Problemas semilineales singulares: existencia y regularidad

Semilinear singular problems: existence and regularity

Trabajo Fin de Máster

Autor:

Miguel Martínez Teruel

Tutores:

José Carmona Tapia

Pedro J. Martínez Aparicio

Máster en Matemáticas

Julio, 2022

Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

In this work, we explain and detail the main results of the paper written by L. Boccardo and L. Orsina in 2009 [2].

Mainly, we study the problem of

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where Ω is an open and bounded set of $\mathbb{R}^N$ with $N \geq 2$, $\gamma > 0$ is a real number, f is a nonnegative function belonging to some Lebesgue space, which we will specify as appropriate, and $M(x)$ is a bounded and elliptic matrix.

The aim of this work is to show the main results on existence and regularity of solution of this problem [2]. In addition, we show one of the results of the paper [4], to be published. Where, using the ideas of D. Arcoya and L. Boccardo [1] and the ideas of D. Giachetti, P. J. Martinez-Aparicio and F. Murat [6], for the case $0 < \gamma \leq 1$, we propose a regularizing effect by adding a lower order term and obtain better results than those obtained in [2].

Resumen en español

En este trabajo, explicamos y detallamos los resultados principales del artículo escrito por L. Boccardo y L. Orsina en 2009 [2].

Principalmente, estudiamos el problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, $\gamma > 0$ es un número real, f es una función no negativa perteneciente a algún espacio de Lebesgue, que especificaremos según el caso, y $M(x)$ es una matriz acotada y elíptica.

El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados principales sobre existencia y regularidad de solución de este problema [2]. Además, mostramos uno de los resultados del artículo [4], pendiente de publicación. Dondo, usando las ideas de D. Arcoya y L. Boccardo [1] y las ideas de D. Giachetti, P. J. Martínez-Aparicio y F. Murat [6], para el caso $0 < \gamma \leq 1$, proponemos un efecto regularizante añadiendo un término de orden inferior y obtenemos mejores resultados que los obtenidos en [2].

Introducción

En Física, las ecuaciones en derivadas parciales han sido de gran utilidad para modelizar fenómenos que no dependen del tiempo. Sin embargo, durante la últimas décadas, ha sido de gran relevancia el aporte hecho por matemáticos y matemáticas en este campo. En particular, hay que destacar el estudio de los espacios en los que definir las soluciones de estas ecuaciones así como la existencia y regularidad de las mismas.

El problema que estudiamos es

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, $\gamma > 0$ es un número real, f es una función no negativa perteneciente a un cierto espacio de Lebesgue, y $M(x)$ es una matriz acotada y elíptica.

Este estudio lo realizaremos en función del valor de γ. Dependiendo de este valor, el objetivo es probar la existencia de solución y su posible pertenencia al espacio $H_0^1(\Omega)$. Como resultados generales, si tomamos $f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq 1$, demostraremos que

(i) si $\gamma < 1$ y $m \geq \left(\frac{2^\star}{1-\gamma}\right)'$, entonces existe solución $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema;

(ii) si $\gamma = 1$ y $m = 1$, entonces existe solución $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema;

(iii) si $\gamma > 1$ y $m = 1$, existe solución $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ del problema tal que $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in H_0^1(\Omega)$.

Además, también mostraremos resultados en los que, imponiendo más regularidad sobre la función f obtendremos una mejora de la sumabilidad de la solución u.

Este problema entra dentro de los problemas del tipo

$$-\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = g(x,u),$$

donde $g\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Hölder continua localmente y presenta una singularidad en $s = 0$. Estos problemas han sido ampliamente estudiados en el pasado, comenzando por Stuart en 1976 [14] que propone el caso en el que $g(x,s)$ explota en $s = 0$ si x tiende a cierto valor de la frontera de Ω. Este problema fue estudiado por Crandall, Rabinowitz y Tartar en [5], donde prueban existencia de solución y propiedades de continuidad si $g(x,s)$ no depende de x. En 1991, Lazer y McKenna en [11] estudian el caso en el que $g(x,s) = \frac{f}{u^\gamma}$ siendo su concepto de solución más fuerte que el que estudiaremos en este trabajo. Además, este estudio de Lazer y McKenna fue generalizado más adelante por Lair y Shaker en [9, 10], ya que consideraros la función $g(x,s)$ de la forma $f(x)g(s)$.

Hasta aquí, habríamos recorrido este trabajo hasta el Capítulo 3, exponiendo principalmente los resultados de Boccardo y Orsina [2]. Ahora bien, también mostramos una mejora de los resultados de [2] para el caso $\gamma \leq 1$. Esta mejora es nueva y obtenida por el grupo de investigación al que pertenezco. El resultado que mostraremos y otros más estarán reflejados en el artículo [4], pendiente de publicación. Principalmente, usamos las ideas de Arcoya y Boccardo [1] para aplicar un efecto regularizante añadiendo un término de orden inferior, es decir, trataremos con el problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q}$$

donde consideraremos la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente, impar y verificando que $\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$ y $0 \leq a(x), f(x)$ ambas pertenecientes a $L^1(\Omega)$ verificando que, existe $Q > 0$ tal que $f(x) \leq Qa(x)$ c.t.p. en Ω.

Además, será necesario adaptar el concepto de solución a este ámbito, acción que haremos mediante las ideas y estrategias de Giachetti, Martínez-Aparicio y Murat en [6]. El resultado que mostramos consistirá en demostrar que el problema (Q) tiene una única solución débil u no negativa perteneciente a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Sobre la estructura de este trabajo, se divide en los siguientes capítulos:

- En el Capítulo 1 planteamos la definición formal del problema de estudio y del concepto de solución así como los resultados previos necesarios para poder abordar la mayoría de propiedades que mostraremos a lo largo del trabajo.

- Para poder estudiar el problema con la singularidad, la estrategia será estudiar una sucesión de problemas aproximados que carecen de singularidad y, más adelante, tomar límite. En el Capítulo 2 definimos los problemas aproximados de estudio y las propiedades principales de estos problemas.

- En el Capítulo 3, mostramos los resultados principales de Boccardo y Orsina en su artículo [2]. Abordamos nuestro problema de estudio distinguiendo los casos $\gamma = 1$, $\gamma < 1$ y $\gamma > 1$. Para cada uno de estos casos, obtenemos resultados de existencia y regularidad de solución.

- Fruto de la investigación de estos meses, en el Capítulo 4 mostramos uno de los resultados del artículo [4], demostrando los resultados de aplicar un efecto regularizante a nuestro problema de estudio, mejorando los resultados de [2] para el caso $0 < \gamma \leq 1$.

Finalmente, añadimos el capítulo de Conclusiones, que refleja la importancia que ha tenido este trabajo para mi labor investigadora y se concluye con las referencias usadas en este trabajo.

1 Conceptos y resultados preliminares

En este capítulo, enunciamos los conceptos base que conforman este trabajo y repasamos las resultados clásicos que nos ayudarán en el estudio y entendimiento de las propiedades obtenidas.

1.1 Problema semilineal con singularidad en el dato

El problema que vamos a estudiar en este trabajo es

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Aquí, Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, $\gamma > 0$ es un número real, f es una función no negativa perteneciente a un cierto espacio de Lebesgue, que especificaremos según el caso, y $M(x)$ es una matriz acotada y elíptica; es decir, existen $0 < \alpha \leq \beta$ tal que

$$|M(x)| \leq \beta, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi\xi, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

En el estudio de soluciones débiles de ecuaciones en derivadas parciales es muy importante definir qué entendemos por solución del problema. De ahí, pasamos a definir el concepto de solución del problema (P).

Definición 1.1. *Una solución de (P) es una función u de $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\forall\, \omega \subset\subset \Omega, \exists\, c_\omega : u \geq c_\omega > 0 \text{ en } \omega. \tag{1.2}$$

y además, verifica que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

***Observación* 1.1.** *Recordamos que un conjunto W está fuertemente contenido en Ω, y lo denotamos por $W \subset\subset \Omega$, si $\overline{W}$ es compacto y $\overline{W} \subset \Omega$.*

***Observación* 1.2.** *En realidad, inicialmente, la igualdad (1.3) se formula para $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Sin embargo, como $C_c^1(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, se puede probar que la igualdad (1.3) se sigue satisfaciendo para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Además, en este contexto a las funciones φ se las conoce como funciones test.*

1.2 Desigualdades

En esta sección, enunciamos las desigualdades más relevantes y necesarias para entender las demostraciones de los resultados que mostramos en este trabajo. A su vez, dividimos esta sección en tres partes, distinguiendo desigualdades en espacios generales, en espacios de Lebesgue y en espacios de Sobolev.

En espacios generales

Aunque las siguientes desigualdades son básicas y conocidas, las enunciamos para tenerlas presentes cuando, más adelante, haya que aplicarlas en el contexto de espacios de Lebesgue y de Sobolev.

La demostración de esta primera desigualdad puede consultarse en [8].

Lema 1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea V un espacio vectorial con producto escalar. Entonces, se cumple que*

$$|\langle u,v\rangle|^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle, \quad \forall\, u,v \in V.$$

Para poder enunciar la siguiente desigualdad, cuya demostración puede consultarse en [3], introducimos notación que quedará vigente el resto del trabajo.

Notación. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por p' al exponente conjugado, esto es, el valor que satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lema 1.2 (Desigualdad de Young). *Sea $p > 1$ y sean $a, b \geq 0$. Entonces, se tiene que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

En espacios de Lebesgue

Comenzamos mostrando una desigualdad clásica, cuya demostración se basa en la Desigualdad de Young 1.2 y puede consultarse en [3].

Proposición 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Supongamos que $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, $fg \in L^1(\Omega)$ y se verifica que*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Gracias a esta desigualdad, podemos probar la siguiente propiedad que muestra la relación que existe entre los espacios de Lebesgue.

