El inverso de Drazin

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Cristina Reche Rodríguez

Tutor:
Antonio Morales Campoy

Grado en Matemáticas

Septiembre, 2016
Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

In this project we consider a particular case of the generalized inverse, specifically, we will study the Drazin inverse of the square matrix. As a particular case of the Drazin inverse we have the group inverse. While the Drazin inverse of a square matrix always exists and is unique, it is not the same for group inverse. However, in case there is the inverse group, this is also unique.

Apart from giving a brief review of the history of these inverse, we will study their most important properties. Studying what properties are shared with the usual inverse has a special interest, since the Drazin inverse is a generalization of the usual inverse. We will devote some time to study the index of a square matrix and Drazin inverse of a matrix when it is expressed by blocks. There are various ways to calculate the Drazin inverse of a matrix. In this project there are some of them as that given by the core-nilpotent descomposition of the square matrix or the expression of Drazin inverse as a polynomial.

Drazin inverse and the group have multiple applications in various areas of mathematics. In the last chapter we have included an application of the Drazin inverse for the study of the solutions of certain linear differential systems with constant coefficients.

Resumen en español

En este trabajo consideramos un caso particular de inversa generalizada, concretamente, estudiaremos la inversa de Drazin de las matrices cuadradas. Como caso particular de la inversa de Drazin se tiene la inversa de grupo. Mientras que la inversa de Drazin de una matriz cuadrada siempre existe y es única, no ocurre lo mismo para la inversa de grupo. No obstante, en el caso de que exista la inversa de grupo, ésta también es única.

Aparte de dar un breve repaso a la historia de estas inversas, estudiaremos sus propiedades más importantes. Especial interés tiene estudiar qué propiedades son compartidas con la inversa usual ya que la inversa de Drazin constituye una generalización de la inversa usual. Dedicaremos algo de tiempo al estudio del índice de una matriz cuadrada y de la inversa de Drazin de una matriz cuando está expresada por bloques. Hay diversas formas de calcular el inverso de Drazin de una matriz. En este trabajo se incluyen algunas de ellas como la dada por la descomposición core-nilpotente de una matriz cuadrada o por la expresión de la inversa de Drazin como un polinomio.

La inversas de Drazin y de grupo tienen multiples aplicaciones en diversas áreas de la matemática. Incluimos en el último capítulo una aplicación de la inversa de Drazin para el estudio de las soluciones de ciertos sistemas lineales diferenciales de coeficientes constantes.

1 Objetivos

Las inversas generalizadas de matrices se obtienen al tratar de extender el concepto de inversa usual conocido para matrices cuadradas no singulares. Esta extensión se puede hacer de múltiples formas, dando lugar cada una de ellas a una inversa generalizada distinta. Este trabajo se dedica al estudio de una de estas inversas, la inversa de Drazin. Interés especial tendrá un caso particular de esta inversa, concretamente, la inversa de grupo.

Comenzamos el trabajo dedicando el capítulo de antecedentes bibliográficos a introducir algunas notaciones y definiciones que vamos a necesitar en las siguientes secciones. Posteriormente, introduciremos algunas de las inversas generalizadas más conocidas antes de centrarnos en el estudio de la inversa de Drazin y de la inversa de grupo. Finalizamos el capítulo de los antecedentes dando un breve repaso por el origen y la evolución de estas inversas, pero sólo en el ambiente de las matrices y de los anillos.

En el capítulo tercero empezamos a estudiar en profundidad las propiedades de la inversa de Drazin. Veremos que existen dos posibles definiciones de la inversa de Drazin, una funcional y otra algebraica. Las dos definiciones resultan ser equivalentes, lo cual facilitará obtener múltiples propiedades de esta inversa. Por ejemplo, toda matriz cuadrada compleja tiene siempre inversa de Drazin, pero no siempre inversa de grupo. En ambos casos, si existe la inversa, es única. Otra propiedad importante de las matrices cuadradas es que todas admiten una descomposición llamada core-nilpotente y que será usada repetidas veces a lo largo de este trabajo.

Uno de los primeros objetivos al estudiar cualquier inversa generalizada es ver cuales de las propiedades verificadas por la inversa usual son ciertas para la correspondiente inversa generalizada y cuales no. Por ejemplo, sabemos que para la inversa usual se verifica la regla del orden inverso, esto es, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ cuando existen ambas inversas de A y B. Curiosamente, esto no es cierto en general para la inversa de Drazin, aunque sabemos que siempre existe para matrices cuadradas. Dedicamos también algo de tiempo a estudiar este tipo de problemas y a estudiar también cómo calcular en los casos más sencillos la inversa de Drazin de las matrices por bloques.

Hay diversas formas de calcular la inversa de Drazin. Mencionamos ahora una que se basa en una propiedad compartida con la inversa usual y que afirma la inversa de Drazin A^D de una matriz cuadrada A se puede expresar siempre como un polinomio en dicha matriz, es decir, existe un polinomio $p(x)$ tal que $A^D = p(A)$.

Finalizamos este capítulo estudiando la aplicación de la inversa de Drazin al estudio de las soluciones de ciertos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Esta no es la única de las aplicaciones de la inversa de Drazin. Especial importancia tiene la aplicación de la inversa de grupo a la teoría de las cadenas de Markov. El hecho de introducir la teoría de cadenas de Markov en términos de la inversa de grupo de manera natural, da un importante aspecto práctico al tema de inversas generalizadas. Volviendo a los sistemas lineales diferenciales, estudiaremos sólo algunos caso sencillos como $x' + Ax = f$ y $Ax' + Bx = f$ donde las matrices cuadradas A y B conmutan. Veremos que el caso general $Ax' + Bx = f$ se puede reducir al caso particular $AB = BA$ bajo ciertas hipótesis adicionales.

2

Antecedentes bibliográficos

A partir de una serie de propiedades que cumple la inversa usual de una matriz cuadrada parece lógico intentar generalizar el concepto de matriz inversa al caso de una matriz no inversible, buscando matrices que verifiquen propiedades análogas a las que verifican las matrices inversibles. Dependiendo del número de estas propiedades que se exija las cuales llamaremos inversas generalizadas, se obtienen diferentes generalizaciones del concepto de inversa.

Las matrices inversas generalizadas permiten resolver diferentes tipos de problemas como, por ejemplo, el cálculo de soluciones aproximadas de un sistema incompatible a través de la teoría de mínimos cuadrados; la caracterización de la existencia de las soluciones de un sistema compatible y la expresión de su forma general; la expresión de los estimadores mínimo-cuadráticos cuando la matriz del modelo lineal no es de rango completo y también cuestiones relacionadas con las cadenas de Markov, entre otros. En el contexto de la teoría de ecuaciones diferenciales y la teoría de control, se pueden resolver ecuaciones diferenciales matriciales singulares y sistemas singulares de control en los que aparecen matrices que carecen de inversa ordinaria. Estos problemas, que pertenecen a los campos de ecuaciones diferenciales lineales y sistemas lineales de control, respectivamente, se resuelven también utilizando la teoría de inversas generalizadas. Otro problema en esta última área es el de encontrar una función de control que regule cierto proceso manipulando los estados para que la salida sea la deseada y que además se minimice una función de coste prefijada. Este tipo de problemas pertenecen al campo del control óptimo y también pueden ser resueltos por medio de inversas generalizadas. Siguiendo esta linea, podríamos indicar muchos más problemas que se resuelven aplicando la teoría de inversas generalizadas.

2.1 Terminología y conocimientos previos.

A continuación, expresaremos algunos resultados y definiciones que vamos a usar a lo largo de este trabajo. Denotaremos por $\mathbb{C}^{m\times n}$ el *espacio vectorial* de las matrices complejas de m filas y n columnas, y por $\mathbb{C}^n$ el espacio vectorial de las n-uplas de números complejos. Si consideramos las bases canónicas de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, asociada a cada matriz A de $\mathbb{C}^{m\times n}$ existe una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$, concretamente, la transformación dada por $\tilde{A}x = Ax$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Recíprocamente, asociada a cada transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ viene asociada una única matriz A de $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Expresaremos por I_n la *matriz identidad de orden n*. Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se denota por $rango(A)$, al máximo número de vectores columnas linealmente independientes de A y $R(A)$ denota el *rango* de A, esto es, el espacio vectorial de las columnas de A. Si $\tilde{A}$ es la transformación lineal asociada a la matriz A y $R(\tilde{A})$ denota el rango de $\tilde{A}$, tenemos que $R(A) = R(\tilde{A})$. El *espacio nulo* de A, $N(A)$, viene definido por $\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$.

Denotaremos por A' la *traspuesta* de A y por A^* la *conjugada de la traspuesta* de A. Una matriz A es *hermítica* si $A^* = A$.

Denotaremos la *traza* de una matriz A por $Tr\, A$.

Un número $\lambda \in \mathbb{C}$, es llamado *valor propio* de la matriz A si existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Cualquiera de dichos vectores es llamado *vector propio* de A asociado al valor propio λ. El conjunto $L(\lambda) = \{x | (A - \lambda I)x = 0\}$ forman un subespacio lineal de $\mathbb{C}^n$, de dimesión $p(\lambda) = n - rango(A - \lambda I)$. El entero $p(\lambda) = dimL(\lambda)$ especifica el número máximo de vectores propios linealmente independientes asociados con el valor propio λ. Es fácil ver que $\varphi(\mu) = det(A - \mu I)$ es un polinomio de grado n de la forma:

$$\varphi(\mu) = (-1)^n \left(\mu^n + \alpha_{n-1}\mu^{n-1} + \cdots + \alpha_0\right).$$

Dicho polinomio es llamado *polinomio característico* de la matriz A. Sus ceros son los valores propios de A. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ son los ceros distintos de $\varphi(\mu)$, entonces φ puede ser representado en la forma:

$$\varphi(\mu) = (-1)^n (\mu - \lambda_1)^{\sigma_1} (\mu - \lambda_2)^{\sigma_2} \cdots (\mu - \lambda_k)^{\sigma_k}.$$

El entero σ_i, también denotado por $\sigma(\lambda_i)$, es llamado *multiplicidad* del valor propio λ_i. Si λ es un valor propio de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces:

$$1 \leq \rho(\lambda) \leq \sigma(\lambda) \leq n. \tag{2.1}$$

Damos a continuación una serie de definiciones en el ambiente de anillos. Sea $\mathcal{R}$ un anillo asociativo con unidad e no nula. Se dice que un elemento a de $\mathcal{R}$ es *idempotente* si coincide con su cuadrado y que es *nilpotente* si existe un número natural tal que $a^n = 0$. Al menor número natural verificando dicha propiedad se llama *índice de nilpotencia*. Asimismo, definiremos los *elementos casinilpotentes* como aquellos tales que $e - xa$ es inversible, para todo x que conmuta con a.

2.2 Inversas generalizadas de matrices cuadradas.

Empezamos recordando la definición de matriz cuadrada inversible. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz cuadrada, se dice que es *inversible* o *no singular* si existe otra matriz cuadrada $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$. Es suficiente que se satisfaga una de las condiciones $AB = I_n$ ó $BA = I_n$, para concluir que B es la inversa de A y la denotamos por A^{-1}, ya que si existe, es única.

A continuación damos una serie de condiciones que caracterizan la invertibilidad de una matriz cuadrada. Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es inversible.
2. A tiene determinante no nulo.
3. La ecuación $Ax = b$ tiene solución única para cada $b \in \mathbb{C}^n$.
4. Las filas (o columnas) de A son linealmente independientes.
5. Las filas (o columnas) de A generan $\mathbb{C}^n$.
6. Las filas (o columnas) de A forman una base de $\mathbb{C}^n$.
7. La dimensión del espacio nulo de A es cero.
8. La dimensión del espacio imagen de A es n.
9. La aplicación lineal asociada a A es un isomorfismo entre espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

10. 0 no es un valor propio de A.

Resulta natural tratar de generalizar la idea de matriz inversa al caso de una matriz rectangular, o bien de una matriz cuadrada singular.

