
 &< E[|X(2, \omega) - X(1, \omega)|^\gamma + |X(1, \omega)|^\gamma] \\
 &= E[|X(1, \omega) - X(0, \omega)|^\gamma] + E[|X(1, \omega)|^\gamma] \\
 &= E[|X(1, \omega)|^\gamma] + E[|X(1, \omega)|^\gamma] \\
 &= 2E[|X(1, \omega)|^\gamma].
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que  $2^{H\gamma} E[|X(1, \omega)|^\gamma] < 2E[|X(1, \omega)|^\gamma]$ , por lo que  $2^{H\gamma} < 2$ , de donde  $0 < H < \frac{1}{\gamma}$ .

- ii) Sea  $\gamma \geq 1$ . Si  $\gamma > 1$ , entonces existe el momento de orden  $\alpha$  para todo  $\alpha < \gamma$  y, en particular, para todo  $1 < \alpha < \gamma$ . Tomando  $\frac{1}{\alpha}$  con  $1 < \alpha < \gamma$ , que es menor que 1, podemos aplicar el primer apartado, de forma que  $H < \alpha$  para todo  $\alpha \in (1, \gamma)$ . De aquí se deduce que  $0 < H \leq 1$  para todo  $\gamma > 1$ . Para el caso en el que  $\gamma = 1$ , se tiene que  $E[|X(1, \omega)|] < \infty$  y aplicando las propiedades de los procesos autosimilares y que los incrementos son estacionarios:

$$\begin{aligned}
 E[|X(2, \omega)|] &= E[|(X(2, \omega) - X(1, \omega)) + X(1, \omega)|] \\
 &\leq E[|X(2, \omega) - X(1, \omega)|] + E[|X(1, \omega)|] \\
 &= 2E[|X(1, \omega)|].
 \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que  $E[|X(2, \omega)|] \leq 2E[|X(1, \omega)|]$ , pero por otro lado:

$$E[|X(2, \omega)|] = 2^H E[|X(1, \omega)|],$$

de donde  $2^H \leq 2$ , teniendo entonces que  $H \leq 1$ . ■

Por tanto, si tenemos un proceso autosimilar con incrementos estacionarios y varianza finita, el exponente de Hurst de dicho proceso oscilará entre cero y uno tal y como indica el teorema, es decir,  $0 < H \leq 1$ .

Por otro lado, existe una relación entre los procesos autosimilares y los procesos estacionarios muy interesante que se recoge en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** (ver [14, 16]) Sea  $\{X(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con índice de autosimilaridad  $H$ , entonces el proceso  $\{Z(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  definido como

$$Z(t, \omega) = e^{-tH} X(e^t, \omega)$$

es estacionario. Recíprocamente, si  $\{Z(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  es un proceso estacionario, entonces  $X(t, \omega) = t^H Z(\ln(t), \omega)$  es un proceso autosimilar con exponente de autosimilaridad  $H$ .

Demostración:

Supongamos que  $\{X(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  es un proceso autosimilar con índice de autosimilaridad  $H$ , veamos que  $Z(t, \omega) = e^{-tH} X(e^t, \omega)$  es un proceso estacionario. Aplicando la definición de  $Z(t, \omega)$  y la autosimilaridad del proceso  $X(t, \omega)$ :

$$\begin{aligned} Z(t + \tau, \omega) &= e^{-(t+\tau)H} X(e^{t+\tau}, \omega) \\ &= e^{-tH} e^{-\tau H} X(e^{t+\tau}, \omega) \\ &= e^{-tH} (e^{-\tau})^H X(e^t e^\tau, \omega) \\ &\sim e^{-tH} (e^{-\tau})^H (e^\tau)^H X(e^t, \omega) \\ &= e^{-tH} X(e^t, \omega) = Z(t, \omega) \end{aligned}$$

para todo  $\tau > 0$ . Así, tenemos que  $Z(t + \tau, \omega) \sim Z(t, \omega)$ , por lo que el proceso  $Z(t, \omega)$  es estacionario.

Recíprocamente, sea  $\{Z(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso estacionario, tenemos que ver que el proceso  $X(t, \omega) = t^H Z(\ln(t), \omega)$  es autosimilar. Si aplicamos la definición de  $X(t, \omega)$  y la estacionariedad de  $Z(t, \omega)$ :

$$\begin{aligned} X(t\tau, \omega) &= (t\tau)^H Z(\ln(t\tau), \omega) \\ &= t^H \tau^H Z(\ln(t) + \ln(\tau), \omega) \\ &\sim t^H \tau^H Z(\ln(t), \omega) \\ &= \tau^H X(t, \omega) \end{aligned}$$

para todo  $\tau > 0$ . Por tanto, tenemos que  $X(t, \omega)$  es un proceso autosimilar de índice  $H$  ya que  $X(t\tau, \omega) \sim \tau^H X(t, \omega)$ . ■

Otra propiedad muy interesante de los incrementos de un proceso estocástico es la siguiente.

**Definición 2.8.** Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso estocástico. Diremos que los incrementos del proceso son autosimilares si se verifica para cierto  $H > 0$  que:

$$X(t + \tau c, \omega) - X(t, \omega) \sim \tau^H (X(t + c, \omega) - X(t, \omega))$$

para todo  $t > 0$ , todo  $c > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ .

Un aspecto a considerar relacionado con este concepto es que si tenemos un proceso estocástico  $X(t, \omega)$  con incrementos autosimilares se verifica la siguiente ley de potencias (ver el corolario 3.6 de [17]):

$$M(\tau c)^q \sim \tau^{qH} M(c)^q \tag{2.2}$$

donde  $M(\tau c) = M_0(\tau c)$  y  $M_t(\tau c)$  es definida como

$$M_t(\tau c) = \sup\{X(r, \omega) - X(t, \omega) : r \in [t, t + \tau c]\} - \inf\{X(r, \omega) - X(t, \omega) : r \in [t, t + \tau c]\}$$

para todo  $t > 0$ , todo  $c > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ .

Cabe destacar la relación que existe entre los procesos autosimilares con incrementos estacionarios y los procesos con incrementos autosimilares, que se puede observar en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.** (ver [13]) Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con índice de autosimilaridad  $H$  e incrementos estacionarios, entonces dicho proceso también tendrá incrementos autosimilares.

Demostración:

Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar no nulo con incrementos estacionarios. Tenemos que  $X(0, \omega) = 0$  casi seguro para todo  $\omega \in \Omega$  por ser  $X(t, \omega)$  un proceso autosimilar. Aplicando esta propiedad y la estacionariedad de los incrementos, se llega a que

$$X(t + \tau c, \omega) - X(t, \omega) \sim X(\tau c, \omega) - X(0, \omega) \sim X(\tau c, \omega)$$

para todo  $t > 0$ , todo  $c > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ . Utilizando ahora que el proceso  $X(t, \omega)$  es autosimilar, se sigue

$$X(\tau c, \omega) \sim \tau^H X(c, \omega)$$

y así, se tiene que

$$\tau^H X(c, \omega) \sim \tau^H (X(c, \omega) - X(0, \omega)) \sim \tau^H (X(t + c, \omega) - X(t, \omega)),$$

utilizando de nuevo que el proceso es autosimilar y que sus incrementos son estacionarios. De esta forma tenemos que

$$X(t + \tau c, \omega) - X(t, \omega) \sim \tau^H (X(t + c, \omega) - X(t, \omega))$$

para todo  $t > 0$ , todo  $c > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ , y por tanto los incrementos del proceso  $X(t, \omega)$  son autosimilares. ■

### *Movimientos brownianos fraccionales*

En este apartado vamos a describir un tipo concreto de proceso autosimilar con incrementos estacionarios, el movimiento browniano fraccional.

Un movimiento browniano fraccional es un proceso gaussiano con media 0 y una función de autocovarianza dada por:

$$R(t_1, t_2) = Cov(X(t_1, \omega), X(t_2, \omega)) = \frac{Var(X(1, \omega))}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}).$$

Nótese que la función  $R$  es definida positiva para todo  $t_1, t_2 > 0$  y todo  $0 < H < 1$ . De esta forma quedaría definido el movimiento browniano fraccional, que se suele denotar como  $\{B_H(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  para cierto  $0 < H < 1$ . Si  $H = \frac{1}{2}$  tenemos el clásico movimiento browniano, donde los incrementos son independientes. El movimiento browniano fraccional es el único proceso gaussiano, autosimilar y con incrementos estacionarios. A partir de nuestra definición, veamos que en efecto el movimiento browniano fraccional es autosimilar y estacionario.

**Teorema 2.4.** (ver [14, 18]) Sea  $\{B_H(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un movimiento browniano fraccional, entonces  $B_H(t, \omega)$  es autosimilar y tiene incrementos estacionarios.

Demostración:

Por un lado, el movimiento browniano fraccional será autosimilar si se verifica que  $B_H(t\tau, \omega)$  y  $\tau^H B_H(t, \omega)$  siguen la misma distribución para todo  $\tau \geq 0$ . Al ser el proceso  $B_H(t, \omega)$  gaussiano, se tiene que  $B_H(t\tau, \omega)$  y  $\tau^H B_H(t, \omega)$  también son gaussianos, y por tanto para ver que los dos procesos siguen la misma distribución bastará con ver que sus varianzas son las mismas:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(B_H(t\tau, \omega)) &= \text{Cov}(B_H(t\tau, \omega), B_H(t\tau, \omega)) \\
 &= \frac{\text{Var}(B_H(1, \omega))}{2} (|t\tau|^{2H} + |t\tau|^{2H}) \\
 &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) \tau^{2H} |t|^{2H} \\
 &= \tau^{2H} \text{Cov}(B_H(t, \omega), B_H(t, \omega)) \\
 &= \text{Cov}(\tau^H B_H(t, \omega), \tau^H B_H(t, \omega)) \\
 &= \text{Var}(\tau^H B_H(t, \omega)).
 \end{aligned}$$

Así, se tiene que  $B_H(t\tau, \omega) \sim \tau^H B_H(t, \omega)$  y por tanto el proceso  $B_H(t, \omega)$  es autosimilar.

Por otro lado, para que el movimiento browniano fraccional  $\{B_H(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  tenga incrementos estacionarios, se tiene que dar la igualdad en distribución  $B_H(t + \tau, \omega) - B_H(t, \omega) \sim B_H(\tau, \omega) - B_H(0, \omega)$  para todo  $\tau \geq 0$ . Como  $B_H(t, \omega)$  es un proceso gaussiano con media 0, tenemos que tanto  $B_H(t + \tau, \omega) - B_H(t, \omega)$  como  $B_H(\tau, \omega) - B_H(0, \omega)$  serán procesos gaussianos con media 0. Veamos que también tienen la misma varianza:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(B_H(t + \tau, \omega) - B_H(t, \omega)) &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) |t + \tau|^{2H} + \text{Var}(B_H(1, \omega)) |t|^{2H} \\
 &\quad - 2\text{Cov}(B_H(t + \tau, \omega), B_H(t, \omega)) \\
 &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) (|t + \tau|^{2H} + |t|^{2H}) \\
 &\quad - \text{Var}(B_H(1, \omega)) (|t + \tau|^{2H} + |t|^{2H} - |\tau|^{2H}) \\
 &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) |\tau|^{2H},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(B_H(\tau, \omega) - B_H(0, \omega)) &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) |\tau|^{2H} - 2\text{Cov}(B_H(t + \tau, \omega), B_H(t, \omega)) \\
 &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) |\tau|^{2H} - \text{Var}(B_H(1, \omega)) (|\tau|^{2H} - |\tau|^{2H}) \\
 &= \text{Var}(B_H(1, \omega)) |\tau|^{2H}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que el movimiento browniano fraccional tiene incrementos estacionarios. ■

De esta forma hemos visto como el movimiento browniano fraccional es autosimilar y sus incrementos son estacionarios. En caso de que se tenga que  $\text{Var}(B_H(1, \omega)) = 1$ , diremos que estamos ante un movimiento browniano fraccional estándar. Si tenemos un movimiento browniano fraccional  $\{X(k, \omega) : k \geq \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ , como los incrementos son estacionarios, el proceso  $\{Y(k, \omega) : k \geq \mathbb{Z}, \omega \in \Omega\}$  definido como  $Y(k, \omega) = X(k + 1, \omega) - X(k, \omega)$  será estacionario. A este proceso se le conoce como ruido gaussiano fraccional, y su estudio también es objeto de interés.

El movimiento browniano fraccional es un proceso autosimilar con incrementos estacionarios muy utilizado a la hora de modelizar muchas situaciones, y será el que

utilizaremos en las secciones posteriores para estimar el exponente  $H$  mediante diferentes procedimientos. En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se pueden ver algunos ejemplos de movimientos brownianos fraccionales para diferentes  $H$ s.

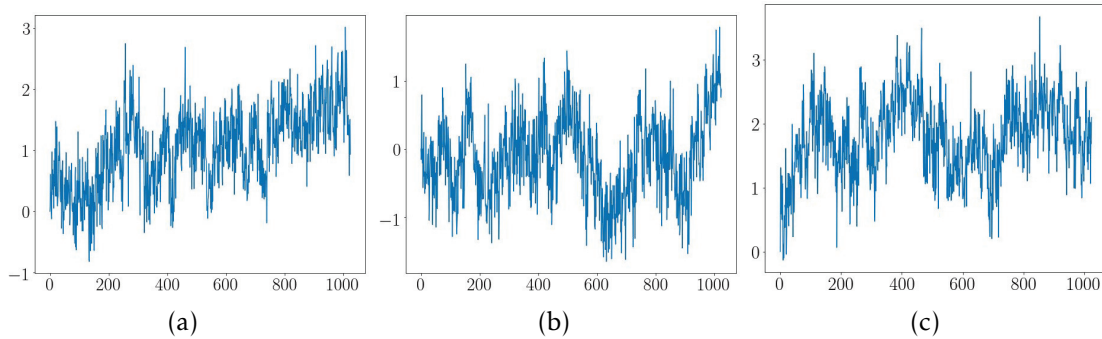


Figura 2.1: Movimientos brownianos fraccionales con  $H = 0.1$ .