Proposición 1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto de medida finita y sean $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces existe una constante $C \geq 0$ dependiente únicamente de p, q y Ω tal que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall\, f \in L^q(\Omega).$$

Demostración:

Por un lado, si $q = \infty$, se tiene que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega \|f\|^p_{L^\infty(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{meas}(\Omega)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall\, f \in L^\infty(\Omega).$$

Por otro lado, si $1 \leq q < \infty$, dado $f \in L^q(\Omega)$, podemos aplicar la Desigualdad de Hölder 1.1 a las funciones $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ y $1 \in L^{\left(\frac{q}{p}\right)'}(\Omega)$, obteniendo que

$$\int_\Omega |f|^p \leq (\mathrm{meas}(\Omega))^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Finalmente, elevando esta expresión a $\frac{1}{p}$, concluimos que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq (\mathrm{meas}(\Omega))^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

■

***Observación* 1.3.** *Como consecuencia inmediata de la Proposición 1.2, se tiene que*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \text{ con } 1 \leq p < q \leq \infty.$$

En espacios de Sobolev

Por último, mostramos dos desigualdades que nos serán de gran utilidad en las demostraciones de este trabajo. Ambas demostraciones pueden consultarse en [3].

Proposición 1.3 (Desigualdad de Poincaré). *Supongamos que $1 \leq p < +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) es un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante positiva C, que depende de Ω y p, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proposición 1.4 (Desigualdad de Gagliardo–Nirenberg–Sobolev). *Sea $1 \leq p < N$ y Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Entonces existe una constante $C > 0$ dependiente de N y de p tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ donde } p^* \text{ viene dada por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Por último, gracias a estas desigualdades, es posible probar la siguiente proposición.

Proposición 1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto de medida finita.*

- *Si $1 \leq p < N$, entonces*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, p^*].$$

- *Si $p = N$, entonces*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [N, +\infty[.$$

1.3 Herramientas de existencia de Solución en EDPs

A la hora de probar resultados sobre existencia de solución débil de ecuaciones en derivadas parciales, es muy común el uso de problemas aproximados, ya que, gracias a ellos, podemos obtener estimas necesarias para pasar al límite y estudiar la sucesión de soluciones de esos problemas. Con lo cual, es necesario ver qué teoremas son los más usuales y útiles en este contexto. Las demostraciones de todos los resultados de este apartado pueden consultarse en [3].

Teorema del punto fijo de Schauder

Para poder enunciar este teorema, recordemos primero la definición de operador compacto.

Definición 1.2. *Sean X e Y dos espacios normados. Un operador $T: X \to Y$ es compacto si la imagen de cualquier conjunto acotado de X es un conjunto precompacto de Y, es decir, un conjunto con cierre compacto de Y.*

Teorema 1.1 (**Punto fijo de Schauder**)**.** *Sea X un espacio de Banach y $G \subset X$ un conjunto cerrado, convexo y acotado. Si $T: G \to X$ es un operador continuo y compacto verificando que $T(G) \subset G$, entonces T tiene un punto fijo.*

En este trabajo, los espacios en los que trabajaremos tendrán propiedades más favorables para probar que un operador es compacto. En concreto, como el espacio de partida será reflexivo, podemos usar el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Sean X e Y dos espacios normados, donde X es reflexivo, y sea $T: X \to Y$ un operador. Si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $x_n \rightharpoonup x \in X$ se tiene que $Tx_n \to Tx$, entonces T es compacto.*

***Observación* 1.4.** *Aprovechando la caracterización secuencial de la continuidad, si $x_n \to x$, en particular $x_n \rightharpoonup x$. Con lo cual si T verifica la Proposición 1.6, también se tiene que T es continuo.*

Convergencias en Espacios de Lebesgue y de Sobolev

Al trabajar con integrales y espacios de Lebesgue, necesitaremos del Teorema de Lebesgue o Teorema de Convergencia Dominada, resultado muy conocido y útil para poder permutar la integral y el límite.

Teorema 1.2 (**Convergencia Dominada**)**.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ verificando que*

(i) $f_n(x) \to f$ *c.t.p en* Ω.

(ii) *Existe una función* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *c.t.p en* Ω *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $f \in L^1(\Omega)$ *y* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$

***Observación* 1.5.** *La convergencia* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$ *implica* $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$ *ya que*

$$0 \leq \left| \int_\Omega f_n - \int_\Omega f \right| \leq \int_\Omega |f_n - f| = \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Por otro lado, en el estudio de problemas aproximados es muy importante la obtención de estimas a priori, es decir, acotaciones en ciertos espacios que nos aporten propiedades como la siguiente.

Proposición 1.7. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto abierto y acotado, sea* $1 < p < +\infty$ *y sea* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* $W_0^{1,p}(\Omega)$*. Entonces, existe una parcial* $\{u_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y existe* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

(I) $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ *débilmente en* $W_0^{1,p}(\Omega)$,

(II) $u_{\sigma(n)} \to u$ *fuertemente en* $L^p(\Omega)$,

(III) $u_{\sigma(n)} \to u$ *c.t.p. en* Ω.

Además, existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|u_{\sigma(n)}(x)| \leq h(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ *c.t.p. en* Ω.

Además, es muy usual en estos estudios realizar la acotación, pasar a la parcial y continuar con la demostración sin tener más en cuenta el hecho de haber tomado una parcial. Esto se debe a que, estos problemas de estudio tienen solución única, propiedad que, junto con el siguiente lema, se obtiene al final la convergencia de toda la sucesión.

Observación* 1.6.** *Para probar la unicidad tanto de los problemas aproximados, del problema de estudio y del problema con el término de orden inferior se prueban con la misma estrategia. La clave reside en tomar como función test la parte negativa de dos posibles soluciones del problema. Véase el* ***Paso 4 *de la Sección 2.2 y* ***Paso 4*** *de la Sección 4.2.*

Lema 1.3. *Sea X un espacio normado. Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de elementos de X tal que, para algún* $x \in X$*, de cada sucesión parcial de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, se puede extraer otra parcial que converge a x. Entonces,* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a x. Este resultado también es válido en el contexto de convergencia débil.*

Demostración:

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n_1 > n_0$ verificando

$$\|x_{n_1} - x\| \geq \varepsilon_0.$$

Definimos el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| \geq \varepsilon_0\}$. Claramente este conjunto es distinto de vacío. De hecho, es numerable e infinito.

Por tanto, existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to B$ biyectiva y estrictamente creciente. Si tomamos la parcial $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ llegamos a una contradicción pues, por definición de B, de la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no podemos extraer ninguna parcial que converja a x.

Así, concluimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Para el caso de convergencia débil, la no convergencia débil da la existencia de un funcional $f_0 \in X'$ y $\varepsilon_0 > 0$. Definimos $B = \{n \in \mathbb{N} : |f_0(x_n) - f_0(x)| \geq \varepsilon_0\}$ y aplicamos el mismo argumento.

■

Mostramos ahora una convergencia que nos será de gran utilidad para tomar límite en el estudio de los problemas aproximados.

Lema 1.4. *Supongamos que $M(x)$ verifica (1.1). Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $H_0^1(\Omega)$ tal que converge débilmente a cierto $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración:

Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y sea $F_\varphi \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional dado por

$$F_\varphi(v) = \int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Como la integral y el operador gradiente son lineales, F_φ es un funcional lineal. Además, usando (1.1) y la Desigualdad de Cauchy-Schwarz 1.1 en $(L^2(\Omega))^N$, deducimos que

$$\begin{aligned}|F_\varphi(v)| &= \left|\int_\Omega M(x)\nabla v\nabla\varphi\right| \leq \left(\int_\Omega |M(x)\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \beta\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Por tanto, F_φ está acotado y, consecuentemente, es continuo. Así, tenemos que $F_\varphi \in H_0^1(\Omega)'$. Finalmente, como $u_n \rightharpoonup u$, se verifica que $F_\varphi(u_n) \to F_\varphi(u)$, esto es,

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi.$$

■

Teorema de Lax-Milgram

Finalmente, vamos a mostrar el Teorema de Lax-Milgram, resultado clave para demostrar la existencia y unicidad de solución en EDPs de tipo lineal. Para verlo, recordamos el concepto de forma bilineal continua y coerciva.

Definición 1.3. *Sea H un espacio normado. Una forma bilineal $a\colon H\times H \to \mathbb{R}$ se dice que es*

(i) continua, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \quad \forall\, u,v \in H;$$

(II) coerciva, si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2, \quad \forall\, v \in H.$$

Teorema 1.3 (**Lax-Milgram**). *Sean H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, dado cualquier $f \in H'$, existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall\, v \in H.$$

Problemas Aproximados

2

Con el objetivo de estudiar el problema (P), vamos a hacer un truncamiento para evitar la singularidad. Es decir, estudiaremos una sucesión de problemas en los cuales no se da la singularidad y que, en el límite, podremos obtener información sobre la existencia de la solución del problema (P).

2.1 Definición de los problemas y de solución

Los problemas aproximados que vamos a considerar son los siguientes.

Definición 2.1. *Sea f una función medible no negativa y no idénticamente nula. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x) = \text{mín}\{f(x), n\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el problema*

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} & en\ \Omega, \\ u_n > 0 & en\ \Omega, \\ u_n = 0 & en\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_n}$$

Ahora, pasamos a definir el concepto de solución de estos problemas, análogo al concepto de solución del problema (P).

Definición 2.2. *Una solución de (P_n) es una función u_n de $H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\forall\, \omega \subset\subset \Omega, \exists\, c_\omega : u_n \geq c_\omega > 0 \ en\ \omega. \tag{2.1}$$

y además, verifica que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Como podemos observar en esta definición, una solución del problema (P_n) debe verificar, principalmente, dos condiciones. Debido al trabajo que conlleva probar cada una de ellas, primero vamos a demostrar la existencia de una función que verifique (2.2) y después, veremos que también satisface la condición (2.1). Finalmente, uniendo ambos resultados tenemos la existencia de solución para los problemas (P_n).