Las inversas laterales de una matriz se pueden definir para matrices rectangulares y son un primer tipo de generalización de la inversa usual.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama *inversa a izquierda* (resp. *derecha*) de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $XA = I_n$ (resp. $AX = I_m$). Pueden no existir inversas laterales, o bien puede existir más de una inversa lateral de una matriz rectangular dada. De hecho, existe una inversa a izquierda de la matriz A si, y sólo si, A tiene rango n. Análogamente, existe una inversa a derecha de la matriz A si, y sólo si, A tiene rango m. Las inversas laterales, en caso de existir, podrían ser infinitas.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se dice que es una *inversa interior* ó $\{1\}$*−inversa* de A si satisface la ecuación matricial:

$$AXA = A \tag{2.2}$$

y es una *inversa exterior* ó $\{2\}$*−inversa* de A si satisface:

$$XAX = X. \tag{2.3}$$

Las $\{1\}$−inversas, también se conocen por inversas generalizadas ó pseudoinversas. También son importantes las $\{1,2\}$−inversas, es decir, las que verifican simultaneamente las identidades (2.2) y (2.3). Estas se encuentran en la literatura con los nombres de semi-inversas, inversas recíprocas e inversas generalizadas reflexivas. Como un caso particular dentro de las $\{1,2\}$−inversas, se encuentra la denominada inversa de grupo que veremos a continuación.

La matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se dice que es la *inversa de Moore-Penrose* de A si es inversa interior y exterior de X y además AX y XA son hermíticas.

Si $m = n$, la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice que es la *inversa de grupo* de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si satisface (2.2), (2.3) y la ecuación matricial:

$$AX = XA. \tag{2.4}$$

Definición 2.1. *Si $m = n$, al menor entero no negativo k tal que:*

$$rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left(A^k\right)$$

se le llama el índice de la matriz A y se denotará por $ind(A)$. En este caso, la matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice que es la inversa de Drazin de A si satisface (2.3), (2.4) *y la ecuación matricial:*

$$A^{k+1}X = A^k \tag{2.5}$$

donde $k = ind(A)$.

Sabemos que para cualquier $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se puede obtener su forma de Jordan. Se puede demostrar que el índice de A coincide con la dimensión del mayor bloque de Jordan correspondiente al valor propio cero de A.

En caso de existir la inversa ordinaria A^{-1} de una matriz cuadrada de A, todas las inversas generalizadas definidas hasta ahora coinciden con A^{-1}.

Las inversas interiores y las inversas exteriores de una matriz A son infinitas y siempre existen, excepto que A sea inversible o bien nula en el caso de las inversas exteriores. La inversa de Moore-Penrose de A existe siempre, es única y se denotará por $A^{\dagger}$.

Para una matriz singular $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- Existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface (2.2), (2.3) y (2.4) de la definición de inversa de grupo.
- A^2 y A tienen el mismo rango.
- $\mathrm{ind}(A) = 1$.
- El espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ es suma directa del espacio imagen de A y del espacio nulo de A.

Estas condiciones caracterizan la existencia de una inversa de grupo de A. Si existe una matriz X verificando alguna de esas condiciones, dicha matriz es única y la llamamos *inversa de grupo* de A. La denotaremos por $A^{\#}$.

La inversa de Drazin es una generalización de la inversa de grupo y, por supuesto, de la inversa ordinaria. La inversa de Drazin de toda matriz cuadrada existe siempre, es única y se denotará por A^D.

Dentro de la teoría de matrices inversas generalizadas es necesario primero estudiar la existencia y unicidad de las mismas. También tiene interes estudiar clases de las propiedades válidas para las inversas usuales lo son también en cada caso de inversas generalizadas.

2.3 Una reseña histórica de la inversa de Drazin.

La teoría de las inversas generalizadas se inició cuando en 1935 E.H. Moore introdujo el concepto de inversa generalizada, definiéndola a partir de ciertas proyecciones. Esta definición, olvidada por un tiempo, volvió a cobrar importancia cuando en el año 1955 R. Penrose planteó el mismo problema cambiando el enfoque. Esta vez se trataba de un enfoque algebraico a partir de ciertas ecuaciones matriciales. Aparentemente, Penrose no estaba en conocimiento de la definición que Moore había dado. El primer hecho importante en relación con este tipo de inversas generalizadas fue la demostración de la equivalencia de ambas definiciones. A partir de ese momento pasó a conocerse con el nombre de Moore-Penrose. Luego, de manera natural, fueron apareciendo el resto de inversas generalizadas como soluciones a problemas concretos.

En 1958, M. P. Drazin, introduce el concepto de inversa de Drazin para anillos o semigrupos. Sea $\mathcal{R}$ un anillo asociativo con unidad no nula. Un elemento $a \in \mathcal{R}$ se dice que es *inversible de Drazin*, si existe un elemento $x \in \mathcal{R}$ satisfaciendo:

$$ax = xa, \quad x = ax^2, \quad a - a^2x \text{ es nilpotente.}$$

A este elemento se le llama *inverso de Drazin*.

En 1979, S. L. Campbell y C. D. Meyer, desarrollan e investigan la inversa de Drazin para matrices cuadradas complejas que hemos recogido en la Definición 2.1. Se puede demostrar que para los anillos arriba considerados la condición $a - a^2x$ es nilpotente es equivalente a la condición $a^k = a^{k+1}x$ para algún entero no negativo k. Por tanto para matrices cuadradas complejas de definición de inverso dada por Drazin en 1958 y la dada en la Definición 2.1 son equivalentes.

Recordemos que para matrices cuadrada complejas la inversa de Moore-Penrose y de Drazin, existen siempre y son únicas. En cambio la inversa de grupo puede no existir (si existe también es única). En 1968, P. Robert dio condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la inversa de grupo de una matriz cuadrada y dió una expresión para dicha inversa. A partir de esta expresión es posible extraer condiciones para determinar cuándo la inversa de grupo coincide con la inversa de Moore-Penrose. La técnica que utilizó para encontrar dicha expresión fue una factorización especial de la matriz A que se obtiene basándose en la definición de rango. Concretamente, si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una matriz de rango $r > 0$, entonces existen dos matrices $M \in \mathbb{C}^{m\times r}$ y $N \in \mathbb{C}^{r\times n}$ ambas de rango r tales que $A = MN$. Además, para esta descomposición de rango completo de A resulta:

$$A^{\dagger} = N^{*}(NN^{*})^{-1}(M^{*}M)^{-1}M^{*}$$

y:

$$A^{\#} = M(NM)^{-2}N.$$

Más tarde, en 1981, R.E. Hartwig extendió el método de Robert para calcular la inversa de Drazin. Hartwig dió un algoritmo que, además de calcular la inversa de Drazin de una matriz cuadrada, permite calcular su rango e índice y la multiplicidad del valor propio 0.

C.D. Meyer, Jr. en [3] hizo una importante contribución a la teoría de inversas generalizadas mostrando su aplicación a las cadenas de Markov. Mostró que toda la información que es necesaria conocer sobre las cadenas de Markov viene dada a través de la inversa de grupo de la matriz $I - T$, donde T es la matriz de transición de una cadena de Markov homogénea finita. El hecho de introducir la teoría de cadenas de Markov finitas en términos de la inversa de grupo de manera natural, da un importante aspecto práctico al tema de inversas generalizadas.

En 1996 Hartwig y X. Chen estudia la inversa de grupo de una matriz triangular, no sólo para las matrices Toepliz y diagonales, como ya había hecho Hartwig en 1976, sino que esta vez abordaron el caso general. A tal efecto, dieron condiciones sobre los bloques en que pueden particionarse una matriz, para asegurar la existencia de la inversa de grupo de una matriz triangular. También en 1987, presentó un trabajo donde estudiaba la inversa de grupo de una matriz triangular por bloques, dando condiciones necesarias y suficientes para su existencia. En 1996, Y. Wei presentó una nueva caracterización de la inversa de Drazin y también una representación de la misma. Esta caracterización es una extensión de un hecho conocido para la inversa ordinaria: la inversa ordinaria de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface la ecuación:

$$rango\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = rango(A).$$

Consideremos a continuación unas generalizaciones del inverso de Drazin en el ámbito de las matrices o de los anillos. La definición de la inversa de Drazin dada para matrices cuadradas no puede ser aplicada a matrices rectangulares en general. No obstante, R. E. Cline y T. N. E. Greville, en 1980, definen la inversa de Drazin de una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, usando la matriz auxiliar $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Sean A y W matrices rectangulares de dimensiones adecuadas. Se dice que X es la *W-Drazin inversa* de A si:

$$AWX = XWA, \quad XWAWX = X, \quad AW - (AW)^2XW \text{ es nilpotente.}$$

J. J. Koliha, en 1996, introduce la g-Drazin inversa para elementos de un álgebra de Banach unitaria, $\mathcal{B}$. Un elemento $a \in \mathcal{B}$ es *g-Drazin inversible* si existe un $x \in \mathcal{B}$ tal que:

$$ax = xa, \quad x = ax^2, \quad a - a^2x \text{ es casinilpotente.}$$

El elemento x es la *g-Drazin inversa* de a.

Aunque hemos visto algunas generalizaciones de la inversa de Drazin en la clase de las matrices o de los anillos hay otras muchas en otros ambientes.

Resultados

3

3.1 Propiedades básicas de la inversa de Drazin.

Existe otra definición de inversa de Drazin equivalente a la algebraica dada en Definición 2.1. Esta nueva definición es la funcional o geométrica.

Lema 3.1. *Sea A una transformación lineal sobre $\mathbb{C}^n$. Existe un entero no negativo k tal que:*

$$\mathbb{C}^n = R\left(\tilde{A}^k\right) \oplus N\left(\tilde{A}^k\right).$$

Demostración:

Sea k el entero no negativo más pequeño tal que:

$$R\left(\tilde{A}^0\right) \supset R\left(\tilde{A}\right) \supset \ldots \supset R\left(\tilde{A}^{k-1}\right) \supset R\left(\tilde{A}^k\right) = R\left(\tilde{A}^{k+1}\right) = R\left(\tilde{A}^{k+2}\right) = \ldots$$

o, equivalentemente:

$$N\left(\tilde{A}^0\right) \subset N\left(\tilde{A}\right) \subset \ldots \subset N\left(\tilde{A}^{k-1}\right) \subset N\left(\tilde{A}^k\right) = N\left(\tilde{A}^{k+1}\right) = N\left(\tilde{A}^{k+2}\right) = \ldots$$

Supongamos que $x \in R\left(\tilde{A}^k\right) \cap N\left(\tilde{A}^k\right)$. Entonces existe un $z \in \mathbb{C}^n$ tal que $A^k z = x$. Así, $\tilde{A}^{2k} z = A^k x = 0$, de modo que $z \in N\left(\tilde{A}^{2k}\right) = N\left(\tilde{A}^k\right)$. Así, $x = 0$. Suponemos que $rango\left(\tilde{A}^k\right) = r$ de modo que $dim\left[N\left(\tilde{A}^k\right)\right] = n - r$. Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base para $R\left(\tilde{A}^k\right)$ y si $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base para $N\left(\tilde{A}^k\right)$, es fácil ver que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{C}^n$.

■

El número k introducido en el anterior lema juega un papel importante a la hora de dar esta nueva definición.

Definición 3.1. *Sea $\tilde{A}$ un transformación lineal sobre $\mathbb{C}^n$. Llamamos índice de $\tilde{A}$ y lo representamos como $ind\left(\tilde{A}\right)$ al menor entero no negativo k que verifique algunas de las siguientes propiedades equivalentes:*

i) $\mathbb{C}^n = R\left(\tilde{A}^k\right) \oplus N\left(\tilde{A}^k\right)$,

ii) $N\left(\tilde{A}^k\right) = N\left(\tilde{A}^{k+1}\right)$,

iii) $R\left(\tilde{A}^k\right) = R\left(\tilde{A}^{k+1}\right)$.