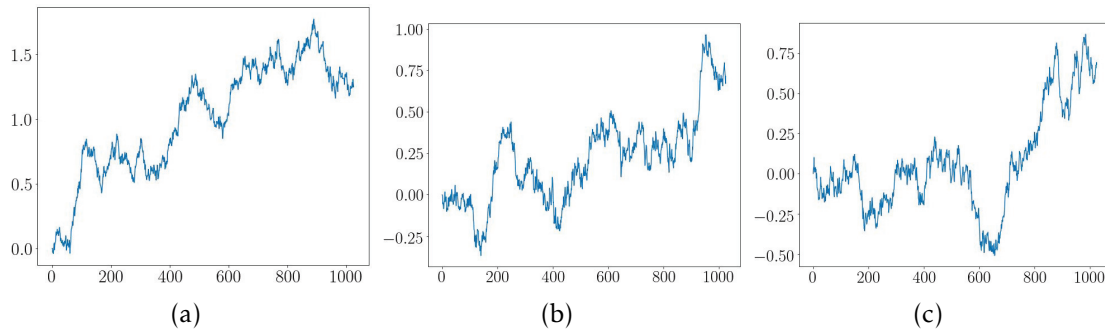


Figura 2.2: Movimientos brownianos fraccionales con  $H = 0.5$ .

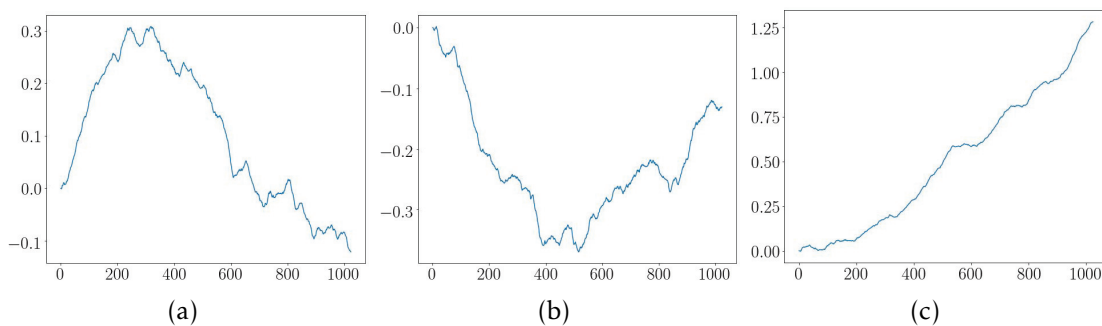


Figura 2.3: Movimientos brownianos fraccionales con  $H = 0.9$ .

### 2.3 Procesos con memoria

Esta sección la dedicaremos a indagar en los procesos con memoria y a establecer la relación que existe entre los procesos autosimilares con incrementos estacionarios en los que existe el momento de orden dos y este concepto de memoria larga. Una vez vista esta relación se podrá observar la influencia que tiene el exponente de Hurst a la hora de entender el comportamiento de una serie autosimilar y la importancia que tiene poder estimar bien este parámetro. Para el desarrollo de esta sección utilizaremos de nuevo la referencia [12].

En primer lugar, veamos qué entendemos cuando hablamos de la ‘memoria’ de un proceso. Este concepto lo definimos sobre procesos estacionarios donde existe el momento de orden dos.

Sea  $\{Y(t, \omega) : t \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega\}$  un proceso estacionario tal que existe su momento de orden dos, cuya autocovarianza es  $\gamma_Y(k) = \text{Cov}(Y(0, \omega), Y(k, \omega))$  con  $k \in \mathbb{Z}$  y su densidad espectral

$$f_Y(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_Y(k) e^{-ik\lambda}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (2.3)$$

Antes de definir de forma rigurosa el concepto de memoria sobre este proceso, necesitamos conocer la siguiente definición. Nótese que el símbolo  $\approx$  indica que si tenemos dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  tal que  $f(x) \approx g(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , entonces  $\frac{f(x)}{g(x)}$  converge cuando  $x$  tiende a  $x_0$ .

**Definición 2.9.** Diremos que una función  $L : (c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $c \geq 0$  varía lentamente en el infinito en sentido Karamata si es positiva y medible para  $x$  suficientemente grande y existe  $u > 0$  tal que:

$$L(ux) \approx L(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Si dicha función es positiva para  $x$  suficientemente grande y para cierto  $\delta$  existe  $x_0(\delta) > 0$  tal que para  $x > x_0(\delta)$  las funciones  $p_1(x) = x^\delta l(x)$  y  $p_2(x) = x^{-\delta} l(x)$  son monótonas, entonces diremos que la función varía lentamente en el infinito en sentido Zygmund. Además, diremos que una función varía lentamente en el origen (en cualquiera de los dos sentidos) si la función  $L(x^{-1})$  varía lentamente en el infinito.

Una vez hecha esta definición previa, vamos a introducir el concepto de ‘memoria’ en forma de dependencia lineal.

**Definición 2.10.** Sea  $\{Y(t, \omega) : t \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega\}$  un proceso estacionario tal que existe su momento de orden dos, con autocovarianza  $\gamma_Y(k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$  y densidad espectral tal y como se ha definido en 2.3. Entonces, si tenemos que

$$f_Y(\lambda) = L_f(\lambda) |\lambda|^{-2d},$$

donde  $L_f(\lambda) \geq 0$  es una función que varía lentamente en 0, podemos hacer la siguiente clasificación en función del valor de  $d$ :

- i) Si  $0 \leq d \leq \frac{1}{2}$ , el proceso presenta dependencia a largo plazo.

- ii) Si  $d = 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_f(\lambda) = \infty$ , el proceso presenta dependencia intermedia.
- iii) Si  $d = 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_f(\lambda) = c_f$  con  $0 < c_f < \infty$ , el proceso presenta dependencia a corto plazo.
- iv) Si  $-\frac{1}{2} \leq d \leq 0$ , el proceso presenta antipersistencia.

Además de esta definición, introducimos un teorema que necesitaremos para poder mostrar la relación del concepto de ‘memoria’ y los procesos autosimilares.

**Teorema 2.5.** (ver [12]) Sean  $f_Y(\lambda)$  ( $\lambda \in [-\pi, \pi]$ ) la densidad espectral y  $\gamma_Y(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) la autocovarianza de un proceso estacionario tal que existe su momento de orden dos. Entonces, si

$$\gamma_Y(t, t+k) = L_\gamma(k) |k|^{2d-1}$$

con  $L_\gamma(k)$  una función que varía en  $\infty$  lentamente en sentido Zygmund,  $d \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$  y  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(k) < \infty$ , entonces

$$f_Y(\lambda) \sim L_f(\lambda) |\lambda|^{-2d}, \quad \lambda \rightarrow 0$$

con  $L_f(\lambda) = L_\gamma(\frac{1}{\lambda}) \frac{1}{\pi} \Gamma(2d) \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \pi d)$ .

Una vez introducidos estos conceptos, vamos a ver la relación que se establece entre estos y los procesos autosimilares con incrementos estacionarios. Esta relación se puede ver en el siguiente teorema.

**Teorema 2.6.** (ver [12]) Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar tal que sus incrementos son estacionarios y existe su momento de orden dos. Definimos  $\{Y(k, \omega) : k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$  como  $Y(k, \omega) = X(k+1, \omega) - X(k, \omega)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Nótese que tenemos por tanto que  $Y(k, \omega)$  es estacionario y existe su momento de segundo orden. Entonces se tiene que:

- i) Si  $0 < H < 0.5$ ,  $Y(t, \omega)$  es antipersistente.
- ii) Si  $H = 0.5$ ,  $Y(t, \omega)$  es un proceso aleatorio.
- iii) Si  $0.5 < H < 1$ ,  $Y(t, \omega)$  presenta dependencia a largo plazo.

Demostración:

Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  e  $\{Y(k, \omega) : k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$  dos procesos tal y como se han definido en el enunciado del teorema. En primer lugar, para todo  $i \geq j > 0$  se tiene que

$$\gamma_X(i, i) = \text{Var}(X(i, \omega)) = i^{2H} \text{Var}(X(1, \omega))$$

utilizando la autosimilaridad, y también que

$$\text{Var}(X(i, \omega) - X(j, \omega)) = \text{Var}(X(i-j, \omega) - X(0, \omega)) = \text{Var}(X(i-j, \omega)) = (i-j)^{2H} \text{Var}(X(1, \omega))$$

por la estacionariedad de los incrementos. Además, sabemos que

$$\text{Var}(X(i, \omega) - X(j, \omega)) = \gamma_X(i, i) + \gamma_X(j, j) - 2\gamma_X(i, j)$$

por lo que se llega a que

$$\begin{aligned}\gamma_X(i, j) &= \frac{1}{2}(\gamma_X(i, i) + \gamma_X(j, j) - \text{Var}(X(i, \omega) - X(j, \omega))) \\ &= \frac{\text{Var}(X(1, \omega))}{2}(i^{2H} + j^{2H} - (i - j)^{2H}).\end{aligned}$$

De forma similar, utilizando los términos obtenidos, sería posible obtener la siguiente expresión para la covarianza de  $Y(t, \omega)$ :

$$\gamma_Y(t, t+k) = \frac{\text{Var}(X(1, \omega))}{2}((k-1)^{2H} + (k+1)^{2H} - 2(k)^{2H}) \quad (2.4)$$

para todo  $t \in \mathbb{N}$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ . Si expresamos 2.4 mediante el desarrollo en serie de Taylor en torno a 0 (téngase en cuenta que la función es derivable al menos en un entorno de 0), obtenemos que

$$\gamma_Y(t, t+k) \simeq \text{Var}(X(1, \omega))H(2H-1)K^{2H-2}.$$

Teniendo en cuenta ahora la notación de las definiciones previas, se tendría que

$$\gamma_Y(t, t+k) = L_\gamma(k)|k|^{2d-1} \simeq \text{Var}(X(1, \omega))H(2H-1)K^{2H-2}.$$

De aquí, se obtiene que  $L_\gamma(k) \simeq \text{Var}(X(1, \omega))H(2H-1)$  y

$$K^{2H-2} = K^{2d-1}.$$

Así, tenemos que  $2H-2 = 2d-1$ , de donde

$$H = d + \frac{1}{2}.$$

Nótese que para  $H = \frac{1}{2}$  se tiene que  $\gamma_Y(t, t+k) \simeq 0$ , de donde se deduce que el proceso sería aleatorio. Teniendo en cuenta la definición 2.10, se llega a lo que se quería demostrar, ya que para  $0 < H < \frac{1}{2}$ , se tendría que  $-\frac{1}{2} < d < 0$ , por lo que el proceso sería antipersistente, y para  $\frac{1}{2} < H < 1$  se tendría que  $0 < d < \frac{1}{2}$ , presentando entonces el proceso dependencia a largo plazo. ■

De esta forma, tenemos la relación que comentábamos durante la introducción; si  $0 < H < 0.5$ , entonces el proceso es antipersistente, si  $H = 0.5$  el proceso es aleatorio y si  $0.5 < H < 1$  el proceso es persistente.



## Métodos para estimar el exponente de Hurst

Como hemos visto en el capítulo anterior, existe una relación entre el valor del exponente de Hurst de un proceso autosimilar con incrementos estacionarios y el comportamiento que tendrá una serie autosimilar asociada a dicho proceso. Por tanto, a la hora de poder obtener información sobre las series que provienen de procesos autosimilares con incrementos estacionarios resulta clave poder realizar una estimación lo más verosímil posible del exponente de Hurst. Este capítulo lo dedicaremos a exponer y explicar el fundamento matemático de algunos métodos que se utilizan para estimar el exponente de Hurst. Estos métodos expuestos nos ayudarán a comprender mejor el método TA que será introducido posteriormente.

No obstante, cabe mencionar que a la hora de calcular el exponente de Hurst de una serie de la vida real, es tan importante estimar bien el exponente de Hurst como poder verificar que el comportamiento de la serie es autosimilar, de lo contrario no tendría sentido calcular el exponente de Hurst. En este trabajo partimos de series autosimilares generadas a partir de movimientos brownianos fraccionales, que como hemos visto en el capítulo anterior son procesos autosimilares con incrementos estacionarios.

El primer método propuesto para estimar el parámetro de autosimilaridad fue el método RS ([1]). Este método, tal y como se ha expuesto en la introducción, obtiene una estimación del coeficiente de Hurst a través del estadístico que se calcula como la media de los cocientes del rango de las sumas de la serie de diferencias menos la media en cada subintervalo entre la desviación estándar de la serie de diferencias del subintervalo correspondiente.

A lo largo de la historia han sido muchos los métodos propuestos para estimar el exponente de Hurst de procesos autosimilares. Los más clásicos y probablemente más conocidos son los algoritmos RS, DFA ([20]), MF-DFA( $q$ ) ([21]), DMA ([22]) y GHE( $q$ ) ([23]). Además, en los últimos años se han propuesto otros procedimientos muy interesantes y con ciertas ventajas respecto a los mencionados, como son los métodos FD( $q$ ) ([24]). Cada uno de estos métodos tiene una serie de características que hacen que en según qué situación sean más o menos útiles.

En la siguiente sección vamos a describir más en profundidad el método GHE( $q$ ), uno de los más utilizados para estimar el exponente de Hurst, profundizando en su funcionamiento y en la fundamentación matemática del mismo enfocada al cálculo del exponente en series autosimilares procedentes de procesos autosimilares con incrementos estacionarios. Por último, en la segunda sección de este capítulo describiremos el funcionamiento y las propiedades de los algoritmos FD( $q$ ).

### 3.1 Métodos GHE( $q$ )

El método GHE( $q$ ) (generalized Hurst exponent) fue introducido por Barabási y Vicsek en [23]. Este método es muy preciso y se suele usar para detectar la multifractalidad. El método se basa en el comportamiento del valor absoluto de los incrementos de

orden  $q$  de un proceso estocástico determinado. Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso estocástico. El algoritmo se puede justificar a través del siguiente estadístico:

$$k_q(\tau) = \frac{\langle |X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)|^q \rangle}{\langle |X(t, \omega)|^q \rangle}.$$

Nótese que para  $q = 2$  tenemos que el estadístico es proporcional a la función de autocorrelación. A través de la siguiente expresión, sería posible calcular el exponente de Hurst:

$$k_q(\tau) \propto \tau^{qH}.$$

De forma empírica, si tenemos un proceso estocástico  $X(t, \omega)$  de longitud  $L$ , se puede estimar el coeficiente de Hurst a través de la siguiente ley de potencias

$$\frac{\sum_0^{L-\tau} |X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)|^q}{L - \tau + 1} \propto c\tau^{qH(q)},$$

donde  $q$  indica el orden del momento que utilizamos para estimar  $H$ .

Como en nuestro caso estamos tratando con procesos autosimilares con incrementos estacionarios, vamos a dar en el siguiente teorema una justificación al funcionamiento del método GHE( $q$ ), que ha sido introducida en [9].

