
VERSIONES DEL TEOREMA DE ROLLE

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor:

Ainara Reyes Giménez

Tutor:

Antonio Morales Campoy

GRADO EN MATEMÁTICAS



JUNIO, 2016
Universidad de Almería

Índice general

1	Objetivos	1
2	Antecedentes bibliográficos	3
2.1.	Terminología y conocimientos previos	3
2.2.	Biografía de Rolle	6
2.3.	Orígenes y evolución del teorema de Rolle	7
2.4.	Método de las cascadas	9
2.5.	Algunas aplicaciones del teorema de Rolle	15
3	Resultados	21
3.1.	Versión finito-dimensional del teorema de Rolle	21
3.2.	Espacios donde no se cumple el teorema de Rolle	26
3.3.	Versiones complejas del teorema de Rolle	32
3.4.	Localización y separación de puntos críticos	36
4	Conclusiones	41
	Bibliografía	43

Abstract in English

In this project we will discuss of Rolle's theorem, which is a result of mathematical analysis with a large number of applications. This theorem is named after the French mathematician Michel Rolle, whose got this result to provide a method for studying the roots of a polynomial.

We begin introducing Rolle's biography and the evolution of the theorem from its origins to today. Initially, this method was motivated by the interest of Rolle in the study of the roots of polynomials and he did not use the concept of derivative as done today.

Later, we study Rolle's theorem for vector functions. Although his generalization can not possible, we can get some versions of the theorem in terms of the euclidean scalar product. Once studied the finite-dimensional case, we give way to study the theorem in infinite-dimensional case, where we will give some examples of Rolle's theorem is not valid.

Finally, we study that is not possible a generalization of Rolle's theorem for holomorphic functions but we can get a version of this theorem in terms of the real and imaginary parts of the derivative. As the critical points of holomorphics functions play an important role in the study of the zeros of these functions give several results to locate and separate the critical points of polynomials.

Resumen en español

En este trabajo hablaremos del teorema de Rolle, el cual es un resultado del análisis matemático con un gran número de aplicaciones. Este teorema debe su nombre al matemático francés Michel Rolle, quien obtuvo este resultado con el fin de dar un método para el estudio de las raíces de un polinomio.

Comenzamos el trabajo con la biografía de Rolle y el estudio de la evolución del teorema de Rolle desde sus orígenes hasta la actualidad. Inicialmente, este resultado estaba motivado por el interés de Rolle en el estudio de las raíces de polinomios y no usaba el concepto de derivada tal como se hace hoy en día.

Posteriormente, estudiamos el teorema de Rolle para funciones vectoriales. Aunque no es posible su generalización sí podemos obtener varias versiones del teorema en términos del producto escalar euclídeo. Una vez estudiado el caso finito-dimensional, damos paso a estudiar el teorema en el caso infinito-dimensional, donde daremos algunos ejemplos de que el teorema de Rolle no es válido.

En último lugar, estudiamos que tampoco es posible una generalización del teorema de Rolle para funciones holomorfas pero sí podemos obtener una versión en términos de las partes real e imaginaria de la derivada. Dado que los puntos críticos de las funciones holomorfas juegan un papel muy importante en el estudio de los ceros de estas funciones daremos también varios resultados para localizar y separar los puntos críticos de polinomios.

Objetivos

El teorema de Rolle es un resultado clásico del análisis matemático para funciones reales el cual tiene múltiples consecuencias y aplicaciones. Debe su nombre al matemático francés Michel Rolle que en el siglo XVII obtuvo este resultado en un ambiente más restringido que el de la versión actual. De hecho, inicialmente sólo se aplicaba al estudio de las raíces de polinomios y en su enunciado no aparecían los conceptos analíticos de continuidad y derivabilidad. En este trabajo, por un lado vamos a hacer un estudio del teorema de Rolle desde sus orígenes, y por el otro, vamos a estudiar algunas de versiones suyas en diversos ambientes.

A continuación pasamos a contar brevemente los principales objetivos que queremos alcanzar en este trabajo. Empezamos el capítulo de antecedentes bibliográficos introduciendo la terminología y conocimientos previos que vamos a necesitar posteriormente. Seguidamente se dan unas pinceladas de la biografía de Rolle y se estudian los orígenes del teorema de Rolle así como su evolución hasta llegar a la versión que manejamos hoy en día. El interés de Rolle era localizar las raíces de polinomios con herramientas algebraicas. A este efecto diseñó el método de las cascadas que estudiaremos con detalle. Para finalizar este capítulo daremos algunas aplicaciones directas del teorema de Rolle al estudio de las ecuaciones diferenciales y algunas consecuencias menos conocidas de este teorema para funciones reales.

Una vez sentadas las bases de este trabajo dedicamos el tercer capítulo a dar versiones del teorema en diversos ambientes. Empezamos dando una versión finito-dimensional del teorema de Rolle. Aunque la generalización directa del teorema de Rolle para funciones vectoriales no es posible, sí podemos obtener interesantes versiones del teorema para este tipo de funciones en términos del producto escalar euclídeo. Como consecuencia de una de estas versiones obtenemos el teorema del valor medio generalizado, y por tanto, también el teorema de Rolle real. Una vez abordado el caso finito-dimensional tiene sentido estudiar el caso infinito-dimensional. Damos algunos ejemplos de espacios de Banach infinito-dimensionales donde falla el teorema de Rolle, como por ejemplo el espacio l_2 .

Finalmente, estudiamos las posibles generalizaciones o versiones del teorema de Rolle para funciones holomorfas. Tampoco es posible una generalización directa del teorema para estas funciones. No obstante, como pasaba en el caso finito-dimensional, podemos obtener una versión del teorema de Rolle para funciones holomorfas, esta vez en términos de las partes real e imaginaria de la derivada de la función.

Dado que los puntos críticos de las funciones holomorfas juegan un papel muy importante en el estudio de los ceros de dichas funciones, dedicamos la última sección del trabajo a estudiar los puntos críticos de ciertas funciones usando una consecuencia del teorema de Rolle para polinomios. Concretamente, damos varios resultados que permiten localizar y separar los puntos críticos de polinomios de variable compleja y de variable real.

De entre todas las referencias consultadas destacamos los artículos [9], [4], [5], [3] y [6].

Antecedentes bibliográficos

Comenzamos este trabajo con una sección dedicada a dar las definiciones y notaciones que necesitaremos a lo largo del trabajo. A continuación, realizaremos un recorrido por la biografía de Michel Rolle. Dedicaremos la siguiente sección a hablar de los orígenes y de la evolución del teorema que hoy en día se conoce como teorema de Rolle.

Después estudiaremos en profundidad del método de las cascadas, el cual se utiliza en el estudio de los ceros de un polinomio. Cerramos el capítulo dando algunas aplicaciones del teorema.

2.1 Terminología y conocimientos previos

A lo largo de este trabajo $[a, b]$ denotará un intervalo cerrado y acotado no trivial y (a, b) el intervalo abierto asociado.

Comenzamos recordando la versión más extendida del teorema de Rolle:

Teorema 2.1. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Como consecuencia de este teorema se tiene el teorema del valor medio, que es un teorema fundamental del cálculo diferencial, muy importante en el estudio de límites, en ecuaciones diferenciales y en numerosas otras aplicaciones.

Teorema 2.2. *Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

La demostración de este teorema consiste básicamente en aplicar directamente el teorema de Rolle a una función auxiliar definida para este fin.

Veamos algunas definiciones que vamos a usar en este trabajo.

Denotaremos \mathbb{N} como el conjunto de los números naturales, \mathbb{R} como el conjunto de los números reales y \mathbb{C} como el conjunto de los números complejos. Si $n \in \mathbb{N}$, denotaremos \mathbb{R}^n como el producto cartesiano de \mathbb{R} consigo mismo n veces, es decir, el conjunto de todas las n -uplas de elementos de \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por $x \cdot y$ su producto escalar euclídeo y por $\|x\|$ la norma euclídea de x .

Introducimos ahora ciertas definiciones necesarias en \mathbb{R}^n .

Definición 2.1. *Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, $B(x_0, r)$ denotará la bola abierta centrada en x_0 y de radio r , es decir:*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

$\bar{B}(x_0, r)$ la bola cerrada centrada en x_0 y de radio r :

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

y $S(x_0, r)$ la esfera centrada en x_0 de radio r :

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}.$$

Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ denotaremos por $Fr(A)$ a la frontera de A . En particular:

$$Fr(\overline{B}(x_0, r)) = S(x_0, r).$$

Además, denotaremos por \overline{A} la clausura de A . Claramente:

$$\overline{B(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r).$$

En este trabajo también consideraremos espacios de Banach de dimensión infinita como l_p con $1 \leq p < \infty$, cuya norma viene dada por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además, a lo largo del trabajo se va a hablar de diversos tipos de diferenciabilidad. En el caso de funciones reales de variable real hablaremos de derivada, para funciones entre espacios euclídeos hablaremos de diferenciabilidad, para funciones complejas de variable compleja hablaremos de holomorfía y para funciones entre espacios normados hablaremos de diferenciabilidad de Fréchet.

En dimensión finita, para los fines del teorema de Rolle, es suficiente considerar \mathbb{R}^n con la norma euclídea. De hecho, se sabe que todos los espacios vectoriales n -dimensionales reales son isomorfos a \mathbb{R}^n , todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes y además la diferencial de una función es invariante bajo normas equivalentes.

En lo que sigue, E representará a un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|$ y U a un abierto de E .

Definición 2.2. Se dice que una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en $u \in U$ si existe una transformación lineal y continua $T_u : E \rightarrow \mathbb{R}$ y una función continua real $E(u, h)$ tal que:

$$f(u + h) - f(u) = T_u(h) + \|h\| E(u, h) \quad (2.1)$$

para $\|h\| < r$, donde $E(u, h) \rightarrow 0$ cuando $\|h\| \rightarrow 0$.

La derivada de Fréchet de f en u viene dada por T_u . Además, en caso de existir, es única y se denota por $f'(u)$. Esta definición se extiende a funciones con imagen en un espacio de Banach F . En este caso, $f'(u)$ es una transformación lineal y continua de E en F . Este concepto fue originalmente establecido por M. Fréchet (1878 – 1973).

En particular, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en u , $f'(u)$ viene dada por el gradiente de f en u , es decir, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface la siguiente igualdad:

$$f'(u)(x) = \nabla f(u) \cdot x$$

para todo $x, u \in \mathbb{R}^n$. Lo que es más, si f es un campo vectorial Fréchet diferenciable, entonces $f'(u)$ es la transformación lineal asociada a la matriz jacobiana de f en u . No obstante, pueden existir el gradiente o la matriz jacobiana de la función en un

punto, pero no la derivada Fréchet. Un ejemplo sencillo es la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Su gradiente en el punto $(0, 0)$ existe:

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

y, sin embargo, no existe $f'(0, 0)$.

Una propiedad muy interesante de la derivada Fréchet es que satisface la regla de la cadena. Si f es Fréchet diferenciable en u , g es diferenciable en $f(u)$ y además $h = g \circ f$ está definida en un entorno de u entonces la función h es también Fréchet diferenciable en u y se satisface que:

$$h'(u) = g'(f(u)) \circ f'(u).$$

Seguidamente presentamos algunos ejemplos sobre la derivada Fréchet muy interesantes.

1. Sea T una transformación lineal entre dos espacios de Banach E y F . Es fácil calcular:

$$T'(u)(x) = T(x).$$

En este caso, la ecuación (2.1) se satisface con $E(u, h) = 0$.

2. Si H es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces la aplicación bilineal $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, x \rangle$ es Fréchet diferenciable para todo $u \in H$. De hecho, por las propiedades algebraicas del producto interno, para todo h y u en H :

$$\langle u + h, u + h \rangle - \langle u, u \rangle = 2\langle u, h \rangle + \|h\|^2.$$

Por tanto:

$$f'(u)(x) = 2\langle x, u \rangle.$$

En particular, esto prueba que la aplicación $\rho(x) = \|x\|_2$ es Fréchet diferenciable fuera del origen, para cualquier espacio de Hilbert. De hecho, por la regla de la cadena, para todo $u \neq 0$, se tiene:

$$\rho'(u)(x) = \frac{1}{\|u\|_2} \langle x, u \rangle.$$

3. En caso de la norma l_1 , la función $x \mapsto \|x\|_1$ no es Fréchet diferenciable en ningún punto u de l_1 . Veámoslo. Sin perder generalidad se puede suponer que $u \in l_1$ tiene norma 1. Por la definición de derivada Fréchet se concluye que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|u + h\|_1 + \|u - h\|_1 \leq 2 + \epsilon \|h\|_1, \tag{2.2}$$

si $\|h\|_1 < \delta$. Sea $\epsilon < \frac{1}{2}$ y dado $\delta > 0$ correspondiente a ϵ . Como $u \in l_1$, existe un índice i tal que $|u_i| < \frac{\delta}{8}$. Sea $h = \frac{\delta}{2}e_i$, donde:

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

con el número 1 situado en la posición i . Se puede verificar que:

$$|u_i + \frac{\delta}{2}| > |u_i| + \frac{\delta}{4}, \quad |u_i - \frac{\delta}{2}| > |u_i| + \frac{\delta}{4}.$$

Por tanto:

$$\|u + h\|_1 > 1 + \frac{\delta}{4}.$$

Dado que $\|h\|_1 = \frac{\delta}{2}$, entonces por la ecuación (2.2) se llega a la contradicción $\frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{4}$.