2.2 Formulación Variacional

Comenzamos probando la existencia y unicidad de cierta función que verifique la condición (2.2).

Proposición 2.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función $u_n \in H_0^1(\Omega)$ que verifica (2.2). Es más, esta función es no negativa y pertenece a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

<u>Demostración:</u>
Primero, vamos a hacer uso del Teorema del punto fijo de Schauder 1.1 para demostrar la existencia de la función en $H_0^1(\Omega)$. Segundo, gracias a [13], obtendremos

que la función está en $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Tercero, demostraremos que la función es no negativa. Por último, demostraremos la unicidad de esta función.

Paso 1. Existencia de función u_n que verifica (2.2).

Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo, $v\in H_0^1(\Omega)$ y definimos el problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w\nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f_n\varphi}{\left(|v|+\frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega), \\ w\in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{$P_{n,v}$}$$

Por el Teorema de Lax-Milgram 1.3, el problema ($P_{n,v}$) tiene solución única en $H_0^1(\Omega)$. Definimos ahora el operador $S\colon H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ de tal forma que $S(v)=w$ es la única solución asociada a ($P_{n,v}$).

Como nuestro objetivo es aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder 1.1, vamos a demostrar que

1. S manda un conjunto cerrado, convexo y acotado en sí mismo,
2. S es un operador continuo y acotado.

Para demostrar el primer punto, si tomamos $\varphi=w$ y tenemos en cuenta (1.1), que $f_n\le n$ y que $\frac{1}{(|v|+\frac{1}{n})^\gamma}\le n^\gamma$, obtenemos que

$$\alpha\int_\Omega|\nabla w|^2\le\int_\Omega M(x)\nabla w\nabla w=\int_\Omega\frac{f_n w}{\left(|v|+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\le n^{\gamma+1}\int_\Omega|w|.$$

Aplicando la Desigualdad de Hölder 1.1 para w y la identidad y la Desigualdad de Poincaré 1.3, llegamos a que

$$\begin{aligned}\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}=\alpha\|\nabla w\|^2_{(L^2(\Omega))^N}=\alpha\int_\Omega|\nabla w|^2\le n^{\gamma+1}\int_\Omega|w|\\ \le n^{\gamma+1}\|w\|_{L^2(\Omega)}\le n^{\gamma+1}C\|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^N}=n^{\gamma+1}C\|w\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva, independiente de v, aportada por la desigualdad de Poincaré.

En resumen, tenemos que

$$\alpha\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\le n^{\gamma+1}C\|w\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Simplificando, deducimos que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\le\frac{Cn^{\gamma+1}}{\alpha}.$$

Así, hemos demostrado que la bola cerrada de $H_0^1(\Omega)$ de centro 0 y radio $\frac{Cn^{\gamma+1}}{\alpha}$ es invariante a través de S. Por tanto, se verifica que

$$S\left(B_0\left(\frac{Cn^{\gamma+1}}{\alpha}\right)\right)\subset B_0\left(\frac{Cn^{\gamma+1}}{\alpha}\right).$$

Como la bola cerrada es un conjunto cerrado, convexo y acotado, S cumple el primer punto que queríamos probar.

Veamos ahora que S es un operador continuo y compacto. Debido a la Proposición 1.6 y a su Observación 1.4, basta con comprobar que S verifica que si $v_m \rightharpoonup v$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, entonces $S(v_m) \to S(v)$.

Por tanto, sea $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $H_0^1(\Omega)$ convergente débilmente a cierto $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, sabemos que la sucesión $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a v en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. en Ω. Notaremos $w_m = S(v_m)$ y $w = S(v)$. Utilizando la desigualdad demostrada anteriormente, tenemos que

$$\|w_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{Cn^{\gamma+1}}{\alpha}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, la sucesión $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Así, por la Proposición 1.7, existe una parcial, que seguiremos notando de la misma forma, y $w' \in H_0^1(\Omega)$ tal que la sucesión $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a w' débilmente en $H_0^1(\Omega)$, fuertemente en $L^2(\Omega)$ y c.t.p. en Ω.

Ahora bien, primero tenemos que demostrar que $S(v) = w = w'$ y después hay que demostrar que la convergencia en $H_0^1(\Omega)$ es fuerte.

Para la primera parte, por definición del operador S, w es la única solución del problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla w \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Veamos que w' también es solución de este problema. Para ello, tenemos en cuenta las igualdades

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_m \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v_m| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Primero, por el Lema 1.4, se tiene que

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_m \nabla \varphi \to \int_\Omega M(x)\nabla w' \nabla \varphi.$$

Segundo, teniendo en cuenta que $v_m \to v$ c.t.p. en Ω y que $\frac{f_n \varphi}{\left(|v_m| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq n^{\gamma+1} f_n \varphi$, por el Teorema de la Convergencia Dominada 1.2 llegamos a que

$$\int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v_m| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Con lo cual, deducimos que w' satisface la igualdad

$$\int_\Omega M(x)\nabla w' \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Así, tenemos demostrado que $S(v) = w = w'$. Ahora bien, de cualquier otra parcial convergente, por la unicidad del problema $(P_{n,v})$, podemos aplicar el Lema 1.3 y llegamos a que toda la sucesión $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a w en $H_0^1(\Omega)$. Falta por ver que esta convergencia es fuerte. Para ello, teniendo en cuenta la definición de w_m y la condición (1.1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha\|w_m - w\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= \alpha \int_\Omega |\nabla(w_m - w)|^2 \\
&\leq \int_\Omega M(x)\nabla(w_m - w)\nabla(w_m - w) \\
&= \int_\Omega M(x)\nabla w_m \nabla(w_m - w) - \int_\Omega M(x)\nabla w \nabla(w_m - w) \\
&= \int_\Omega \frac{f_n(w_m - w)}{\left(|v_m| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \int_\Omega M(x)\nabla w \nabla(w_m - w).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.7, en particular, la aparición de la función $h(x)$ como cota, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada 1.2 para demostrar que la primera integral converge a 0. Por otro lado, aplicando el Lema 1.4, la segunda matriz converge a 0. Concluimos pues que la sucesión $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a w fuertemente en $H^1_0(\Omega)$.

Sumando todo lo demostrado, tenemos que S cumple las hipótesis del Teorema del punto fijo de Schauder 1.1. Por tanto, el punto fijo $u_n \in H^1_0(\Omega)$ es una función que verifica la condición (2.2). Como el n estaba fijo desde el principio, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H^1_0(\Omega)$ verificando (2.2).

Paso 2. El resultado que vamos a usar ahora es demasiado técnico como para enunciarlo y demostrarlo. Básicamente, hacemos uso del Teorema 4.2 de [13], en el cual, con nuestras hipótesis del problema, tenemos que la función u_n también pertenece a $L^\infty(\Omega)$. Gracias a este resultado, tenemos que $u_n \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Paso 3. Veamos ahora que $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, en (2.2) tomamos como función test u_n^-, esto es

$$u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0, \\ u_n & \text{si } u_n \leq 0. \end{cases}$$

Entonces, teniendo en cuenta (1.1) y que $\frac{f_n}{(|u_n|+\frac{1}{n})^\gamma} \geq 0$, llegamos a que

$$\alpha\|u_n^-\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n^-)|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla u_n^- = \int_\Omega \frac{f_n u_n^-}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq 0.$$

Por tanto, tenemos que $\|u_n^-\|_{H^1_0(\Omega)} = 0$. Concluimos pues que $u_n \geq 0$ c.t.p. en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$.

Paso 4. Probemos la unicidad de la función u_n. Supongamos que existen dos funciones u_n y v_n verificando (2.2). Si tomamos como función test $(u_n - v_n)^-$, se tiene que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla(u_n - v_n)^- = \int_\Omega \frac{f_n(u_n - v_n)^-}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}$$

y

$$\int_\Omega M(x)\nabla v_n \nabla(u_n - v_n)^- = \int_\Omega \frac{f_n(u_n - v_n)^-}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}$$

Si restamos estas igualdades, tenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_n - v_n)\nabla(u_n - v_n)^- = \int_\Omega \left(\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right) f_n (u_n - v_n)^-.$$

El único caso que tenemos que estudiar es cuando $u_n \leq v_n$, pues en caso contrario la función test es nula. Si $u_n \leq v_n$, llegamos a que

$$\frac{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = \frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \geq 0.$$

Así, deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha \|(u_n - v_n)^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \alpha \int_\Omega |\nabla((u_n - v_n)^-)|^2 \\
&\leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_n - v_n)\nabla(u_n - v_n)^- \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right) f_n (u_n - v_n)^- \leq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $(u_n - v_n)^- = 0$, lo que implica que $u_n \geq v_n$ c.t.p. en Ω. Ahora, podemos hacer el mismo argumento pero tomando como función test $(v_n - u_n)^-$. De esta forma, obtendríamos que $v_n \geq u_n$ c.t.p. en Ω y, finalmente, tenemos que $u_n = v_n$ c.t.p. en Ω y tendríamos probada la unicidad para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

2.3 Propiedad de Acotación

A partir del resultado anterior, comprobamos que se verifica la condición (2.1) para la sucesión de soluciones que nos aporta la Proposición (2.1). Más aún, la cota que obtendremos será válida para todas las soluciones, es decir, esta cota no dependerá del valor de n.