**Teorema 3.1.** *Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con incrementos estacionarios, entonces es posible utilizar el método GHE( $q$ ) para estimar el exponente de Hurst del proceso.*

Demostración:

Sea  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con incrementos estacionarios. Como los incrementos del proceso son estacionarios, se tiene que

$$X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega) \sim X(\tau, \omega) - X(0, \omega)$$

para todo  $t \geq 0$ . Además, como los incrementos son autosimilares, se llega a que

$$X(\tau, \omega) - X(0, \omega) \sim \tau^H (X(1, \omega) - X(0, \omega))$$

para todo  $\tau \geq 0$ . Si tomamos ahora el valor absoluto en la expresión anterior, tenemos que

$$|X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)| \sim \tau^H |X(1, \omega) - X(0, \omega)|.$$

Tomando esperanzas se llega a que

$$\begin{aligned} E[|X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)|] &= E[\tau^H |X(1, \omega) - X(0, \omega)|] \\ &= E[|X(1, \omega) - X(0, \omega)|] \tau^H \\ &= c\tau^H, \end{aligned}$$

donde la constante  $c$  es  $E[|X(1, \omega) - X(0, \omega)|]$ . De esta forma se tendría justificada la estimación mediante el método GHE(1). Para otros valores de  $q$ , se tiene que la demostración es análoga ya que las mismas expresiones son válidas para los momentos de orden  $q$ . De forma general, se tiene la siguiente expresión que justifica todos

los métodos GHE(q):

$$\begin{aligned} E[|X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)|^q] &= E[\tau^{qH} |X(1, \omega) - X(0, \omega)|^q] \\ &= E[|X(1, \omega) - X(0, \omega)|^q] \tau^{qH} \\ &= c \tau^{qH} \end{aligned}$$

con la contante  $c = E[|X(1, \omega) - X(0, \omega)|^q]$ . De esta forma, queda demostrada la validez del método GHE(q) para estimar el exponente de Hurst en procesos autosimilares con incrementos estacionarios. ■

A la hora de implementar el método, bastaría con estimar las esperanzas como las medias muestrales y se podría obtener el exponente de Hurst como la pendiente de la regresión lineal de la expresión  $\log(E[|X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega)|^q]) = \log(c) + qH \log(\tau)$ .

Vamos a ilustrar de forma gráfica el funcionamiento de este tipo de métodos con algunas figuras. Lo haremos en concreto del método GHE(1), siendo análogo para los GHE(q), ya que solo habría que ir elevando las muestras a  $q$ . En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se puede ver cómo se toman las muestras de una realización de un proceso autosimilar con incrementos estacionarios, concretamente de un movimiento browniano fraccional con exponente de Hurst 0.5.

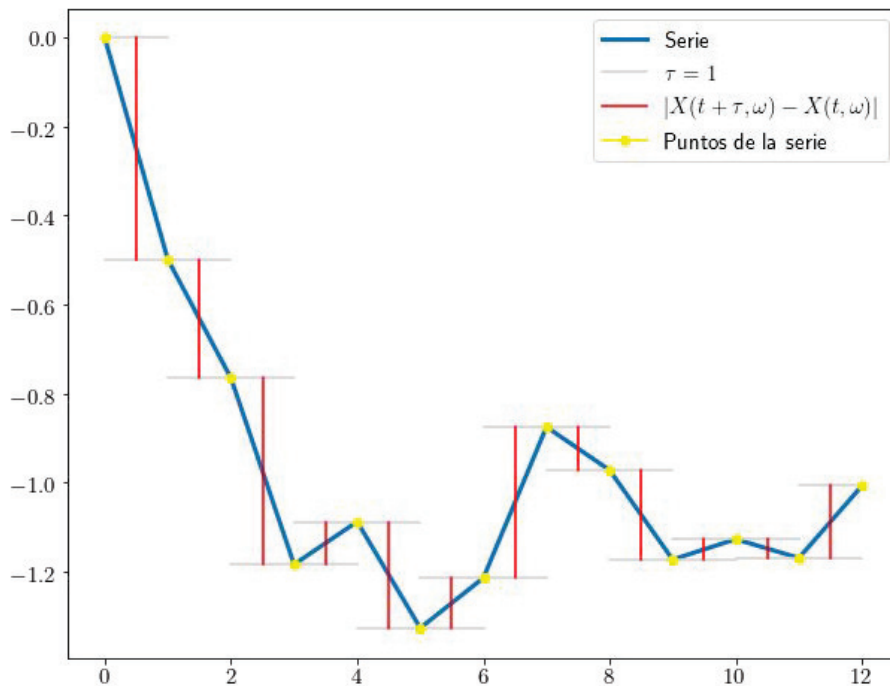


Figura 3.1: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 1$  con el método GHE(1).

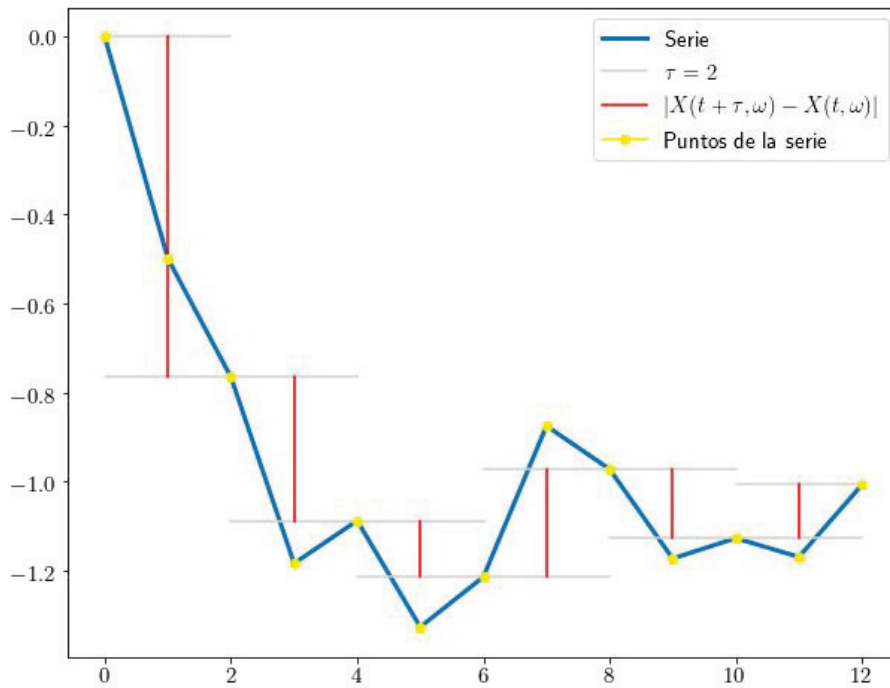


Figura 3.2: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 2$  con el método GHE(1).

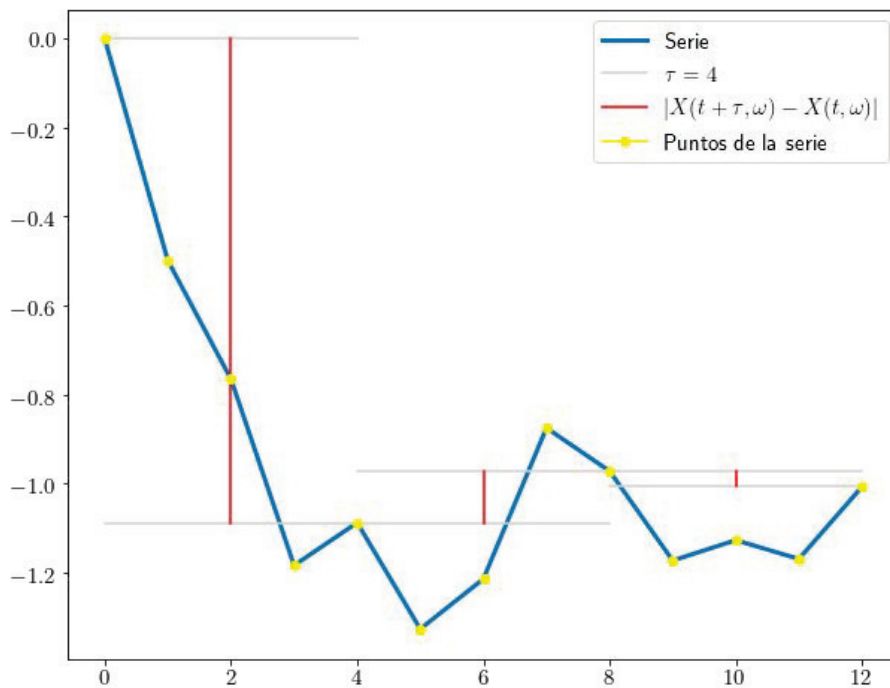


Figura 3.3: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 4$  con el método GHE(1).

## 3.2 Métodos FD

Los algoritmos FD (fractal dimension) fueron introducidos por M. Fernández-Martínez et al. en [24]. Este método resulta ser muy útil para estimar el exponente de Hurst de series que presentan máximos y mínimos, como pueden ser las series financieras. Los métodos en cuestión han sido evaluados para estimar el exponente de Hurst en movimientos brownianos fraccionales con máximos y mínimos y los resultados han sido bastante precisos (ver [24]), especialmente para series de longitud no muy grande, lo que representa una gran ventaja respecto a otros métodos utilizados.

A continuación, vamos a explicar cómo funcionan estos métodos y cuál es su fundamento matemático. Sea  $\{X(t, \omega) : t > 0, \omega \in \Omega\}$  un proceso autosimilar con incrementos estacionarios. Si rescatamos la expresión 2.2, tenemos que

$$M(\tau)^q \sim \tau^{qH} M(1)^q \quad (3.1)$$

donde  $M(\tau) = M_0(\tau)$  y  $M_t(\tau)$  es definida como

$$M_t(\tau) = \sup\{X(r, \omega) - X(t, \omega) : r \in [t, t + \tau]\} - \inf\{X(r, \omega) - X(t, \omega) : r \in [t, t + \tau]\}$$

para todo  $t > 0$  y todo  $\tau \geq 0$ .

A través de esta relación es posible estimar el exponente de Hurst, ya que bastaría con tomar esperanzas en la expresión 3.1, llegando a que

$$\begin{aligned} E[M_t(\tau)^q] &= E[\tau^{qH} M(1)^q] \\ &= E[M(1)^q] \tau^{qH} \\ &= c \tau^{qH} \end{aligned}$$

con la contante  $c = E[M(1)^q]$ . De esta forma se podría obtener el exponente de Hurst estimando de nuevo las esperanzas como las medias muestrales y calculando la pendiente de la regresión lineal  $\log(E[M_t(\tau)^q]) = \log(c) + qH \log(\tau)$ .

Al igual que hemos hecho con el método GHE(1), vamos a ilustrar de forma gráfica cuál sería el funcionamiento del método para tomar las muestras de la realización de un proceso autosimilar con incrementos estacionarios. De nuevo, generamos un movimiento browniano fraccional con exponente de Hurst 0.5. En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 podemos observar cómo se obtendrían las diferentes muestras para el método FD(1). Para el resto de métodos FD(q) bastaría con elevar a q estas muestras.

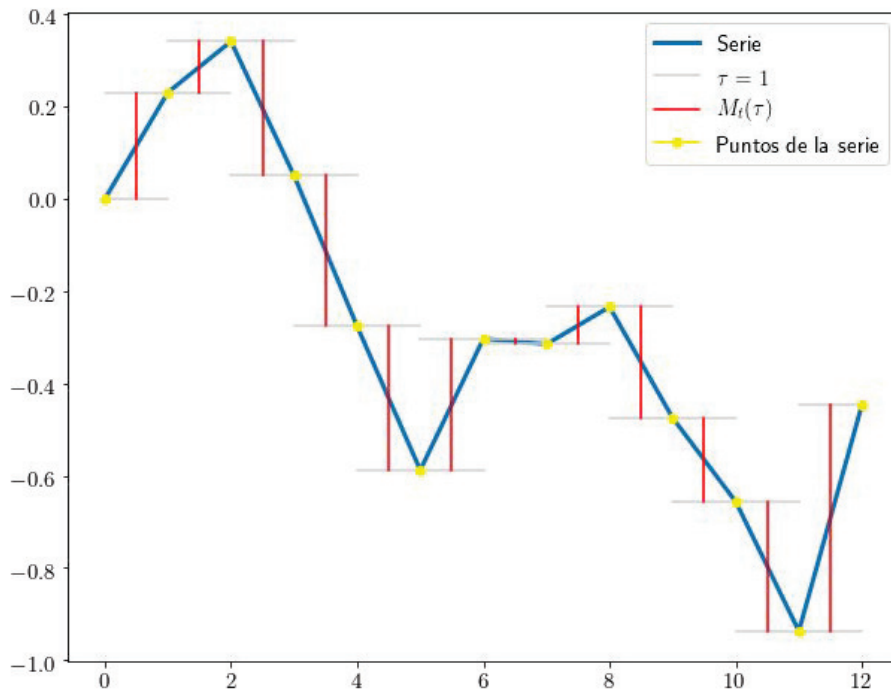


Figura 3.4: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 1$  con el método FD(1).

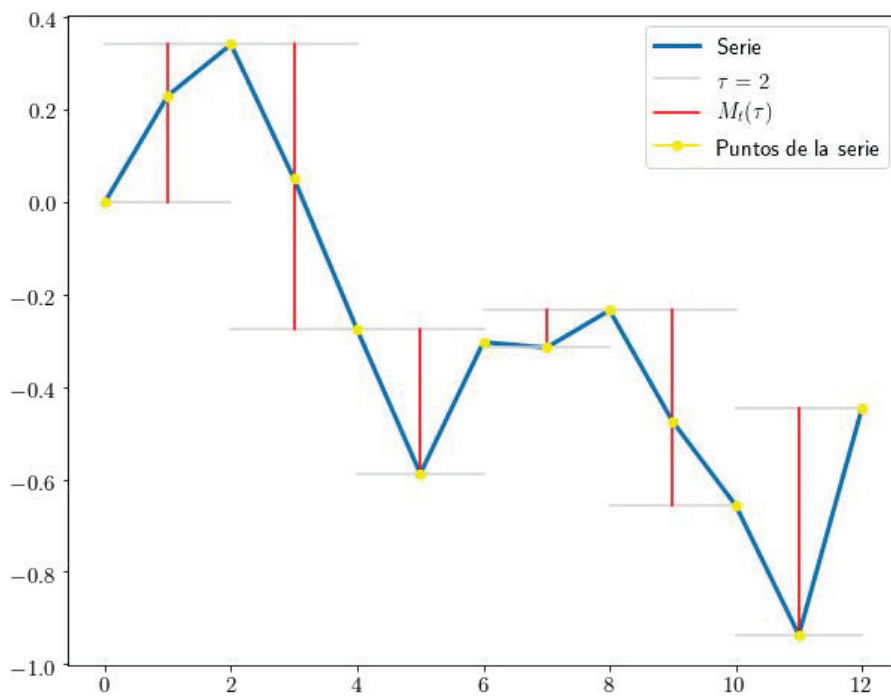


Figura 3.5: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 2$  con el método FD(1).