Si $\tilde{A}$ es inversible, entonces $ind\left(\tilde{A}\right) = 0$.

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es la matriz asociada a la transformación lineal $\tilde{A}$, entonces se tiene que $ind(A) = ind\left(\tilde{A}\right)$.

Lema 3.2. *Si $\tilde{A}$ es una transformación lineal sobre $\mathbb{C}^n$ e $ind\left(\tilde{A}\right) = k$, entonces $\tilde{A}_1 = \tilde{A}|_{R\left(\tilde{A}^k\right)}$ es una transformación lineal inversible sobre $R\left(\tilde{A}^k\right)$.*

Ahora ya podemos dar la definición funcional de la inversa de Drazin.

Definición 3.2. *Sea $\tilde{A}$ una transformación lineal sobre $\mathbb{C}^n$ tal que $ind\left(\tilde{A}\right) = k$. Sea $\tilde{A}_1 = \tilde{A}|_{R\left(\tilde{A^k}\right)}$ y tomemos $x = u + v$, donde $x \in \mathbb{C}^n$, $u \in R\left(\tilde{A^k}\right)$ y $v \in N\left(\tilde{A^k}\right)$. La transformación lineal definida por:*

$$\tilde{A^D} x = \tilde{A}_1^{-1} u$$

es llamada inversa de Drazin de $\tilde{A}$. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz asociada a la transformación lineal $\tilde{A}$, entonces se define la inversa de Drazin de A, A^D, como la matriz asociada a la aplicación lineal $\tilde{A}^D$.

En el siguiente teorema damos una representación matricial de la inversa de Drazin de una matriz cuadrada A. Esta representación es llamada *descomposición core-nilpotente de A*

Teorema 3.1. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $ind\,(A) = k \geq 0$ y $rango\left(A^k\right) = r$, entonces existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que:*

$$A = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{3.1}$$

donde $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular y $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ es nilpotente, con índice de nilpotencia k. Con estas condiciones:

$$A^D = P\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.2}$$

Demostración:

Sea $\tilde{A}$ la transformación lineal inducida sobre $\mathbb{C}^n$ por A. Sea:

$$B = \{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$$

la base para $\mathbb{C}^n$ construida en la demostración del Lema 3.1 de modo que $\{v_1, \cdots, v_r\}$ es una base para $R\left(\tilde{A^k}\right)$ y $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base para $N\left(\tilde{A^k}\right)$. Ya que $R\left(\tilde{A^k}\right)$ y $N\left(\tilde{A^k}\right)$ son subespacios invariantes de $\tilde{A}$ y $\tilde{A}^k$, tenemos la forma de bloques para A si $P = [v_1, \cdots, v_n]$. La forma para A^D sigue de la definición de A^D si P es tal como se especifica. Sin embargo si $\tilde{P}$, $\tilde{A}_1$ y $\tilde{A}_2$ son tales que verifican (3.1), $\tilde{A}_1$ es no singular y $\tilde{A}_2^k = 0$, entonces las primeras r columnas de $\tilde{P}$ es una base para $R\left(\tilde{A^k}\right)$ mientras que las columnas restantes forman una base para $N\left(\tilde{A^k}\right)$. Así se verifica (3.2) para cualquier P, A_1 ó A_2 por la Definición 2.1.

∎

Corolario 3.1.1. *Si $ind\,(A) = 1$ y $A_1 = I$, $A_1^{-1} = I$ y, por tanto, $A = A^{\#}$.*

Teorema 3.2. *Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la definición funcional de A^D es equivalente a la definición algebraica de A^D.*

Demostración:

Escribamos A como:

$$A = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Que A^D satisface, (2.3), (2.4) y (2.5) es trivial. Supongamos ahora que X satisface (2.3), (2.4) y (2.5). Ahora:

$$P^{-1}XP = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

donde X_{11} y A_1 son del mismo tamaño. De (2.5) tenemos:

$$A_1^{k+1}X_{11} = A_1^k, \quad A_1^{k+1}X_{12} = 0.$$

Así $X_{11} = A_1^{-1}$ y $X_{12} = 0$. Pero también $XA^{k+1} = A^k$ por (2.4) y (2.5). Así:

$$X_{21} = 0.$$

Queda por demostrar que $X_{22} = 0$. De (2.3) y (2.4) tenemos $A_2(X_{22})^2 = X_{22}$. Así:

$$A_2^{k-1}X_{22} = A_2^k(X_{22})^2 = 0.$$

Pero entonces:

$$A_2^{k-2}X_{22} = A_2^{k-1}(X_{22})^2 = 0.$$

Continuando de esta manera $X_{22} = 0$ como se desea.

■

Dado el caracter constructivo de la definición funcional de la inversa de Drazin, se tiene que para toda matriz cuadrada existe dicha inversa y es única.

De las definiciones algebraica y funcional se tienen las siguientes propiedades.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $ind(A) = k$. Entonces:

- $R\left(A^D\right) = R\left(AA^D\right) = R\left(A^k\right)$.
- $N\left(A^D\right) = N\left(AA^D\right) = N\left(A^k\right)$.
- $A^{p+1}A^D = A^p$, para todo $p \geq k$.
- Si $B = QAQ^{-1}$, entonces $B^D = QA^DQ^{-1}$.
- Si A es no singular, entonces $A^D = A^{-1}$

Proposición 3.1. *Sea una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces:*

$$AA^DA = A \textit{ si, y solo si, } ind(A) \leq 1.$$

Demostración:

Si $ind(A) = 0$, entonces $A^D = A^{-1}$ y $AA^DA = A$. Supongamos que $ind(A) = 1$. Relativo a la descomposición core-nilpotente de A (Teorema 3.1), se tiene que:

$$A = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} \quad y \quad AA^DA = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}.$$

Por lo que $AA^DA = A$. Recíprocamente, supongamos que $AA^DA = A$, entonces $A_2 = 0$ y, por consiguiente, $ind(A) = 1$.

■

A continuación damos una fórmula que nos permitirá obtener la inversa de Drazin en términos de inversa interior de una potencia de A, que será denotada como A^-. Recordemos que si A^- es una inversa interior de A, entonces $AA^-A = A$.

Teorema 3.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces, para cada entero $p \geq k$, y cualquier inversa interior de A^{2p+1}, se tiene:*

$$A^D = A^p \left(A^{2p+1}\right)^- A^p.$$

Demostración:

Sea:

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde A_1 y P son no singulares y A_2 es nilpotente con índice de nilpotencia k. Entonces:

$$A^{2p+1} = P \begin{bmatrix} A_1^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Si:

$$G = P \begin{bmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

es una inversa interior de A^{2p+1}, entonces de $A^{2p+1}GA^{2p+1} = A^{2p+1}$. De aquí se sigue que:

$$G = P \begin{bmatrix} A_1^{-2p-1} & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Luego, $A^D = A^p G A^p$.

■

Notemos que, para todo entero $p \geq k$, $ind\left(A^{2p+1}\right) = 1$ y, por lo tanto, A^{2p+1} posee inversa interior.

A diferencia de la inversa usual, la inversa de Drazin no posee la llamada regla del orden inverso, esto es, por lo general no se verifica que:

$$(AB)^D \neq B^D A^D.$$

No obstante, para que esta regla se verifique en el caso de la inversa de Drazin la conmutatividad si es suficiente (esto no es cierto, por ejemplo, para la inversa de Moore-Penrose). A continuación mostramos algunas de las propiedades que se derivan de la conmutatividad de A y B.

Teorema 3.4. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$. Entonces:*

- $(AB)^D = B^D A^D = A^D B^D$.
- $A^D B = BA^D, \quad AB^D = B^D A$.
- $ind(AB) \leq máx\{ind(A), ind(B)\}$.

  En general, incluso si $AB \neq BA$:

- $(AB)^D = A\left((BA)^2\right)^D B$.

3.2 Índice de una matriz cuadrada.

Dedicamos esta sección a dar más propiedades del índice de una matriz cuadrada. También dedicaremos algo de tiempo a aplicar dichas propiedades al estudio de sistemas lineales singulares de ecuaciones, es decir, sistemas lineales de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es singular. Diremos que un sistema de ecuaciones es *consistente* cuando tiene solución. En caso contrario, diremos que es *inconsistente*. Para un sistema lineal $Ax = b$, denotaremos por $[A|b]$ la matriz de coeficientes ampliada asociada a dicho sistema.

Teorema 3.5. *Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $Ax = b$ es un sistema lineal singular (consistente o no). Si $ind\,(A) = k$, entonces el sistema lineal de ecuaciones:*

$$A^k A x = A^k b \tag{3.3}$$

es consistente.

<u>Demostración:</u>

El sistema lineal $Ax = b$ tiene solución si, y sólo si, $rango\,(A) = rango\,[A|b]$. De la Definición (2.1) tenemos $rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left[A^{k+1}|A^k b\right]$. Además (3.3) es consistente.

■

Como consecuencia de este resultado obtenemos el siguiente que nos permite obtener soluciones de sistemas lineales de ecuaciones aunque estos sean singulares.

Teorema 3.6. *Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $k = ind\,(A)$ $A^D b$ es una solución del sistema:*

$$Ax = b \tag{3.4}$$

si, y sólo si, $b \in R\left(A^k\right)$ y $A^D b$ es una única solución de (3.4) siempre que $x \in R\left(A^k\right)$.

Los sistemas de ecuaciones singulares surgen en muchas aplicaciones científicas diferentes, como por ejemplo, en ecuaciones diferenciales parciales y el modelado de las cadenas de Markov. En este último caso debemos considerar sistemas lineales singulares con el índice uno, en concreto, debemos resolver el siguiente sistema consistente:

$$AAx = Ab \tag{3.5}$$

Mostraremos algunos resultados sobre el índice de una matriz y de el inverso de Drazin.

Teorema 3.7. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz no singular, entonces $ind\,(A) = 0$.*

<u>Demostración:</u>

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no singular, sabemos que $rango\,(A) = rango\,(I_n) = n$. Así $ind\,(A) = 0$. Además los valores propios de A son no nulos. Por lo tanto si A es una matriz no singular, entonces $ind\,(A) = 0$ y $A^D = A^{-1}$.

■

Teorema 3.8. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz con índice uno, entonces $rango\,(A) = rango\left(A^{\#}\right)$.*

Demostración:

$$rango\left(A^{\#}\right) = rango\left(A^{\#}AA^{\#}\right) \leq rango\left(AA^{\#}\right) \leq rango\left(A\right)$$
$$rango\left(A\right) = rango\left(AA^{\#}A\right) \leq rango\left(A^{\#}A\right) \leq rango\left(A^{\#}\right).$$

Por tanto, tenemos que $rango\left(A\right) = rango\left(A^{\#}\right)$.

■

Corolario 3.8.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde $ind\left(A\right) > 1$. Tenemos $rango\left(A^{D}\right) < rango\left(A\right)$.*

Teorema 3.9. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $A^{\#}$ existe si, y sólo si, $rango\left(A\right) = rango\left(A^{2}\right)$.*

Corolario 3.9.1. *El índice de cualquier matriz idempotente es igual a uno. El reciproco no siempre se verifica.*

Teorema 3.10. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz simétrica con índice uno, entonces $A^{\#} = \left(A^{\#}\right)'$.*

Demostración:
Como:

$$AA^{\#} = A^{\#}A, \quad A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}, \quad AA^{\#}A = A$$

y $A = A'$, tenemos:

$$\left(A^{\#}\right)'A = A\left(A^{\#}\right)', \quad \left(A^{\#}\right)'A\left(A^{\#}\right)' = \left(A^{\#}\right)', \quad A\left(A^{\#}\right)'A = A \tag{3.6}$$

por la definición de inversa de Drazin se tiene que $\left(A^{\#}\right)'$ es el inverso de grupo de A. El inverso de grupo A es único y, por tanto $A^{\#} = \left(A^{\#}\right)'$.