Proposición 2.2. *La sucesión de funciones $\{u_n\}$ obtenida a partir de la Proposición (2.1) es creciente con respecto a n, $u_n > 0$ en Ω y, para cada $\omega \subset\subset \Omega$, existe $c_\omega > 0$ (independiente de n) tal que*

$$u_n(x) \geq c_\omega > 0, \quad \forall\, x \in \omega, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

Sea $n \in \mathbb{N}$, veamos primero que $u_n \leq u_{n+1}$. Por las propiedades de u_n y u_{n+1} respectivamente, tenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_{n+1} \nabla\varphi = \int_\Omega \frac{f_{n+1} \varphi}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Si tomamos como función test

$$\varphi = (u_n - u_{n+1})^+ = \begin{cases} u_n - u_{n+1} & \text{si } u_n > u_{n+1}, \\ 0 & \text{si } u_n \leq u_{n+1}, \end{cases}$$

en ambos problemas y restamos, llegamos a que

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})\nabla((u_n - u_{n+1})^+) = \int_\Omega \left(\frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)} \right)(u_n - u_{n+1})^+.$$

Ahora bien, estudiando el caso $u_n > u_{n+1}$, pues en caso contrario la función test es nula, y teniendo en cuenta que $f_n \leq f_{n+1}$, deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)} &\leq \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= f_{n+1}\left(\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Con esta desigualdad y teniendo en cuenta (1.1), obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha\|(u_n - u_{n+1})^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha \int_\Omega |\nabla((u_n - u_{n+1})^+)|^2 &\leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})\nabla((u_n - u_{n+1})^+) \\ &= \int_\Omega \left(\frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)} \right)(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0. \end{aligned}$$

Así, concluimos que $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$ y, por tanto, $u_n \leq u_{n+1}$ c.t.p. en Ω para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la Proposición 2.1, u_1 pertenece a $L^\infty(\Omega)$. Teniendo en cuenta que $f_1 \leq 1$, existe una constante C (véase Teorema 4.2 en [13]), que solo depende de Ω y de N tal que

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Gracias a esta desigualdad, se tiene que

$$-\mathrm{div}(M(x)\nabla u_1) = \frac{f_1}{(u_1 + 1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{\left(\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} + 1\right)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(C+1)^\gamma}.$$

Como $\frac{f_1}{(C+1)^\gamma}$ es una función no idénticamente nula, el Principio del Máximo Fuerte [7] la propiedad (2.1) se verifica para u_1 (c_ω solo depende de ω, N, f_1 y γ). Como $u_n \geq u_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la propiedad (2.1) se tiene para todo n con la misma constante que aporta u_1 y que, por tanto, no depende de n.

■

***Observación* 2.1.** *Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, podemos definir u como el límite puntual de u_n. Como $u \geq u_n$, la propiedad (2.1) también se tiene para u.*

Uniendo estos dos resultados, instantáneamente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.0.1. *Gracias a la Proposición 2.1 y a la Proposición 2.2 El problema (P_n) tiene solución única en el sentido de (2.2) para todo $n \in \mathbb{N}$.*

3 Estudio en función de γ

Hasta ahora, los resultados obtenidos para los problemas aproximados no han dependido de γ. Sin embargo, el estudio de la solución de (P) sí que dependerá del valor de este parámetro. Principalmente, estudiando de menor a mayor dificultad, distinguimos tres casos: $\gamma = 1$, $\gamma < 1$ y $\gamma > 1$.

Para cada uno de estos casos, el objetivo es probar la existencia y regularidad de la solución. Además, también estudiaremos la sumabilidad de la misma, que irá en función del espacio de Lebesgue al que pertenezca la función f.

Por último, recordar que esta sección refleja los resultados principales de Boccardo y Orsina en [2]. Más adelante, en el Capítulo 4 mostramos los resultados del artículo [4] que mejoran los resultados de [2] para el caso $0 < \gamma \leq 1$.

3.1 Caso $\gamma = 1$

Primero, obtendremos una estima a priori de la sucesión de soluciones de los problemas aproximados. En este caso, obtenemos el resultado más favorable, conseguimos la acotación en $H_0^1(\Omega)$ estando la función f en $L^1(\Omega)$.

Lema 3.1. *Sea u_n la solución de (P_n) con $\gamma = 1$, y supongamos que f pertenece a $L^1(\Omega)$. Entonces, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración:

Para ello, tomamos u_n como función test en (2.2). Además, teniendo en cuenta (1.1), $\frac{u_n}{u_n+\frac{1}{n}} \leq 1$ y $0 \leq f_n \leq f$, se tiene que

$$\alpha\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla u_n = \int_\Omega \frac{f_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}} \leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f.$$

Así, tenemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$ como queríamos demostrar.

■

Gracias a la estima a priori, resulta muy sencillo tomar límite en la formulación variacional de los problemas aproximados y podemos obtener el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea $\gamma = 1$ y sea f una función no negativa y no idénticamente cero de $L^1(\Omega)$. Entonces existe una solución u perteneciente a $H_0^1(\Omega)$ de (P).*

Demostración:

Por un lado, combinando el Lema 3.1 y la Proposición 1.7, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una parcial, que seguiremos denotando por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$.

Ahora bien, si para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ definimos el funcional $F\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de la forma

$$F(v) = \int_\Omega M(x)\nabla v \nabla\varphi, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

que, claramente, es lineal y continuo, por la convergencia débil en $H_0^1(\Omega)$ deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi = \lim_{n\to\infty} F(u_n) = F(u) = \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi, \quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que u_n satisface (2.1) y que $0\le f_n\le f$, para toda $\varphi\in H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$0\le\left|\frac{f_n\varphi}{u_n+\frac{1}{n}}\right|\le\frac{f|\varphi|}{c_\omega},$$

donde $c_\omega=\{x\in\Omega : \varphi(x)\neq 0\}$. Además, como u_n converge a u c.t.p. en Ω, llegamos a que

$$\frac{f_n\varphi}{u_n+\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{f\varphi}{u}\ \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Por tanto, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada 1.2 obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{f_n\varphi}{u_n+\frac{1}{n}}=\frac{f\varphi}{u}, \quad \forall\,\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

De esta forma, tomando límite en (2.2), concluimos que u satisface (1.3). Por último, por la Observación 2.1, u satisface la condición (1.2) y así, u es solución de (P). ■

Por último, veamos cómo la sumabilidad de la solución u depende de la sumabilidad de la función f.

Teorema 3.2. *Sea $\gamma=1$ y sea f una función no negativa perteneciente a $L^m(\Omega)$ con $m\ge 1$. Entonces, la solución u de (P) dada por el Teorema 3.1 cumple que*

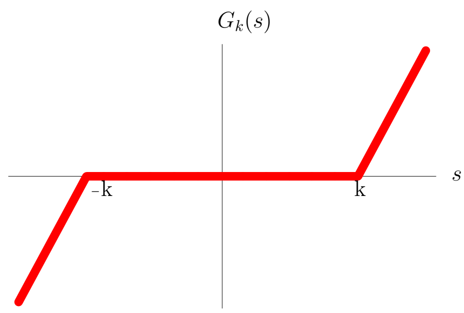
(1) si $m>\frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^\infty(\Omega)$;

(2) si $1\le m<\frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^s(\Omega)$ con $s=\frac{2Nm}{N-2m}$.

Demostración:

Para probar *(1)*, dado $k>1$, definimos la función

$$G_k(s)=(s-k)^+=\begin{cases} s-k & \text{si } s>k,\\ 0 & \text{si } s\le k.\end{cases}$$



Si tomamos $G_k(u_n)$ como función test en (2.2), tenemos que

$$\alpha\int_\Omega|\nabla G_k(u_n)|^2\le\int_\Omega M(x)\nabla G_k(u_n)\nabla G_k(u_n)=\int_\Omega\frac{f_nG_k(u_n)}{u_n+\frac{1}{n}}\le\int_\Omega fG_k(u_n),$$

donde hemos usado (1.1), que $u_n + \frac{1}{n} \geq k \geq 1$ en el conjunto $\{u_n \geq k\}$, que $\nabla G_k(u_n) = \nabla u_n$ y que

$$\int_\Omega \frac{f_n G_k(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} = \int_{\{u_n \geq k\}} \frac{f_n G_k(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} + \int_{\{u_n < k\}} \frac{f_n G_k(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}}.$$

Ahora bien, gracias a la desigualdad podemos aplicar nuevamente el Teorema 4.2 de [13] para obtener la existencia de una constante C, no dependiente de n, tal que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Por tanto, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$ y, con lo cual, u también pertenece a $L^\infty(\Omega)$.

Para probar *(2)*, nótese que si $m = 1$ entonces $s = \frac{2N}{N-2} = 2^*$ y $u \in L^{2^*}(\Omega)$ por la Proposición 1.5.

Para el caso $1 < m < \frac{N}{2}$, si tomamos $\delta > 1$, entonces podemos tomar $u_n^{2\delta-1}$ como función test en (2.2) porque $u_n \in L^\infty(\Omega)$ y $2\delta - 1 > 1$. Además, aplicando (1.1) y la Desigualdad de Hölder 1.1, se tiene que

$$\alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^{2\delta-1} = \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^{2\delta-1}}{u_n + \frac{1}{n}}$$
$$\leq \int_\Omega f u_n^{2\delta-2} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Ahora bien, si aplicamos la Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 1.4, obtenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} = \int_\Omega |\nabla u_n u_n^{\delta-1}|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n^\delta|^2}{\delta^2} \geq \frac{S}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}},$$

donde S es la constante del embebimiento de Sobolev. Multiplicando por las constantes adecuadas para enlazar las desigualdades, deducimos que

$$\frac{S\alpha(2\delta-1)}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

De esta forma, reordenando constantes, tenemos la desigualdad

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.1}$$

Una vez obtenida esta desigualdad, pasamos a tomar el parámetro δ de la forma

$$\delta = \frac{m(N-2)}{N-2m}.$$

Para comprobar que esta elección es acorde con lo impuesto inicialmente a este parámetro, tenemos que comprobar que $\delta > 1$. Teniendo en cuenta que $1 < m < \frac{N}{2}$, tenemos las siguientes equivalencias

$$\frac{m(N-2)}{N-2m} > 1 \Leftrightarrow Nm - 2m > N - 2m \Leftrightarrow Nm > N \Leftrightarrow m > 1.$$

Una vez comprobado que $\delta > 1$, vamos a comprobar una serie de igualdades.