2.2 *Biografía de Rolle*

Michel Rolle nació en 1652 en Ambert, una pequeña ciudad de la región francesa de Auvernia, en el seno de una familia de clase media. Rolle no recibió una educación formal, sino sólo una educación básica ya que tuvo problemas para asistir a la escuela. Después de esta corta enseñanza, Rolle se hizo autodidacta y fue entonces cuando nació su interés por las matemáticas. Su predilección por las matemáticas le llevó a convertirse en un matemático con gran cantidad de contribuciones.

Posteriormente, comenzó a trabajar como escribano para algunos notarios y como asistente de varios abogados en su ciudad natal. A los veintitrés años se trasladó a vivir a París, donde siguió trabajando como escribano. Allí, se casó y tuvo hijos. Para poder mantener a su familia se vio obligado a buscar otro trabajo con el que aumentaran sus ingresos económicos y gracias a sus conocimientos en el campo de las matemáticas encontró un trabajo con mayor salario.

Siete años después de su llegada a París, Rolle encontró una solución al problema planteado por Jacques Ozanam (1640-1718). La solución de este problema, escrito en lenguaje actual, radica en obtener cuatro números x, y, w, z , con $x < y < w < z$, que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z - w &= a^2, & w - y &= b^2, & y - x &= c^2, \\ z - y &= d^2, & z - x &= e^2, & w - x &= f^2, \\ x + y + w &= g^2, \end{aligned}$$

donde a, b, c, d, e, f y g son enteros.

Rolle encontró cuatro números, de siete dígitos cada uno, satisfaciendo dichas condiciones. Cabe resaltar que Ozanam pensaba que el menor número de los cuatro que podían satisfacer las propiedades de su problema debía tener, al menos, cincuenta dígitos. Claramente, encontrar una solución a este sistema no es nada fácil y gracias a esta solución dada, Rolle ganó una gran reputación matemática y además consiguió que el regulador de finanzas y secretario de estado, John-Baptiste Colbert, le consiguiese una pensión para que pudiese dedicarse a sus estudios. Por otro lado, Rolle también fue recompensado por la resolución al problema de Ozanam por el secretario de estado de guerra francés, el Marqués de Louvois (1641 – 1691), quien lo contrató como tutor de uno de sus hijos. Poco más tarde, gracias a la confianza que el secretario depositó en Rolle, éste fue elegido como miembro de la Académie Royale des Sciences. Gracias a su puesto de geómetra pudo dedicarse plenamente al estudio de las matemáticas.

Las contribuciones de Rolle cubrieron un amplio número de áreas matemáticas. Una de sus principales áreas de estudio fue el análisis diofántico, aunque también trabajó en el campo del álgebra. Su actividad principal se centraba en el álgebra de ecuaciones, campo de las matemáticas en el que logró gran reputación, lo cual le permitió

publicar su trabajo más famoso, *Traité d'algèbre*, en 1690. En este trabajo podemos encontrar interesantes y numerosas aportaciones a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, utilizando algoritmos euclidianos para resolver ecuaciones diofánticas lineales y para obtener el máximo común divisor de dos polinomios. Fue el primero en usar el símbolo $\sqrt[n]{x}$, como notación para la raíz n -ésima de x .

En 1691, publicó *Démonstration d'une Methode, pour resoudre les Egalitez de tous les degrez*, o también llamado simplemente *Démonstration*, donde Rolle rompió con las reglas cartesianas y, además, adoptó la notación :

$$\text{si } a > b, \text{ entonces } -b > -a,$$

y comenzó a usar la notación que usamos actualmente para denotar una igualdad.

Cuando en 1696 L'Hôpital publica *Analyse des infiniment petits* se produjo una división de opiniones sobre el cálculo infinitesimal entre los miembros de la Academia de París. Por un lado encontrábamos a los seguidores del nuevo cálculo y por otro los críticos de este. Rolle adoptó una postura muy crítica con los infinitesimales pues consideraba que no se basaba en sólidas bases de razonamiento y mantuvo un famoso enfrentamiento dialéctico con las ideas de Pierre Varignon (1654–1722) que defendía el uso de los mismos. Para varios historiadores del análisis, Rolle es uno de los principales exponentes de lo que se considera el primer gran ataque en contra del rigor del nuevo análisis, más concretamente contra la viabilidad de los infinitesimales. El segundo gran ataque surgiría pocos años después en Inglaterra con el conocido *The analyst; or a discourse addressed to an Infidel Mathematician wheren it is examined wheter the Object, Principles and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*, artículo del obispo George Berkeley (1685 – 1753), que tuvo una gran influencia posterior en el desarrollo y fundamentación del análisis matemático.

El día 8 de noviembre de 1719 Rolle sufrió un ataque de apoplejía que le llevó a la muerte a la edad de 68 años.

2.3 Orígenes y evolución del teorema de Rolle

A pesar de que en la actualidad el teorema de Rolle es conocido por ser un resultado de análisis matemático, en sus inicios fue presentado y demostrado como un resultado de álgebra.

A continuación, vamos a estudiar cómo este teorema comienza siendo un resultado para la resolución de ecuaciones, sin llegar a alcanzar mucha relevancia durante el siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX para, posteriormente, en la segunda mitad del XIX, convertirse en un resultado fundamental del análisis.

El origen del teorema de Rolle es muy antiguo, según los historiadores las primeras referencias sobre dicho teorema aparecen en un libro de Bhaskara (1114 – 1185). A partir de los trabajos de su predecesor Manjula (930 a.C.), que había llegado a obtener relaciones del siguiente tipo:

$$\text{sen } a - \text{sen } a' = (a - a') \cos a'$$

Bhaskara llegó a deducir que el seno y el coseno mantienen una relación del tipo que hoy indicamos como derivada una de la otra. A partir de esta observación se llegó a

la conclusión de que cuando la ecuación de un planeta está en su punto más distante o en su punto más próximo a la tierra, la ecuación del centro se anulaba y también se obtuvo que para una cierta posición intermedia, la ecuación diferencial de la ecuación del centro se anulaba. Esta es la primera expresión que se realiza del teorema de Rolle y, posteriormente, no se encuentran más indicaciones de este resultado hasta la versión ofrecida por Michel Rolle en su libro *Traité d'algèbre*. Con este teorema, Rolle quiso dar un método para localizar raíces de un polinomio, el método de las cascadas, que es un método algebraico para la localización de raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado con una incógnita.

El libro de Rolle fue aceptado en Europa pero también tuvo grandes críticas por no incluir la demostración de su método de localización. Por ello, en 1691 publicó *Démonstration*, donde sí incluye la demostración.

El teorema de Rolle fue difundido en Europa rápidamente, así lo podemos encontrar en 1708 en el libro de Charles-René Reyneau (1656 – 1728), *Analyse démontrée ou la methode de résoudre les problèmes des mathematiques*, y en un artículo de Colin Maclaurin (1698 – 1746) publicado en *Philosophical Transaction* en 1729 e incluido en su tratado póstumo de álgebra de 1748.

En ninguna de las referencias citadas anteriormente se considera que el teorema de Rolle fuera un teorema de cálculo, sino dentro de su contexto original como un resultado de álgebra.

La primera vez que encontramos este teorema en un tratado relacionado con el análisis es en 1755 en *Institutiones calculi differentials*, donde Leonhard Euler (1707 – 1783) incluye una versión del teorema expresado en términos del lenguaje del cálculo para la resolución de ecuaciones. Euler presentó el teorema de Rolle de forma muy diferente a como lo hicieron sus predecesores. Así, obtiene la ventaja de que con la ayuda del cálculo no necesita utilizar el método de las cascadas, aunque sigue trabajando en un contexto de ecuaciones polinómicas. Supongamos la ecuación:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \dots = 0$$

con raíces distintas $p < q < r < \dots$. Euler considera la función general:

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots$$

en la que x crece desde $-\infty$. En el libro de Euler citado anteriormente podemos encontrar un fragmento que nos indica que la función z no se anula antes de poner $x = p$ y si esto sucede es porque $z = 0$ y, por otro lado, como los valores de x se incrementan más allá de p , los valores de z serán positivos o negativos hasta llegar al valor $x = q$. Por tanto, es necesario, ya que los valores del movimiento de z van desde cero hasta cero, que z tenga un máximo o mínimo en medio.

Euler había demostrado anteriormente que los valores de x que hacen máxima o mínima a z son las raíces de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + \dots = 0.$$

Así pues, dado que dos raíces reales cualesquiera de la ecuación $z = 0$ existe una raíz de la derivada, y como la función z alcanza un máximo o un mínimo, se deduce que si la ecuación $z = 0$ tiene dos raíces reales, entonces la ecuación:

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

tiene necesariamente una raíz real. En general, si la ecuación $z = 0$ tiene m raíces reales, la ecuación:

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

necesariamente tiene $m - 1$ raíces.

La siguiente versión, bastante más abreviada, la encontramos en *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques* de Joseph Louis Lagrange (1736–1813), quien atribuye este teorema a Euler.

En años posteriores el teorema apareció en una serie de libros de texto sobre la teoría de ecuaciones, pero seguía sin ser asociado a Rolle. Según indica Cajori, la primera persona que otorga este teorema a Rolle es Wilhelm Drobisch (1802 – 1896). Drobisch fue profesor de matemáticas en la Universidad de Leipzig y se refiere a este teorema como teorema de Rolle en un libro de texto en 1834. Además, incluye una cita en la que indica que Lagrange fue su fuente (aunque Lagrange no se lo asignase a Rolle).

Siete años después, François Moigno (1804 – 1884), profesor de matemáticas en College Sainte Geneviève de París, atribuye este teorema a Rolle en un artículo que trata sobre la determinación de las raíces.

Lo mismo hace el matemático e historiador de matemáticas, Orly Terquem en 1844. Sin embargo, según Cajori, debemos esperar hasta 1868, cuando el teorema se atribuye definitivamente a Rolle. Es a partir de una edición alemana de *Cours d'algèbre supérieure* de Joseph Serret (1819 – 1885) cuando la asociación con Rolle se hizo más conocida.

Hasta mediados del siglo XIX, el teorema seguía asociado a la resolución de ecuaciones y según indica Cajori fue Pierre-Ossian Bonnet (1819 – 1892) quien asoció los dos teoremas fundamentales del análisis, el teorema del valor medio y el teorema de Rolle, aportando la demostración del primero a partir del segundo.

Finalmente, es Charles Hermite (1822 – 1901) quien en 1873 utiliza el teorema de Rolle en el contexto de la teoría de series de Taylor dando la autoría del teorema de forma clara a Rolle en su *Cours d'analyse*.

A principios del siglo XX volvieron a surgir ciertas dudas sobre la auténtica autoría de Rolle debido a que se había extendido entre los matemáticos únicamente la parte breve expresada en *Traité d'algèbre* y no la versión de *Démonstration*. Posteriormente, Gustaf Eneström (1852 – 1923) afirma en un artículo en *Bibliotheca mathematica*, después de haber leído Reyneau, que *Démonstration* era suficiente para despejar cualquier duda.

2.4 Método de las cascadas

Michel Rolle aportó un método algebraico para localizar las raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado con una incógnita. El método aparece publicado en su *Traité d'algèbre*, con el nombre “método de las cascadas”.

Bajo una perspectiva analítica, el método de las cascadas de Rolle consiste en derivar sucesivamente la ecuación polinómica original hasta llegar a una ecuación de primer grado, la solución de esta ecuación se usa para acotar o delimitar las soluciones de la ecuación derivada anterior, que es una ecuación de segundo grado. A su vez, estas soluciones sirven para acotar las soluciones de la derivada anterior, y así sucesivamente hasta llegar a la ecuación original, cuyo número de raíces quedan acotadas

por las de su derivada. A las derivadas sucesivas de la ecuación original Rolle las llamó “cascadas”.