■

Corolario 3.10.1. *Para alguna matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con índice uno, $\left(A^{\#}\right)^{\#} = A$.*

Teorema 3.11. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde $ind\left(A\right) = k$, entonces $ind\left(A\right) = ind\left(A'\right)$.*

Demostración:
Por la Definición 2.1:

$$rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left(A^{k}\right).$$

De $\left(A^{n}\right)' = \left(A'\right)^{n}$, tenemos:

$$\left(A^{k+1}\right)' = \left(A'\right)^{k+1}, \left(A^{k}\right)' = \left(A'\right)^{k}$$

y de $rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left(A'\right)$ tenemos:

$$rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left(\left(A'\right)^{k+1}\right), rango\left(A^{k}\right) = rango\left(\left(A'\right)^{k}\right).$$

Así, $rango\left(\left(A'\right)^{k+1}\right) = rango\left(\left(A'\right)^{k}\right)$. Además $ind\left(A\right) = ind\left(A'\right)$.

■

Teorema 3.12. *Si λ es un valor propio de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{D}.*

Demostración:

De $Ax = \lambda x$, $(x \neq 0)$ tenemos:

$$AA^D x = \lambda A^D x$$

$$A^D AA^D x = \lambda A^D A^D x.$$

Por la definición de inversa de Drazin podemos obtener:

$$A^D x = \lambda A^D A^D x.$$

Ahora, si ponemos:

$$A^D x = y$$

tenemos:

$$\frac{1}{\lambda} y = A^D y.$$

Por tanto, $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^D.

■

Teorema 3.13. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente que $A^k = 0$, entonces $ind(A) = k$.*

Demostración:

De $A^k = 0$ tenemos:

$$rango\left(A^k\right) = rango(0).$$

Como para todo $n \in N$, $A^{k+n} = 0$ podemos afirmar que:

$$rango\left(A^{k+1}\right) = rango\left(A^k\right).$$

Además, $ind(A) = k$.

■

Corolario 3.13.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz nilpotente de índice n. Entonces $A^D = 0$.*

Teorema 3.14. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces $0 \leq ind(A) \leq n$.*

Demostración:

Por el Teorema 3.7, $ind(A) = 0$ para una matriz no singular A. Por el Teorema 3.13 $ind(A) = n$ para una matriz A nilpotente tal que $A^n = 0$.
Sea $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ son los distintos ceros del polinomio caracteristico de la matriz A y $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $\sigma(\lambda_1) = k < n$. Cualquier matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene n valores propios. Por la ecuación ecuación 2.1 $p(\lambda_1) \leq \sigma(\lambda_1) < n$. De la Definición 2.1 obtenemos $0 < ind(A) < n$. Por tanto, $0 \leq ind(A) \leq n$.

■

Seguidamente daremos algunos ejemplos de cálculo del índice y del inverso de Drazin de matrices cuadradas.

- **Ejemplo 1:**

Vamos a determinar el índice y la inversa de Drazin de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Es obvio que:

$$rango\,(A) = rango\left(A^2\right),$$

así $ind\,(A) = 1$. Además la matriz A tiene valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ con multiplicidad:

$$\sigma\,(\lambda_1) = 1, \quad \sigma\,(\lambda_2) = 2.$$

Además:

$$\rho\,(\lambda_1) = 1, \quad \rho\,(\lambda_2) = 2.$$

Así la forma de Jordan de la matriz A tiene la siguiente forma:

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & [0] \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

donde P es la matriz no singular:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

La dimensión del mayor bloque de Jordan corresponde al valor propio cero de (3.7) es igual a uno. Además $A = A^2$, entonces A es una matriz idempotente. Por el Corolario 3.9.1 $ind\,(A) = 1$. Del Teorema 3.1 tenemos:

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

donde $A_1 = I_2$ es una matriz no singular de orden 2 y $A_2 = 0$ es una matriz nilpotente. Por tanto:

$$A^{\#} = P^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Además $A_1 = I$ así del Corolario 3.1.1 tenemos $A = A^{\#}$. Las matrices A y $A^{\#}$ satisfacen las condiciones (2.2) (2.3) (2.4), así $A^{\#}$ es inversa de grupo de A. El sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

es inconsistente. Por otro lado, $ind\,(A') = 1$ y es claro que el siguiente sistema es consistente:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -5 \\ -5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -8 \end{cases}$$

- **Ejemplo 2:**

Determinaremos ahora el índice y la inversa de Drazin de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Es obvio que:

$$rango\left(B^3\right) = rango\left(B^4\right),$$

así $ind\,(B) = 3$. Además, la matriz B tiene como valor propio $\lambda = 0$ con multiplicidad:

$$\sigma\,(\lambda) = 3.$$

Además:

$$p\,(\lambda) = 1.$$

Así la forma de Jordan de la matriz B tiene la siguiente forma:

$$J = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

donde P es la matriz no singular:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La dimensión del mayor bloque de Jordan corresponde al valor propio cero de (3.8) igual a 3. Además $B^3 = 0$, entonces $ind\,(B) = 3$. Por el Teorema 3.1 tenemos:

$$B = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Así la inversa de Drazin de B es:

$$B^D = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = 0.$$

Luego, $B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ es una matriz nilpotente de índice 3. Por el Corolario 3.13.1 tenemos $B^D = 0$. Las matrices B y B^D cumplen las condiciones de inversa de grupo, así B^D es la inversa de Drazin de B.

- **Ejemplo 3:**

  Finalmente consideraremos la siguiente matriz simétrica:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz C tiene los valores propios:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -\frac{8}{3}.$$

El índice de la matriz C es igual a uno, porque:

$$rango(C) = rango\left(C^2\right).$$

Así la forma de Jordan de la matriz C tiene la siguiente forma:

$$J = PCP^{-1} = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & \left[-\frac{8}{3}\right] & 0 \\ 0 & 0 & [0] \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

donde P es la matriz no singular:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{9}{22} & -\frac{3}{11} & -\frac{9}{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

La dimensión del mayor bloque de Jordan corresponde al valor propio cero de (3.9) es igual a uno. Por el Teorema 3.1 tenemos:

$$C^{\#} = P^{-1}JP = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -1 & -6 & -1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -1 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

donde C, $C^{\#}$ satisfacen las condiciones (2.2) (2.3) (2.4) así $C^{\#}$ es inversa de grupo de C. Es claro que:

$$rango(C) = rango\left(C^{\#}\right)$$

y:

$$\left(C^{\#}\right)^{\#} = C.$$

Consideramos el siguiente sistema lineal de ecuaciones con índice uno:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + \frac{1}{3}x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \tag{3.10}$$

ya que:

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in R(C).$$

La solución del anterior sistema es:

$$x = C^{\#}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{6}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{6}{16} & \frac{12}{16} & -\frac{6}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{6}{16} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

3.3 Inversa de Drazin de una matriz por bloques.

En esta sección se darán diversas representaciones matriciales de la inversa de Drazin de una matriz por bloques de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

donde A y D son matrices cuadradas.

En la actualidad no se conocen representaciones de M^D en términos de la inversa de Drazin de sus bloques con A, B, C y D arbitrarios. No obstante hay algunos resultados se han obtenido para casos particulares. Un caso de gran interés, y para el que se tienen las expresiones generales para la inversa de Drazin en términos de A^D y D^D, lo constituyen las matrices triangulares superiores e inferiores por bloques. A continuación damos su representación.

Teorema 3.15. *Sean:*

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad y \quad M_2 = \begin{bmatrix} D & C \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

donde A y D son cuadradas con $ind(A) = k$ e $ind(D) = p$, respectivamente. Entonces:

$$M_1^D = \begin{bmatrix} A^D & 0 \\ X & D^D \end{bmatrix} \quad y \quad M_2^D = \begin{bmatrix} D^D & X \\ 0 & A^D \end{bmatrix},$$

donde:

$$X = \left(D^D\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(D^D\right)^i C A^i\right) A^{\pi} + D^{\pi} \left(\sum_{i=0}^{p-1} D^i C \left(A^D\right)^i\right) \left(A^D\right)^2 - D^D C A^D.$$

De los resultados anteriores se sigue directamente el siguiente corolario.

Corolario 3.15.1. *Sean:*

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

donde A y cada M_i son cuadradas. Entonces:

$$M_1^D = \begin{bmatrix} A^D & \left(A^D\right)^2 B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2^D = \begin{bmatrix} A^D & 0 \\ B\left(A^D\right)^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(A^D\right)^2 B & A^D \end{bmatrix}, \quad M_4^D = \begin{bmatrix} 0 & B\left(A^D\right)^2 \\ 0 & A^D \end{bmatrix}.$$

En el caso en que:

$$rango(M) = rango(A)$$

se tiene una expresión de M^D.

Teorema 3.16. *Sea $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$. Si:*

$$rango(M) = rango(A) = r,$$

entonces:

$$M^D = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} \left[(AS)^2\right]^D A \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} A \left[(SA)^2\right]^D \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}$$

donde:

$$S = I + A^{-1}BCA^{-1}.$$

Teorema 3.17. *Sea $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ no singular y llamamos $S = I + A^{-1}BCA^{-1}$. Entonces:*

- *Si $rango(M) = rango(A) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$. En este caso, para todo entero $k \geq 1$, M^k tiene una representación dada por:*

$$M^k = \begin{bmatrix} I \\ CA-1 \end{bmatrix} (AS)^{k-1} A \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}.$$

- *Si $rango(M) = rango(A) \Leftrightarrow ind(M) = 1 \Leftrightarrow$ es no singular. En este caso, el grupo inverso de M es dado por:*

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} (SAS)^{-1} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Cuando A es no singular, la matriz $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ puede ser representada como sigue:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

La matriz $D - CA^{-1}B$ denomina *complemento de Schur* de A en M.

Observamos que en el Teorema anterior, decir que $rango(M) = rango(A)$ es equivalente a decir que el complemento de Schur de A en M es cero, esto es, $D = CA^{-1}B$.

Si A es singular, entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^DB \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A^{\pi}C \\ BA^{\pi} & D - CA^DB \end{bmatrix},$$

donde $D - CA^DB$ es llamado el complemento generalizado de Schur de A en M.

3.4 Cálculo del inverso de Drazin.

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz no singular, entonces podemos mostrar que A^{-1} puede ser expresado como un polinomio en A. Esta propiedad no es cierta para todas las inversas generalizadas. En particular, si A es cuadrada, entonces puede no existir un polinomio $p(x)$ tal que $A^{\dagger} = p(A)$. Sin embargo, la inversa de Drazin de A es siempre expresable como un polinomio en A.

Teorema 3.18. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces existe un polinomio $p(x)$ tal que $A^D = p(A)$.*

Demostración:

Por el Teorema 3.1 podemos escribir A como:

$$A = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde P y A_1 son no singulares y A_2 es nilpotente de índice $k = Ind(A)$. Ya que A_1 es no singular, sabemos que existe un polinomio $q(x)$ tal que $A_1^{-1} = q(A_1)$. Sea $p(x)$ el polinomio definido por $p(x) = x^k [q(x)]^{k+1}$. Entonces:

$$\begin{aligned} p(A) = A^k [q(A)]^{k+1} &= P\begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q(A_1) & 0 \\ 0 & q(A_2) \end{bmatrix}^{k+1} P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} A_1^k [q(A_1)]^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = A^D. \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema muestra como podría construirse un polinomio $p(x)$ de menor grado que el obtenido en el anterior teorema y tal que $p(A) = A^D$. A diferencia del Teorema 3.18 tendremos en cuenta utiliza el hecho de que A es una matriz sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 3.19. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Supongamos que $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ son los distintos valores propios de A y $\lambda_0 = 0$. Sea σ_i denota la multiplicidad de λ_i y sea:*

$$\sigma = n - \sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_t.$$

Sea $p(x)$ el polinomio de grado $n-1$ tal que $p(x) = x^{\sigma_0}\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{\sigma-1} x^{\sigma-1}\right)$ cuyos coeficientes son las únicas soluciones únicas soluciones del siguiente sistema lineal de ecuaciones de orden $m \times m$ ($(\cdot)^{(t)}$ denota la derivada i-ésima con respecto a x).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} &= p(\lambda_i), \\ -\frac{1}{\lambda_i^2} &= p'(\lambda_i), \\ &\vdots \\ \frac{(-1)^{\sigma_i - 1}(\sigma_i - 1)!}{\lambda_i^{\sigma_i}} &= p^{(\sigma_i - 1)}(\lambda_i). \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, t$, entonces $p(A) = A^D$.