- $2^*\delta = s$.

$$2^*\delta = \frac{2N}{N-2}\frac{m(N-2)}{N-2m} = \frac{2Nm}{N-2m} = s.$$

- $(2\delta - 2)m' = s$.

$$(2\delta-2)m' = \left(\frac{2m(N-2)}{N-2m} - 2\right)\frac{m}{m-1} = \frac{2mN-4m-2N+4m}{N-2m}\frac{m}{m-1}$$
$$= \frac{2N(m-1)}{N-2m}\frac{m}{m-1} = \frac{2Nm}{N-2m} = s.$$

- $\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} = \frac{2}{s}$.

$$\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} = \frac{2(N-2)}{2N} - \frac{m-1}{m} = \frac{m(N-2)-N(m-1)}{Nm} = \frac{N-2m}{Nm} = \frac{2}{s}.$$

Teniendo en cuenta estas igualdades y agrupando constantes, la desigualdad (3.1) queda de la forma

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{s}} \le C\|f\|_{L^m(\Omega)},$$

donde C solo depende de N y de m.

Por tanto, tenemos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$ y concluimos que $u \in L^s(\Omega)$.

■

3.2 Caso $\gamma > 1$

En este caso, la estima a priori la obtendremos en $H^1_{loc}(\Omega)$, no tan favorable como en el caso anterior. Sin embargo, sí podremos demostrar que una sucesión de potencias de las soluciones de los problemas aproximados está acotada en $H^1_0(\Omega)$.

Lema 3.2. *Sea u_n la solución de (P_n) con $\gamma > 1$ y supongamos que f pertenece a $L^1(\Omega)$. Entonces, la sucesión $\{u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1_0(\Omega)$, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1_{loc}(\Omega)$ y en $L^s(\Omega)$, con $s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2}$.*

Demostración:

Tomando u_n^γ como función test en (2.2) y teniendo en cuenta (1.1) y que $\frac{u_n^\gamma}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} \le 1$, obtenemos que

$$\frac{4\alpha\gamma}{(\gamma+1)^2}\|u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \frac{4\alpha\gamma}{(\gamma+1)^2}\int_\Omega |\nabla u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}|^2 = \alpha\gamma\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1}$$
$$\le \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \le \int_\Omega f_n \le \int_\Omega f.$$

Así, tenemos que la sucesión $\{u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1_0(\Omega)$.

Para probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$, nótese que

$$s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2} = \frac{2N(\gamma+1)}{(N-2)2} = 2^*\frac{\gamma+1}{2}.$$

Por tanto, aplicando la Proposición 1.5 al estar $\{u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en $H_0^1(\Omega)$, también está acotada en $L^{2^*}(\Omega)$. Deducimos pues que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en

$$L^{2^*\frac{\gamma+1}{2}}(\Omega) = L^s(\Omega).$$

Veamos por último la acotación en $H^1_{loc}(\Omega)$. Sea φ una función perteneciente a $C_0^1(\Omega)$ y sea $\omega = \{\varphi \neq 0\}$. Ahora, tomando $u_n\varphi^2$ como función test en (2.2) y teniendo en cuenta (1.1) y la Proposición 2.2, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n\varphi^2) &= \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + 2\alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi u_n \varphi \\
&\leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi u_n\varphi \\
&\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n \varphi^2}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}} \int_\Omega f_n\varphi^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo uso de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz 1.1 y la Desigualdad de Young 1.2, obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\beta \int_\Omega \nabla u_n\nabla\varphi u_n\varphi &\leq 2\beta \int_\Omega |\nabla u_n \nabla\varphi u_n \varphi| \leq 2\beta \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\varphi|u_n|\varphi| \\
&= \sqrt{\alpha}\frac{2\beta}{\sqrt{\alpha}} \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\varphi|u_n|\varphi| \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2.
\end{aligned}$$

Combinando las desigualdades obtenidas, llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi u_n\varphi + 2\beta\int_\Omega \nabla u_n\nabla\varphi u_n\varphi \\
&\leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\varphi^2 + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2.
\end{aligned}$$

Ahora bien, por (1.1), tenemos que

$$2\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi u_n\varphi + 2\beta\int_\Omega \nabla u_n\nabla\varphi u_n\varphi > 0.$$

Por tanto, podemos eliminar esos términos en la desigualdad, simplificar y obtener que

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 \leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2.$$

Finalmente, haciendo uso de la Proposición 1.2 tenemos la acotación

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 &\leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f_n\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2 \\
&\leq \frac{\|\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)}}{c_\omega^{\gamma-1}}\int_\Omega f + \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\varphi\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq K(f,\varphi,\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

lo que nos confirma la acotación de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H^1_{loc}(\Omega)$.

■

Gracias a las estimas obtenidas, podemos tomar límite en la formulación variacional de los problemas aproximados y obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea $\gamma > 1$ y sea f una función no negativa perteneciente a $L^1(\Omega)$ no idénticamente cero. Entonces, existe una solución en $H^1_{loc}(\Omega)$ del problema (P). Además, $u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ pertenece a $H^1_0(\Omega)$.*

***Observación* 3.1.** *La demostración de este teorema es idéntica al Teorema 3.1 cambiando el espacio $H^1_0(\Omega)$ por $H^1_{loc}(\Omega)$. Una vez obtenido el límite, como la sucesión $\{u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H^1_0(\Omega)$ por el Lema 3.2, concluimos que $u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ pertenece a $H^1_0(\Omega)$.*

Por último, obtenemos resultados sobre la sumabilidad de u en función de la sumabilidad de la función f.

Teorema 3.4. *Sea $\gamma > 1$ y sea f perteneciente a $L^m(\Omega)$, con $m \geq 1$. Entonces la solución u de (P) dada por el Teorema 3.3 cumple que:*

(1) si $m > \frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^\infty(\Omega)$;

(2) si $1 \leq m < \frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^s(\Omega)$, donde $s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.

***Observación* 3.2.** *La demostración del apartado (1) es idéntica al apartado (1) del Teorema 3.2. Sobre el apartado (2), téngase en cuenta la demostración del Teorema 3.2 pues bastará realizar ciertos cambios para poder demostrar este caso.*

Demostración:

Si $m = 1$, entonces $s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2} = 2^*\frac{\gamma+1}{2}$. Como $u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ pertenece a $H^1_0(\Omega)$ por el Teorema 3.3; entonces, por la Proposición 1.5, $u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ pertenece a $L^{2^*}(\Omega)$, esto es

$$\int_\Omega \left(u^{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{2^*} = \int_\Omega u^{2^*\frac{\gamma+1}{2}} < +\infty.$$

Por lo tanto, llegamos a que u pertenece a $L^s(\Omega)$.

Para el caso $1 < m < \frac{N}{2}$, si tomamos $\delta > \frac{\gamma+1}{2}$, entonces podemos tomar $u_n^{2\delta-1}$ como función test en (2.2) porque $u_n \in L^\infty(\Omega)$ y $2\delta - 1 > 1$. Así, podemos realizar la misma argumentación que en el Teorema 3.2, obteniendo la desigualdad

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.2}$$

Una vez obtenida esta desigualdad, pasamos a tomar el parámetro δ de la forma

$$\delta = \frac{m'(\gamma+1)}{2m'-2^*} = \frac{(N-2)m(\gamma+1)}{2N-4m}.$$

Podemos tomar este valor pues efectivamente se cumple que $\delta > \frac{\gamma+1}{2}$ dado que

$$\frac{m'(\gamma+1)}{2m'-2^*} > \frac{\gamma+1}{2} \Leftrightarrow \frac{2m'}{2m'-2^*} > 2.$$

Además, se verifican las siguientes consecuencias.

- $2^*\delta = (2\delta - 1 - \gamma)m'$.
$$\delta = \frac{m'(\gamma+1)}{2m'-2^*} \Rightarrow \delta = \frac{m'(-\gamma-1)}{2^*-2m'} \Rightarrow \delta(2^*-2m') = m'(-1-\gamma) \Rightarrow 2^*\delta = (2\delta-1-\gamma)m'.$$
- $2^*\delta = s$.
$$2^*\delta = \frac{2N}{N-2}\frac{(N-2)m(\gamma+1)}{2N-4m} = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m} = s.$$
- $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$. Teniendo en cuenta que $\frac{2}{2^*} = \frac{N-2}{N}$ y $\frac{1}{m'} = \frac{m-1}{m}$, deducimos que
$$\frac{N-2}{N} > \frac{m-1}{m} \Leftrightarrow m(N-2) > N(n-1) \Leftrightarrow -2m > -N \Leftrightarrow \frac{N}{2} > m,$$
luego se verifica que $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$.

Así, usando estas propiedades y agrupando constantes, la desigualdad (3.2) queda de la forma
$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)},$$
donde C solo depende de N y de m.

Por tanto, tenemos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$ y concluimos que $u \in L^s(\Omega)$.

■

3.3 Caso $\gamma < 1$

En este caso, imponiendo más regularidad sobre la función f, podemos obtener la estima a priori en $H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.3. *Sea u_n la solución de (P_n) con $\gamma < 1$, y supongamos que f pertenece a $L^m(\Omega)$ con $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$. Entonces, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$.*

<u>Demostración:</u>

Comenzamos tomando u_n como función test en (2.2). Usando (1.1), la Desigualdad de Hölder 1.1 y que $f_n \leq f$, se tiene que
$$\alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \int_\Omega f u_n^{1-\gamma} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Ahora bien, como $m = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$, entonces $m' = \frac{2^*}{1-\gamma}$. Con lo cual, tenemos que $(1-\gamma)m' = 2^*$. Con lo cual, aplicando la Proposición 1.5 llegamos a que
$$\alpha S\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Además, se cumple que
$$\frac{2}{2^*} - \frac{1}{m'} = \frac{2}{2^*} - \frac{1-\gamma}{2^*} = \frac{\gamma+1}{2^*}.$$

Por tanto, deducimos que

$$\alpha S\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{\gamma+1}{2^*}} = \alpha S\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\gamma+1} \le \|f\|_{L^m(\Omega)},$$

y así tenemos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^{2^*}(\Omega)$.