En terminología actual, el método de las cascadas de Rolle se sustenta en el siguiente resultado:

Sea $f(x)$ una función polinómica. Entre dos raíces reales sucesivas de $f'(x) = 0$ no puede haber más de una raíz real de $f(x) = 0$.

Rolle no considera la derivada de la una función. Como veremos a continuación lo que hace es someter a la ecuación a un proceso de preparación por el cual, manipulando algebraicamente el polinomio original obtiene en varias etapas otro polinomio con coeficiente líder mónico y cuyas raíces reales son todas positivas, y se relacionan con las del polinomio de partida mediante un cambio de variable. Así pues, dada una ecuación polinómica:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0,$$

Rolle define una multiplicación por una progresión e iguala a cero. Aunque su método es válido para cualquier progresión, solía utilizar la progresión $0, 1, 2, 3, \dots$. Además, esta progresión es la más interesante ya que con ella obtenemos de forma algebraica la derivada de la ecuación.

Si aplicamos este método a la ecuación dada anteriormente obtenemos la siguiente expresión:

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot x^2 + \dots + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-1} + n \cdot a_n \cdot x^n = 0.$$

Ahora dividiendo por x obtenemos:

$$a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = 0$$

(este proceso se puede expresar como $f'(x) = 0$ si llamamos $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$). En cada iteración, Rolle obtiene una ecuación a la cual llama *cascada*.

Nótese que siempre trabajamos con polinomios que tienen coeficientes con signos alternos para asegurarnos que sus raíces son todas positivas. Esto se debe a la regla de los signos de Descartes:

El número de raíces reales positivas de un polinomio $f(x)$ es igual al número de cambios de signo término a término de $f(x)$ o menor por una diferencia par.

Análogamente, el número de raíces reales negativas viene dado por el número de cambios de signo del polinomio $f(-x)$. Como $f(x)$ es un polinomio con signos alternos, $f(-x)$ no tiene cambios de signo y, por ello, $f(x)$ no tiene raíces reales negativas. En consecuencia, $f(x)$ tiene todas sus raíces reales positivas.

Así pues, cuando se tiene un polinomio cuyos coeficientes no tienen signos alternos, Rolle realiza una transformación previa al método basada en el siguiente cambio de variable:

$$x = \left(\frac{a}{c} + 1\right) - y,$$

donde a es el valor absoluto del mayor coeficiente negativo y c el valor absoluto del coeficiente del término de mayor grado del polinomio dado.

Veamos un claro ejemplo de como aplicar la transformación preliminar para obtener un polinomio con signos alternos y poder aplicar el método de las cascadas. Dada la ecuación:

$$x^5 + 10x^4 + 2x^3 - 110x^2 + x - 120 = 0,$$

debemos aplicar el cambio de variable ya que no tiene todas las raíces reales positivas puesto que hay signos positivos consecutivos, entonces realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 121 - y,$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$(121 - y)^5 + 10(121 - y)^4 + 2(121 - y)^3 - 110(121 - y)^2 + (121 - y) - 120 = 0$$

y haciendo unos pequeños cálculos obtenemos:

$$-y^5 + 615y^4 - 151252y^3 + 18594686y^2 - 1142718072y + 28082946024 = 0,$$

que sí tiene todos los coeficientes con signos alternos, por lo que sus raíces serán todas positivas.

Michel Rolle justifica este proceso previo con un corolario en su libro *Démonstration*:

De la misma manera, es evidente que las raíces (todas positivas y distintas) son números colocados cada uno entre estos límites y, por consiguiente, si las raíces son substituidas en una ecuación cuyas raíces son estos límites, esta substitución dará resultados alternadamente positivos y negativos, o negativos y positivos.

Una vez realizado el cambio de variable podemos aplicar el método de forma habitual y tras la obtención de las raíces de la ecuación obtenido deshacemos el cambio para obtener las raíces de la ecuación dada.

Veamos un par de ejemplos del método de las cascadas. Este primer ejemplo tiene dos soluciones enteras positivas y dos negativas y viene dado por la ecuación:

$$x^4 + 5x^3 - 25x^2 - 65x + 84 = 0.$$

En este caso, antes de aplicar el método tenemos que realizar un cambio de variable ya que la ecuación no tiene signos alternos positivos y negativos. En este caso, el cambio de variable es el siguiente:

$$x = 66 - y.$$

Sustituyendo $x = 66 - y$ en $f(x)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(66 - y) &= (66 - y)^4 + 5(66 - y)^3 - 25(66 - y)^2 - 65(66 - y) + 84 \\ &= y^4 - 269y^3 + 27101y^2 - 1211959y + 20299110. \end{aligned}$$

Para simplificar, tomamos $f(66 - y) = g(y)$. Entonces $g(y)$ tiene todas sus raíces reales positivas.

En primer lugar, obtenemos todas las cascadas a partir de la ecuación inicial tal como se ha explicado anteriormente:

$$\begin{aligned}4y^3 - 807y^2 + 54202y - 1211959 &= 0 \\12y^2 - 1614y + 54202 &= 0 \\24y - 1614 &= 0\end{aligned}$$

Como las raíces de cada cascada están situadas entre unos límites y todas ellas van a ser positivas ya que todas las cascadas tienen signos alternos, el límite inferior de todas las cascadas va a ser 0. El límite superior viene dado por:

$$\frac{a}{c} + 1$$

donde a y c han sido definidos anteriormente. Los límites intermedios de cada cascada vendrán dados por las raíces obtenidas de la cascada inmediatamente inferior.

Ahora obtenemos las raíces de cada cascada comenzando por la de menor grado. En este caso, de esta cascada obtenemos la solución $y = 68$, la cual vamos a utilizar para obtener la solución de la cascada de segundo orden.

La raíz de la cascada de primer grado va a ser el límite intermedio que acota las raíces de la cascada de segundo orden. Por otro lado, tenemos que el límite superior, obtenido aplicando la fórmula dada anteriormente, es 135 y 0 es el límite inferior. En definitiva, la cascada de segundo orden tiene tres límites que acotan cada una de sus dos raíces, 0, 68 y 135.

Ahora bien, podemos estimar las raíces de esta cascada. Para ello, vamos a acotar sus dos soluciones con los límites dados. Comenzamos tomando como primera aproximación la media de los valores 0 y 68, que es 34. Evaluamos los tres valores en la cascada de segundo grado:

$$\begin{aligned}12(0)^2 - 1614(0) + 54202 &> 0, & 12(34)^2 - 1614(34) + 54202 &> 0, \\12(68)^2 - 1614(68) + 54202 &< 0\end{aligned}$$

y obtenemos que la raíz se encuentra en el intervalo $(34, 68)$ puesto que estos dos valores tienen signos opuestos al evaluarlos. Repetimos el mismo proceso hasta obtener una raíz exacta o una buena aproximación de la raíz. En este caso, hemos obtenido que una buena aproximación de la raíz es 65.

Realizamos el mismo proceso para encontrar la raíz que se encuentra en el intervalo $(68, 135)$ y obtenemos que la raíz es 70.

Dadas las soluciones de la cascada de segundo orden podemos obtener las soluciones de la cascada de tercer orden. En este caso, el límite inferior es 0, los límites intermedios, que raíces de la cascada de segundo orden, son 65 y 70 y el límite superior, obtenido al aplicar la fórmula dada anteriormente, es 302990. Para la obtención de las raíces realizamos el mismo proceso iterativo que en la cascada de segundo orden y obtenemos que las raíces son 63, 67 y 72.

En último lugar, resolvemos la cascada de cuarto orden en cuyo caso el límite inferior es 0, los límites intermedios son 63, 67 y 72 y el límite superior es 1211959, que ha sido obtenido al aplicar la fórmula dada anteriormente. Entonces, las raíces de esta cascada se encuentran en los intervalos $(0, 63)$, $(63, 67)$, $(67, 72)$ y $(72, 1211959)$ y cada intervalo contiene exactamente una raíz. Repitiendo el mismo proceso que con la cascada anterior obtenemos que las soluciones para esta cascada son 62, 65, 69 y 73.

Así pues, hemos obtenido las raíces de la ecuación $g(y) = 0$ y deshacemos el cambio de variable para obtener las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, obteniendo que las raíces de esta son $-7, -3, 1$ y 4 .

El teorema de Rolle también puede usarse para aproximar raíces de polinomios que no tienen soluciones enteras como muestra el siguiente ejemplo:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Como el polinomio no tiene signos alternos realizamos el cambio de variable:

$$x = 7 - y$$

y sustituyendo en $f(x)$ obtenemos:

$$f(7 - y) = g(y) = -y^3 + 24y^2 - 187y + 470 = 0.$$

Ahora obtenemos las cascadas:

$$-3y^2 + 48y - 187 = 0$$

$$-6y + 48 = 0.$$

Dadas las cascadas podemos proceder a usar el método de las cascadas de Rolle para aproximar las soluciones de $g(y)$ y de $f(x)$. Las raíces de la cascada de segundo orden son 6 y 9 aproximadamente.

Resolvemos ahora la cascada $g(y) = 0$. En este caso, el límite inferior es 0, los límites intermedios son 6 y 9 y el límite superior es 188. Para ver que se puede usar el método de las cascadas para obtener las raíces de un polinomio que no tiene soluciones reales vamos a obtener solamente la raíz que se encuentra en el intervalo (6, 9) ya que las otras soluciones se obtienen de forma análoga.

Comenzamos obteniendo la media de los valores 6 y 9, que es 7,5, y evaluamos en el polinomio:

$$-(6)^3 + 24(6)^2 - 187(6) + 470 < 0, \quad -(7,5)^3 + 24(7,5)^2 - 187(7,5) + 470 < 0,$$

$$-(9)^3 + 24(9)^2 - 187(9) + 470 > 0.$$

Nos quedamos con 7,5 y 9 ya que tienen signo opuesto. Repetimos el proceso para estos valores:

$$-(7,5)^3 + 24(7,5)^2 - 187(7,5) + 470 < 0, \quad -(8,25)^3 + 24(8,25)^2 - 187(8,25) + 470 < 0,$$

$$-(9)^3 + 24(9)^2 - 187(9) + 470 > 0.$$

Como podemos ver, nos estamos acercando a la raíz que está entre 6 y 9. Continuando con el proceso llegamos a que $7 + \sqrt{2} \approx 8,414213562$ como queríamos. Vamos a realizar un par de iteraciones más. La media de 8,25 y 9 es 8,625 y ahora evaluamos:

$$-(8,25)^3 + 24(8,25)^2 - 187(8,25) + 470 < 0, \quad -(8,625)^3 + 24(8,625)^2 - 187(8,625) + 470 > 0,$$

$$-(9)^3 + 24(9)^2 - 187(9) + 470 > 0.$$

Ahora tenemos que tomar la media de 8,25 y 8,625, que es 8,4375, y evaluamos:

$$-(8,25)^3 + 24(8,25)^2 - 187(8,25) + 470 < 0, \quad -(8,4375)^3 + 24(8,4375)^2 - 187(8,4375) + 470 > 0,$$

$$-(8,625)^3 + 24(8,625)^2 - 187(8,625) + 470 > 0.$$

Como vemos en cada iteración estrechamos el margen entre el valor real y nuestro valor aproximado. Nótese que $7 + \sqrt{2} \approx 8,414213562$ se corresponde con la raíz $-\sqrt{2}$ de $f(x)$.

Vistos algunos ejemplos sobre la forma de aplicar el método de las cascadas exponemos una idea de la demostración del método de las cascadas del teorema de Rolle.

Consideremos un polinomio mónico $P(z)$ de grado n con raíces reales positivas y distintas $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$, multiplicamos $P(z)$ término a término por la progresión aritmética $y, y + v, y + 2v, \dots, y + nv$. Necesitamos mostrar que la cascada resultante $C(z)$ toma valores positivos y negativos (o, negativos y positivos) para cada dos raíces consecutivas $a_1, a_2 \in P(z)$, tomadas a_1 y a_2 como límites de las raíces de $C(z)$.

Primero consideremos que podemos escribir:

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2)K(z),$$

donde $K(z)$ es un polinomio mónico de grado $n - 2$.