Demostración:

Sabemos que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es similar a la forma de Jordan. Por tanto escribimos:

$$A = T\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1}, \tag{3.11}$$

donde J y N son las matrices diagonales de bloque:

$$J = diag[B_1, \ldots, B_k],$$

$$N = diag\left[F_1, \ldots, F_g\right].$$

Cada B_j es un bloque elemental de Jordan correspondiente a un valor propio no nulo, esto es, cada B_j es de la forma:

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_l \end{bmatrix}_{s \times s} \tag{3.12}$$

donde $\lambda_l \neq 0$ y $s \leq \sigma_l$. Cada F_j es un bloque elemental de Jordan correspondiente al valor propio cero. Esto es, cada F_j es de la forma (3.12) con $\lambda_l = 0$. Claramente, J es no singular y $N \in \mathbb{C}^{\sigma_0 \times \sigma_0}$ es nilpotente de índice $k = Ind(A) \leq \sigma_0$. Por tanto:

$$A^D = T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \tag{3.13}$$

y:

$$p(A) = T \begin{bmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & p(N) \end{bmatrix} T^{-1} = T \begin{bmatrix} p(J) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, \tag{3.14}$$

ya que $N^{\sigma_0} = 0$ implica $p(N) = 0$. Como $p(J) = diag[p(B_1), \ldots, p(B_h)]$, es suficiente mostrar que $p\left(B_j\right) = B_j^{-1}$ para cada j. Pero usando (3.12), no es difícil verificar que:

$$p\left(B_j\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda_l) & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} & \frac{p''(\lambda_l)}{2!} & \cdots & \frac{p^{s-1}(\lambda_l)}{(s-1)!} \\ 0 & p(\lambda_l) & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \frac{p''(\lambda_l)}{2!} \\ \vdots & & & \cdots & \frac{p'(\lambda_l)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(\lambda_l) \end{bmatrix}_{s \times s} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_l} & \frac{-1}{\lambda_l^2} & \frac{1}{\lambda_l^3} & \cdots & \frac{(-1)^{s-1}}{\lambda_l^s} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_l} & \frac{-1}{\lambda_l^2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{-1}{\lambda_l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_l} \end{bmatrix} = B_j^{-1}.$$

Así, $p(A) = A^D$.

■

El Teorema 3.19 a veces puede ser útil en el cálculo de A^D. Esto es cierto particularmente si σ_0 es muy grande con respecto a n.

Mostramos a continuación un ejemplo donde el Teorema 3.19 se puede usar de manera bastante eficiente.

- **Ejemplo:**

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Usaremos el Teorema 3.19 para calcular A^D. Primero calcularemos los valores propios de A. Los valores propios de A son $\{0,0,1,1\}$. Por tanto las multiplicidades son $\sigma_0 = 2$ y $\sigma_1 = 2$. Por tanto A^D puede expresarse por:

$$A^D = A^2 (\alpha_0 I + \alpha_1 A),$$

ya que $p(x) = x^2(\alpha_0 + \alpha_1 x)$. Como α_0 y α_1 son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 1 = p(1) = \alpha_0 + \alpha_1, \\ -1 = p'(1) = 2\alpha_0 + 3\alpha_1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Tenemos que $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = -3$ y:

$$A^D = A^2 (4I - 3A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para cada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hay polinomios de especial importancia además del polinomio característico. Este polinomio es el polinomio minimal. Se define como *polinomio minimal* para A a:

$$m(x) = x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Se puede mostrar que A es no singular si, y sólo si, $\alpha_0 \neq 0$, en cuyo caso:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}\left(A^{d-1} + \alpha_{d-1} A^{d-2} + \ldots + \alpha_2 A + \alpha_1 I\right).$$

Ahora, supongamos que A es singular. Entonces $\alpha_0 = 0$. Sea i el número más pequeño de tal manera que:

$$0 = \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1}$$

pero $\alpha_i \neq 0$. Este número i, es llamado *índice del valor propio cero*. El siguiente teorema muestra que el índice del valor propio cero de A es igual al índice de A.

Teorema 3.20. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y:*

$$m(x) = x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots + \alpha_i x^i$$

con $\alpha_i \neq 0$ es el polinomio minimal para A, entonces $i = ind(A)$.

<u>Demostración:</u>

Consideremos la descomposición de A dada por el Teorema 3.1, es decir:

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde A_1 es no singular y A_2 es nilpotente de índice $k = Ind(A)$. Ya que $m(A) = 0$, podemos concluir que:

$$0 = m(A_2) = A_2^d + \alpha_{d-1}A_2^{d-1} + \ldots + \alpha_{i+1}A_2^{i+1} + \alpha_i A_2^i = \left(A_2^{d-i} + \alpha_{d-1}A_2^{d-i-1} + \ldots + \alpha_i I\right)A_2^i.$$

Ya que:

$$\left(A_2^{d-i} + \alpha_{d-1}A_2^{d-i-1} + \alpha_i I\right)$$

es inversible, tenemos $A_2^i = 0$. Por lo tanto $i \geq k$. Supongamos que $k < i$. Entonces:

$$A^D A^i = A^{i-1}. \tag{3.16}$$

Escribimos $m(x) = x^i q(x)$ por lo que $0 = m(A) = A^i q(A)$. Multiplicando ambos lados por A^D y usando (3.16) obtenemos $0 = A^{i-1}q(A)$. Así, el polinomio $r(x) = x^{i-1}q(x)$ es tal que $r(A) = 0$ y:

$$deg[r(x)] < deg[m(x)].$$

Lo que es una contradicción. Luego podemos concluir que $k = i$.

■

Corolario 3.20.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $k = Ind(A)$, y σ_0 denota la multiplicidad del valor propio cero. Entonces $\sigma_0 \geq k$.*

Demostración:

El polinomio minimal, del Teorema 3.20 , es:

$$m(x) = x^k\left(x^{d-k} + \alpha_{d-1}x^{d-1-k} + \ldots + \alpha_{k+1}x + \alpha_k\right),$$

con $(\alpha_k \neq 0)$ y $m(x)$ debe dividir a $p(x)$.

■

Cuando se usa el Teorema 3.19 para calcular la inversa de Drazin de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, es necesario calcular cada valor propio de A junto con las multiplicidades de cada valor propio. Muchas veces se puede calcular los coeficientes del polinomio característico para A de manera más fácil que sus valores propios. El siguiente teorema muestra como obtener A^D del polinomio característico de A.

Teorema 3.21. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y $k = Ind(A)$. Escribimos la ecuación característica de A como:*

$$0 = x^{\sigma_0}\left(x^{n-\sigma_0} + \beta_{n-1}x^{n-1-\sigma_0} + \ldots + \beta_{\sigma_0+1}x + \beta_{\sigma_0}\right) = x^{\sigma_0}q(x),$$

con $\beta_{\sigma_0} \neq 0$. Sea:

$$r(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\beta_{\sigma_0}}\left(x^{n-\sigma_0-1} + \beta_{n-1}x^{n-\sigma_0-2} + \ldots + \beta_{\sigma_0+1}\right), & si \quad \sigma_0 < n \\ 0, & si \quad \sigma_0 = n \end{cases}$$

entonces, $A^D = A^l[r(A)]^{l+1}$ para cada entero $l \geq k$.

Demostración:

Si $\sigma_0 = n$, entonces A es nilpotente y $A^D = 0$ y el resultado es trivial. En consecuencia supongamos que $\sigma_0 < n$. Multiplicando ambos lados de $0 = A^{\sigma_0} q(A)$ por $\left(A^D\right)^{\sigma_0+1}$ obtenemos $0 = A^D q(A)$. De esta, se deduce que:

$$A^D = AA^D r(A).$$

Elevando ambos lados a la $(l+1)$-ésima potencia, obtenemos:

$$\left(A^D\right)^{l+1} = AA^D [r(A)]^{l+1}.$$

Multiplicando esta igualdad a ambos lados por A^l se obtiene:

$$A^D = A^l [r(A)]^{l+1}.$$

■

Como el índice de una matriz nunca puede exceder a su tamaño, ni al número σ_0 del Corolario 3.20.1, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.21.1. *Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:*

$$A^D = A^n [r(A)]^{n+1} = A^{\sigma_0} [r(A)]^{\sigma_0+1}$$

donde $r(x)$ es el polinomio del Teorema 3.21.

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, los coeficientes de la ecuación característica:

$$x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 = 0,$$

para A se pueden calcular en forma recursiva a través del algoritmo:

$$\beta_{n-j} = -\frac{1}{j} Tr\left(AS_{j-1}\right) \tag{3.17}$$

donde:

$$S_0 = I, \quad S_j = AS_{j-1} + \beta_{n-j} I. \tag{3.18}$$

ya que:

$$S_j = A^j + \beta_{n-1} A^{j-1} + \ldots + \beta_{n-j} I$$

el siguiente resultado muesta como este algoritmo se puede utilizar para obtener la matriz $r(A)$ de forma inmediata.

Teorema 3.22. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $r(x)$ es el polinomio del Teorema 3.21.*

Si $n = \sigma_0$, entonces $A^D = 0$. Si $n > \sigma_0$, entonces:

$$r(A) = -\frac{1}{\beta_{\sigma_0}} S_{n-\sigma_0-1}$$

donde β_{σ_0} y S_{σ_0+1} son calculadas de (3.17) y (3.18). Así:

$$A^D = -\frac{1}{\beta_{\sigma_0}^{l+1}} A^l S_{n-\sigma_0-1}^{l+1}$$

para todo $l \geq Ind(A)$.

Nótese que si $S_t = 0$, entonces:

$$0 = S_{t+1} = S_{t+2} = \ldots = S_{n-1}$$

y:

$$\beta_{n-t-1} = \beta_{n-t-2} = \ldots = \beta_0 = 0.$$

Así, es fácil usar el Teorema 3.22 para obtener $r(A)$ y A^D de la siguiente forma.

- **Algoritmo:**

Para calcular A^D para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(I). Fijamos $S_0 = I$ y calculamos:

$$\begin{aligned} S_j &= AS_{j-1} + \beta_{n-j} I, \\ \beta_{n-j} &= -\frac{1}{j} Tr\left(AS_{j-1}\right), \end{aligned}$$

hasta algún tal que $S_t = 0$, pero $S_{t-1} \neq 0$.

(II). Sea u un número tal que:

$$\beta_{n-u} \neq 0$$

y:

$$\beta_{n-u-1} = \beta_{n-u-2} = \ldots = \beta_{n-t-1} = 0.$$

(Observe que $n - u = \sigma_0$ es la multiplicidad del valor propio cero.)

(III). Sea $l = n - u$ y calcule:

$$S^{l+1}_{n-\sigma_0-1} = S^{l+1}_{u-1}.$$

(IV). Calcule A^D como:

$$A^D = -\frac{1}{\beta_l^{l+1}} A^l S^{l+1}_{u-1}.$$

Nótese que no todos los S_j calculados deben ser guardados. Si $\beta_{n-j} \neq 0$, entonces S_{j-2} pueden ser olvidado. Sin embargo S_{j-1} debe ser guardado hasta que el próximo β no nulo que aparezca. Observe también que este algoritmo produce el valor de la multiplicidad del valor propio cero para A.

A continuación mostramos un ejemplo del uso de este algoritmo para calcular el inverso de Drazin de una matriz cuadrada.