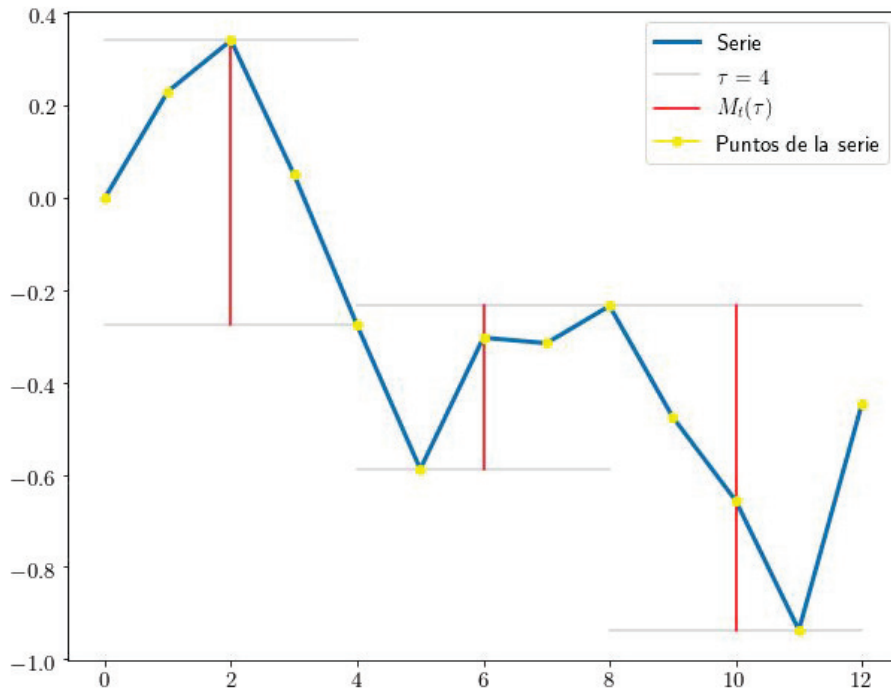


Figura 3.6: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 4$  con el método FD(1).

Otro aspecto muy interesante de los algoritmos FD(q) es que están estrechamente ligados a las estructuras fractales. Estos métodos proporcionan una herramienta para estimar con cierta facilidad la dimensión fractal de conjuntos en el contexto de los fractales, teniendo unas propiedades analíticas muy interesantes.





## Introducción del método TA

Este capítulo se dedicará a introducir y explicar el método TA para estimar el exponente de Hurst de procesos autosimilares con incrementos estacionarios. Para ello, en la primera sección se introducirá el método TTA, explicando su funcionamiento y su fundamento matemático, dando paso a la siguiente sección en la que, con algunas modificaciones de este algoritmo, se introducirá el método denominado TA.

Como puede revisarse en la literatura, el método TTA ([25]) y el método TA ([9]) han sido introducidos hace muy poco tiempo, por lo que sus aplicaciones y posibles mejoras aún pueden estar por descubrirse, lo que representa un aspecto muy interesante sobre estos dos métodos.

### 4.1 El método TTA

El método TTA (Total Triangles Area) es un método muy preciso para estimar el exponente de Hurst propuesto en [25]. A nivel computacional también tiene propiedades muy interesantes que lo hacen ser un método a tener en cuenta.

A continuación, estudiaremos cuál es el funcionamiento del método y su idea intuitiva. Sea  $\{X(0), X(1), \dots, X(n)\}$  una serie autosimilar de longitud  $n$ . Lo que haremos será dividir la serie en subintervalos y formar triángulos en estos subintervalos con el primer punto, el punto medio y el último punto, computando la suma de las áreas de estos triángulos. El algoritmo seguirá los siguientes pasos.

1. Dividimos la serie original en subintervalos de longitud  $2\tau > 0$  (tomamos  $2\tau$  como divisor de  $n$ ).
2. Para cada subintervalo, calculamos el área del triángulo que forman el primer punto, el punto medio y el último punto.
3. Calculamos la suma del área de los triángulos construidos.
4. Repetimos el proceso para diferentes valores de  $\tau$ .
5. Obtenemos la estimación del exponente de Hurst a través de una regresión lineal entre  $\log(\tau)$  y el logaritmo de la suma total de las áreas de los triángulos.

Veamos de forma gráfica los triángulos generados para un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  y diferentes  $\tau$ s. En las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se pueden observar los triángulos construidos.

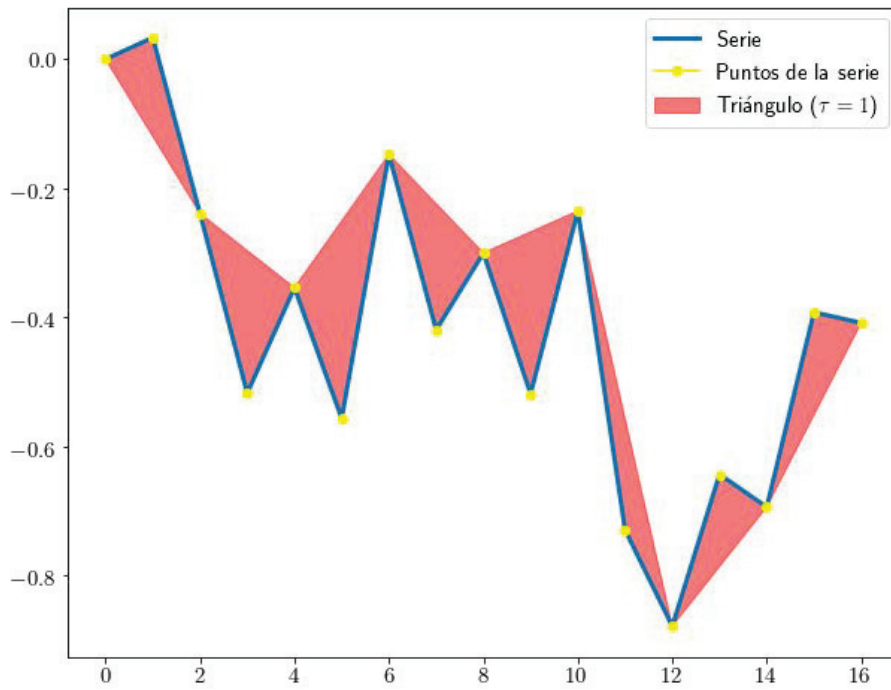


Figura 4.1: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 1$  con el método TTA.

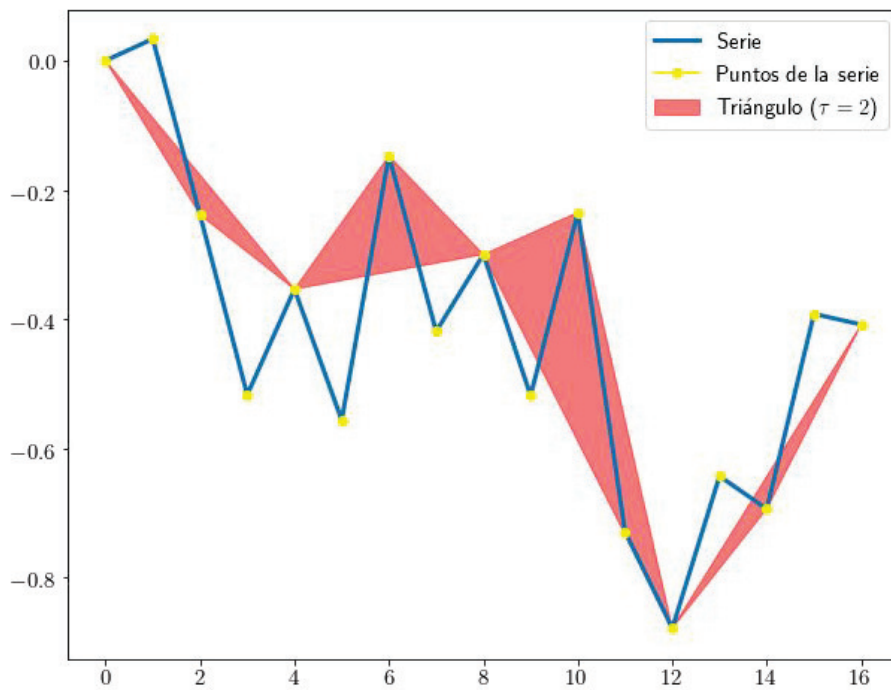


Figura 4.2: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 2$  con el método TTA.

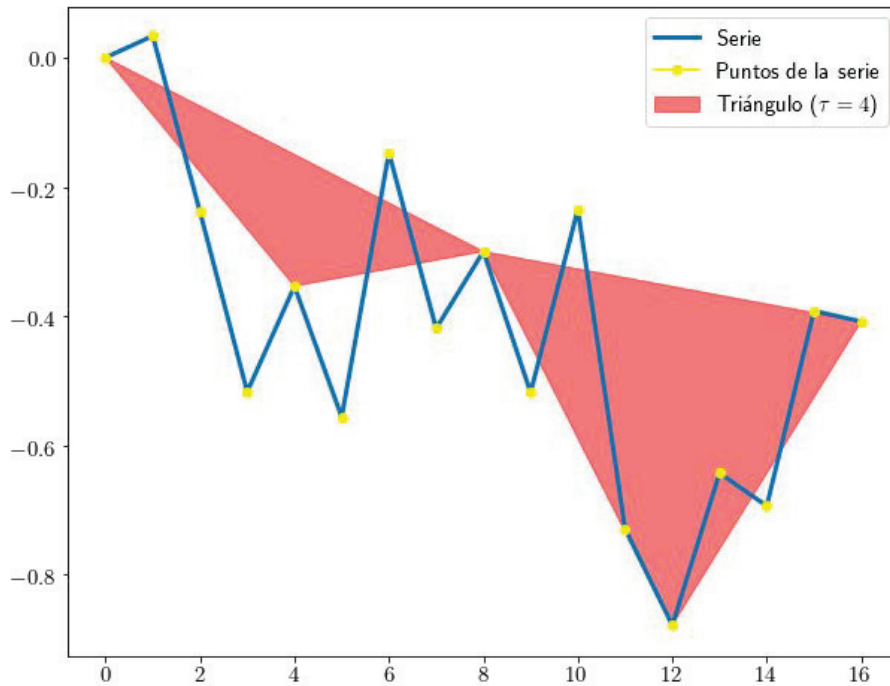


Figura 4.3: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 4$  con el método TTA.

A continuación, vamos a ver cuál es la fundamentación matemática del método, que no se recoge en el artículo donde se introdujo el método, pero que sí se puede revisar en [9].

Sea  $\{X(0), X(1), \dots, X(n)\}$  una realización de longitud  $n$  de  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ , un proceso autosimilar con incrementos estacionarios. Tal y como se recoge en el método, se divide la serie en subintervalos de longitud  $2\tau > 0$ . Calculamos el área de los triángulos que construimos con los puntos  $(i, X(i))$ ,  $(i + \tau, X(i + \tau))$  y  $(i + 2\tau, X(i + 2\tau))$ , para  $i = 0, 2\tau, \dots, n - 2\tau$ . Denotaremos por  $ST(\tau)$  a la suma del área de todos los triángulos generados para el  $\tau$  seleccionado.

Para demostrar el funcionamiento de este método lo que haremos será probar que la esperanza del proceso se puede relacionar con  $\tau^H$  de la siguiente forma

$$E[ST(\tau, \omega)] = c\tau^H,$$

con  $c$  una constante distinta de 0.

Sea  $\tau > 0$  (nótese que tomamos  $\tau$  tal que  $2\tau$  divida a  $n$ ). Para  $i \in \{0, 2\tau, \dots, n - 2\tau\}$ , el área de los triángulos (que denotamos como  $A(i, \tau)$ ) con vértices en  $(i, X(i))$ ,  $(i + \tau, X(i + \tau))$  y  $(i + 2\tau, X(i + 2\tau))$  puede obtenerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A(i, \tau) &= \frac{\left| \det \begin{pmatrix} i & i + \tau & i + 2\tau \\ X(i) & X(i + \tau) & X(i + 2\tau) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|}{2} \\
 &= \frac{1}{2} |iX(i + \tau) + (i + \tau)X(i + 2\tau) + (i + 2\tau)X(i) \\
 &\quad - (i + 2\tau)X(i + \tau) - (i + \tau)X(i) - iX(i + 2\tau)| \\
 &= \frac{1}{2} |X(i + 2\tau)(i + \tau - i) \\
 &\quad + X(i + \tau)(i - i - 2\tau) + X(i)(i + 2\tau - i - \tau)| \\
 &= \frac{1}{2} |X(i + 2\tau)\tau - 2X(i + \tau)\tau + X(i)\tau| \\
 &= \frac{\tau}{2} |X(i + 2\tau) - 2X(i + \tau) + X(i)|.
 \end{aligned}$$

Es decir, la suma del área de los  $\frac{n}{2\tau}$  triángulos se puede expresar como

$$ST(\tau) = \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2\tau}-1} |X(2\tau i + 2\tau) - 2X(2\tau i + \tau) - X(2\tau i)|.$$

Por tanto

$$ST(\tau, \omega) = \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2\tau}-1} |X(2\tau i + 2\tau, \omega) - X(2\tau i + \tau, \omega) - (X(2\tau i + \tau, \omega) - X(2\tau i, \omega))|.$$

Tomamos ahora la esperanza de  $ST(\tau, \omega)$ , que calculamos de la siguiente forma:

$$E[ST(\tau, \omega)] = \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2\tau}-1} E[|X(2\tau i + 2\tau, \omega) - X(2\tau i + \tau, \omega) - (X(2\tau i + \tau, \omega) - X(2\tau i, \omega))|].$$

Ahora, como los incrementos del proceso  $X(t, \omega)$  son estacionarios, tenemos que  $X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega) \sim X(\tau, \omega) - X(0, \omega)$  para todo  $t > 0$ . En particular,  $X(t + 2\tau, \omega) - X(t + \tau, \omega) - (X(t + \tau, \omega) - X(t, \omega))$  y  $X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))$  tienen la misma distribución, y por tanto, sus valores absolutos también. Como consecuencia, sus esperanzas serán las mismas, de donde

$$\begin{aligned}
 E[ST(\tau, \omega)] &= \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2\tau}-1} E[|X(2\tau i + 2\tau, \omega) - X(2\tau i + \tau, \omega) - (X(2\tau i + \tau, \omega) - X(2\tau i, \omega))|] \\
 &= \frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2\tau}-1} E[|X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))|] \\
 &= \frac{\tau}{2} \frac{n}{2\tau} E[|X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))|] \\
 &= \frac{n}{4} E[|X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))|].
 \end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos que los incrementos del proceso también son autosimilares, por lo que

$$\begin{aligned} E[ST(\tau, \omega)] &= \frac{n}{4} E[|X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))|] \\ &= \frac{n}{4} \tau^H E[|X(2, \omega) - X(1, \omega) - (X(1, \omega) - X(0, \omega))|]. \end{aligned}$$

En particular, para  $\tau = 1$  se tiene que

$$E[ST(1, \omega)] = \frac{n}{4} E[|X(2, \omega) - X(1, \omega) - (X(1, \omega) - X(0, \omega))|].$$

Así, llegamos a la expresión final

$$E[ST(\tau, \omega)] = \tau^H E[ST(1, \omega)]. \quad (4.1)$$

De esta forma hemos probado que es correcto aplicar el algoritmo TTA al proceso inicial  $X(t, \omega)$ .