Multiplicamos el producto $(z - a_1)(z - a_2) = a_1 a_2 - (a_1 + a_2)z + z^2$ término a término por $y, y + v, y + 2v$, de donde obtenemos la cascada parcial:

$$C^*(z) = a_1 a_2 y - (a_1 + a_2)z(y + v) + (y + 2v)z^2 = a_1 a_2 y - a_1 y z - a_2 y z - a_1 v z - a_2 v z + y z^2 + 2v z^2.$$

Ahora evaluamos a_1 y a_2 en la cascada parcial obteniendo:

$$C^*(a_1) = (a_1 - a_2)va_1; \quad C^*(a_2) = (a_2 - a_1)va_2.$$

Obsérvese que tanto $C^*(a_1)$ como $C^*(a_2)$ no dependen de y , sino sólo de v , razón por la que el teorema es válido para la multiplicación por cualquier progresión aritmética, aunque realmente Rolle, no señala esta puntualización. También podemos observar como ambos valores $C^*(a_1)$ y $C^*(a_2)$ tendrán signos opuestos. Y es claro que en el caso de utilizar un polinomio $P(z)$ se obtendría la cascada completa $C(z)$, y en este caso:

$$C(a_1) = (a_1 - a_2)va_1K(a_1) \quad y \quad C(a_2) = (a_2 - a_1)va_2K(a_2),$$

donde tenemos que considerar que $K(a_1) \neq 0$ y $K(a_2) \neq 0$. Además, $K(a_1)$ y $K(a_2)$ tienen el mismo signo puesto que:

$$K(z) = (z - a_3)\dots(z - a_n)$$

y habíamos considerado que a_1 y a_2 son mayores que las raíces de $K(z)$.

En las proposiciones siguientes de su libro Rolle llega a probar que estos resultados son los mismos cuando se considera cualquier pareja de raíces consecutivas del polinomio, por lo que su método sería válido.

Es importante destacar dos aspectos: el primero es que el resultado que Rolle demuestra tiene una gran generalidad, puesto que puede utilizar cualquier progresión aritmética, no solo la que produce la derivada. Como segundo aspecto a destacar que la demostración aportada por Rolle en el libro citado anteriormente es el resultado inverso a lo que afirmaba en su libro *Traité d'algebre*. Las raíces de cada polinomio son los límites de la cascada siguiente, la de mayor grado. Mientras que lo que demuestra es que las raíces de cada polinomio son los límites de cada cascada de grado inferior. Esto es lo que Cajori llama el corolario de Rolle, aunque en realidad era la regla original de Rolle. Pero en definitiva, la importancia de la demostración radica en el hecho de que el método de las cascadas ofrece las garantías necesarias para localizar todas las raíces reales de la ecuación original.

2.5 Algunas aplicaciones del teorema de Rolle

En esta sección vamos a estudiar algunas aplicaciones inmediatas del teorema de Rolle tales como sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales y la utilización del teorema en la demostración de otros teoremas.

Comenzamos la sección estudiando el problema de la existencia de solución de una ecuación diferencial dada. El objetivo de este estudio es mostrar algunas aplicaciones interesantes para la resolución de un cierto tipo de ecuaciones diferenciales.

Sean f y g funciones continuas sobre $[a, b]$ y derivables en (a, b) , podemos considerar la siguiente ecuación:

$$F(x) := f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 0. \quad (2.3)$$

En primer lugar podemos considerar el estudio de las soluciones de la ecuación (2.3) que satisfacen una de las siguientes condiciones $f(a) = 0$ y $g(b) = 0$ o bien, $f(b) = 0$ y $g(a) = 0$.

Sea $h(x) = f(x)g(x)$, es claro que $F(x) = h'(x)$. Observese que h satisface las hipótesis del teorema de Rolle, por tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir, que c es solución de la ecuación del problema.

Por otro lado, es claro que se puede pedir una condición de frontera más general:

$$f(a)g(a) = f(b)g(b),$$

por ejemplo, si se satisface el teorema de Rolle para la función h .

Veamos que se cumple la condición dada anteriormente con un sencillo ejemplo. La ecuación:

$$2x \cdot \text{sen}(x + x^2) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) \cdot \text{cos}(x + x^2) = 0,$$

tiene una solución entre 0 y $\sqrt{3}$. Como se puede observar, podemos reescribir la ecuación anterior como $h'(x) = 0$, con $h(x) = f(x)g(x)$, donde:

$$f(x) = \text{sen}(x + x^2) \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 3.$$

Además, $f(0) = 0$ y $g(\sqrt{3}) = 0$.

Consideremos ahora la expresión:

$$F(x) := f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \quad (2.4)$$

donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Veamos las condiciones que debe satisfacer la ecuación 2.4 para tener solución.

La función auxiliar que usaremos debe estar relacionada con el cociente de ambas funciones. Consideramos la función auxiliar:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Ahora bien, nos falta imponer las condiciones de frontera para poder aplicar el teorema de Rolle, por lo tanto, $h(a) = h(b)$, o bien:

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)},$$

que podemos reescribir de la siguiente forma:

$$f(a)g(b) = f(b)g(a).$$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $h(x)$ tenemos garantizada la existencia de, a menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, es decir que la ecuación (3.3) tiene, al menos, una solución en (a, b) bajo la condición de frontera impuesta anteriormente. Consideremos ahora el estudio de la ecuación:

$$F(x) := f'(x) + g'(x)f(x) = 0 \quad (2.5)$$

La idea básica que vamos a tener en cuenta para resolver este problema es usar un procedimiento muy parecido a los anteriores, aunque la expresión $f'(x) + g'(x)f(x)$ no parece ser la derivada de ninguna función conocida, que es el primer paso. Usaremos una función $k(x)$ de tal forma que al manipular el producto $k(x)(f'(x) + g'(x)f(x))$ no se vean afectados los ceros de la función:

$$f'(x) + g'(x)f(x),$$

lo cual lo conseguiremos si utilizamos una función $k(x)$ que no se anule en ningún punto de su dominio. Por otro lado, pediremos que el factor $k(x)$ que aparece en la derivada de la función auxiliar que estamos buscando, sea siempre positivo y que su derivada coincida con sí mismo. Con estas condiciones que debe satisfacer la función, claramente pensamos en la función exponencial como candidata por excelencia. Así, llegamos a la conclusión, tras varios intentos, de que una buena opción para $k(x)$ sería $k(x) = e^{g(x)}$ ya que obtenemos que:

$$e^{g(x)}f'(x) + e^{g(x)}g'(x)f(x) = (e^{g(x)}f(x))'$$

y dado esto podemos concluir que una buena elección para la función auxiliar es $h(x) = e^{g(x)}f(x)$. Obviamente, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y derivables sobre (a, b) entonces $h(x)$ también lo es.

Por otro lado, las condiciones de frontera que debemos imponer para poder aplicar el teorema de Rolle están dadas por la igualdad $h(a) = h(b)$, o lo que es lo mismo, $e^{g(a)}f(a) = e^{g(b)}f(b)$. Así, para cualesquiera dos funciones derivables f y g tales que:

$$e^{g(a)}f(a) = e^{g(b)}f(b),$$

la ecuación 3.4 tiene, al menos, una solución en el intervalo abierto (a, b) .

Terminamos esta sección dando ciertos teoremas del tipo del teorema del valor medio para funciones reales con variable real cuyas demostraciones se obtienen aplicando el teorema de Rolle a una función adecuada.

Teorema 2.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) . Existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) \left(f(c) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right) = - \left(c - \frac{a + b}{2} \right).$$

Demostración:

Sea:

$$K_1 = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] + (x - a)(x - b).$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y $K_1(a) = K_1(b) = 0$. Además,

$$K_1'(x) = f'(x)(2f(x) - f(a) - f(b)) + (2x - a - b).$$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle se obtiene el resultado de la demostración. ■

Para el caso en que $f(c) \neq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, el enunciado anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$f'(c) = -\frac{\left(c - \frac{a+b}{2}\right)}{\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}.$$

Supongamos que $f'(c)$ no es cero. En dicho caso, las pendientes de la recta tangente que pasa por $(c, f(c))$ y de la recta que pasa por $(c, f(c))$ y por $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ son inversas con signo contrario, por tanto, son perpendiculares entre sí.

Si transformamos la función auxiliar utilizada en el teorema anterior del siguiente modo:

$$K_2' = [f(x) - f(a)][f(x) - f(b)] - (x - a)(x - b),$$

aplicando el teorema de Rolle, se obtiene un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c)\left(f(c) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right) = c - \frac{a+b}{2}$$

y, por tanto, los resultados son similares a los anteriores.

En el teorema que vamos a estudiar a continuación aparecen las funciones $M(f)$ e $I(f)$, donde $M(f)$ denotará la media de f , que viene dada por:

$$M(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

e $I(f)$ la media de la función f dada por:

$$I(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a, b) . Si $M(f) = I(f)$, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c)(c - a) = f(c) - f(a).$$

Demostración:

Sea:

$$h(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2}(x - a) - \int_a^x f(t) dt.$$

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Además, $h(a) = 0$ y

$$h(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a) - \int_a^b f(t) dt = (b - a)[M(f) - I(f)] = 0.$$

Por último, aplicando el teorema de Rolle a la función h se obtiene el resultado. ■

Obsérvese que en general, para una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} + \frac{6[M(f) - I(f)]}{(b - a)^2}(c - a).$$

El siguiente teorema ofrece una generalización del teorema del valor medio integral.

Teorema 2.5. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx = f(c)(b - c) + g(c)(c - a).$$

Demostración:

Tomando como función auxiliar:

$$h(x) = (x - b) \int_a^x f(t)dt + (x - a) \int_x^b g(t)dt,$$

con h continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Además, se tiene que:

$$h(a) = h(b) = 0.$$

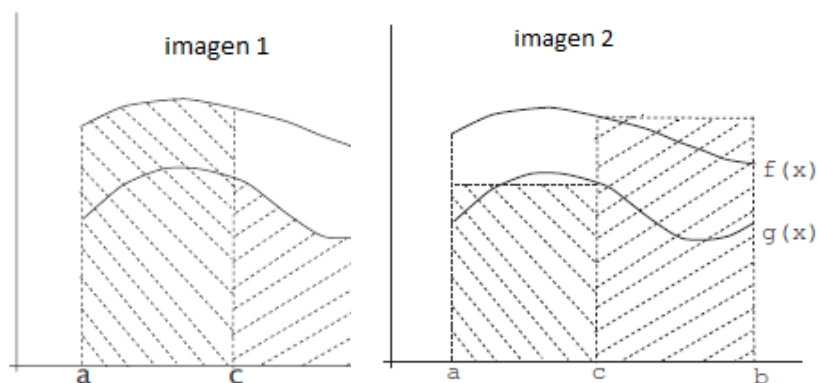
Por otro lado, tenemos que:

$$h'(x) = (x - b)f(x) + \int_a^x f(t)dt - (x - a)g(x) + \int_x^b g(t)dt.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle se obtiene el resultado de deseado. ■

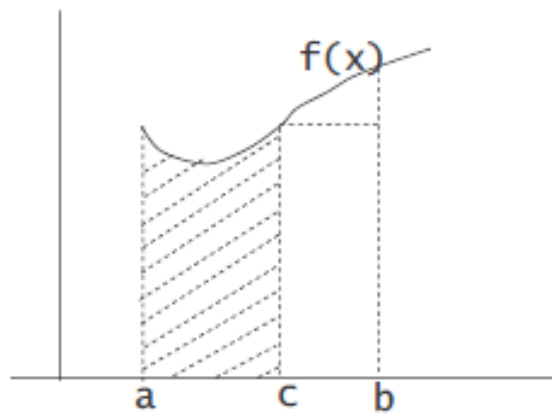
Veamos una interpretación geométrica de este teorema:

Si las funciones f y g son positivas en $[a, b]$, la suma del área bajo f entre a y c y la del área bajo g entre c y b (imagen 1) es la misma que la suma del área del rectángulo de base $b - c$ y altura $f(c)$ y la del rectángulo de base $c - a$ y altura $g(c)$ (imagen 2). En las siguientes imágenes podemos ver claramente lo explicado anteriormente.



Dentro de las posibilidades para elegir las funciones f y g destacamos dos casos.

1. Tomando $f(x) = g(x)$ se obtiene el teorema del valor medio para integrales.
2. Tomando $g(x) = 0$, obtenemos la expresión $\int_a^c f(x)dx = f(c)(b-c)$. Si f es positiva en $[a, b]$ entonces, el área bajo f entre a y c es la misma que la del rectángulo de base $b-c$ y altura $f(c)$ como se puede ver en la siguiente gráfica.



Resultados

A lo largo de este capítulo vamos a estudiar algunas versiones del teorema de Rolle. Comenzamos obteniendo una versión para espacios normados de dimensión finita. Posteriormente, estudiaremos el caso de los espacios normados de dimensión infinita. Por último, vamos a estudiar distintas versiones del teorema de Rolle para funciones holomorfas.