- **Ejemplo:**

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 & -3 \\ 12 & -10 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(I). Sucesivamente calculamos:

$$S_0 = I, \qquad \beta_3 = -Tr(AS_0) = -Tr(A) = -3,$$

$$S_1 = AS_0 - 3I = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 6 & -3 \\ 12 & -13 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AS_1 = \begin{bmatrix} -14 & 12 & -10 & 5 \\ -20 & 18 & -16 & 8 \\ -4 & 4 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}Tr(AS_1) = 2,$$

$$S_2 = AS_1 + 2I = \begin{bmatrix} -12 & 12 & -10 & 5 \\ -20 & 20 & -16 & 8 \\ -4 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$AS_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{3}Tr(AS_2) = 0,$$

$$S_3 = AS_2,$$

$$AS_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{4}Tr(AS_3) = 0,$$

y:

$$S_4 = AS_3 = 0.$$

Por tanto, $t = 4$ en este ejemplo y la multiplicidad del valor propio cero es $\sigma_0 = 2$.
(II) y (III). Fijamos $u = 2$ y $l = 2$
(IV). Calculamos A^D como sigue:

$$A^D = -\frac{1}{\beta_2^3}A^2S_1^3 = -\frac{1}{8}A^2S_1^3.$$

ya que:

$$S_2 = AS_1 + \beta_2 I$$

tenemos:

$$AS_2S_1^2 = A^2S_1^3 + \beta_2 AS_1^2$$

y escribimos:

$$A^2S_1^3 = [(AS_2)S_1 - \beta_2(AS_1)]S_1.$$

Como AS_2 y AS_1 ya se han calculado, solo son necesarias dos multiplicaciones de matrices. Esto es más eficiente que formar el producto $A^2S_1^3$ directamente. En general, siempre se puede hacer algo como esto cuando se utiliza este algoritmo. Ahora:

$$(AS_2)S_1 = \begin{bmatrix} -12 & 12 & -12 & 6 \\ -24 & 24 & -24 & 12 \\ -12 & 12 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[(AS_2)S_1 - 2(AS_1)] = \begin{bmatrix} 16 & -12 & 8 & -4 \\ 16 & -12 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & -8 & 8 \end{bmatrix},$$

y:

$$A^2S_1^3 = [(AS_2)S_1 - 2(AS_1)]S_1 = \begin{bmatrix} -16 & 12 & -8 & 4 \\ -16 & 12 & -8 & 4 \\ 8 & -8 & 8 & -8 \\ 16 & -16 & 16 & -16 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$A^D = -\frac{1}{8}A^2S_1^3 = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Aplicaciones a los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Son muchas las aplicaciones de la inversa de grupo y de Drazin. Por ejemplo, la inversa de grupo es útil en interesantes áreas de la matemática aplicada como la teoría de grafos, las cadenas de Markov finitas y los algoritmos de búsqueda de páginas web. La inversa de Drazin tiene aplicación en el estudio de la perturbación de sistemas singulares de ecuaciones diferenciales y en el del los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. A continuación hablaremos de esta última aplicación del inverso de Drazin, concretamente para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Si una ecuación diferencial tiene al menos una solución para una condición inicial la llamaremos *consistente*. Estudiaremos las soluciones para los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes en el caso en el que la condición inicial consistente determina una única solución. También daremos, en este caso, condiciones necesarias y suficientes para una condición inicial para ser consistente.

A lo largo de esta sección las letras A, B y G denotaran matrices cuadradas de orden n con coeficientes constantes mientras que q y b denotaran vectores constantes. Las letras x, y y f denotaran vectores cuyas entradas son funciones diferenciables en la variable t.

Inicialmente examinaremos el caso especial:

$$x' + Ax = f.$$

Posteriormente estudiaremos el caso:

$$Ax' + Bx = f \text{ tales que } AB = BA.$$

Finalmente consideraremos el caso general:

$$Ax' + Bx = f$$

reduciendolo al caso en el que los coeficientes conmutan.

- **La ecuación x'+ Ax = f.**

La solución general de:

$$x' + Ax = f \tag{3.19}$$

viene dada como en el caso escalar por:

$$x = e^{-At} \int e^{At} f(t)\, dt.$$

Por tanto es útil estudiar:

$$\int e^{At} dt.$$

Si A es inversible, entonces:

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} + G,$$

donde G es una matriz arbitraria de orden n.

Si A es singular, entonces el problema se complica.

Teorema 3.23. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene indice k, entonces:*

$$\int e^{At} dt = A^D e^{At} + \left(I - AA^D\right) t \left[I + \frac{A}{2} t + \frac{A^2}{3!} t^2 + \ldots + \frac{A^{k-1}}{k!} t^{k-1}\right] + G. \tag{3.20}$$

Demostración:

Basta derivar el lado derecho de la ecuación (3.20) y usar el desarrollo en serie de e^{At}.

■

Sabemos que si f es un vector constante, entonces la ecuación (3.19) tiene una solución particular que es un polinomio en t. Usando el anterior teorema y el desarrollo en serie de potencias de e^{-At}, obtenemos una forma explícita de una solución polinómica de la ecuación (3.19) cuando f es la constante b. La solución es:

$$x = \left\{A^D + \left(I - AA^D\right) t \left(I - \frac{At}{2!} + \frac{A^2 t^2}{3!} - \ldots (-1)^{k-1} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{k!}\right)\right\} b$$

como puede verificarse directamente.

- **La ecuación Ax' + Bx = f cuando AB = BA.**

Empezaremos con el estudio de:

$$Ax' + Bx = f. \tag{3.21}$$

Si A es no singular, entonces la ecuación (3.21) se puede escribir a la forma de la ecuación (3.19). Consideraremos el caso en el que A y B pueden ser singulares. Asociado a la ecuación (3.21) tenemos la ecuación homogénea:

$$Ax' + Bx = 0. \tag{3.22}$$

Supondremos que A y B conmutan. En el caso general mostraremos que si las condiciones iniciales consistentes determinan soluciones de forma única, entonces la ecuación (3.21) puede ser reducida al caso cuando A y B conmutan.

Sean $x_1 = A^D Ax$ y $x_2 = \left(I - A^D A\right)x$. Entonces la ecuación (3.21) se escribe:

$$(C+N)(x_1' + x_2') + B(x_1 + x_2) = f.$$

(donde C y N vienen dados por la descomposición core-nilpotente).

Multiplicando primero por $C^D C$ y luego por $\left(I - C^D C\right)$, obtenemos que la ecuación (3.22) es equivalente a:

$$Cx_1' + Bx_1 = f_1, \tag{3.23}$$

y:

$$Nx_2' + Bx_2 = f_2, \tag{3.24}$$

donde $f_1 = C^D C f$ y $f_2 = \left(I - C^D C\right) f$.
La ecuación (3.23) puede ser reescrita como:

$$x_1' + C^D B x_1 = C^D f, \tag{3.25}$$

que está en la forma de la ecuación (3.19). Por lo tanto la ecuación (3.25) tiene una única solución para todas las condiciones iniciales en $R\left(A^D A\right)$. La ecuación (3.24), sin embargo, puede tener o no tener soluciones no triviales. Las soluciones, si existen, no necesita ser determinada de manera única por las condiciones iniciales. Antes de dar un ejemplo, vamos a sacar ciertas conclusiones de la ecuación (3.25).

Teorema 3.24. *Supongamos que A y B conmutan. Entonces:*

$$y = e^{-A^D Bt} A A^D q$$

es una solución de:

$$Ax' + Bx = 0$$

para cada vector columna q.

Demostración:

Sea $y = e^{-A^D Bt} A^D A q$. Entonces:

$$\begin{aligned} Ay' &= -AA^D B e^{-A^D Bt} A^D A q \\ &= -B e^{-A^D Bt} A^D A q \\ &= -By \end{aligned}$$

como queriamos.

■

Corolario 3.24.1. *Si A y B conmutan y $A^D A f = f$, entonces:*

$$y = e^{-A^D Bt} \int e^{A^D Bt} f(t)\, dt$$

es una solución particular de:

$$Ax' + Bx = f.$$

Ahora consideraremos un caso especial de la ecuación (3.22). Ya que por lo general, las partes nilpotentes son las que causan dificultades, tomaremos A y B ambos nilpotentes.

- **Ejemplo 1:**

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de modo que la ecuación (3.22) es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ó $x_2' + x_2 + x_3 = 0$. En este caso se puede ver que x_1 y x_3 son arbitrarios aunque se impongan condiciones inciales. Observese que $AB = BA$.

El siguiente lema será básico en lo que sigue.

Lema 3.3. *Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Entonces:*

$$\left(I - AA^D\right) BB^D = \left(I - AA^D\right). \tag{3.26}$$

<u>Demostración:</u>

Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Escribiremos A como:

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde A_1 es inversible y $A_2^k = 0$. Sea:

$$B = P \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Si $AB = BA$, entonces:

$$B_1 A_1 = A_1 B_1, \quad A_2 B_4 = B_4 A_2, \quad A_1 B_2 = B_2 A_2, \quad A_2 B_3 = B_3 A_1. \tag{3.27}$$

Por tanto:

$$A_1^k B_2 = B_2 A_2^k = 0.$$

Así $B_2 = 0$ ya que A_1^k es inversible. De manera similar, se obtiene que $B_3 = 0$. Por lo tanto:

$$BB^D = P \begin{bmatrix} B_1 B_1^D & 0 \\ 0 & B_4 B_4^D \end{bmatrix} P^{-1}, \quad \left(I - AA^D\right) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Queda por demostrar que B_4 es inversible .

Si $A_2 = 0$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, entonces $N(B_4) = \{0\}$ y hemos terminado.

Si $A_2 \neq 0$, supongamos que existe $v \neq 0$ tal que $v \in N(B_4)$. Entonces:

$$A_2^p v \in N(B_4) \quad \text{para todo entero } p \geq 0$$

ya que $A_2 B_4 = B_4 A_2$. Como A_2 es nilpotente, existe un entero no negativo l tal que:

$$A_2^l v \neq 0, \text{ pero } A_2^{l+1} v = 0.$$

Esto implica que:

$$0 \neq A_2^l v \in N(B_4) \cap N(A_2),$$

y de aquí $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $N(B_4) = \{0\}$ y B_4 es inversible.

■

En el Ejemplo 1 parte de la dificultad viene de que los espacios nulos de A y B tienen intersección no trivial. En caso contrario tendriamos el siguiente resultado.

Teorema 3.25. *Supongamos que A y B conmutan y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Entonces:*

$$x = e^{-A^D B t} A A^D q, \quad q \in \mathbb{C}^n \tag{3.28}$$

es la solución general de $Ax' + Bx = 0$.

<u>Demostración:</u>

Se tiene que $e^{-A^D B t} A A^D q$ es solución para todo q por el Teorema 3.24.

Para probar que (3.28) es la solución general, se necesita probar que para toda solución x, existe un vector q tal que (3.28) se cumpla. Si x es una solución, entonces las ecuaciones (3.24) y (3.25) se cumplen para $f = 0$. Ya que $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, tenemos que B es inyectivo en el rango de N por el Lema 3.3. Sea $k = Ind(A)$, se tiene:

$$0 = N^k x_2' + B N^{k-1} x_2 = B N^{k-1} x_2.$$

y:

$$N^{k-1} x_2 = 0.$$

Derivando ambos lados:

$$0 = N^{k-1} x_2' = -B N^{k-2} x_2.$$

Continuando de esta manera, obtenemos que:

$$B x_2 = 0, \quad N x_2 = 0, \quad \left(I - A A^D\right) x_2 = x_2.$$

Por lo tanto $x_2 = 0$ y $x = x_1$. Usando la ecuación (3.25) se obtiene:

$$x_1 = e^{-C^D B t} q = e^{-A^D B t} q \quad \text{para algún q.}$$

Así:

$$x = x_1 = A A^D x_1 = e^{-A^D B t} A A^D q \quad \text{para algún q.}$$

■

Observe que en el Ejemplo 1, $e^{-A^D B t} A^D A$ es idénticamente cero, pero la ecuación tiene soluciones no triviales.