Gracias a esta cota, podemos demostrar que

$$\alpha\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \le \|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{2^*}\right)^{\frac{1}{m'}} = \|f\|_{L^m(\Omega)}\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{1-\gamma} \le \|f\|_{L^m(\Omega)}K^{1-\gamma},$$

donde K es la cota de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^{2^*}(\Omega)$. Por tanto, concluimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$.

■

Análogamente a los casos anteriores, usando la cota obtenida podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $\gamma < 1$ y sea f una función no negativa y no idénticamente cero de $L^m(\Omega)$ con $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$. Entonces existe una solución u de (P) perteneciente a $H_0^1(\Omega)$.*

***Observación* 3.3.** *Una vez obtenida la acotación de la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$, la demostración es idéntica al Teorema 3.1 cuando $\gamma = 1$. Nótese que para haber obtenido la misma información sobre la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para este caso, hemos tenido que imponer más regularidad a la función f.*

Nuevamente, mostramos la sumabilidad que podemos obtener de la función u según sea la sumabilidad de la función f.

Teorema 3.6. *Sea $\gamma < 1$ y sea f perteneciente a $L^m(\Omega)$, con $m \ge \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$. Entonces la solución u de (P) dada por el Teorema 3.5 cumple que:*

(1) si $m > \frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^\infty(\Omega)$;

(2) si $\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} \le m < \frac{N}{2}$, entonces u pertenece a $L^s(\Omega)$, donde $s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.

***Observación* 3.4.** *La demostración del apartado (1) es idéntica al apartado (1) del Teorema 3.2. Sobre el apartado (2), téngase en cuenta la demostración del Teorema 3.2 pues bastará realizar ciertos cambios para poder demostrar este caso.*

Demostración:

Si $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$, se deduce que

$$s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m} = \frac{N\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}(\gamma+1)}{N-2\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}} = \frac{\frac{2N^2(\gamma+1)}{N+2+\gamma(N-2)}}{\frac{N(N+2+\gamma(N-2))-4N}{N+2+\gamma(N-2)}}$$
$$= \frac{2N(\gamma+1)}{N+2+\gamma(N-2)-4} = \frac{2N(\gamma+1)}{N-2+\gamma(N-2)} = \frac{2N(\gamma+1)}{(N-2)(\gamma+1)} = \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

De esta forma, como u pertenece a $H_0^1(\Omega)$ por el Teorema 3.5; entonces, por la Proposición 1.5, u pertenece a $L^{2^*}(\Omega) = L^s(\Omega)$.

Para el caso $\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} < m < \frac{N}{2}$, si tomamos $\delta > 1$, entonces podemos tomar $u_n^{2\delta-1}$ como función test en (2.2) porque $u_n \in L^\infty(\Omega)$ y $2\delta - 1 > 1$. Realizando la misma argumentación que en el Teorema 3.2, obtenemos la desigualdad

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.3}$$

Una vez obtenida esta desigualdad, pasamos a tomar el parámetro δ de la forma

$$\delta = \frac{m'(\gamma+1)}{2m'-2^*} = \frac{(N-2)m(\gamma+1)}{2N-4m}.$$

Veamos que efectivamente, podemos tomar este valor. Primero, como $m < \frac{N}{2}$, se tiene que $4m < 2N$ y así $2N - 4m > 0$. De esta manera, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\delta = \frac{(N-2)m(\gamma+1)}{2N-4m} > 1 &\Leftrightarrow (N-2)m(\gamma+1) > 2N - 4m \\
&\Leftrightarrow (4 + (N-2)(\gamma+1))m > 2N \\
&\Leftrightarrow m > \frac{2N}{4 + N\gamma + N - 2\gamma - 2} = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}.
\end{aligned}$$

De forma análoga al Teorema 3.4, se tienen las consecuencias

- $2^*\delta = (2\delta - 1 - \gamma)m'$,
- $2^*\delta = s$,
- $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$.

Así, usando estas propiedades y agrupando constantes, la desigualdad (3.3) queda de la forma

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{m'}} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)},$$

donde C solo depende de N y de m.

Por tanto, tenemos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$ y concluimos que $u \in L^s(\Omega)$.

$\blacksquare$

Hasta ahora, hemos visto que u pertenece a $H_0^1(\Omega)$ si f pertenece al espacio de Lebesgue $L^m(\Omega)$ con $m = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$. Por último, mostramos el espacio de Sobolev al que pertenece la función u si f tiene menos regularidad.

Teorema 3.7. *Sea $\gamma < 1$ y sea f perteneciente a $L^m(\Omega)$ con $1 \leq m < \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$. Entonces, existe una solución u de (P) perteneciente a $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-m(1-\gamma)}$.*

Demostración:

Para poder demostrar que u pertenece a $W_0^{1,q}(\Omega)$ será suficiente con demostrar que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$. De esa forma, pasando al límite de la misma forma que en el Teorema 3.1 obtendremos que u pertenece a $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Para obtener esta estima, lo ideal sería tomar la función test $u_n^{2\delta-1}$ con $\frac{\gamma+1}{2} \leq \delta < 1$. Sin embargo, no podemos admitir esta función test, pues

$$\nabla u_n^{2\delta-1} = (2\delta-1)u_n^{2\delta-2}\nabla u_n,$$

que presenta una singularidad cuando $u_n = 0$.

Con lo cual, para n fijo, tomamos $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ y tomamos como función test

$$(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1} - \varepsilon^{2\delta-1}$$

en (2.2). De esta forma, usando (1.1), obtenemos que

$$\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \leq \int_\Omega \frac{f_n((u_n+\varepsilon)^{2\delta-1}-\varepsilon^{2\delta-1})}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Además, teniendo en cuenta que $f_n \leq f$ y $\varepsilon < \frac{1}{n}$, llegamos a que

$$\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \leq \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}. \tag{3.4}$$

Por otro lado, usando de la Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 1.4, deducimos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 (u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} = \int_\Omega \frac{|\nabla((u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta)|^2}{\delta^2} \geq \frac{S}{\delta^2}\left(\int_\Omega ((u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta)^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

De esta forma, combinando las dos desigualdades anteriores tenemos que

$$\alpha\left(\int_\Omega ((u_n+\varepsilon)^\delta - \varepsilon^\delta)^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma}.$$

Esta última desigualdad la hemos obtenido para todo $\varepsilon < \frac{1}{n}$. Por tanto, tendiendo ε a 0, llegamos a la desigualdad

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\int_\Omega f u_n^{2\delta-1-\gamma}. \tag{3.5}$$

Una vez obtenidas estas desigualdades, pasamos a demostrar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$, donde $s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.

Si $m=1$, entonces $s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2} = 2^*\frac{\gamma+1}{2}$. Por tanto, si tomamos $\delta = \frac{\gamma+1}{2}$, la desigualdad (3.5) queda de la forma

$$\alpha\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)}\int_\Omega f.$$

Con lo cual, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$.

Si $1 < m < \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$, en la desigualdad (3.5) podemos aplicar el mismo razonamiento que en el Lema 3.4 y obtener que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^s(\Omega)$.

Habiendo obtenido la cota en $L^s(\Omega)$, pasamos a obtener la acotación en $W_0^{1,q}(\Omega)$. Para ello, tomamos δ de forma que se cumpla la igualdad

$$\frac{(2-2\delta)q}{2-q} = s,$$

que, teniendo en cuenta el valor de q y de s, tenemos que

$$\delta = \frac{(\gamma+1)m(N-2)}{2N-4m}.$$

Ahora bien, debido a este valor de δ, se tiene que

$$\begin{aligned}
2\delta - 1 - \gamma &= \frac{(\gamma+1)m(N-2)}{N-2m} - 1 - \gamma \\
&= \frac{(\gamma+1)m(N-2) - N + 2m - \gamma N + 2\gamma m}{N-2m} \\
&= \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m} - \frac{N(\gamma+1)}{N-2m} \\
&= s - \frac{N(\gamma+1)}{N-2m}.
\end{aligned}$$

Gracias a esta igualdad y usando la cota en $L^s(\Omega)$, podemos mejorar la acotación de la desigualdad (3.4) para obtener que

$$\begin{aligned}
\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} &\le \int_\Omega f(u_n+\varepsilon)^{2\delta-1-\gamma} \le \int_\Omega f(u_n+1)^{s-\frac{N(\gamma+1)}{N-2m}} \\
&\le \int_\Omega f(u_n+1)^s \le K,
\end{aligned}$$

donde K representa la cota resultante tras haber usado la cota en $L^s(\Omega)$.

De esta forma, tenemos la existencia de una constante C de tal forma que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{2-2\delta}} = \int_\Omega |\nabla u_n|^2(u_n+\varepsilon)^{2\delta-2} \le C.$$

Finalmente, usando esta última cota, la cota en $L^s(\Omega)$ y la Desigualdad de Hölder 1.1 para $p = \frac{2}{2-q}$ y $p' = \frac{2}{q}$, concluimos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u_n|^q = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q}}(u_n+\varepsilon)^{(1-\delta)q} \\
&\le \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{(u_n+\varepsilon)^{2-2\delta}}\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^{\frac{(2-2\delta)q}{2-q}}\right)^{\frac{2-q}{2}} \\
&\le C^{\frac{q}{2}}\left(\int_\Omega (u_n+\varepsilon)^s\right)^{\frac{2-q}{2}} \le Q,
\end{aligned}$$

donde Q representa la cota resultante tras haber aplicado la cota en $L^s(\Omega)$.