3.1 Versión finito-dimensional del teorema de Rolle

Una primera versión del teorema de Rolle a considerar es la planteada para funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $n, p \in \mathbb{N}$. Esta versión extenderá al teorema del valor medio generalizado. Además, esta versión tiene aplicaciones geométricas intuitivas y su demostración es muy sencilla.

La idea básica de esta primera versión consiste en asumir cierto comportamiento de f en la frontera de un conjunto A de \mathbb{R}^n (en \mathbb{R} este comportamiento se reduce a la condición $f(a) = f(b)$) para obtener información de la derivada de f en un punto interior de A .

Primero consideraremos dos resultados que vamos a necesitar.

Proposición 3.1. Sea $f : \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in B(x_0, r)$ tal que f alcanza un extremo relativo en c . Sea f diferenciable en c . Entonces, $f'(c) = 0$.

Proposición 3.2. Sea $f : \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, la imagen de f es un intervalo cerrado y acotado $[m, M]$.

El siguiente ejemplo muestra que con una reformulación literal del teorema de Rolle para funciones de \mathbb{R}^n con $n \geq 2$ no es posible que el teorema sea válido.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x, y) = (x(x^2 + y^2 - 1), y(x^2 + y^2 - 1)).$$

La función f es continua en $\bar{B}(0, 1)$, diferenciable en $B(0, 1)$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in S(0, 1)$. Sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in B(0, 1)$.

Ya podemos dar una primera versión multidimensional del teorema de Rolle.

Teorema 3.1. Sea $f : \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua en $\bar{B}(x_0, r)$ y diferenciable en $B(x_0, r)$. Supongamos que existe $v \in \mathbb{R}^p$ tal que:

$$v \text{ es ortogonal a } f(x) \text{ para cada } x \in S(x_0, r).$$

Entonces, existe $c \in B(x_0, r)$ un vector tal que $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Sea $k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(v) = v \cdot x$ para todo $v \in \mathbb{R}^p$. Sea $g(x) = k(f(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por la proposición 3.2, la imagen de g es un intervalo cerrado y acotado $[m, M]$.

La condición de ortogonalidad impuesta implica que g se anula en $S(x_0, r)$. Así pues, podemos asumir, sin perder generalidad, que g alcanza su valor máximo M en un

3. RESULTADOS

punto $c \in B(x_0, r)$. Además, por la proposición 3.1, $g'(c) = 0$, entonces $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. ■

Observación 1. La suposición del teorema 3.1 puede ser sustituida por la afirmación equivalente:

$$v \cdot f(x) \text{ es constante en } S(x_0, r).$$

Además, la conclusión del teorema puede ser expresada de forma equivalente pero más intuitiva geoméricamente del siguiente modo:

$$v \text{ es ortogonal a los vectores } \frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \frac{\partial f}{\partial x_2}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c).$$

Observación 2. El conjunto $\bar{B}(x_0, r)$ puede ser reemplazado por la clausura de cualquier conjunto abierto, acotado y conexo de \mathbb{R}^n .

Del teorema 3.1 se puede obtener, por ejemplo, el teorema del valor medio generalizado (y, como consecuencias, los teoremas del valor medio y de Rolle).

Corolario 3.1.1. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

Demostración:

Si $f(a) = f(b)$ y $g(a) = g(b)$ es claro que se tiene la igualdad anterior.

Supongamos que:

$$[f(b) - f(a)]^2 + [g(b) - g(a)]^2 > 0.$$

Definimos $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $S(t) = (g(t), f(t))$. Sea $v = (f(b) - f(a), g(a) - g(b))$.

Entonces:

$$v \cdot T(a) = v \cdot T(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

Así, de acuerdo con la primera observación del teorema 3.1, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$v \cdot T'(c)t = 0,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Con $t \neq 0$ obtenemos que:

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

El siguiente corolario extiende el teorema del valor medio de Sanderson para funciones de varias variables. ■

Corolario 3.1.2. Dada una función $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ k veces diferenciable. Supongamos que $v(a)$, $v(b)$ y las $k - 1$ derivadas de v en a son ortogonales a un vector no cero, v_0 . Entonces, existe un $c \in (a, b)$ tal que $v^{(k)}(c)$ es ortogonal a v_0 .

Demostración:

Aplicando el teorema 3.1, obtenemos la existencia de un $c_1 \in (a, b)$ tal que v_0 es ortogonal a $v'(c_1)$. Ahora bien, el teorema puede aplicarse a v' en el intervalo $[a, c_1]$ para obtener un punto c_2 tal que $c_2 < c_1$ tal que v_0 es ortogonal a $v''(c_2)$. Este procedimiento puede repetirse $k - 1$ veces para obtener $c = c_k < c_{k-1}$ tal que:

$$v_0 \cdot v^{(k)}(c) = 0.$$

■

Veamos a continuación una segunda versión multidimensional del teorema de Rolle.

Teorema 3.2. Sea $f : \bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua en $\bar{B}(x_0, r)$ y diferenciable en $B(x_0, r)$. Sean $v \in \mathbb{R}^p$ y $z_0 \in B(x_0, r)$ tal que $v \cdot (f(x) - f(z_0))$ no cambia de signo en $S(x_0, r)$. Entonces existe $c \in B(x_0, r)$ tal que $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Podemos suponer, sin perder generalidad, que:

$$v \cdot (f(x) - f(z_0)) \leq 0$$

para todo $x \in S(x_0, r)$. Esto implica que existe $c \in B(x_0, r)$ tal que $v \cdot f(c) = M$, donde:

$$M = \text{máx}\{v \cdot f(x) : x \in \bar{B}(x_0, r)\}.$$

En consecuencia, $v \cdot f'(c)u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

■

Observación 3. En el caso $n = p = 1$ el teorema 3.2 nos dice que si para algún $z \in (a, b)$ tenemos que:

$$f(z) \geq \text{máx}\{f(a), f(b)\} \quad \text{ó} \quad f(z) \leq \text{mín}\{f(a), f(b)\},$$

entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Nótese que cada $z \in (a, b)$ satisface una de las condiciones anteriores cuando $f(a) = f(b)$.

El siguiente corolario es consecuencia de la observación anterior y, además, se obtiene el mismo resultado que en el teorema 2.4, sin embargo, las condiciones de los teoremas no están relacionadas.

Corolario 3.2.1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Supongamos que $f'(a) = f'(b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c)(c - a) = f(c) - f(a).$$

Demostración:

Con una sencilla comprobación se tiene que este corolario es cierto para f si, y sólo, si es cierto para:

$$g(x) = f(x) - xf'(a).$$

Podemos asumir, sin perder generalidad, que $f'(a) = f'(b) = 0$. Definamos:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La función h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y, además:

$$h'(b) = \frac{-h(b)}{b-a}.$$

Supongamos que $h(b) \neq 0$. De $h(b)h'(b) < 0$ y $h(a) = 0$ obtenemos la existencia de $z \in (a, b)$ que satisface la condición de ortogonalidad del teorema 3.1 o del teorema 3.2. Cuando $h(b) = 0$ ($= h(a)$) cada punto $z \in (a, b)$ satisface la condición. Entonces, la observación 3 nos asegura la existencia de un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, obteniendo así lo que queríamos. ■

A continuación vamos a estudiar tres aplicaciones geométricas de los dos teoremas vistos anteriormente en esta sección para conseguir una representación visual de los resultados.

Aplicación 1. Sea $f: \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

continua en $\bar{B}(0, 1)$ y diferenciable en $B(0, 1)$. Además, sea $G = \text{Im}(f)$. Supongamos que existe un plano:

$$p : ax + by + cz + d = 0$$

tal que $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in p$ para cada $(u, v) \in S(0, 1)$. Entonces, existe un punto $(u_0, v_0) \in B(0, 1)$ tal que el plano tangente a la superficie G en (u_0, v_0) es paralelo a p .

Demostración:

Por la observación 1 del teorema 3.1. El vector $v_0 = (a, b, c)$ es ortogonal a:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0) = p, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(Hu_0) = q$$

para algún $u_0 \in B(0, 1)$, donde $u_0 = (u_0, v_0)$. El plano tangente a G en $f(u_0)$ viene dado por el conjunto:

$$\{f(u_0) + mp + nq : m, n \in \mathbb{R}\}$$

que es paralelo a p . ■

Aplicación 2. Sea $f : \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

continua en $\bar{B}(0, 1)$ y diferenciable en $B(0, 1)$. Denotemos por G la superficie $G = \text{Im}(f)$ y sea:

$$G_0 = f(S(0, 1)).$$

Supongamos que existe un plano:

$$p : ax + by + cz + d = 0,$$

tal que G está a un lado del plano p y existe una superficie S el cual está al otro lado del plano p . Entonces el plano tangente a G en algún punto $P \in S$ es paralelo a p .

Demostración:

Sea $u_i = (u_i, v_i) \in B(0, 1)$ tal que $f(u_i)$ está al otro lado de p respecto a G_0 . Entonces, $(a, b, c) \cdot (f(u) - f(u_i))$ no cambia de signo en $S(0, 1)$. La conclusión se sigue del teorema 3.2. ■

Aplicación 3. Sea $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) y sean:

$$P = x(a) = (x(a), y(a), z(a)), \quad Q = x(b) = (x(b), y(b), z(b)).$$

Entonces, para cada plano p que pasa por la recta L uniendo P con Q existe un punto $c \in (a, b)$ tal que el vector $x'(c)$ es paralelo a p . En particular, cuando el plano p contiene al origen obtenemos que $x'(c)$ satisface la siguiente igualdad:

$$x(a)[y(b)z'(c) - z(b)y'(c)] + y(a)[z(b)x'(c) - x(b)z'(c)] + z(a)[x(b)y'(c) - y(b)x'(c)] = 0.$$

Demostración:

La primera parte es consecuencia inmediata del teorema 3.1, ya que por cada plano que pasa a través de L existe un vector u ortogonal a L y al plano p . Por otro lado, para ver la demostración de la segunda parte, obsérvese que la dirección v de una línea ortogonal a p está dada por un cruce de los vectores $x(a)$ y $x(b)$, es decir, el producto vectorial de ambos vectores. Por tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$x(a) \times x(b) \cdot x'(c) = 0,$$

obteniéndose así la igualdad que queríamos. ■

Para finalizar esta sección veamos que no es posible adaptar los resultados de esta sección para obtener una versión infinito-dimensional del teorema de Rolle. Los teoremas 3.1 y 3.2 son válidos si \mathbb{R}^p es reemplazado por un espacio de Hilbert H . Además, no necesitamos hacer ningún cambio para obtener la demostración. Esto no es posible en dimensión infinita porque la proposición 3.2 no es cierta para el caso infinito-dimensional. Esto se debe a que si E es un espacio de Banach infinito-dimensional, su bola unidad cerrada $\bar{B}(0, 1)$ no es compacta. En consecuencia, existe una función continua $f : \bar{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la imagen de la función f es un intervalo abierto como muestra el siguiente ejemplo.

Consideramos el espacio l_2 y sea $D = \bar{B}(0, 1)$ su bola unidad cerrada. Definimos una aplicación $T : D \rightarrow l_2$ dada por:

$$T(x) = T(x_1, x_2, \dots) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

La aplicación T no tiene puntos fijos. En efecto, $\|T(x)\| = 1$ para todo $x \in D$. Si x es un punto fijo debe estar en la frontera de D , es decir, $\|x\| = 1$. Esto implica que:

$$T(x) = (0, x_1, \dots)$$

Combinando este resultado con la igualdad $T(x) = x$, se tiene que $x = 0$ en contra de que hemos supuesto que $\|x\| = 1$. Podemos definir la función continua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\|x - T(x)\|}.$$

Veamos ahora que la imagen de f es el intervalo abierto $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Sabemos ya que:

$$\|x - T(x)\| > 0$$

para cada $x \in D$. Para comprobar que el ínfimo del conjunto $\{\|x - T(x)\| : x \in D\}$ es 0 consideraremos los elementos $x_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ cuyas n primeras componentes son $\frac{1}{\sqrt{n}}$ y el resto son nulas, es decir:

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right).$$

Claramente, $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - T(x_n)\| = \sqrt{\frac{2}{n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, su ínfimo es 0.

Para ver que $\|x - T(x)\| < 2$ para cada $x \in D$, nótese que $\|x - T(x)\| = 2$ requiere que $\|x\| = 1$ y $x = -T(x)$, es decir:

$$(x_1, x_2, \dots) = (0, -x_1, -x_2, \dots).$$

Dicha igualdad implica que $x = 0$, lo cual contradice que $\|x\| = 1$.