En la derivación de la ecuación (3.28) se utiliza la mayor parte de las propiedades de la inversa de Drazin.

- **Ejemplo 2:**

Consideremos el sistema $Ax' + Bx = 0$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $A^D = 0$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, sabemos por el Teorema 3.25 que la ecuación tiene una única solución trivial. Sea:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces E es una $\{1,2\}$-inversa de A. Pero:

$$e^{-EBt} EAq = e^{-Et} EAq$$

no es idénticamente nula para todo q por lo que no es una solución para $Ax' + Bx = 0$.

Ahora daremos una solución particular de la ecuación (3.21) cuando A y B conmutan y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Como es usual se denotará, $f^{(n)} = d^n f / dt^n$.

Teorema 3.26. *Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Sea $k = Ind(A)$. Si f es una función vectorial diferenciable continuamente k-veces, entonces, $Ax' + Bx = f$ es consistente y una solución particular está dada por:*

$$x = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\, ds + \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}, \tag{3.29}$$

donde a es arbitrario.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que $AB = BA$ y $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Sea:

$$x_1 = A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\, ds$$

y:

$$x_2 = \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}.$$

Demostraremos que:

$$Ax_1' + Bx_1 = \left(AA^D\right) f \tag{3.30}$$

y:

$$Ax_2' + Bx_2 = \left(I - AA^D\right) f, \tag{3.31}$$

de modo que $x = x_1 + x_2$ es una solución de la ecuación (3.21). Primero verificaremos la ecuación (3.30):

$$\begin{aligned} Ax_1' &= A\left\{-A^D Bx_1 + A^D e^{-A^D Bt} e^{A^D Bt} f(t)\right\} \\ &= -AA^D Bx_1 + AA^D f \\ &= -Bx_1 + AA^D f \end{aligned}$$

como se deseaba. Ahora:

$$\begin{aligned}
Ax_2' &= A\left(I-AA^D\right)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^n B^D f^{(n+1)} \\
&= \left(I-AA^D\right)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^{n+1} f^{(n+1)} \\
&= \left(I-AA^D\right)\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\left(AB^D\right)^{n+1} f^{(n+1)} \\
&= -\left(I-AA^D\right)\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^n f^{(n)} \\
&= -\left(I-AA^D\right)B\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^n B^D f^n \\
&= -\left(I-AA^D\right)B\left(x_2-B^D f\right) \\
&= -\left(I-AA^D\right)Bx_2+\left(I-AA^D\right)f \\
&= -Bx_2+\left(I-AA^D\right)f
\end{aligned}$$

como se deseaba. Así la la ecuación (3.31).

■

Combinando el Teorema 3.25 y 3.26 obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.27. *Supongamos que $AB = BA$ y $N(A)\cap N(B) = \{0\}$. Entonces la solución general de $Ax' + Bx = f$ es dada por:*

$$x = e^{-A^D Bt}A^D Aq + A^D e^{-A^D Bt}\int_a^t e^{A^D Bs} f(s)\,ds + \left(I-AA^D\right)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}, \quad (3.32)$$

donde q es un vector constante arbitrario, $k = Ind(A)$ y a es arbitrario.

Como corolario inmediato del Teorema 3.27 se tiene una caracterización de las condiciones iniciales consistentes cuando $AB = BA$ y $N(A)\cap N(B) = \{0\}$.

Corolario 3.27.1. *Supongamos que $AB = BA$ y $N(A)\cap N(B) = \{0\}$. Entonces existe una solución de $Ax' + Bx = f$ con $x(0) = x_0$ si, y sólo si, x_0 es de la forma:*

$$x_0 = A^D Aq + \left(I-AA^D\right)\sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n\left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}(0)$$

para algún vector q. Además, la solución es única.

En particular, si f es idénticamente cero, entonces $A^D Ax_0 = x_0$ caracteriza las condicones iniciales consistentes.

- **La ecuación Ax' + Bx = f.**

Finalmente, estableceremos condiciones necesarias y suficientes para la unicidad de soluciones y usaremos el teorema 3.27 para obtener la solución general cuando la ecuación tiene solución única. El siguiente lema será fundamental en lo que sigue.

Lema 3.4. *Supongamos que existe un escalar c tal que $(cA+B)^{-1}$ existe. Entonces $(cA+B)^{-1}A$ y $(cA+B)^{-1}B$ conmutan.*

Demostración:
Si existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $(cA+B)$ es inversible, entonces:

$$c\left[(cA+B)^{-1}A\right]+\left[(cA+B)^{-1}B\right]=I.$$

■

Teorema 3.28. *La ecuación diferencial homogénea $Ax'+Bx=0$ tiene soluciones únicas para condiciones iniciales consistentes si, y sólo si, existe un c tal que $(cA+B)$ es inversible.*

Demostración:
Supongamos $(cA+B)$ es inversible. Entonces $N(A)\cap N(B)=\{0\}$. Pero:

$$N(A)=N\left((cA+B)^{-1}A\right), \quad N\left((cA+B)^{-1}B\right)=N(B).$$

Así:

$$(cA+B)^{-1}Ax'+(cA+B)^{-1}Bx=0 \tag{3.33}$$

tiene solución única por el Teorema 3.25. Pero la ecuación (3.33) es claramente equivalente a la ecuación (3.22).

Recíprocamente, supongamos que $(cA+B)$ no es inversible para cada c. Entonces para cada c existe un vector no cero ϕ_c tal que $(cA+B)\phi_c=0$. Pero entonces:

$$x_c=e^{tc}\phi_c$$

es una solución de la ecuación (3.22) para:

$$Ax_c'=ce^{tc}A\phi_c=-e^{tc}B\phi_c=-Bx_c.$$

Como no hay más de n de los ϕ_c linealmente independientes, tomaremos un subconjunto finito $\left\{\phi_{c_i}\right\}_{i=1}^{l}$ con $c_i\neq 0$ y tales que son linealmente dependientes. Si:

$$\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\phi_{c_i}=0,$$

y:

$$x=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i e^{tc_i}\phi_{c_i}.$$

Entonces x y 0 satisfacen la ecuación $Ax'+Bx=0$ y $x(0)=0$. Pero x no es idénticamente cero. Por lo tanto, la ecuación $Ax'+Bx=0$ no tiene soluciones únicas para condiciones iniciales consistente.

■

Con el fin de simplificar las fórmulas a lo largo de esta sección, introduciremos notaciones.

$$\hat{A}_c = (cA+B)^{-1} A, \quad \hat{B}_c = (cA+B)^{-1} B, \quad \hat{f}_c = (cA+B)^{-1} f \tag{3.34}$$

donde A y B son matrices de orden n, f es una función vectorial y c es tal que $(cA+B)$ es inversible. Si $\hat{A}_c$, $\hat{B}_c$, $\hat{f}_c$ se utilizan en una fórmula que es independiente de c, omitiremos el subíndice.

Usando los Teoremas 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 y el Lema 3.4, obtenemos nuestros resultados más fuertes.

Teorema 3.29. *Supongamos que $Ax' + Bx = 0$ tiene soluciones únicas para condiciones iniciales consistentes. Sea c tal que $(cA+B)$ es inversible. Definamos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{f}$ como en (3.34). Sea $k = Ind\left(\hat{A}\right)$. Entonces $Ax' + Bx = f$, $x(0) = x_0$ tiene solución si, y sólo si, x_0 es de la forma:*

$$x_0 = \hat{A}\hat{A}^D q + \left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[\hat{A}\hat{B}^D\right]^n \hat{B}^D \hat{f}^{(n)}(0), \tag{3.35}$$

para algún vector q. Una solución particular de $Ax' + Bx = f$ es:

$$x = \hat{A}^D e^{-\hat{A}^D\hat{B}t} \int_a^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s} \hat{f}(s)\,ds + \left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[\hat{A}\hat{B}^D\right]^n \hat{B}^D \hat{f}^{(n)}, \tag{3.36}$$

donde a es arbitrario. La solución general de $Ax' + Bx = f$ es:

$$x = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t} \hat{A}\hat{A}^D q + \hat{A}^D e^{-\hat{A}^D\hat{B}t} \int_a^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s} \hat{f}(s)\,ds + \left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[\hat{A}\hat{B}^D\right]^n \hat{B}^D \hat{f}^{(n)}, \quad q \in \mathbb{C}^n. \tag{3.37}$$

La solución que satisface $x(0) = x_0$ es encontrada considerando $q = x_0$ y $a = 0$ en (3.37).

Es importante observar que las ecuaciones (3.35) , (3.36) y (3.37) son independientes de c. Esto se deduce del siguiente teorema.

Teorema 3.30. *Supongamos que A y B son matrices de orden n tales que $(cA+B)^{-1}$ existe para algún c. Entonces:*

$$\hat{A}_c^D \hat{A}_c, \quad \hat{A}_c^D \hat{B}_c, \quad \hat{A}_c^D (cA+B)^{-1}, \quad \hat{B}_c^D (cA+B)^{-1}, \quad \hat{A}_c \hat{B}_c^D, \quad Ind\left(\hat{A}_c\right)$$

son independientes de c.

Demostración:

Como $\hat{A}_c\hat{B}_c = \hat{B}_c\hat{A}_c$ es claro de (3.34) que basta para mostrar que $\hat{A}_c^D (cA+B)^{-1}$, $\hat{B}_c^D (cA+B)^{-1}$, y $ind\left(\hat{A}_c\right)$ son independientes de c. Supongamos que λ, c son tales que $(\lambda A + B)$ y $(cA+B)$ son inversibles. Entonces:

$$
\begin{aligned}
A_{\lambda}^{D}(\lambda A+B)^{-1} &= \left[(\lambda A+B)^{-1}(cA+B)(cA+B)^{-1}A\right]^{D}(\lambda A+B)^{-1}\\
&= \left[\left(\lambda\hat{A}_c+\hat{B}_c\right)^{-1}\hat{A}_c\right]^{D}(\lambda A+B)^{-1}\\
&= \hat{A}_c^{D}\left(\lambda\hat{A}_c+\hat{B}_c\right)(\lambda A+B)^{-1}\\
&= \hat{A}_c^{D}\left(\lambda(cA+B)^{-1}A+(cA+B)^{-1}B\right)(\lambda A+B)^{-1}\\
&= \hat{A}_c^{D}(cA+B)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Así $\hat{A}_c^{D}(cA+B)^{-1}$ es independiente de c. La demostración de que $\hat{B}_c^{D}(cA+B)^{-1}$ es independiente de c es similar. Finalmente, obsérvese que para cualquier entero k:

$$
\begin{aligned}
rango\left(\hat{A}_{\lambda}^{k}\right) &= rango\left[\left(\lambda\hat{A}_c+\hat{B}_c\right)^{-1}\hat{A}_c\right]^{k}\\
&= rango\left[\left(\lambda\hat{A}_c+\hat{B}_c\right)^{-k}\hat{A}_c^{k}\right]\\
&= rango\left(\hat{A}_c^{k}\right).
\end{aligned}
$$

Entonces $Ind\left(\hat{A}_c\right)$ es independiente de c.

■

En el caso general que estamos considerando la condición $N(A)\cap N(B)=\{0\}$ no es suficiente para que $(cA+B)$ sea inversible para algún c.

- **Ejemplo 3:**

Sea:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

Entonces $N(A)\cap N(B)=\{0\}$, pero $det(cA+B)=0$ para todo c.