La estimación del exponente de Hurst la haremos tomando logaritmos en 4.1 y realizando una regresión lineal a partir de la siguiente expresión

$$\log(E[ST(\tau, \omega)]) = \log(E[ST(1, \omega)]) + H \log(\tau),$$

en la que estimaremos la esperanza como la media muestral. El exponente de Hurst sería estimado como la pendiente de esta regresión lineal.

## 4.2 El método TA

En la sección anterior hemos podido observar y estudiar el funcionamiento del método TTA. Una vez revisada la justificación matemática del método, nos preguntamos si existe alguna modificación que se le pueda realizar a este método para mejorar su precisión.

Esta modificación del método TTA ha sido introducida en [9], dando origen a un nuevo método denominado TA (triangle area). El funcionamiento de este algoritmo se basa en tomar las muestras de los triángulos tomando también los triángulos solapados, teniendo en cuenta a la hora de estimar el exponente de Hurst la distribución del área de los triángulos en lugar de la suma del área de los triángulos. De esta forma, tiene cierto sentido tomar los triángulos solapados, ya que todos representan una muestra de la distribución del triángulo de la que obtendremos  $H$ . En [26] podemos revisar un método similar en el contexto de los movimientos brownianos fraccionales.

Veamos ahora cuál es el funcionamiento del algoritmo, para poder después introducir la justificación teórica. Sea  $\{X(0), X(1), \dots, X(n)\}$  una serie autosimilar de longitud  $n$  obtenida a partir de un proceso autosimilar con incrementos estacionarios. Los pasos a seguir para implementar el método son los siguientes.

1. Dividimos la serie original en subintervalos de longitud  $2\tau > 0$  (tomamos  $2\tau$  como divisor de  $n$ ).

2. Para cada subintervalo, calculamos el área del triángulo que forman el primer punto, el punto medio y el último punto. Cabe destacar que en este método sí tomamos también todos los intervalos solapados.
3. Calculamos la media muestral del área de los triángulos obtenidos.
4. Repetimos el proceso para diferentes valores de  $\tau$ .
5. Obtenemos la estimación del exponente de Hurst a través de una regresión logarítmica entre  $\tau$  y la media calculada. En este caso la pendiente obtenida sería  $H + 1$ , por lo que habría que restar una unidad a la pendiente que obtengamos para tener el exponente de Hurst que buscamos.

De forma gráfica, podemos observar en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 como se tomarían las muestras para diferentes  $\tau$ s de un movimiento browniano fraccional con un  $H = 0.5$ .

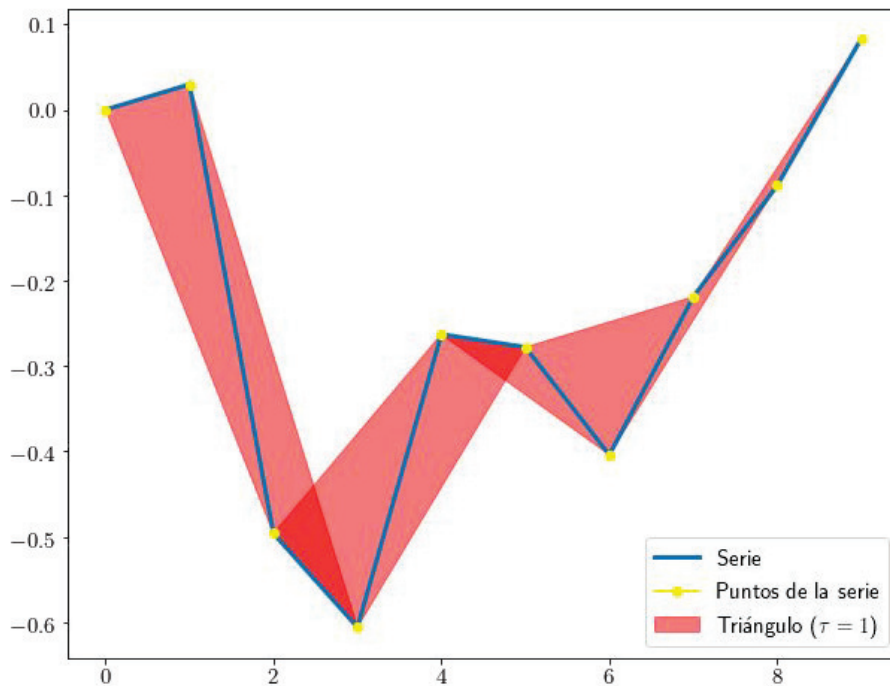


Figura 4.4: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 1$  con el método TA.

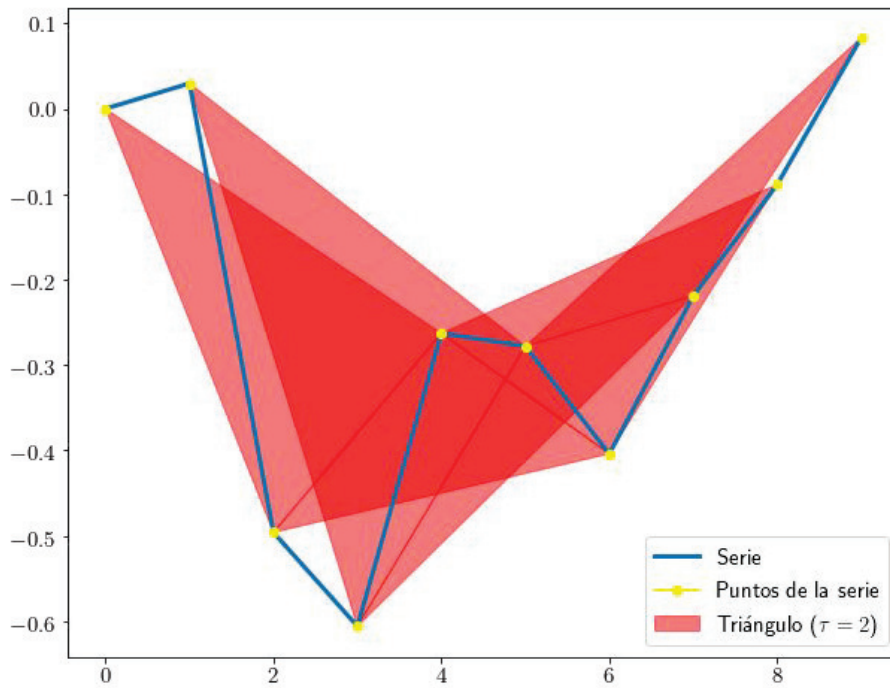


Figura 4.5: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 2$  con el método TA.

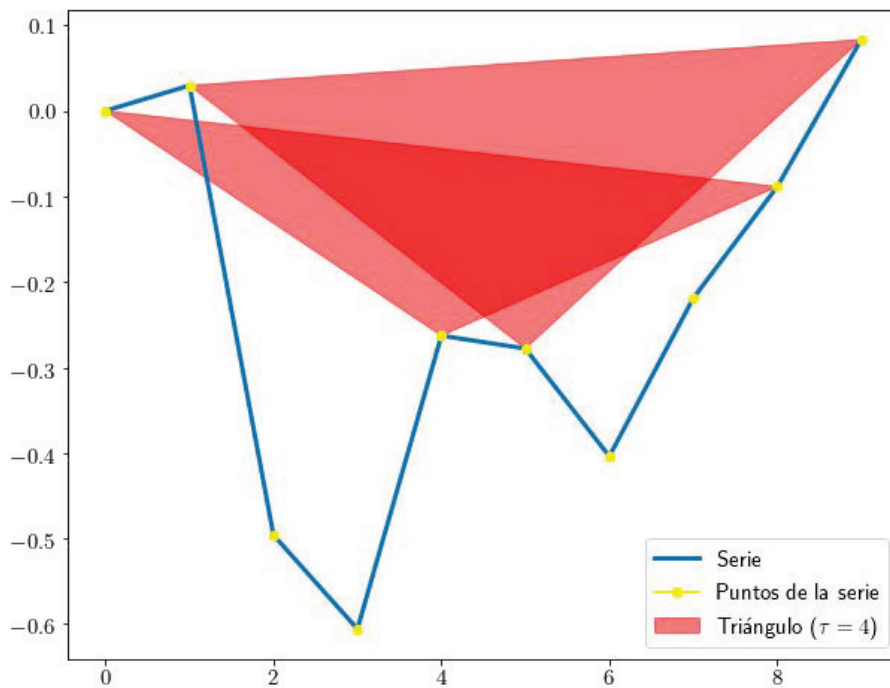


Figura 4.6: Toma de muestras de un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  para  $\tau = 4$  con el método TA.

Pasamos ahora a estudiar cuál es la justificación matemática de este método.

Sea  $\{X(0), \dots, X(n)\}$  una trayectoria de longitud  $n$  de un proceso autosimilar  $\{X(t, \omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  con incrementos estacionarios. Como hemos visto en la sección anterior, el área de un triángulo con vértices en  $(i, X(i))$ ,  $(i + \tau, X(i + \tau))$  y  $(i + 2\tau, X(i + 2\tau))$  para  $i \in \{0, \dots, n - 2\tau\}$  es  $\frac{\tau}{2} |X(i + 2\tau) - X(i + \tau) - (X(i + \tau) - X(i))|$ , por lo que la distribución del área de un triángulo vendrá dada por la expresión

$$AT(\tau, \omega) = \frac{\tau}{2} |X(i + 2\tau, \omega) - X(i + \tau, \omega) - (X(i + \tau, \omega) - X(i, \omega))|.$$

Nótese que por la propiedad de incrementos estacionarios del proceso  $\{X(t, \omega)\}$ , tenemos que

$$\frac{\tau}{2} |X(i + 2\tau, \omega) - X(i + \tau, \omega) - (X(i + \tau, \omega) - X(i, \omega))|$$

tiene la misma distribución para todo  $i \in \{0, \dots, n - 2\tau\}$ , por lo que

$$AT(\tau, \omega) \sim \frac{\tau}{2} |X(2\tau, \omega) - X(\tau, \omega) - (X(\tau, \omega) - X(0, \omega))|.$$

Usando ahora que los incrementos son autosimilares

$$\begin{aligned} AT(\tau, \omega) &\sim \frac{\tau}{2} \tau^H |X(2, \omega) - X(1, \omega) - (X(1, \omega) - X(0, \omega))| \\ &= \frac{\tau^{H+1}}{2} |X(2, \omega) - X(1, \omega) - (X(1, \omega) - X(0, \omega))|. \end{aligned}$$

En particular, para  $\tau = 1$

$$AT(1, \omega) \sim \frac{1}{2} |X(2, \omega) - X(1, \omega) - (X(1, \omega) - X(0, \omega))|,$$

llegando así a que

$$AT(\tau, \omega) \sim \tau^{H+1} AT(1, \omega). \tag{4.2}$$

De esta forma, podemos justificar la validez del método TA. Si tomamos logaritmos en la expresión 4.2, tenemos que

$$\log(E[AT(\tau, \omega)]) = \log(E[AT(1, \omega)]) + (H + 1)\log(\tau).$$

Para obtener el exponente de Hurst bastaría con realizar una regresión lineal entre el logaritmo de la esperanza del área del triángulo (que estimaremos como la media muestral) y  $\log(\tau)$ . La pendiente de esta regresión será  $H + 1$ , obteniendo así nuestra estimación del exponente de Hurst.

Nótese además que la expresión 4.2 puede ser utilizada para estudiar procesos con estructuras multifractales. Para ello, bastaría con tomar  $q \neq 0$  obteniendo el exponente de Hurst  $H(q)$  tomando los momentos de orden  $q$  de la expresión 4.2:

$$\log(E[AT(\tau, \omega)^q]) = \log(E[AT(1, \omega)^q]) + q(H(q) + 1)\log(\tau).$$



## Evaluación de la precisión del método TA

Esta sección se dedicará a realizar un estudio sobre la precisión de algunos de los métodos expuestos para estimar el exponente de Hurst en los capítulos anteriores. En particular, nos interesamos en estudiar los resultados del método TA, que ha sido el último método propuesto y el que nos hemos encargado de introducir a lo largo del trabajo.

Para evaluar la precisión de este método nos apoyaremos en los resultados obtenidos por otros métodos. Los algoritmos escogidos son el método TTA y el método GHE(2). La elección del método TTA se debe a que es el algoritmo a partir del cuál se desarrolla el método TA. En cuanto a la elección del método GHE(2), en [27] podemos ver una revisión de la precisión de los métodos clásicos para estimar el exponente de Hurst (RS, DMA, MF-DFA(1), DFA, GHE(1) y GHE(2)), donde se puede observar que el método con resultados más precisos es el GHE(2). Las simulaciones en este caso se realizan para varios procesos con distribuciones de cola pesada, pero en nuestro caso nos fijamos en los resultados para los procesos con distribución normal, que serán los que usemos para nuestras simulaciones.

Cabe destacar que los métodos  $FD(q)$  descritos en la sección 3.2 no los utilizaremos para este trabajo de evaluación de precisión de los métodos, ya que la utilidad de estos métodos se puede observar en procesos autosimilares con incrementos estacionarios que experimentan máximos y mínimos. Debido a este hecho, estos algoritmos no se incluirán en las simulaciones, aunque su estudio es muy interesante ya que tiene un campo amplio de aplicación, sobre todo en el mundo de las finanzas.