Para verificar que el supremo del conjunto $\{\|x - T(x)\| : x \in D\}$ es 2 consideremos los elementos x_n que tienen 0 en las componentes posteriores a la n -ésima y alternan $\frac{1}{\sqrt{n}}$ con $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ en las posiciones anteriores, es decir:

$$x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right).$$

Entonces:

$$\|x_n - T(x_n)\| = \sqrt{4 - \frac{2}{n}}$$

lo cual implica que el supremo es 2. Por tanto, la imagen de f es intervalo abierto $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

3.2 Espacios donde no se cumple el teorema de Rolle

En 1992 aparece el primer trabajo en la literatura sobre el teorema de Rolle en espacios de dimensión infinita. Viene de la mano de Shkarin en [12], donde se prueba que el teorema de Rolle no es cierto para ciertos espacios de dimensión infinita. Después del resultado de Shkarin, vuelve a aparecer un resultado sobre el teorema de Rolle en dimensión infinita en 1996 de la mano de J. Ferrer, quien expone un contraejemplo de que el teorema de Rolle falla en l_2 en su trabajo [3]. Veamoslo.

Consideremos las siguientes transformaciones lineales definidas por:

$$\begin{aligned} R(x) &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ L(x) &= (x_2, x_3, x_4, \dots) \end{aligned}$$

para cada $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$ y sea $g : l_2 \rightarrow l_2$ la función:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2} - \|x\|^2 \right) e_1 + R(x)$$

(donde e_1 representa al vector $(1, 0, 0, \dots)$ y $\|\cdot\|$ denota la norma $\|\cdot\|_2$ para simplificar la notación). Podemos considerar ahora la función $f : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - g(x)\|^2} \quad (3.1)$$

para todo $x \in l_2$. Se puede verificar que la aplicación g no tiene puntos fijos. Por tanto, f es una función continua en l_2 que además se anula para $\|x\| = 1$. A continuación veremos que f es diferenciable en todos los puntos de l_2 . Sabemos que la función:

$$x \rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

es Fréchet diferenciable, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producto escalar de l_2 , y ya que $R(x)$ es una transformación lineal y continua, la función g también es Fréchet diferenciable en todo l_2 con derivada en $x \in l_2$ dada por:

$$g'(x)(u) = -2\langle x, u \rangle e_1 + R(u)$$

para todo $u \in l_2$. Por tanto, obtenemos que la derivada de $\|x - g(x)\|^2$ está dada por:

$$u = 2\langle x - g(x), u - g'(x)u \rangle.$$

Así pues $\|x - g(x)\|^2$ no se anula, la derivada del cociente nos dice que f es Fréchet diferenciable en todos los puntos de l_2 y, para cada $u \in l_2$, se obtiene:

$$f'(x)u = \frac{1}{\|x - g(x)\|^4} \left[-2\|x - g(x)\|^2 \langle x, u \rangle - 2 \cdot (1 - \|x\|^2) \langle x - g(x), u - g'(x)u \rangle \right].$$

Sin embargo, como $\langle g(x), e_1 \rangle = \frac{1}{2} - \|x\|^2$ y:

$$\langle x, R(u) \rangle = \langle L(x), u \rangle \text{ y, } L(g(x)) = x$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} & \langle x - g(x), u - g'(x)u \rangle \\ &= \langle x - g(x), u \rangle + 2\langle x, u \rangle x_1 - 2\langle x, u \rangle \left(\frac{1}{2} - \|x\|^2 \right) - \langle x - g(x), R(u) \rangle \\ &= \langle x - g(x) + 2x_1 x - (1 - 2\|x\|^2)x - L(x - g(x)), u \rangle \\ &= \langle (1 + 2x_1 + 2\|x\|^2)x - g(x) - L(x), u \rangle. \end{aligned}$$

Así pues:

$$f'(x)u = \frac{-2}{\|x - g(x)\|^4} \left((\|x - g(x)\|^2 + (1 - \|x\|^2)(1 + 2x_1 + 2\|x\|^2))x - (1 - \|x\|^2)(L(x) + g(x)), u \right),$$

es decir:

$$f'(x) = \frac{-2}{\|x - g(x)\|^4} \left[(\|x - g(x)\|^2 + (1 - \|x\|^2)(1 + 2x_1 + 2\|x\|^2))x - (1 - \|x\|^2)(L(x) + g(x)) \right].$$

Veamos que $f'(x)$ es no nula para $\|x\| < 1$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\|x\| < 1$ tal que $f'(x) = 0$. Entonces, sea:

$$s = \frac{\|x - g(x)\|^2}{1 - \|x\|^2} + 1 + 2x_1 + 2\|x\|^2, \quad (3.2)$$

de esto obtenemos que:

$$L(x) + g(x) = sx,$$

y, por tanto:

$$L^2(x) - sL(x) + x = 0.$$

Es decir, $x \in \text{Ker}(L^2 - sL + I)$ es un sucesión recursiva de segundo orden en l_2 . La ecuación característica asociada es:

$$t^2 - st + 1 = 0.$$

De esto deducimos que hay tres casos diferentes de acuerdo con el signo del discriminante.

- Caso 1: $|s| = 2$. Entonces sabemos que:

$$u = \left(1, \frac{s}{2}, \left(\frac{s}{2}\right)^2, \left(\frac{s}{2}\right)^3, \dots\right), \quad v = \left(0, \frac{s}{2}, 2\left(\frac{s}{2}\right)^2, 3\left(\frac{s}{2}\right)^3, \dots\right)$$

son elementos básicos de $\text{Ker}(L^2 - sL + I)$. Así, $x = Au + Bv$, para ciertos $A, B \in \mathbb{R}$.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$x_n = A\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1} + B(n-1)\left(\frac{s}{2}\right)^{n-1}$$

ya que $\lim_n x_n = 0$ y, por tanto, tenemos que $A = B = 0$, es decir, $x = 0$. Sin embargo, esto no puede darse ya que:

$$f'(0) = 16e_1.$$

- Caso 2: $|s| < 2$. Entonces la ecuación característica tiene dos raíces complejas dadas por:

$$\alpha = \cos a + i \sen a, \quad \beta = \cos a - i \sen a, \quad \sin a \neq 0.$$

Entonces, existen $A, B \in \mathbb{C}$ para cada:

$$x_n = A(\cos a + i \sen a)^{n-1} + B(\cos a - i \sen a)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

y, para las convenientes $C, D \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$x_n = C \cos(n-1)a + D \sin(n-1)a, \quad n \in \mathbb{N}$$

Sin embargo, $\sin a \neq 0$ implica que la primera sucesión no tiene límite, a menos que $C = D = 0$, es decir, $x = 0$, lo cual es otra contradicción.

- Caso 3: $|s| > 2$. En este caso tenemos dos raíces reales:

$$\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4}}{2}.$$

Claramente, el valor absoluto de una de las raíces anteriores es mayor que uno y el valor absoluto de la otra es menos que uno. Por tanto, supongamos que:

$$|\alpha| > 1, \quad |\beta| < 1.$$

Dado esto, se tiene que:

$$x_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, $A = 0$ y $x_n = x_1\beta^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, x es la siguiente progresión geométrica:

$$(x_1, x_1\beta, x_1\beta^2, x_1\beta^3, \dots).$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\|x\|^2 = \frac{x_1^2}{1 - \beta^2}, \quad \|x - T(x)\|^2 = \left(x_1 + \frac{x_1^2}{1 - \beta^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{x_1^2(1 - \beta)}{1 + \beta}.$$

De $sx = T(x) + Lx$, obtenemos que:

$$x_1^2 + \frac{1 - \beta^2}{\beta}x_1 - \frac{1}{2}(1 - \beta^2) = 0. \quad (3.3)$$

Además:

$$\|x - T(x)\|^2 = \frac{x_1^2(1 - \beta)}{\beta^2(1 + \beta)}.$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación (3.2) obtenemos:

$$\beta + \frac{1}{\beta} = s = \frac{x_1^2(1 - \beta)}{\beta^2(1 + \beta)} \cdot \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 - x_1^2} + 1 + 2x_1 + 2\frac{x_1^2}{1 - \beta^2}$$

de donde obtenemos que:

$$1 = (\beta - 2x_1) \left(1 + \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta)}{2\beta^2(1 - x_1^2 - \beta^2)}\right). \quad (3.4)$$

De la ecuación (3.3) podemos considerar a su vez dos casos.

El primer caso se da cuando:

$$x_1 = \frac{-1 + \beta^2 - \sqrt{1 - \beta^4}}{2\beta}.$$

De la ecuación (3.4), como $\|x\| < 1$ entonces $x_1^2 + \beta^2 < 1$, así tenemos que:

$$0 < \beta - x_1^2 < 1.$$

Entonces:

$$0 < \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^4}}{\beta} < 1.$$

Lo cual es una contradicción ya que $|\beta| < 1$. El segundo caso que obtenemos de la ecuación (3.3) viene dado por:

$$x_1 = \frac{-1 + \beta^2 + \sqrt{1 - \beta^4}}{2\beta}.$$

Nótese que:

$$1 - x_1^2 - \beta^2 = \frac{1}{2\beta}(1 - \beta^2)(\beta + 2x_1)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (3.4) obtenemos:

$$1 = \frac{1}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 - \beta^4}\right) \frac{2\beta^2 - \beta + \sqrt{1 - \beta^4}}{2\beta^2 - 1 + \sqrt{1 - \beta^4}},$$

$$\beta \left(2\beta^2 - 1 + \sqrt{1 - \beta^4}\right) = \left(1 - \sqrt{1 - \beta^4}\right) \left(2\beta^2 - \beta + \sqrt{1 - \beta^4}\right),$$

$$2\beta^3 = \left(1 - \sqrt{1 - \beta^4}\right) \left(2\beta^2 + \sqrt{1 - \beta^4}\right),$$

$$2 \left(1 + \sqrt{1 - \beta^4}\right) = \beta \left(2\beta^2 + \sqrt{1 - \beta^4}\right),$$

$$2(1 - \beta^3) = (\beta - 2)\sqrt{1 - \beta^4}.$$

Con lo que llegamos a una contradicción.

Veamos ahora que el teorema de Rolle falla en todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Para simplificar los siguientes cálculos, en esta sección vamos a considerar solamente espacios de Banach separables. Un espacio de Banach es *separable* si existe una sucesión de vectores de E densa en E con la topología de la norma. Ciertamente, el espacio \mathbb{R}^n con cualquier norma es separable, así que este concepto toma especial importancia en espacios de dimensión infinita. Puesto que la separabilidad nos permite que ciertas manipulaciones basten hacerlas sobre un conjunto numerable en lugar de considerar a todo el espacio. Por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, entonces admite una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cada $x \in H$ se satisface:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle\langle x, e_i \rangle\rangle e_i. \quad (3.5)$$

A partir del ejemplo en l_2 es fácil construir una función que haga que falle el teorema de Rolle en cualquier espacio de Hilbert separable H . El teorema de Riesz-Fischer

nos asegura que todo espacio de Hilbert separable es isométrico a l_2 . En efecto, si $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base ortonormal en H satisface la ecuación (3.5), para cada $x \in H$ la igualdad:

$$T(x) = (\langle x, e_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

define un isomorfismo $T : H \rightarrow l_2$. Además, T es una isometría. De hecho, si $\| \cdot \|$ es la norma de H , se satisface la siguiente igualdad:

$$\| x \|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \| T(x) \|^2.$$

Sea $B_H = \{x \in H : \| x \| < 1\}$ y f la función dada en la ecuación (3.1). La aplicación:

$$h = f \circ T : H \rightarrow \mathbb{R}$$

hace que el teorema de Rolle no se cumpla en B_H . Se puede verificar que h es continua en H y, además, $h(x) = f(T(x)) = 0$ para todo $x \in Fr(B_H)$, es decir, si $\| x \| = 1$.

Sea $u \in B_H$, puesto que la regla de la cadena se satisface y $T'(u)(x) = T(x)$ entonces para todo $x \in H$ se cumple:

$$h'(u)(x) = f'(T(u))T(x).$$

Como $u \in B_H$ entonces $T(u) \in B$, luego $f'(T(u)) \neq 0$ y, por tanto, $h'(u) \neq 0$. Así pues, el teorema de Rolle falla en todo espacio de Hilbert separable, como queríamos demostrar.

Veamos ahora una herramienta para solucionar el problema de la no diferenciabilidad en el origen.