- **Ejemplo 4:**

Consideremos la ecuación diferencial homogénea:

$$Ax'+Bx=0,$$

donde:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\-1&0&2\\2&3&2\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0&1&2\\-27&-22&-17\\18&14&10\end{bmatrix}.$$

Observamos que A y B ambas son singulares y no conmutan. Como $A+B$ es inversible podemos tomar $c=1$ y multiplicar la ecuación propuesta por la izquierda por $(A+B)^{-1}$ para obtener:

$$\hat{A}x'+\hat{B}x=0,$$

donde:

$$\hat{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

La solución única existirá si, y sólo si, el vector $x(0)$ satisface:

$$(I - \hat{A}\hat{A}^D)x(0) = 0.$$

Los valores propios de $\hat{A}$ son $\{0,1,3\}$ y los de $\hat{B}$ son $\{0,1,-2\}$. Así $\hat{A}^D$ puede ser calculado usando el Teorema 3.19 como:

$$\hat{A}^D = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -27 & -41 & -28 \\ 54 & 77 & 46 \\ -27 & -34 & -14 \end{bmatrix}$$

y:

$$\hat{B}^D = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular la matriz exponencial $e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}$, se halla la forma de Jordan de la matriz $-\hat{A}^D\hat{B}$. Los valores propios de $\left(-\hat{A}^D\hat{B}\right)$ son $\left\{0, 0, \frac{2}{3}\right\}$, calculando los subespacios propios asociados a cada valor propio tenemos:

$$E_0 = N\left(-\hat{A}^D\hat{B} - 0I\right)$$

teniendo como base:

$$<(0,-2,1),(1,0,0)>$$

y:

$$E_{\frac{2}{3}} = N\left(-\hat{A}^D\hat{B} - \frac{2}{3}I\right)$$

cuya base es:

$$<\left(-\frac{1}{13}, -\frac{8}{13}, 1\right)>$$

Por tanto:

$$-\hat{A}^D\hat{B} = PJP^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 0 & 13 & -1 \\ -26 & 0 & 8 \\ 13 & 0 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 0 & -13 & -8 \\ 18 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 26 \end{bmatrix}$$

Luego no es difícil calcular la matriz exponencial $e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}$ entonces:

$$x(t) = e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}x(0) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 18 & 1 - e^{\frac{2}{3}t} & 2\left(1 - e^{\frac{2}{3}t}\right) \\ 0 & 26 - 8e^{\frac{2}{3}t} & 16\left(1 - e^{\frac{2}{3}t}\right) \\ 0 & 13\left(e^{\frac{2}{3}t} - 1\right) & 26e^{\frac{2}{3}t} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}.$$

La condición de consistencia para condiciones iniciales es por tanto:

$$\left(I-\hat{A}\hat{A}^D\right)x(0)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}18 & 14 & 10\\ -18 & -14 & -10\\ 9 & 7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}=0.$$

Hay una sola ecuación independiente involucrada.

$$9x_1(0)+7x_2(0)+5x_3(0)=0$$

lo cual se puede usar para eliminar uno de los $x_i(0)$.

- **Ejemplo 5:**

Consideremos la ecuación diferencial no homogénea:

$$Ax'+Bx=f, \tag{3.38}$$

donde las matrices A y B son las mismas que las del ejemplo anterior y:

$$f=\begin{bmatrix}t^2 & 0 & t^2\end{bmatrix}^T$$

La solución de la ecuación diferencial no homogénea está dada por 3.37. Por el ejemplo anterior se tiene la primera parte de 3.37 dada por:

$$x(t)=e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}\hat{A}^Dx(0)=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}18 & 1-e^{\frac{2}{3}t} & 2\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 26-8e^{\frac{2}{3}t} & 16\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 13\left(e^{\frac{2}{3}t}-1\right) & 26e^{\frac{2}{3}t}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}.$$

Luego:

$$e^{\hat{A}^D\hat{B}t}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}18 & 1-e^{\frac{2}{3}t} & 2\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 26-8e^{\frac{2}{3}t} & 16\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 13\left(e^{\frac{2}{3}t}-1\right) & 26e^{\frac{2}{3}t}-1\end{bmatrix} \tag{3.39}$$

y:

$$\hat{f}=(A+B)^{-1}f=\begin{bmatrix}-\frac{8}{9}t^2 & \frac{17}{9}t^2 & -\frac{10}{9}t^2\end{bmatrix}^T$$

entonces:

$$\begin{aligned}
e^{\hat{A}^D\hat{B}t\hat{A}^D\hat{f}} &= \frac{1}{18}\begin{bmatrix}18 & 1-e^{\frac{2}{3}t} & 2\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 26-8e^{\frac{2}{3}t} & 16\left(1-e^{\frac{2}{3}t}\right)\\ 0 & 13\left(e^{\frac{2}{3}t}-1\right) & 26e^{\frac{2}{3}t}-1\end{bmatrix}\frac{1}{27}\begin{bmatrix}-27 & -41 & -28\\ 54 & 77 & 46\\ -27 & -34 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{8}{9}t^2\\ \frac{17}{9}t^2\\ -\frac{10}{9}t^2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-1 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{54}e^{-\frac{2}{3}t} & -1-\frac{1}{27}e^{-\frac{2}{3}t}\\ 2 & 3-\frac{4}{27}e^{-\frac{2}{3}t} & 2-\frac{8}{27}e^{-\frac{2}{3}t}\\ -1 & -\frac{3}{2}+\frac{13}{54}e^{-\frac{2}{3}t} & -1-\frac{13}{27}e^{-\frac{2}{3}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{8}{9}t^2\\ \frac{17}{9}t^2\\ -\frac{10}{9}t^2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-\frac{5}{6}t^2+\frac{1}{162}t^2e^{-\frac{2}{3}t}\\ \frac{5}{3}t^2+\frac{4}{81}t^2e^{-\frac{2}{3}t}\\ -\frac{5}{6}t^2-\frac{13}{162}t^2e^{-\frac{2}{3}t}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}t}\hat{A}^D\hat{f}(s)\,ds = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18}t^3 - \frac{1}{108}e^{-\frac{2}{3}t}t^2 - \frac{1}{36}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{24}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{24} \\ \frac{5}{9}t^3 - \frac{1}{108}e^{-\frac{2}{3}t}t^2 - \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}t}t - \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{18}t^3 - \frac{13}{108}e^{-\frac{2}{3}t}t^2 + \frac{13}{36}e^{-\frac{2}{3}t}t + \frac{13}{24}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{13}{24} \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos:

$$e^{-\hat{A}^D\hat{B}t}\int_0^t e^{\hat{A}^D\hat{B}s}\hat{A}^D\hat{f}(s)\,ds = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18}t^3 - \frac{1}{108}t^2 - \frac{1}{36}t - \frac{1}{24} \\ \frac{5}{9}t^3 - \frac{2}{27}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{18}t^3 + \frac{13}{108}t^2 + \frac{13}{36}t + \frac{13}{24} \end{bmatrix}.$$

Como $rango(A) = rango\left(A^2\right)$ se tiene que $Ind(A) = k = 1$ se calcula la parte faltante de 3.37 dada por:

$$\left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^n\left[\hat{A}\hat{B}^D\right]^n\hat{B}^D\hat{f}^{(n)} = \left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right)\hat{B}^D\hat{f}.$$

Solo falta hallar $\hat{B}^D$. Los valores propios de $\hat{B}$ son $\{0, 1, -2\}$ así que usando el Teorema 3.19:

$$\hat{B}^D = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} w(t) = \left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right)\hat{B}^D\hat{f} &= \begin{bmatrix} 2 & \frac{14}{9} & \frac{10}{9} \\ -2 & -\frac{14}{9} & -\frac{10}{9} \\ 1 & \frac{7}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \frac{19}{12} & \frac{7}{6} \\ -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{8}{9}t^2 \\ \frac{17}{9}t^2 \\ -\frac{10}{9}t^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{27}t^2 \\ \frac{2}{27}t^2 \\ -\frac{1}{27}t^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución está dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} - \frac{1}{18}e^{\frac{2}{3}t} & -1 - \frac{1}{9}e^{\frac{2}{3}t} \\ 2 & 3 - \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}t} & 2 - \frac{8}{9}e^{\frac{2}{3}t} \\ -1 & -\frac{3}{2} + \frac{13}{18}e^{\frac{2}{3}t} & -1 + \frac{13}{9}e^{\frac{2}{3}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{18}t^3 - \frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{36}t - \frac{1}{24} \\ \frac{5}{9}t^3 - \frac{2}{9}t - \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{18}t^3 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{12}{36}t^2 + \frac{13}{24} \end{bmatrix}.$$

La condición de consistencia para condiciones iniciales es por tanto:

$$\left(I - \hat{A}\hat{A}^D\right)(x(0) - w(0)) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 18 & 14 & 10 \\ -18 & -14 & -10 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Hay una sola ecuación independiente involucrada:

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0$$

la cual se puede usar para eliminar uno de los $x_i(0)$.

4 Conclusiones

Una de las primeras conclusiones que se pueden extraer de este trabajo es que las inversas de Drazin y grupo para las matrices cuadradas tienen no sólo un gran interés desde el punto de vista teórico, como extensión de la inversa usual, sino que también lo tiene desde el punto de vista práctico por sus diversas y variadas aplicaciones en la matemática aplicada.

A la hora de iniciar la teoría de las diversas inversas generalizadas posibles uno de los primeros pasos a dar es estudiar su existencia y su unicidad. En el caso de la inversa de Drazin de una matriz cuadrada se tiene siempre la existencia y unicidad. No se asegura en cambio que la inversa de grupo exista siempre. Lo que si podemos decir es que en caso de existir, es única. También tiene interés comparar las propiedades que tienen las diversas inversas generalizadas con las que tiene la inversa usual. Dependiendo de la forma elegida a la hora de extender la inversa usual las propiedades pueden cambiar completamente. Por ejemplo, aunque sabemos que la inversa de Drazin no verifica la regla del orden inverso en el caso general, al menos si sabemos que lo hace cuando las matrices implicadas conmutan. Esto no ocurre con la inversa Moore-Penrose. Ni aún cuando las matrices implicadas conmutan entre sí se puede asegurar que la inversa de Moore-Penrose verifica la regla del orden inverso.

Otro aspecto importante a la hora de estudiar las inversas generalizadas es proporcionar herramientas lo más cómodas posibles para cálcular la inversa generalizada correspondiente. En el caso que nos ocupa hay diversas formas de calcular de la inversa de Drazin de una matriz. La primera de ellas viene dada por la descomposición core-nilpotente de la matriz cuadrada. La segunda se basa en la propiedad de la inversa de Drazin que afirma que para cada matriz cuadrada A existe un polinomio $p(x)$ tal que $A^D = p(A)$. Es interesante buscar el polinomio de menor grado posible que verifique este igualdad para asi simplificar el cálculo de la inversa de Drazin. El último método que contemplamos para el cálculo de la inversa de Drazin de una matriz se apoya en el polinomio minimal asociado a dicha matriz y proporciona un algoritmo últil para este cálculo.

Finalizamos este repaso de los resultados obtenidos en este trabajo comentando la aplicación de este tipo de inverso al estudio de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Este inverso permite expresar de manera intuitiva las soluciones en los siguientes casos $x' + Ax = f$ y $Ax' + Bx = f$ donde las matrices cuadradas A y B conmutan. Se puede obtner información del general $Ax' + Bx = f$ imponiendo ciertas hipótesis adicionales a las soluciones iniciales consistentes de la ecuación homogénea asociada a $Ax' + Bx = f$.

Bibliografía

[1] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized inverses of linear transformations.*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2009. xx+272 pp. ISBN: 978-0-898716-71-9.

[2] S.L. Campbell, C.D.Jr. Meyer, N.J. Rose, *Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients.*, SIAM J. Appl. Math. **31** (1976), no. 3, 411–425.

[3] C.D.Jr. Meyer, *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains.*, SIAM Rev., **17** (1975), 443–464.

[4] M. Nikuie, M.K. Mirnia, Y. Mahmoudi, *Some results about the index of matrix and Drazin inverse.*, Math. Sci. Q. J. 4, **3** (2010), 283–294.

[5] N. Thome *Matrices inversas generalizadas*, Instituto de Matemáticas Multidisciplinar Unversidad Politécnica de Valencia, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., **40** (2007), 103–105.