Concluimos pues que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$ y, consecuentemente, la solución u de (P) pertenece a $W_0^{1,q}(\Omega)$.

■

4 Variación del caso $\gamma < 1$

Hasta ahora, el trabajo ha consistido en la explicación detallada de los resultados más importantes de [2]. En este capítulo, mostramos una mejora para los resultados obtenidos en el caso $0 < \gamma \leq 1$. Esto es, obtenemos la solución en $H_0^1(\Omega)$ estando el dato f en $L^1(\Omega)$.

4.1 Problema con término de orden inferior

En estudio de EDPs en los que aparecen términos de potencias singulares, es conocido que cuando el parámetro está entre 0 y 1, el comportamiento del problema puede complicarse. Por tanto, siguiendo las ideas de [1], aplicamos un efecto regularizante al problema (P); esto es, añadimos un término de orden inferior que nos ayude a controlar el comportamiento del problema.

Definición del problema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) un conjunto abierto y acotado y $0 < \gamma \leq 1$. Además, consideraremos la matriz $M\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ medible y satisfaciendo las condiciones de elipticidad y acotación. También, consideraremos la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente, impar y verificando que $\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$. Por último, supondremos que

$$0 \leq a(x), f(x) \in L^1(\Omega) \tag{4.1}$$

y que existe $Q > 0$ tal que

$$f(x) \leq Q a(x). \tag{4.2}$$

Con todos estos datos, definimos el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + a(x)g(u) = \dfrac{f(x)}{u^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q}$$

Definición de solución

Gracias a la adición del término de orden inferior, obtenemos más control sobre la función f. Sin embargo, todavía tenemos que lidiar con la singularidad. Para ello, siguiendo las ideas de [6], redefinimos el concepto de solución.

Definición 4.1. *Consideramos solución de (Q) a aquella función u que verifique:*

- $u \in H_0^1(\Omega)$.
- $u \geq 0$ *c.t.p. en* Ω.
- $\operatorname{meas}\left\{x \in \Omega : u(x) = 0 \text{ y } \frac{f(x)}{u^\gamma(x)} = +\infty\right\} = 0.$

$$\begin{cases} \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ con } \varphi \geq 0, \text{ se tiene que} \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi < +\infty, \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega a(x)u\varphi = \int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi. \end{cases}$$

***Observación* 4.1.** *En teoría variacional de EDPs es muy común el uso de esta técnica. Se permite que la función que diverge pueda tomar el valor $+\infty$ pero, imponiendo la integrabilidad del término $\int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi$, al final estás considerando que la solución obtenida no provoque problemas dada su singularidad.*

Una vez definido el nuevo problema, el objetivo de este capítulo será probar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *[J. Carmona, P. J. Martínez-Aparicio, A. J. Martínez-Aparicio, M. M-T] El problema (Q) tiene una única solución débil u no negativa perteneciente a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Por simplicidad, procederemos paso a paso a obtener resultados y propiedades para llegar a obtener el Teorema 4.1.

La forma inicial de abordar este problema es similar al trabajo ya hecho. Es decir, consideramos problemas aproximados que eviten la singularidad para, posteriormente, tomar límite.

4.2 Problemas aproximados

En las condiciones del problema (Q), para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los problemas aproximados

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u_n) + a(x)g(u_n) = \dfrac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_n}$$

A modo de esquema, vamos a probar los siguientes resultados:

1. Existencia de la solución $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. No negatividad de la solución u_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Unicidad de solución de u_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Acotación en $L^\infty(\Omega)$ de u_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Acotación de la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$.

Paso 1. Existencia de la solución $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, la función

$$F(x,s) = \frac{f(x)}{\left(|s| + \frac{1}{n}\right)^\gamma}, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

cumple que

$$|F(x,s)| \leq n^{\gamma}|f(x)| \leq n^{\gamma} Qa(x), \quad \forall\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ y } \forall\ \gamma > 0.$$

Por tanto, por Teorema 2.1 de [1], existe $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solución débil de (Q_n). Aquí es donde se utiliza que $\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir $g^{-1}(n^\gamma Q)$.

Paso 2. No negatividad de la solución u_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $\varphi = u_n^-$, se tiene que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla u_n^- + \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n^- = \int_\Omega \frac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} u_n^-.$$

Usando (1.1), se tiene que

$$\alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- + \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n^- \leq \int_\Omega \frac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} u_n^-.$$

Por tanto, deducimos que

$$0 \leq \alpha \|u_n^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- \leq \int_\Omega \left(\frac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - a(x)g(u_n) \right) u_n^-.$$

Ahora bien, por un lado tenemos que, claramente, el término $\dfrac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \geq 0$. Por otro lado, como g es creciente e impar, $g(u_n) < 0$ para todo $u_n < 0$; que a su vez, hace que $-a(x)g(u_n) \geq 0$ para todo $u_n < 0$. De esta manera, llegamos a que

$$\int_\Omega \left(\frac{f(x)}{\left(|u_n| + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - a(x)g(u_n) \right) u_n^- \leq 0.$$

Debido a la doble desigualdad, obtenemos que $\|u_n^-\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$ c.t.p. en Ω. Finalmente, concluimos que $u_n \geq 0$ c.t.p. en Ω.

Paso 3.Unicidad de solución de u_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para n fijo, sean u y v dos soluciones del problema (Q_n). Tomando la función test $\varphi = (u-v)^-$ y sustituyendo en ambas ecuaciones satisfechas por u y v respectivamente, obtenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla (u-v)^- + \int_\Omega a(x)g(u)(u-v)^- = \int_\Omega \frac{f(x)}{\left(u + \frac{1}{n}\right)^\gamma}(u-v)^-$$

y

$$\int_\Omega M(x)\nabla v \nabla (u-v)^- + \int_\Omega a(x)g(v)(u-v)^- = \int_\Omega \frac{f(x)}{\left(v + \frac{1}{n}\right)^\gamma}(u-v)^-.$$

Si restamos ambas ecuaciones y despejamos, llegamos a que

$$\int_\Omega M(x)\nabla (u-v) \nabla (u-v)^- = \int_\Omega \left(f(x) \left(\frac{1}{\left(u + \frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \right) - a(x)(g(u) - g(v)) \right)(u-v)^-.$$

Usando (1.1) tenemos que

$$0 \le \alpha \|(u-v)^-\|_{H_0^1(\Omega)} \le \int_\Omega \left(f(x) \left(\frac{1}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \right) - a(x)(g(u)-g(v)) \right)(u-v)^-.$$

Por la definición de $(u-v)^-$, solo nos interesa estudiar el signo en el que $u < v$. Por un lado, tenemos que

$$\frac{1}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^\gamma} < \frac{1}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^\gamma} > 0.$$

Por otro lado, como g es creciente, tenemos que $0 \le g(v)-g(u)$. Por tanto, para $u < v$, deducimos que

$$\int_\Omega \left(f(x) \left(\frac{1}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \right) - a(x)(g(u)-g(v)) \right)(u-v)^- \le 0.$$

Con lo cual, $\|(u-v)^-\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$ y obtenemos la desigualdad $u \ge v$ c.t.p. en Ω. Análogamente, si tomamos la función test $\varphi = (v-u)^-$ y realizamos la misma argumentación, obtenemos la desigualdad contraria y concluimos que $u = v$ c.t.p. en Ω.

Paso 4. Acotación en $L^\infty(\Omega)$ de u_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomamos como función test $\varphi = G_k(u_n)$ donde

$$G_k(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } |s| \le k, \\ s-k, & \text{si } s > k, \\ s+k, & \text{si } s < -k, \end{cases}$$

y $k \ge \max\{1, g^{-1}(Q)\}$. De esta forma, tenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla G_k(u_n) + \int_\Omega a(x)g(u_n)G_k(u_n) = \int_\Omega \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} G_k(u_n).$$

Como $k \ge 1$, se tiene que $u_n + \frac{1}{n} \ge 1$ en $\{u_n \ge k\}$. Usando además (1.1), deducimos que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 + \int_\Omega a(x)g(u_n)G_k(u_n) \le \int_\Omega Qa(x)\frac{G_k(u_n)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \le \int_\Omega Qa(x)G_k(u_n).$$

Así, obtenemos la desigualdad

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 + \int_\Omega a(x)(g(u_n)-Q)G_k(u_n) \le 0.$$

Como $k \ge g^{-1}(Q)$, ambos sumandos son positivos. Concluimos pues que

$$\|G_k(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow |u_n| \le k \Rightarrow \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le k.$$

Por tanto, tenemos la acotación

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le k \tag{4.3}$$

Paso 5. Acotación de la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega)$.

Tomando como función test $\varphi = u_n$, tenemos que

$$\int_\Omega M(x)|\nabla u_n|^2 + \int_\Omega a(x)g(u_n)u_n = \int_\Omega \frac{f(x)u_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Tirando el término positivo, usando (1.1), (4.2) y (4.3) podemos realizar las acotaciones

$$\alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega \frac{f(x)u_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \int_\Omega \frac{Qa(x)u_n}{u_n^\gamma} = \int_\Omega a(x)Qu_n^{1-\gamma} \leq \int_\Omega a(x)Qk^{1-\gamma}.$$

Como la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, existe una parcial, que seguiremos denotando por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y cierto $u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \tag{4.4}$$

$$u_n \longrightarrow u \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{4.5}$$

Además, tomando límite en (4.3), tenemos que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k. \tag{4.6}$$

4.3 *Existencia de solución de* (Q)

Primero, para poder obtener el resultado sobre existencia de solución, recordamos un resultado clásico conocido como el Lema de Fatou.

Lema 4.1 (Fatou). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que*

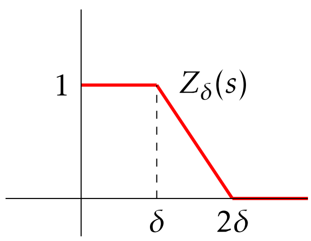
- *$f_n \geq 0$ c.t.p. en Ω para todo $n\in\mathbb{N}$.*
- $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega f_n < +\infty$.