Para poder ver la precisión de los métodos, lo que haremos será realizar una serie de simulaciones de Monte Carlo para poder evaluar la bondad de las estimaciones realizadas. Para ello, nos apoyaremos en el entorno informático interactivo basado en la web Jupyter Notebook, utilizando Python como lenguaje de programación.

Con el objetivo de llevar a cabo estas simulaciones utilizaremos procesos autosimilares con incrementos estacionarios. En particular, usaremos movimientos brownianos fraccionales con diferentes longitudes y valores del exponente de Hurst (véase la subsección 2.2). Para las simulaciones de Monte Carlo necesitaremos generar movimientos brownianos fraccionales de una longitud determinada y con un exponente de Hurst conocido. De esta forma, al generar una trayectoria del movimiento browniano fraccional obtendremos una serie autosimilar, a la que estimaremos el  $H$  con algún método y compararemos este  $H$  con el  $H$  teórico con el que hemos generado el movimiento browniano fraccional. De esta forma, una vez hechas las estimaciones para muchas series, podremos ver cómo de buenos son los  $H$ s calculados con los métodos.

Un aspecto interesante es cómo generar series autosimilares provenientes de movimientos brownianos fraccionales. En este sentido, destacamos tres formas diferentes de generar estos procesos: los métodos de Hosking ([28]), Cholesky ([29]) y Davies-Harte ([30]). Cada uno de estos métodos tiene una serie de ventajas e inconvenientes. Para no extendernos demasiado no detallaremos estos métodos, aunque un ejercicio

muy interesante sería repasar los procedimientos teóricos que están detrás de estos para poder simular series provenientes de movimientos brownianos fraccionales dado un  $H$  conocido. Como vamos a realizar un gran número de simulaciones para poder ver la precisión de los métodos, usaremos el método Davies-Harte, que es el que menor coste computacional tiene. Sin embargo, en ocasiones puede fallar para longitudes pequeñas y  $H$ s altos, utilizando en ese caso el método de Hosking. La implementación de todos estos métodos está recogida en el paquete `fbm` de Python, por lo que nos apoyaremos en él para poder realizar las simulaciones utilizando los métodos comentados, en función del caso en el que nos encontremos.

Una vez sabemos generar las series autosimilares que necesitamos, tenemos que ver cómo implementamos los métodos de estimación de  $H$  (TTA, TA y GHE(2)). De nuevo, nos apoyaremos en el lenguaje Python para poder llevar a cabo esta tarea. Lo que haremos para la implementación será tomar diferentes  $\tau$ s y calcular el estadístico correspondiente a cada método para después realizar la regresión lineal. Aquí tenemos otro problema muy interesante; la selección de estos  $\tau$ s. En este trabajo tomaremos los  $\tau$ s siguiendo la idea recogida en [27]. La elección de los  $\tau$ s estará en función de la longitud de la serie; si tenemos una serie de longitud  $l$ , tomaremos los  $\tau$ s en el conjunto  $\{2^n : n \in \{0, \dots, p(l)\}\}$ , donde  $p(l)$  estará en función de la longitud de la serie. Tomamos los  $\tau$ s como potencias de dos para que a la hora de realizar el logaritmo lo hagamos en base 2 y los puntos de la regresión queden equiespaciados. El primer valor del rango será  $2^0 = 1$  y el último dependerá de la longitud y del método que utilicemos:

- Para el método GHE(2) tomaremos  $p(l)$  como la parte entera de  $\log_2(l/4)$ .
- Para los métodos TTA y TA tomaremos  $p(l)$  como la parte entera de  $\log_2(l/8)$ .

Esta diferencia se debe a que para el método GHE(2) los intervalos se toman de longitud  $\tau$ , mientras que para los métodos TTA y TA se forman triángulos en los intervalos de longitud  $2\tau$ .

A la hora de realizar la regresión lineal también hay un aspecto muy interesante a tener en cuenta. Cuando realizamos dicha regresión, el coeficiente de determinación  $R^2$  debe ser muy cercano a uno para que tenga sentido el exponente de Hurst que estamos calculando. Esta comprobación aparece en algunos artículos a la hora de comprobar si es adecuado calcular el exponente de Hurst de una serie de la vida real. En las figuras 5.1, 5.2 y 5.3 podemos observar la regresión lineal obtenida para los métodos GHE(2) ( $H = 0.504$  y  $R^2 = 0.999$ ), TTA ( $H = 0.529$  y  $R^2 = 0.991$ ) y TA ( $H = 0.505$  y  $R^2 = 0.999$ ).

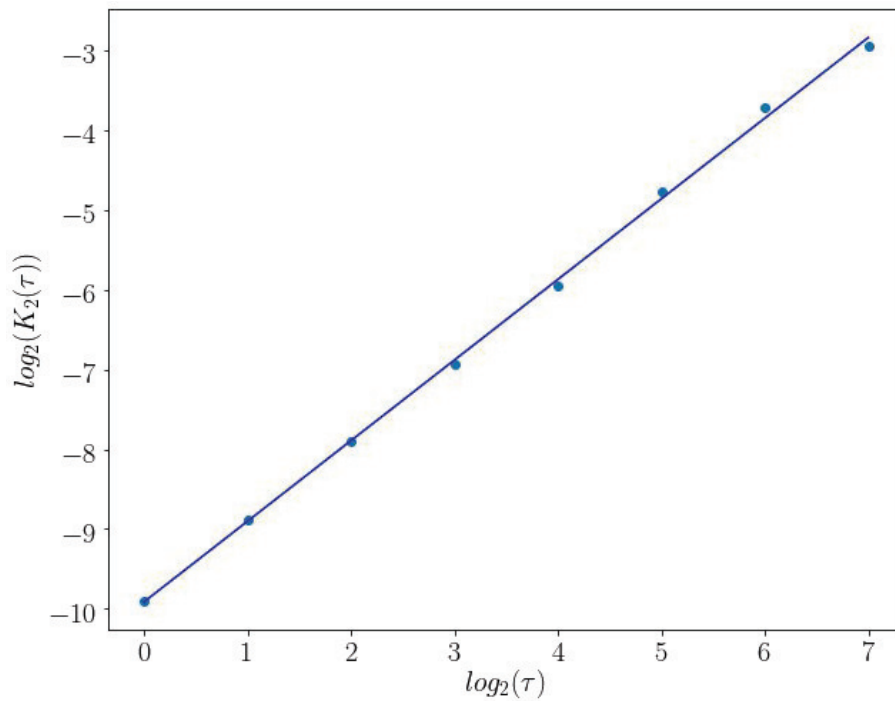


Figura 5.1: Regresión lineal del método GHE(2) para un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  y longitud  $2^{10}$ .

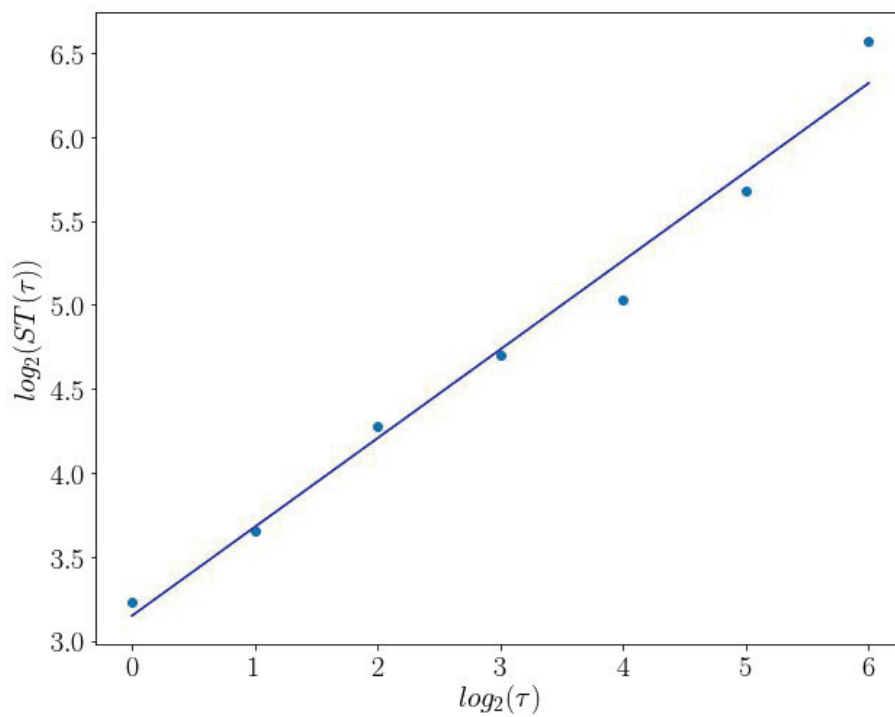


Figura 5.2: Regresión lineal del método TTA para un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  y longitud  $2^{10}$ .

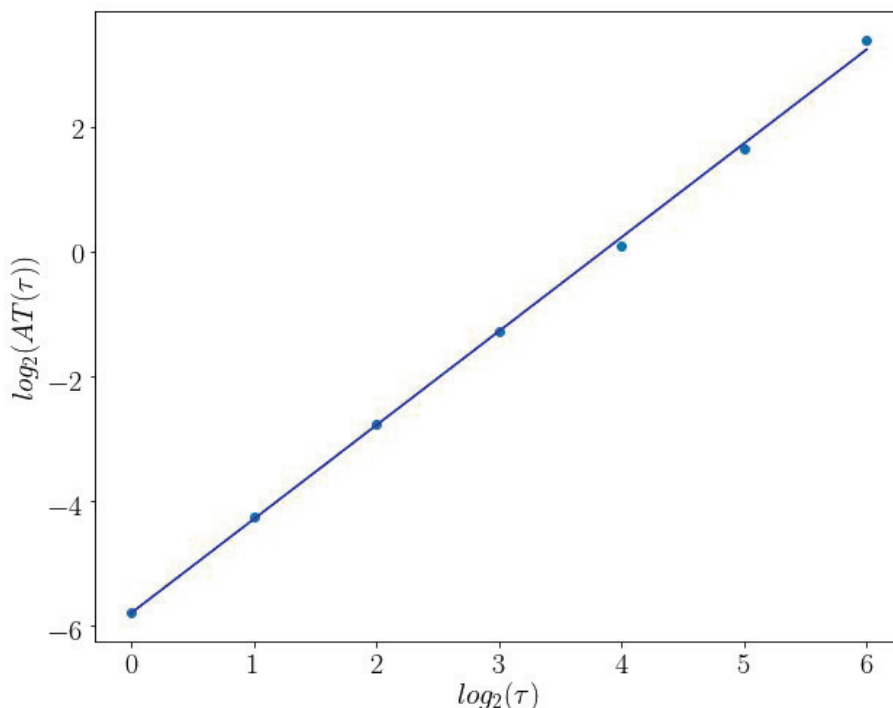


Figura 5.3: Regresión lineal del método TA para un movimiento browniano fraccional con  $H = 0.5$  y longitud  $2^{10}$ .

Una vez explicado cómo vamos a generar las series autosimilares y cómo implementamos los métodos de estimación de  $H$ , pasamos a describir cómo vamos a evaluar la precisión de las estimaciones. El procedimiento empleado consistirá en, para una longitud determinada de la serie y un  $H$  teórico concreto, estimar  $H$  y ver cuál es la diferencia entre el  $H$  teórico y el  $H$  estimado en cada caso.

Nótese que a la hora de realizar un experimento de este tipo se pueden tener en cuenta muchos factores además de la precisión del método, como puede ser por ejemplo el coste computacional. Sin embargo, en nuestro caso nos centraremos exclusivamente en la precisión de los métodos.

La primera simulación que vamos a realizar consistirá en evaluar la influencia de la longitud de las series en la precisión de las estimaciones. Con este objetivo, generamos 1000 series autosimilares provenientes de movimientos brownianos fraccionales con  $H$ s distribuidos uniformemente entre cero y uno con diferentes longitudes, y obtenemos el valor absoluto de las diferencias entre el  $H$  teórico ( $H_T$ ) y el  $H$  experimental ( $H_E$ ). Calculamos la media de estas diferencias para una longitud determinada y cada uno de los tres métodos que estamos tratando y recogemos los resultados en la figura 5.4. Las longitudes de las series seleccionadas son  $2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}$  y  $2^{15}$ .

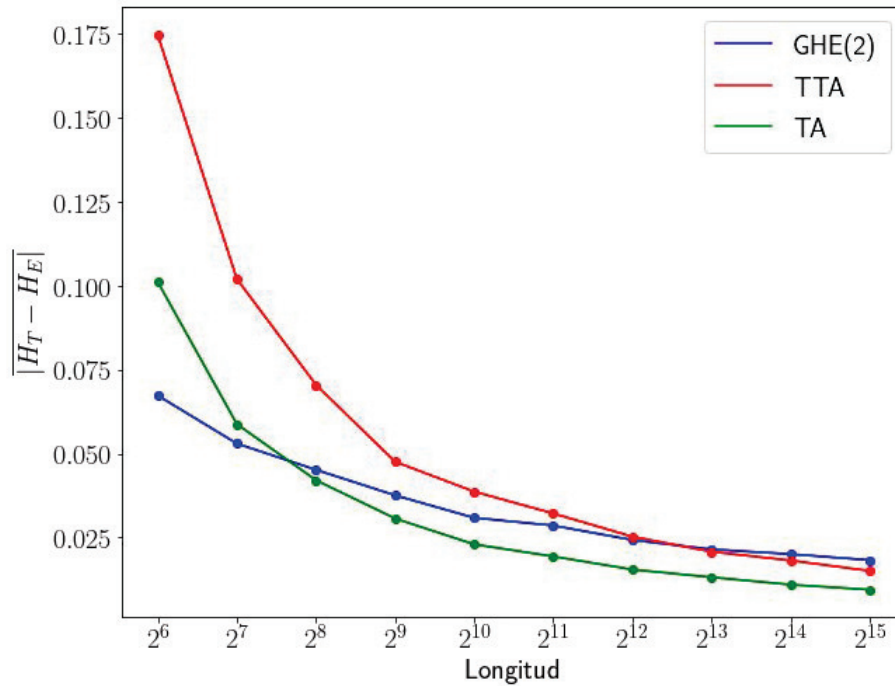


Figura 5.4: Media del valor absoluto de la diferencia entre el  $H$  estimado y el  $H$  teórico de movimientos brownianos fraccionales con  $H_s$  entre 0 y 1.