Un resultado clásico de la topología de dimensión infinita dice que la esfera unidad:

$$S_H = \{x \in H : \| x \| = 1\}$$

de cualquier espacio de Hilbert H en dimensión infinita es homeomorfa a dicho espacio. Más aún, todo espacio de Hilbert de dimensión infinita es difeomorfo a su esfera unidad, lo cual fue demostrado por Bessaga en 1966. Esto quiere decir que existe un homeomorfismo diferenciable $\phi : H \rightarrow S_H$, donde ϕ^{-1} también es diferenciable.

En la búsqueda de generalizar el resultado de Bessaga y siguiendo sus pasos se prueba lo siguiente: si E es un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una norma Fréchet diferenciable ρ (no tiene por qué ser separable), dado $r > 0$ existe un difeomorfismo de clase C^1 , $\phi : E \rightarrow E \setminus \{0\}$ definido por:

$$\phi(x) = x,$$

si $\rho(x) > r$.

La frase *admite una norma Fréchet diferenciable* precisamente significa que existe una norma equivalente a la de E que es Fréchet diferenciable fuera del origen. Un hecho relevante es que si una norma es Fréchet diferenciable, entonces es de clase C^1 .

Supongamos que E admite una norma Fréchet diferenciable $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sea:

$$B_E = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$$

y $\phi : E \rightarrow E \setminus \{0\}$ un difeomorfismo de clase C^1 tal que $\phi(x) = x$ si $\rho(x) > \frac{1}{2}$ y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = 1 - \rho(\phi(x)).$$

Ya que ϕ es de clase C^1 en E y ρ es diferenciable en $E \setminus \{0\}$, entonces f es de clase C^1 en B_E y claramente continua en E . Además, $f(x) = 0$ para todo $x \in Fr(B_E)$. Por otro lado, si $u \in B_E$ entonces:

$$f'(u) = \rho'(\phi(u)) \circ \phi'(u). \quad (3.6)$$

Sean $u \in B_E$ fijo y $\phi(u) = y \in E \setminus \{0\}$. De la ecuación (3.6) se deduce que $f'(u)(x) = 0$ para todo $x \in E$ si y sólo si $\rho'(y)(\phi'(u)(x)) = 0$ para todo $x \in E$. Puesto que ϕ es un difeomorfismo, tanto ϕ como ϕ^{-1} son diferenciables y entonces $\phi'(u) : E \rightarrow E$ es un isomorfismo lineal. Para verificar la última afirmación basta aplicar la regla de la cadena para derivar a $\phi \circ \phi^{-1}$ y $\phi^{-1} \circ \phi$. Por tanto, $f'(u) = 0$ si, y sólo, si $\rho'(y) = 0$. Así pues, como ρ es una norma, entonces es una función convexa. Por tanto, si y es un punto crítico de ρ , entonces ρ alcanza su mínimo global en $y \neq 0$, lo cual es imposible.

Para concluir, si E admite una norma Fréchet diferenciable entonces el teorema de Rolle falla en E y, en particular, falla en todo espacio de Hilbert.

3.3 Versiones complejas del teorema de Rolle

En 1930 Jean Dieudonné publicó una condición suficiente y necesaria para la existencia de un cero de $f'(z)$ en el interior de una circunferencia con diámetro ab cuando f es holomorfa y $f(a) = f(b) = 0$. En 1949 M. Marden proporcionó resultados sobre las posiciones relativas de los ceros de polinomios complejos y los ceros de su derivada.

A continuación daremos una versión del teorema de Rolle para funciones holomorfas. En primer lugar, veamos con un ejemplo que el teorema de Rolle no es cierto literalmente para funciones complejas. Si consideramos la función holomorfa $f(z) = e^z - 1$ se anula en $z = 2k\pi i$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, pero $f'(z) = e^z$ no se anula en el plano complejo.

Para un número complejo z denotaremos por $Re(z)$ y $Im(z)$ a sus partes real e imaginaria, respectivamente.

Damos una primera versión del teorema para funciones holomorfas que es consecuencia del teorema 3.1. Más adelante veremos otra (vease teorema 3.5).

Teorema 3.3. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que existen dos números complejos distintos a y b tales que $f(a) = f(b)$. Entonces, existen dos números complejos z_1 y z_2 en el segmento abierto de extremos a y b tales que:*

$$Re(f'(z_1)) = Im(f'(z_2)) = 0.$$

Demostración:

Sean $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $p \in \mathbb{R}^2$, donde:

$$p = (p_1, p_2) = (Re(a), Im(a))$$

y $q \in \mathbb{R}^2$, donde:

$$q = (q_1, q_2) = (Re(b), Im(b)).$$

Definimos:

$$g(t) = (u(q + t(p - q)), v(q + t(p - q)))$$

donde $t \in [0, 1]$. Nótese que $g(0) = g(1)$. De acuerdo con el teorema 3.1, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, con $x \neq 0$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $x \cdot g'(t_0)t = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Si $t = 1$ y consideramos el vector $x_1 = (p_1 - q_1, p_2 - q_2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
 0 &= x_1 \cdot g'(t_0) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x}(g(t_0))(p_1 - q_1)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}(g(t_0))(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) \\
 &\quad + \frac{\partial u}{\partial x}(g(t_0))(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) + \frac{\partial u}{\partial y}(g(t_0))(p_2 - q_2)^2.
 \end{aligned}$$

Dado que f es holomorfa, sus partes real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(g(t_0))[(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2] = 0.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(g(t_0)) = \operatorname{Re}(f'(z_1)) = 0,$$

donde $z_1 = q + t_0(p - q)$. Para obtener la otra igualdad usaremos el vector:

$$x_2 = (q_2 - p_2, p_1 - q_1).$$

■

Este resultado sigue siendo cierto cuando se consideran funciones definidas en conjuntos abiertos y convexos de \mathbb{C} .

Como consecuencia del teorema anterior tenemos la siguiente versión del teorema del valor medio para funciones holomorfas.

Teorema 3.4. Sean D un abierto convexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Sean a, b dos puntos distintos de D . Entonces existen dos puntos $z_1, z_2 \in (a, b)$ tales que:

$$\operatorname{Re}(f'(z_1)) = \operatorname{Re}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right), \quad \operatorname{Im}(f'(z_2)) = \operatorname{Im}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

Demostración:

Sea:

$$g(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(z - a) \tag{3.7}$$

para cada $z \in D$. Claramente, $g(a) = g(b) = 0$. Entonces, por el teorema 3.3 existen $z_1, z_2 \in (a, b)$ tal que $\operatorname{Re}(g'(z_1)) = 0$ y $\operatorname{Im}(g'(z_2)) = 0$. Sin embargo, por la ecuación (3.7) se tiene:

$$g'(z) = f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

para cada $z \in D$. Entonces:

$$0 = \operatorname{Re}(g'(z_1)) = \operatorname{Re}(f'(z_1)) - \operatorname{Re}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right),$$

$$0 = \operatorname{Im}(g'(z_1)) = \operatorname{Im}(f'(z_1)) - \operatorname{Im}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).$$

A continuación exponemos como corolario de este teorema un conocido resultado de análisis complejo. ■

Corolario 3.4.1. Sean D un abierto conexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f'(z) = 0$ para cada $z \in D$, entonces f es constante.

Demostración:

Por el teorema de extensión analítica del análisis complejo, es suficiente mostrar que f es localmente constante. Sean z_0 arbitrario en D y U_{z_0} un entorno convexo de z_0 contenido en D . Sea z un punto de U_{z_0} tal que $z \neq z_0$. Por el teorema 3.4, existen $z_1, z_2 \in (z_0, z)$ tal que:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = \operatorname{Re}(f'(z_1)) = 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = \operatorname{Im}(f'(z_1)) = 0.$$

Entonces, $f(z) = f(z_0)$, es decir, f es constante en U_{z_0} . ■

Veamos ahora varios ejemplos que arrojan luz sobre el teorema 3.3 e ilustran la afirmación de que los ceros de las partes real e imaginaria de la derivada de una función holomorfa separan los ceros de dicha función:

1. Sea $f(z) = e^z - 1$ y nótese que $f(z) = 0$ para $z = 2k\pi i$ para cada entero k . Como $f'(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, $\operatorname{Re}(f'(z)) = 0$ si $y = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ e $\operatorname{Im}(f'(z)) = 0$ si $y = k\pi$. Entonces los ceros de las partes real e imaginaria de f' son líneas rectas que separan los ceros de f .
2. Si $f(z) = (z - a)(z - b)$ con $a \neq b$, entonces $f(z) = 0$ cuando $z = a$ ó $z = b$. Como $f'(z) = 2z - a - b$, $\operatorname{Re}(f'(z)) = 0$ si $x = \frac{\operatorname{Re}(a+b)}{2}$ e $\operatorname{Im}(f'(z)) = 0$ si $x = \frac{\operatorname{Im}(a+b)}{2}$. Por tanto, los ceros de las partes real e imaginaria de f' son rectas que separan los ceros de f .
3. Nótese que, en general, el conjunto de ceros de $\operatorname{Re}(f'(z))$ y de $\operatorname{Im}(f'(z))$ no tienen que ser necesariamente rectas. Por ejemplo, si consideramos $f(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, el conjunto de ceros de $\operatorname{Re}(f')$ es una hipérbola.

A continuación damos una segunda versión del teorema de Rolle para funciones holomorfas.

Teorema 3.5. Sea D un abierto arco-conexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable. Sean $a, b \in D$ dos puntos distintos tales que $f(a) = f(b)$. Para cualquier camino suave simple $\Gamma \subset D$ que une los puntos a y b con parametrización canónica γ , existe algún $z_0 \in \Gamma$ tal que:

$$f'(z_0)\gamma'(\gamma^{-1}(z_0)) \cdot (b - a) = 0.$$

Demostración:

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ una parametrización suave de $\Gamma \subset D$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Se define $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(t) = f(\gamma(t)) \cdot (b - a).$$

Además, h es suave en $(0, 1)$, continua en $[0, 1]$ y se tiene que:

$$f(\gamma(0)) = f(a) = f(b) = f(\gamma(1))$$

de donde obtenemos que $h(0) = h(1)$ y aplicando el teorema de Rolle, existe $t_0 \in (0, 1)$ con $z_0 = \gamma(t_0) \in \Gamma$ tal que:

$$f'(z_0)\gamma'(\gamma^{-1}(z_0)) \cdot (b - a) = 0.$$

Veamos también una segunda versión del teorema del valor medio para funciones holomorfas. ■

Teorema 3.6. *Sea D un abierto arco-conexo de \mathbb{C} y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable. Sean $a, b \in \Omega$ dos puntos distintos, entonces para cualquier camino suave simple $\Gamma \subset D$ que une a a y b con parametrización canónica γ existe algún $z_0 \in \Gamma$ tal que:*

$$\left[f'(z_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] \gamma'(\gamma^{-1}(z_0)) \cdot (b - a) = 0.$$

Demostración:

Dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las hipótesis del teorema, introducimos:

$$\phi(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(z - a),$$

cuyo jacobiano viene dado por:

$$D\phi(z) = Df(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z) - \operatorname{Re}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(z) - \operatorname{Im}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(z) - \operatorname{Re}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) - \operatorname{Im}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \end{array} \right],$$

donde f_1 y f_2 denotan las partes real e imaginaria de f respectivamente. Además, $\phi(a) = 0 = \phi(b)$.

Por el teorema 3.5, obtenemos:

$$(D\phi(z_0))\gamma'(\gamma^{-1}(z_0)) \cdot (b - a) = 0.$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación del teorema 3.5. ■

La función holomorfa $f(z) = e^{2\pi iz} - 1$ tiene ceros en cada valor $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, aunque su jacobiano dado por:

$$f'(z) = -2\pi e^{-2\pi y} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2\pi x) & -\cos(2\pi x) \\ \cos(2\pi x) & \operatorname{sen}(2\pi x) \end{bmatrix}$$

nunca se anula en el plano complejo y así no se satisfacen las conclusiones del teorema de Rolle clásico.

1. Sea $\Gamma = [-1, 1] \times \{0\}$ un camino que une los puntos $a = (-1, 0)$ y $b = (1, 0)$, entonces $b - a = (2, 0)$. Dada la parametrización trivial:

$$\gamma(t) = (2t - 1, 0),$$

con $\gamma'(t) = (2, 0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. En Γ podemos resolver:

$$[f'(x_0, 0)\gamma'(t_0)] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

en cualquier $z_0 = (n, 0) \in \mathbb{Z} \times \{0\}$. Así pues el origen puede ser tomado como solución.