Para casi todo $x\in\Omega$, definimos $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Entonces $f\in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x).$$

Como hemos podido observar en el transcurso del Capítulo 3, obtener las cotas a priori facilita enormemente el cálculo del límite. Sin embargo, para este problema, debemos usar estrategias distintas para poder salvar la singularidad. Las ideas son las usadas en [6] donde, una de ellas es la función $Z_\delta(s)$ dada por

$$Z_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\leq s\leq\delta \\ -\frac{s}{\delta}+2 & \text{si } \delta\leq s\leq 2\delta \\ 0 & \text{si } 2\delta\leq s \end{cases}$$



La función $Z_\delta(u_n)$ no es admisible como función test, ya que en la frontera de Ω vale 1. Sin embargo, podemos tomar como función test $Z_\delta(u_n)\varphi$ donde $\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Con este término, la idea es tomar límite primero en n y luego en δ tendiendo a 0. Con estas ideas, y siguiendo el esquema de la sección anterior, probaremos lo siguiente:

6. Límite de $\displaystyle\int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\phi$ cuando $n\to+\infty$ y cuando $\delta\to 0$.

7. $\displaystyle\int_{\{u=0\}} \frac{f(x)}{u^\gamma}\phi = 0.$

8. Límite de $\displaystyle\int_{\{u_n>\delta\}} \frac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\phi$ cuando $n\to+\infty$ y cuando $\delta\to 0$.

Paso 6. Límite de $\displaystyle\int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\phi$ cuando $n\to+\infty$ y cuando $\delta\to 0$.

Tomando como función test $\phi = Z_\delta(u_n)\varphi$, donde $\varphi \geq 0$ con $\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi Z_\delta(u_n) + \int_\Omega a(x)g(u_n)Z_\delta(u_n)\varphi = \int\limits_{\{\delta\leq u_n\leq 2\delta\}} \frac{M(x)}{\delta}|\nabla u_n|^2\varphi + \int_\Omega \frac{f(x)Z_\delta(u_n)\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}.$$

Como el primer término del segundo miembro es positivo, podemos eliminarlo y obtener la desigualdad

$$0\leq \int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\varphi \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi Z_\delta(u_n) + \int_\Omega a(x)g(u_n)Z_\delta(u_n)\varphi.$$

Teniendo en cuenta (4.4), que g y Z_δ son continuas. Tomando límite en n, para todo $\delta>0$, llegamos a que

$$0\leq \limsup_{n\to+\infty}\int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\varphi \leq \int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi Z_\delta(u) + \int_\Omega a(x)g(u)Z_\delta(u)\varphi.$$

Nótese que, cuando δ tiende a 0, $Z_\delta(u)\to\chi_{\{u=0\}}$. Además, por un lado, como g es impar, $g(0)=0$. Por otro lado, como $u\in H_0^1(\Omega)$, $\nabla u = 0$ c.t.p. en $\{u=0\}$. Así, concluimos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\varphi \to 0 \text{ cuando } \delta\to 0.$$

Paso 7. $\displaystyle\int_{\{u=0\}} \frac{f(x)}{u^\gamma}\phi = 0.$

Observemos que

$$\int_{\{u=0\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\chi_{\{u_n\leq\delta\}}\varphi \leq \int_{\{u_n\leq\delta\}} \frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}\varphi, \quad \forall\ \delta>0.$$

Usando (4.5), se tiene que $\chi_{\{u_n\leq\delta\}}\to\chi_{\{u\leq\delta\}}$ c.t.p. en $\{u\neq\delta\}$ para todo $\delta>0$. Además, nuevamente por (4.5), tenemos que

$$\frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}}\to\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\text{ c.t.p. en }\Omega.$$

Aplicando el Lema de Fatou 4.1 a la integral, obtenemos que

$$\int_{\{u=0\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi\leq\limsup_{n\to+\infty}\int_{\{u_n\leq\delta\}}\frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}}\varphi,\quad\forall\,\delta>0.$$

Gracias al **Paso 6** concluimos que

$$\int_{\{u=0\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\phi=0.$$

Paso 8. Límite de $\displaystyle\int_{\{u_n>\delta\}}\frac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma}}\phi$ cuando $n\to+\infty$ y cuando $\delta\to0$.

Primero, podemos usar la igualdad

$$\int_{\{u_n>\delta\}}\frac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma}}\phi=\int_{\Omega}\frac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma}}\chi_{\{u_n>\delta\}}\phi.$$

Observemos que

$$0\leq\frac{f(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma}}\chi_{\{u_n>\delta\}}\phi\leq\frac{f(x)}{\delta^{\gamma}}\varphi\in L^1(\Omega),$$

debido a que $\varphi\in L^{\infty}(\Omega)$ c.t.p. en $\{u\neq\delta\}$ para todo $\delta>0$.

Además, se tiene que

$$\frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}}\to\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\text{ y }\chi_{\{u_n>\delta\}}\to\chi_{\{u>\delta\}}\text{ c.t.p. en }\{u\neq\delta\}\quad\forall\,\delta>0.$$

Como $C=\{\delta>0:\text{meas}\{u=\delta\}>0\}$ es como mucho numerable, tomando $\delta\notin C$, por el Teorema de la Convergencia Dominada 1.2

$$\int_{\{u_n>\delta\}}\frac{f(x)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}}\varphi\to\int_{\{u>\delta\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi\text{ cuando }n\to+\infty\quad\forall\,\delta\notin C$$

y

$$\int_{\{u>\delta\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi\to\int_{\{u>0\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi\text{ cuando }\delta\to0\text{ con }\delta\notin C.$$

Finalmente, gracias al **Paso 7**, concluimos que

$$\int_{\{u>\delta\}}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi\to\int_{\Omega}\frac{f(x)}{u^{\gamma}}\varphi.$$

***Observación* 4.2.** *Hemos estudiado la convergencia del término de la derecha de (Q_n) ya que, gracias al Teorema de la Convergencia Dominada 1.2, resulta inmediato obtener el límite de los términos de la izquierda.*

Finalmente, uniendo los resultados obtenidos en estas dos secciones, obtenemos una mejora del artículo [2] pues tenemos demostrado el Teorema 4.1 del artículo [4].

Conclusiones

En lo que al contenido matemático se refiere, es claro que las conclusiones más relevantes son los teoremas de existencia y regularidad obtenidos en cada una de las secciones de los Capítulos 3 y 4. Sin embargo, de este trabajo me llevo mucho más que los resultados y demostraciones expuestas.

Es cierto que, para poder entender los resultados de este trabajo, ha hecho falta un duro estudio sobre EDPs, espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev. No obstante, el orden en el que este estudio y este trabajo llegó a mí no es el usual.

Por suerte, al terminar el Grado en Matemáticas en la Universidad de Almería pude realizar mi TFG [12] sobre homogeneización de ecuaciones en derivadas parciales, trabajo que me asentó bases sobre la teoría expuesta en este texto. Además, en octubre del 2021 pude empezar a trabajar como investigador asociado a proyecto en la Universidad de Granada, donde empecé a estudiar artículos sobre existencia y regularidad de soluciones de problemas como el que se estudia en este trabajo.

A partir de ahí, tras algunos meses de investigación, pudimos obtener mejores resultados como los que presentamos en el Capítulo 4. Estos, y más resultados en [4], están pendientes de publicar. Sin embargo, esta investigación me han permitido dar charlas en eventos oficiales, siendo un primer destino el Workshop de Análisis Funcional y Ecuaciones en Derivadas Parciales celebrado en junio de 2022 en Mojácar y también Zaragoza en julio de 2022 al XXVII CEDYA - XVII CMA.

Esto no hubiese sido posible y aprovecho para agradecer enormemente a mis tutores, José Carmona Tapia y Pedro J. Martínez Aparicio por haberme ayudado en todo momento y haberme ofrecido todas estas oportunidades que son más que amplias para poder comenzar una labor investigadora, meta personal que tengo para mi futuro.

Finalmente, concluir que este trabajo refleja el artículo [2], el cual ha sido para mí una chispa que me ha producido grandes oportunidades para poder comenzar el oficio como investigador. Por mi parte, no quedan más que ganas de poder seguir investigando y estudiando esta rama de las Matemáticas.

Bibliografía

[1] D. Arcoya, L. Boccardo, *Regularizing effect of the interplay between coefficients in some elliptic equations*, Journal of Funtional Analysis, 268 (2015), 1153–1166.

[2] L. Boccardo, L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*. Calc. Var. 37, 363–380 (2010).

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin 2010.

[4] J. Carmona, A. J. Martínez-Aparicio, P. J. Martínez-Aparicio, M. Martínez-Teruel, *Existence and regularity of solutions in a semilinear problem with singularity in the datum*, [pendiente de publicación].

[5] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2, 193-222, 1977.

[6] D. Giachetti, P. J. Martínez-Aparicio, F.Murat, *A semilinear elliptic equation with a mild singularity at* $u = 0$*: Existence and homogenization*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 107 (2017), 41-77.

[7] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[8] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, Hoboken, 1978.

[9] A.V. Lair, A.W. Shaker, *Entire solution of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 200, 498-505, 1996.

[10] A.V. Lair, A.W. Shaker, *Classical and weak solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 211, 371-385, 1997.

[11] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On a Singular Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society, 111 (1991), 721-730.

[12] M. Martínez Teruel, *Homogeneización de Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas*, TFG,http://hdl.handle.net/10835/13175.

[13] G. Stampacchia. *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 15 (1965) no. 1, pp. 189-257. doi : 10.5802/aif.204. http://www.numdam.org/articles/10.5802/aif.204/

[14] C.A. Stuart, *Existence and approximation of solutions of non-linear elliptic equations*, Math. Z. 147, 53-63, 1976.