Como se puede observar en la figura 5.4, para longitudes pequeñas ( $2^6$  y  $2^7$ ), el método GHE(2) es el que obtiene mejores resultados. El método TA es el segundo que mejores resultados obtiene, quedando por detrás el método TTA. Sin embargo, conforme aumentamos la longitud vemos que el método TA supera la precisión del método GHE(2), manteniéndose con mejores resultados a partir de las series de longitud  $2^8$ . Por tanto, para series de longitud media o grande, el método TA supera al GHE(2). En cuanto al método TTA, se mantiene por encima del GHE(2) para series de longitud media, pero para series de longitud grande (a partir de  $2^{13}$ ), vemos que supera la precisión del método GHE(2), aunque no llega a superar al método TA, que es el que mejores resultados obtiene para las longitudes grandes que hemos probado. Cabe mencionar también que se observa cierta tendencia descendente del método TTA más fuerte que el método TA para longitudes muy grandes, por lo que parece que si seguimos aumentando la longitud las diferencias cada vez serán menores.

Hemos estudiado la influencia en general de la longitud de la serie, pudiendo observar como el método TA es el más preciso conforme aumentamos la longitud. Sin embargo, para poder tener una visión más concreta en algunos aspectos es necesario realizar un análisis más profundo de los resultados que se obtienen con las distintas simulaciones. Por ejemplo, en muchas ocasiones las series con las que nos encontramos suelen presentar  $H_s$  por debajo de 0.5. En ese caso lo ideal sería utilizar el método que mejor funcione para  $H_s$  bajos.

Con el objetivo de poder analizar de forma más profunda los resultados, lo que haremos será realizar las simulaciones con series de distinta longitud y varios  $H_s$  fijados previamente. Para ello, generaremos 1000 series provenientes de movimientos brownianos fraccionales con  $H = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  y longitudes  $2^7, 2^9, 2^{11}, 2^{13}$  y  $2^{15}$ .

## 5. EVALUACIÓN DE LA PRECISIÓN DEL MÉTODO TA

Estimamos  $H$  con los métodos GHE(2), TTA y TA y calculamos, para un  $H$  y una longitud fijada, la media y la desviación típica de las estimaciones. Estos resultados los podemos ver en las figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9, que recogen la distribución empírica correspondiente a las muestras tomadas para cada método, cada  $H$  y cada longitud fijada.

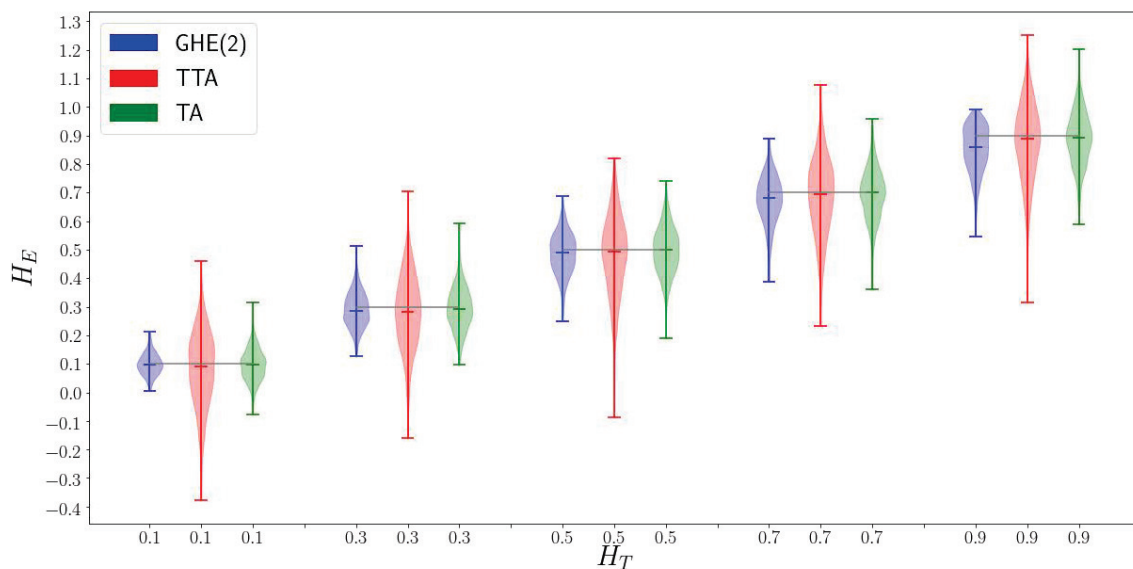


Figura 5.5: Distribuciones empíricas de los  $H$ s estimados para series de longitud  $2^7$ .

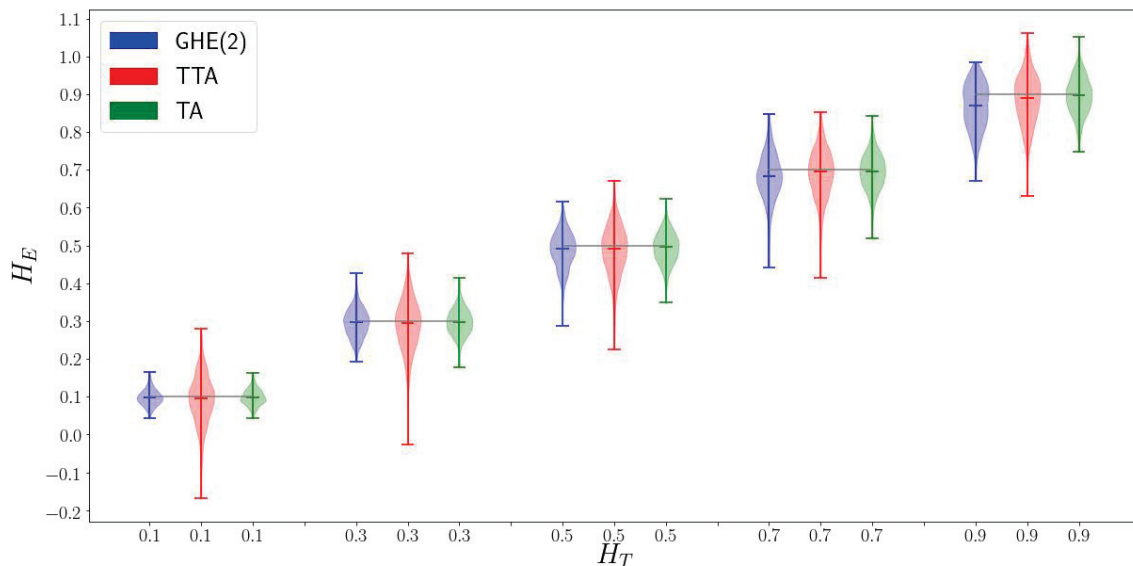


Figura 5.6: Distribuciones empíricas de los  $H$ s estimados para series de longitud  $2^9$ .

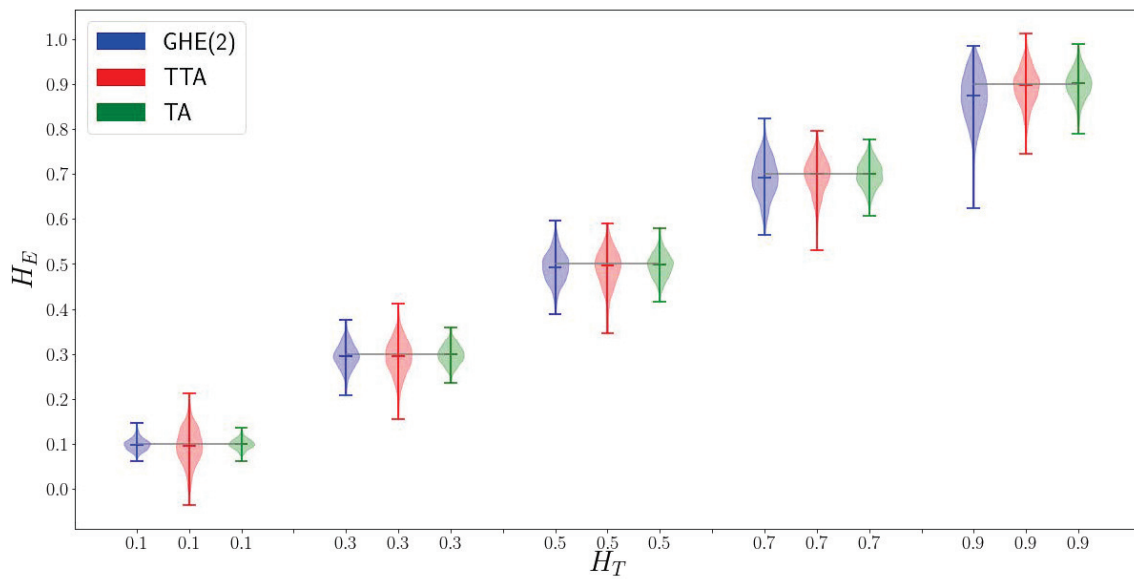


Figura 5.7: Distribuciones empíricas de los  $H_s$  estimados para series de longitud  $2^{11}$ .

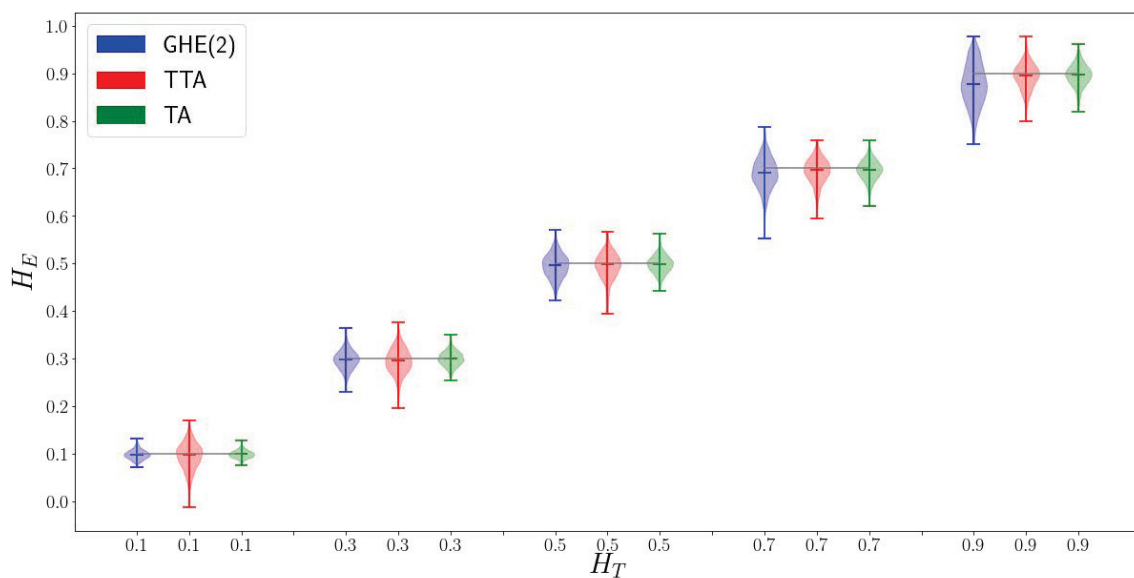


Figura 5.8: Distribuciones empíricas de los  $H_s$  estimados para series de longitud  $2^{13}$ .

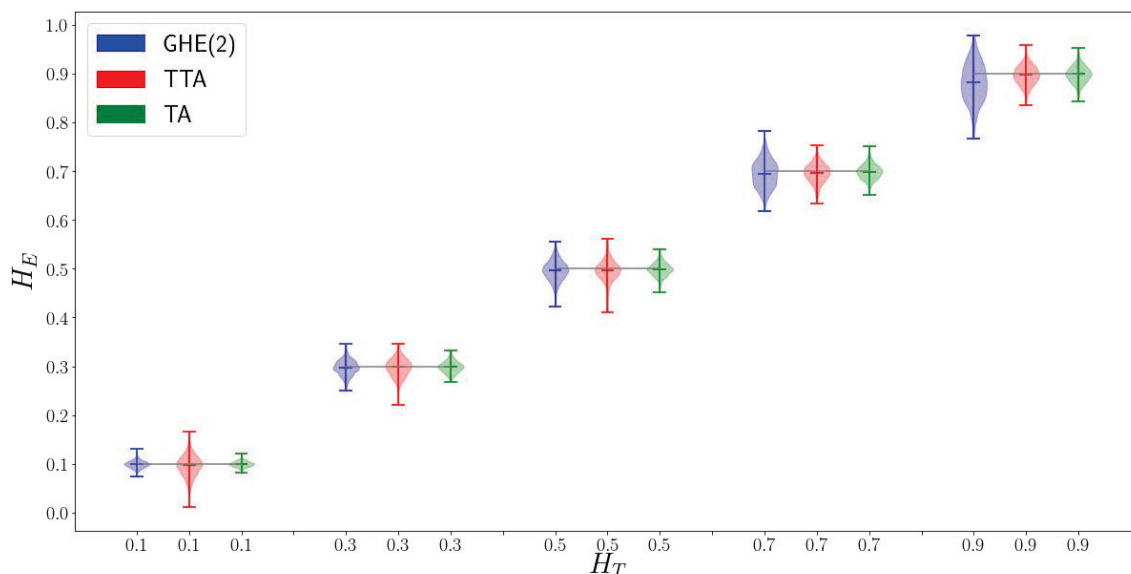


Figura 5.9: Distribuciones empíricas de los  $H_s$  estimados para series de longitud  $2^{15}$ .

Pasamos ahora a discutir e interpretar los resultados obtenidos con ayuda de las gráficas expuestas. En azul tenemos los resultados del método GHE(2), en rojo los del TTA y en verde los del TA.

Para series de longitud  $2^7$  (figura 5.5), podemos observar cómo los peores resultados se obtienen para el método TTA, ya que aunque la media se ajuste bastante al valor teórico esperado, la desviación típica es bastante más grande que para los otros dos métodos. En cuanto al método GHE(2) y el TA, podemos observar cómo para valores bajos de  $H$ , la media se ajusta con bastante exactitud en ambos casos al valor teórico, pero el método GHE(2) presenta una menor desviación típica. Sin embargo, para valores más altos de  $H$ , la media del método TA es mejor que la del método GHE(2), aunque la desviación típica sigue siendo algo menor para el método GHE(2). Por tanto, podríamos decir que para valores bajos de  $H$  el método que mejor funciona es el GHE(2) y que conforme aumenta el valor de  $H$  los resultados del método TA empiezan a ser mejores en media, pero no en desviación típica.