2. Sea Γ la semicircunferencia de radio 1 centrada en el origen. Dicho camino une $a = (-1, 0)$ y $b = (1, 0)$. En este caso, podemos considerar como parametrización a:

$$\gamma(t) = (\cos \pi(1 - t), \sin \pi(1 - t)),$$

con:

$$\gamma'(t) = \pi(\sin \pi(1 - t), -\cos \pi(1 - t)).$$

Así, podemos concluir que:

$$z_0 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 1),$$

entonces:

$$\left[f'(z_0)\gamma'\left(\frac{1}{2}\right) \right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\pi^2 e^{-2\pi} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

3.4 Localización y separación de puntos críticos

Hemos visto que no es fácil extender el teorema de Rolle a funciones complejas como muestran los siguientes ejemplos.

1. La función $f(z) = e^{iz} - 1$ tiene a $z = 0$ y en $z = 2\pi$ como ceros. Si el teorema de Rolle fuera válido, existiría al menos un punto crítico situado en el intervalo $0 < x < 2\pi$. Sin embargo, f' no tiene ceros. Recordemos que un *punto crítico* de una función holomorfa es un punto de la función cuya derivada es nula.
2. Sea $f(z) = (z^2 - z)(z - i\sqrt{3})$ un polinomio con ceros en los vértices $z = \pm 1$, $z = i\sqrt{3}$ de un triángulo isósceles. Si el teorema de Rolle fuera válido, f tendría un punto crítico en cada lado de este triángulo. Pero f' tiene un único cero en $z = i\sqrt{3}$, que es un punto en el interior del triángulo.

El segundo ejemplo muestra que el concepto de punto crítico entre dos ceros reales puede ser sustituido en el plano complejo por el concepto de punto crítico situado en alguna región que contiene los ceros de la función dada. En este caso, la región es un triángulo cerrado, pero en los siguientes ejemplos la región más adecuada podría ser un disco circular o un polígono.

La localización de los puntos críticos de una función analítica de variable compleja en una región D es importante ya que encontrarlos ayuda a determinar donde una función definida en D deja de ser conforme.

Vamos a estudiar la forma de localizar todos los puntos críticos de un polinomio de variable compleja y para ello damos en primer lugar el corolario del teorema de Rolle en el cual se basarán los resultados obtenidos a lo largo de esta sección.

Teorema 3.7. *Si un polinomio real de variable real f tiene solo ceros reales, todos ellos situados en el intervalo $[a, b]$, entonces los puntos críticos de f están en $[a, b]$.*

De los teoremas relacionados con el teorema de Rolle este teorema fue el primero generalizado al caso complejo. En 1836 Gauss expuso otra generalización.

Teorema 3.8 (Gauss). *Los puntos críticos de un polinomio f que no son ceros múltiples de f están localizados en posiciones de equilibrio en cierto campo de fuerza. Este campo es debido a una partícula localizada en cada cero de f , teniendo una masa igual a la multiplicidad del cero y atracción de acuerdo a la ley de la distancia inversa.*

Del teorema de Gauss podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 3.9. *Los puntos críticos de un polinomio f se encuentran en la envolvente convexa H de los ceros de f .*

Nótese que la *envolvente convexa* H de los ceros de f se define como el polígono convexo más pequeño que contiene todos los ceros de f . La primera publicación sobre el enunciado y la demostración del teorema 3.9 aparece de la mano del ingeniero francés F. Lucas en 1874. Damos a continuación otra forma de expresar el resultado anterior.

Teorema 3.10. *Los puntos críticos de un polinomio f están en cualquier círculo C que contenga todos los ceros de f .*

En efecto, ambos teoremas son equivalentes dado que, por un lado, C contiene a H , y por otro, H es la intersección de todos los discos circulares que recubren H .

Hasta ahora hemos estudiado los ceros de f cuando los puntos críticos están en un único círculo. Consideraremos ahora el caso en el que los puntos críticos están distribuidos sobre un conjunto de discos circulares.

Durante el periodo 1918 – 1922 J. L. Walsh [6] descubrió un gran número de resultados relacionados con la localización de los puntos críticos de polinomios. A continuación destacamos dos de ellos.

Teorema 3.11. *Si un polinomio de grado n tiene m_1 ceros en un círculo C_1 con centro $z = c_1$ y radio r_1 y los ceros restantes $m_2 = n - m_1$ en un círculo C_2 con centro $z = c_2$ y radio r_2 , entonces cada punto crítico de f que no esté en C_1 ó C_2 está en un tercer círculo C cuyos centro y radio son, respectivamente:*

$$z = \frac{m_2 c_1 + m_1 c_2}{n}, \quad r = \frac{m_2 r_1 + m_1 r_2}{n}.$$

Vease imagen 3.1.

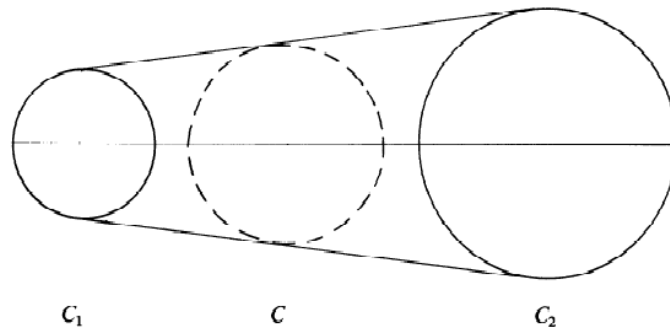


Imagen 3.1

Teorema 3.12. Si C_0, C_1, \dots, C_p es un conjunto de círculos que tienen en común un centro exterior de semejanza 0 y si f es un polinomio de grado n que tiene m_k ceros en la círculo C_k , $k = 0, 1, \dots, p$, entonces para cada punto crítico de f que no está en el círculo C_k se encuentra en la círculo C'_k , donde C'_1, C'_2, \dots, C'_q es un conjunto de círculos teniendo también a 0 como centro exterior de semejanza. Vease imagen 3.2.

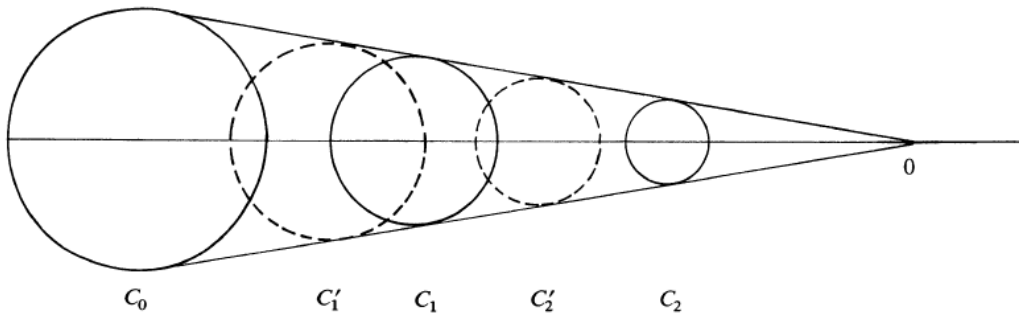


Imagen 3.2

Veamos una interesante aplicación del teorema 3.11 para polinomios reales que solo tienen ceros reales.

Teorema 3.13. Sea f un polinomio real de grado n con solo ceros reales, donde m_1 ceros están localizados en $I_1 = [a_1, b_1]$ y el resto de ceros $m_2 = n - m_1$ están localizados en $I_2 = [a_2, b_2]$ con $a_2 > b_1$. Entonces, cualquier punto crítico de f que no esté en I_1 ó I_2 está localizado en $I = [a, b]$, donde:

$$a = \frac{m_2 a_1 + m_1 a_2}{n}, \quad b = \frac{m_2 b_1 + m_1 b_2}{n}.$$

Demostración:

Para probarlo, consideremos un círculo C_1 cuyo centro está en $c_1 + i\gamma$, donde:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

y que pase por los puntos $z = a_1$ y $z = b_1$. También consideramos el círculo C_2 cuyo centro está en $c_2 + i\gamma\lambda$, donde:

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad \lambda = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

que pasa por los puntos $z = a_2$ y $z = b_2$. Entonces, de acuerdo con el teorema 3.11, cualquier punto crítico de f que no esté en los círculos C_1 ó C_2 estará en el círculo C , cuyo centro está en el punto:

$$z = \frac{1}{n}[m_1c_2 + m_2c_1 + i\gamma(\lambda m_1 + m_2)]$$

y corta al eje real en los puntos $z = a$ y $z = b$. Ahora bien, como $\gamma \in \mathbb{R}$, la intersección de todos los discos C_1 es el intervalo I_1 , la intersección de los discos C_2 es el intervalo I_2 y la intersección de los círculos C es el intervalo I . Así, queda probado el teorema. ■

Conclusiones

Acabamos este trabajo destacando algunos de los resultados y hechos mas interesantes recogidos en los capítulos anteriores. Por ejemplo, es sorprendente que un resultado obtenido por uno de los primeros críticos con las cantidades infinitesimales en los comienzos del cálculo infinitesimal acabe convirtiéndose en uno de los principales teoremas de dicho cálculo. También es curioso observar el proceso iniciado con la formulación algebraica del teorema dada por Rolle y que con el paso de los siglos llevó a la versión que aparece en la mayoría de los tratados de cálculo hoy en día. Especial interés histórico tiene el método de las cascadas el cual está basado en el resultado de Rolle y que se aplica al estudio de las raíces de polinomios.

Otro hecho a comentar es la cantidad de aplicaciones y consecuencias que tiene el teorema de Rolle. En este trabajo no hemos incluido las más conocidas porque éstas han sido ya objeto de estudio a lo largo de los estudios de grado. Hemos preferido incluir otros menos conocidas y dedicar más tiempo a estudiar posibles versiones del teorema de Rolle real. Hay múltiples trabajos dedicados a trasladar el teorema de Rolle a otros ambientes. En este trabajo hemos optado por elegir sólo algunas versiones. Ninguna de estas versiones son generalizaciones propiamente dicha del teorema de Rolle real, pero todas ellas tienen interés por sí mismas y por sus consecuencias.

Comenzamos dando dos versiones obtenidas en [4] para funciones vectoriales en términos del producto escalar euclídeo de los espacios finito-dimensionales implicados. Como no todos los resultados usados en [4] para obtener estas versiones son ciertos para funciones entre espacios de Banach infinito-dimensionales, no podemos repetir en el caso infinito-dimensional el proceso seguido en el trabajo Furi y Martinelli. Tampoco es posible la generalización del teorema de Rolle al caso infinito-dimensional. Por ejemplo, en [3] se demuestra que el espacio de Banach l_2 no verifica el teorema de Rolle. De hecho, en ningún espacio de Hilbert infinito-dimensional se verifica dicha generalización.

Las últimas secciones del trabajo han sido dedicadas a estudiar versiones del teorema de Rolle para funciones holomorfas. Tampoco en este caso es posible una generalización del teorema real. No obstante, la primera versión que damos para funciones holomorfas permite también obtener una versión del teorema del valor medio para funciones holomorfas.

Finalizamos este trabajo usando el teorema de Rolle y la información que se tiene sobre los ceros de un polinomio para localizar sus puntos críticos. Sólo damos algunos ejemplos sobre localización de puntos críticos de funciones holomorfas. Para más información sobre este tema se pueden consultar [6].

Bibliografía

- [1] A. R. Davies, N. E. Muoneke, J. P. Pemba, *A complexification of Rolle's theorem*, (2007), 28–31.
- [2] J. C. Evard, F. Jafari, *A complex Rolle's theorem*, (1992), 858–861.
- [3] J. Ferrer, *Rolle's theorem fails in l_2* , (1996), 161–165.
- [4] M. Furi, M. Martelli, *A multidimensional version of Rolle's theorem*, (1995), 243–249.
- [5] O. Gutú, *Sobre el teorema de Rolle en dimensión infinita*, (2012), 35–49.
- [6] M. Marden, *The search for a Rolle's theorem in the complex domain*, (1985), 643–650.
- [7] F. Martínez de la Rosa, *Panorámica de los teoremas del valor medio*, (2008), 23–38.
- [8] E. Pérez-Chavela, K. Petakos, *Una nota sobre el teorema de Rolle*, (2009), 89–94.
- [9] C. O. Suárez Alemán, *Orígenes y evolución del teorema de Rolle*, **28(1)** (2011), 39–50.
- [10] C. Suso Fernández, M. V. Velasco Collado, *Sobre la génesis y evolución del teorema de Rolle*, **30(1)**(2013), 49–66.
- [11] C. Washington, *Michel Rolle and his method of cascades*, (2011).
- [12] A. S. Shkarin, *On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces*, (1992).