En la figura 5.6 podemos ver los resultados para series de longitud  $2^9$ . De nuevo, la media para el método TTA se ajusta bastante al valor teórico aunque las desviaciones típicas siguen siendo más grandes que los otros dos métodos. Sin embargo, comenzamos a ver como para  $H_s$  altos, la desviación típica comienza a ser más baja, estando cada vez más cerca de los otros métodos. En cuanto a los métodos GHE(2) y TA, tenemos que para  $H_s$  bajos estos métodos se ajustan bastante al valor medio esperado y se observa una desviación típica muy similar. Sin embargo, cuando aumentamos el valor de  $H$  observamos cómo los resultados tanto en media como en desviación típica comienzan a ser mejores para el método TA.

Los resultados para series de longitud  $2^{11}$  aparecen en la figura 5.7. Como se puede observar, los resultados para el método TTA en  $H_s$  bajos siguen siendo correctos en media, pero la desviación típica sigue siendo mayor que en los otros dos métodos. Sin embargo, para  $H_s$  altos, la media del método TTA es mejor que la del GHE(2) y



---

la desviación típica comienza a ser menor, por lo que parece que los resultados del TTA comienzan a mejorar los del GHE(2) para  $H$ s altos. En cuanto al método TA, sus medias se siguen ajustando muy bien al valor teórico esperado. Para  $H$ s pequeños la desviación típica es similar a la del método GHE(2). Sin embargo, para  $H$ s altos el método TA supera los resultados del GHE(2), así como a los del método TTA, aunque no de forma tan clara.

Si nos fijamos en la figura 5.8, podemos observar los resultados para series de longitud  $2^{13}$ . De nuevo, para  $H$ s bajos los resultados del método TTA son peores en cuanto a la desviación típica que los resultados de los métodos TA y GHE(2), que para estos valores de  $H$  son bastante similares. Si aumentamos el tamaño de  $H$  vemos cómo los resultados del método GHE(2) son peores tanto en media como en desviación típica respecto a los métodos TTA y TA. También se observa que los resultados para  $H$ s altos son ligeramente mejores para el método TA, aunque esta mejora se ha visto reducida respecto a la longitud  $2^{11}$  analizada anteriormente.

Por último, en la gráfica 5.9 podemos observar los resultados obtenidos para series de longitud  $2^{15}$ . Para  $H$ s bajos los resultados del método TTA siguen siendo peores que los de los métodos GHE(2) y TA. El método TA obtiene para  $H$ s bajos resultados algo mejores que los del GHE(2), aunque esta mejora no es demasiado considerable. Si aumentamos el valor de  $H$ , observamos cómo los métodos TTA y TA mejoran los resultados en cuanto a media y desviación típica del método GHE(2). En cuanto a la comparación entre el TTA y el TA para  $H$ s altos, los resultados de las medias y las desviaciones típicas son muy similares, aunque hay una ligera mejora en cuanto a la desviación típica para los resultados del método TA. Sin embargo, cabe mencionar que esta mejora del método TA respecto al TTA en  $H$ s altos disminuye conforme aumenta la longitud de la serie.

En resumen, se puede decir que para las longitudes más bajas utilizadas, tenemos que los resultados del método TTA son peores que los de los métodos GHE(2) y TA. En cuanto a la comparación de los métodos GHE(2) y TA para longitudes pequeñas, vemos cómo los resultados del GHE(2) son mejores para  $H$ s bajos, aunque esta mejora no es tan clara para  $H$ s altos. Si aumentamos el tamaño, para  $H$ s bajos vemos cómo los métodos TA y GHE(2) obtienen resultados muy parecidos, superando la precisión del método TTA. En cambio, para  $H$ s altos se puede observar cómo los métodos TA y TTA superan la precisión del método GHE(2). Además, se puede observar que el método TA es más preciso para los  $H$ s altos, aunque esta mejora va disminuyendo conforme aumenta la longitud de las series.

Por un lado, si atendemos a los resultados generales vemos cómo el método TA mejora o iguala los resultados del método TTA en todos los  $H$ s y longitudes evaluadas. Por otro lado, en cuanto a la comparación con el método GHE(2), vemos cómo para longitudes no demasiado grandes dependiendo del  $H$  evaluado sería mejor utilizar un método u otro, pero para longitudes grandes el método TA iguala o mejora los resultados del método GHE(2) para cualquier  $H$  evaluado.



## Conclusiones

En este último capítulo se recogen las conclusiones más importantes que se han obtenido durante la realización del trabajo.

En primer lugar, destacar que se ha expuesto una breve síntesis de los conocimientos más básicos que son necesarios para poder abordar el concepto de proceso autosimilar desde el punto de vista de la Teoría de la Probabilidad y los Procesos Estocásticos. Se han expuesto de forma resumida las definiciones y proposiciones más importantes, proponiendo algunas referencias que son muy útiles si se quiere ahondar en esta cuestión.

También se ha expuesto y desarrollado el concepto de proceso autosimilar y sus principales propiedades, incluso deteniéndonos en algunas demostraciones y profundizando en un tipo de procesos autosimilares con incrementos estacionarios: los movimientos brownianos fraccionales. De nuevo se dan algunas referencias por si el lector desea ir más allá en este tema.

Durante la introducción se han visto las múltiples aplicaciones del exponente de Hurst a la hora de estudiar el comportamiento de una serie. Por ello, la sección 2.3 resulta muy interesante para poder formalizar esta relación.

Finalizados los preliminares, hemos estudiado dos familias de métodos antes de estudiar el método TA, los métodos GHE( $q$ ) y FD( $q$ ). Hemos profundizado en sus funcionamientos y en sus fundamentaciones matemáticas, lo que resulta muy interesante a la hora de comprender mejor los métodos y buscar posibles mejoras o aplicaciones.

Tras describir estos métodos, hemos introducido el método TTA, explicando su funcionamiento y justificación matemática. Durante el desarrollo de la sección 4.1, hemos podido observar cómo es posible introducir una modificación en este método, que como se señala en la sección 4.2 motiva la aparición del método TA, que ha sido estudiado en detalle.

Una vez introducido, motivado y desarrollado el método TA, hemos dedicado el capítulo 5 a la evaluación de su precisión para estimar el exponente de Hurst. Mediante simulaciones de Monte Carlo hemos podido observar cuáles son los resultados de las estimaciones del  $H$  de movimientos brownianos fraccionales.

Destacar la introducción y la información que se da acerca de la implementación de los métodos previa a las simulaciones, ya que puede resultar muy útil a la hora de poner en práctica uno de estos métodos. Una implementación eficiente puede ser muy importante si se desea llevar a cabo estimaciones con alguno de estos métodos.

En una primera simulación hemos visto la media de los errores al estimar  $H$  para series autosimilares de diferentes longitudes, comprobando cómo influye la longitud de las series en las estimaciones. Como se ha podido observar, los resultados para longitudes pequeñas son mejores con el método GHE(2), seguidos del método TA y TTA.

Sin embargo, conforme aumenta la longitud la precisión del método TA supera a la del GHE(2), mostrando resultados más precisos para el resto de longitudes más grandes. En cuanto al TTA, a partir de un cierto valor también supera al método GHE(2), aunque se mantiene con una precisión inferior a la del método TA.

Con los resultados de las simulaciones distinguiendo los valores de  $H$  hemos podido seguir comprobando la utilidad del método TA para estimar el exponente de Hurst. Para series de longitudes pequeñas, el método GHE(2) resulta ser ligeramente superior, en especial para  $H$ s bajos. Sin embargo, conforme aumenta la longitud de la serie los resultados del método TA igualan a los del método GHE(2) para  $H$ s bajos y los superan, tanto en media como desviación típica, para  $H$ s altos. Además, el método TA supera la precisión del método TTA especialmente para longitudes pequeñas y medias. Cuando la longitud de la serie comienza a ser bastante grande vemos cómo los resultados del método TTA se acercan a los del TA para  $H$ s altos, aunque siguen siendo inferiores para  $H$ s bajos. Señalar que estas conclusiones obtenidas están en la misma línea de las que se recogen en [9].

Por tanto, hemos podido comprobar la utilidad del método TA para estimar el exponente de Hurst y cómo, dependiendo de la situación, puede ser superior a otros métodos muy eficientes como el método GHE(2). Además, es un método introducido recientemente, por lo que resulta muy interesante una vez vistos los resultados cuestionarse si es posible profundizar en algún aspecto de este método para seguir mejorando la precisión de las estimaciones.

Se deben destacar de nuevo las múltiples aplicaciones que se han expuesto durante la introducción del exponente de Hurst en la actualidad. Los campos de actuación son muy diversos y el exponente de Hurst resulta ser una herramienta muy interesante. En este sentido cabe destacar la importancia de conocer cómo son las estimaciones de los métodos que tratamos y saber con qué errores nos podemos estar moviendo. Por ejemplo, si en nuestra aplicación utilizamos series de longitudes cortas los errores pueden ser grandes, luego hay que tener este aspecto en cuenta para su estudio.

Otro aspecto muy interesante y que no es baladí a la hora de las aplicaciones del exponente de Hurst es verificar si nuestra serie es autosimilar. En nuestro caso, hemos simulado series que por definición si eran autosimilares, pero en la vida real en muchas ocasiones simplemente se acepta este hecho. En otras, se realiza alguna comprobación como ver que el coeficiente de determinación presenta un valor cercano a uno.

Finalmente, tal y como se ha podido observar, los métodos TTA y TA han sido introducidos recientemente, por lo que las perspectivas de futuro pueden ser interesantes a la hora de buscar posibles aplicaciones de los métodos.

## Bibliografía

- [1] H. Hurst, *Long term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Engineers **116** (1) (1951), 770-799.
- [2] J.W. Lamperti, *Semi-stable stochastic processes*, Trans. Am. Math. Soc. **104** (1) (1962) 62-78.
- [3] L. G. Gorostiza, *Procesos de memoria larga*, Miscelanea Matemática, **60** (2015) 59-75.
- [4] V. Pipiras, M. S. Taqqu, *Stable non-Gaussian self-similar processes with stationary increments*, Springer, Cham, 2017.
- [5] José A.O. Matos, Sílvio M.A. Gama, Heather J. Ruskin, Adel Al Sharkasi, Martin Crane, *Time and scale Hurst exponent analysis for financial markets*, Physica A **387** (2008) 3910-3915.
- [6] M.H. Díaz, F.M. Córdova, L. Cánete, F. Palominos, F. Cifuentes, C. Sánchez, M. Herrera, *Order and chaos in the brain: fractal time series analysis of the EEG activity during a cognitive problem solving task*, Procedia Comput. Sci. **55** (2015), 1410-1419.
- [7] J.P. Montillet, P. Tregoning, S. McClusky, K. Yu, *Extracting white noise statistics in GPS time series*, IEEE Geosci, Remote Sens. Lett. **10** (2015), 1207-1221.
- [8] M. Martinis, A. Knezević, G. Krstacić, E. Vargović, *Changes in the Hurst exponent of heartbeat intervals during physical activity*, Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys. **70** (2004).
- [9] A. Gómez-Águila, M.A. Sánchez-Granero, *A theoretical framework for the TTA algorithm*, Physica A **582** (2021).
- [10] A.C. Micheas, *Theory of Stochastic Objects: Probability, Stochastic Processes and Inference* (1st ed.), CRC Press (2018).
- [11] A. M. Juan González, *PROBABILIDAD*, Editorial Universidad de Almería (2016).
- [12] J. Beran, Y. Feng, S. Ghosh, R. Kulik, *Long-Memory Processes*, Springer (2013).
- [13] M. Fernández-Martínez, J.L.G. Guirao, M.A. Sánchez-Granero, J.E.T. Segovia, *Fractal Dimension for Fractal Structures: With Applications to Finance*, Springer (2019).
- [14] A. Campillo-Navarro, *Estudio del Movimiento Browniano Fraccionario*, [Tesis para obtener el grado de: Maestro en Ciencias Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana]. [http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/produccion\\_academica/toda\\_la\\_produccion/Tesis%20dirigidas-44-17.pdf](http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/produccion_academica/toda_la_produccion/Tesis%20dirigidas-44-17.pdf)
- [15] M. Maejima, *A remark on self-similar processes with stationary increments*, Canadian J. Statist. **14** (1986), 81-82.

- [16] O.I. Sheluhin, S.M. Smolskiy, A.V. Osin, *Self-Similar Processes in Telecommunications*, John Wiley & Sons: Chichester, UK, 2007.
- [17] B.B. Mandelbrot, *Gaussian Self-Affinity and Fractals*, first ed. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [18] I. Nourdin, *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*, Bocconi & Springer Series, Springer, Milano, 2012.
- [19] G.L. O'Brien, W. Vervaat, *Marginal distributions of self-similar processes with stationary increments*, *Z. Wahrsch. verw Gebiete* **64** (1983), 129-138.
- [20] Peng C, S. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. Stanley, A. Goldberger, *Mosaic organization of dna nucleotides*, *Physical Review E* **49** (2) (1994), 1685.
- [21] JJ. Kantelhardt, S. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, A. Bunde, S. Havlin, E. Stanley, *Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series*, *Physica A* **316** (1-4) (2002), 87-114.
- [22] E. Alessio, A. Carbone, G. Castelli, V. Frappietro, *Second-order moving average and scaling of stochastic time series*, *European Physical Journal B* **27** (2) (2002), 197-200.
- [23] Albert-László Barabási, Tamás Vicsek, *Multifractality of self-affine fractals*, *Physical Review A* **44** (4) (1991), 2730.
- [24] M. Fernández-Martínez, M.A. Sánchez-Granero, J.E. Trinidad Segovia, I.M. Román-Sánchez, *An accurate algorithm to calculate the Hurst exponent of self-similar processes*, *Physics Letters A* **378** (2014.)
- [25] Hamze Lotfalinezhad, Ali Maleki, *TTA, A new approach to estimate Hurst exponent with less estimation error and computational time*, *Physica A* **533** (2020), 124093.
- [26] C. Berzin, J.R. León, *Estimations in models driven by fractional Brownian motion*, *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques* **44** (2008), 191-213.
- [27] Jozef Barunik, Ladislav Kristoufek, *On Hurst exponent estimation under heavy tailed distributions*, *Physica A* **389** (18) (2010), 3844-3855.
- [28] J. RM. Hosking, *Fractional differencing*, *Biometrika* **68** no. 1 (1981), 165-176.
- [29] S. Asmussen, *Stochastic simulation with a view towards stochastic processes*, University of Aarhus. Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto)[MPS], (1998).
- [30] R. B. Davies, D. S. Harte, *Tests for Hurst effect*, *Biometrika* **74** no. 1 (1987), 95-101.