Universidad de Almería

Máster en Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Categorías $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein

Septiembre 2016

Enrique Duarte González

Dirigido por:

Luis Oyonarte Alcalá

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este Trabajo Fin de Máster desarrollamos varias ideas que nos han parecido interesantes y que se enmarcan dentro de la teoría del Álgebra Homológica Relativa. Pero, ¿qué es el Álgebra Homológica Relativa y por qué se estudia? Comencemos dando una breve exposición sobre la evolución del Álgebra Homológica que acabará demostrando la necesidad generalizar esta teoría y que conduce inevitablemente a la introducción del Álgebra Homológica Relativa.

El origen del Álgebra Homológica se encuentra en la teoría clásica de la Topología Algebraica, en donde, a partir de espacios topológicos, y debido a la pobre estructura de éstos, se construyen grupos y homomorfismos de grupos que los conectan, que permiten descubrir mucha información sobre los espacios topológicos originales.

Desde el punto de vista algebraico, el Álgebra Homológica resultó bastante impopular durante sus inicios porque era difícil llegar a comprenderla y, una vez que se conseguía, no parecía ser demasiado útil.

Pero todo esto cambió cuando Jean Pierre Serre utilizó el Álgebra Homológica para caracterizar determinados tipos de anillos. Además, el libro escrito por Henri Cartan y Samuel Eilenberg "Homological Algebra" ([4]), en el que unificaron todos los conceptos relativos a este área que se encontraban dispersos en las ramas de teoría de grupos, álgebras de Lie y álgebras asociativas, despertó el interés de muchos matemáticos que comenzaron a estudiar esta teoría tan productiva. De hecho, Cartan y Eilenberg pueden ser considerados como los fundadores del Álgebra Homológica Moderna, y el método que utilizaron fue el uso sistemático de resoluciones utilizando módulos inyectivos y proyectivos, que son sucesiones exactas con términos proyectivos o inyectivos, que se construyen a partir de un determinado módulo.

La razón por la que las resoluciones proyectivas e inyectivas funcionan no es otra que las propiedades que definen a los módulos proyectivos e inyectivos: los funtores $\mathrm{Hom}(P, -)$ y $\mathrm{Hom}(-, E)$ son exactos cuando P es proyectivo y E es inyectivo. El problema radica en que a partir de un determinado módulo se pueden elegir muchas (infinitas) resoluciones proyectivas e inyectivas. Cada una de ellas dará lugar a unos grupos de (co)homología que, en principio, no tienen por qué ser los mismos. Sin embargo, la exactitud de los funtores $\mathrm{Hom}(P, -)$ cuando P es proyectivo, permite relacionar todas estas resoluciones mediante homomorfismos de complejos. Y lo más importante es que resulta que todos estos homomorfismos son homotópicos (Teorema de Comparación), lo cual se traduce en el hecho de que los grupos de (co)homología del mismo grado que se obtienen mediante resoluciones proyectivas diferentes son todos isomorfos. Esto da total consistencia a la teoría.

Por supuesto, si en lugar de elegir resoluciones proyectivas elegimos resoluciones inyectivas, el resultado sigue siendo el mismo. Todas las resoluciones que elijamos del mismo módulo son homotópicas (Teorema de Comparación), y por lo tanto todas dan (salvo isomorfismos) los mismos grupos de (co)homología.

Ligado al concepto de de resolución proyectiva (o inyectiva) aparece inmediatamente el de dimensión: si P es un módulo proyectivo,

$$\cdots \to 0 \to 0 \to P = P \to 0$$

es una resolución proyectiva de P. Si M es un módulo que admite una sucesión exacta $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ con P_i proyectivos, y N es un módulo cuya "menor¨ resolución proyectiva es del tipo $0 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to N \to 0$, entonces las propiedades homológicas de M y N van a ser evidentemente distintas (por ejemplo las propiedades de anulación de $\mathrm{Ext}^n(M, -)$ y $\mathrm{Ext}^n(N, -)$ serán distintas).

Así, se dice que la dimensión proyectiva de M es menor igual que $n \geq 0$, *proj.dim* $M \leq n$ si existe una sucesión exacta

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

en la que todos los P_i son proyectivos. Diremos que *proj.dim* $M = n$ si n es el menor natural para el que existe una sucesión como la anterior.

De manera dual, la dimensión inyectiva de M es n si n es el menor natural para el que existe una sucesión exacta

$$0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$$

en la que todos los E_i son inyectivos.

El estudio de estas dimensiones homológicas que acabamos de definir proporciona, como ya hemos indicado y no podía ser de otra manera, información valiosa sobre el módulo en sí, pero además, también sobre el anillo sobre el que se construyen los módulos. Por ejemplo, un anillo es quasi-Fröbenius si y sólo si todo R-módulo M verifica: $proj.dim\ M = 0 \Leftrightarrow inj.dim\ M = 0$.

En este momento surge una pregunta natural: ¿por qué restringirse al uso de resoluciones proyectivas e inyectivas? ¿Por qué no elegir otras clases de módulos que nos proporcionen unos grupos de (co)homología diferentes y por lo tanto una información nueva? Sobre todo teniendo en cuenta que existen clases de módulos homológicamente muy importantes, como es la de los módulos planos, que también caracterizan anillos tan importantes como los regulares: un anillo es regular si y sólo si todo módulo es plano. De esta forma, durante los últimos años el estudio de la (co)homología relativa a diferentes clases de módulos ha sido una rama del álgebra plenamente activa y a la que se han dedicado muchos matemáticos.

Como clases especialmente relevantes sobre las que se ha realizado una cantidad ingente de artículos de investigación están la de los módulos Gorenstein proyectivos y de los módulos Gorenstein inyectivos. Estas clases de módulos fueron introducidas por Edgar Enochs y Overtoun Jenda en [8] y probablemente sean, junto a la de los proyectivos, inyectivos y planos, las clases de módulos más estudiadas en el ámbito homológico, sobre todo en términos de calcular (pre)cubiertas, (pre)envolventes, y las dimensiones relativas que inducen. Resulta difícil dar una lista significativa de los artículos más relevantes publicados sobre estas clases sin dejar de citar alguno de ellos e incluso alguna de las teorías que en ellos se estudian, pero por hacer una tentativa, lejana a la realidad por la poca cantidad de citas que podemos dar aquí, mencionamos los estudios de Enochs sobre la existencia de (pre)cubiertas y (pre)envolventes [10], [11], [12], etc., o los relativos a las dimensiones Gorenstein [7], [14], [15], [5], [3], [1], etc.

Tan relevante ha sido el estudio de las clases de módulos Gorenstein proyectivos y Gorenstein inyectivos en el desarrollo del Álgebra Homológica que han surgido multitud de generalizaciones de este tipo de módulos. Así, Henrik Holm y Jϕrgensen estudiaron en [16] las dimensiones homológicas inducidas por la clase de los módulos G_C proyectivos, G_C-inyectivos y G_C-planos, es decir, las llamadas dimensiones G_C-proyectiva (o C-Gorenstein proyectiva), G_C-inyectivas (o C-Gorenstein inyectiva) y G_C-planas (o C-Gorenstein plana), cuando C es un módulo semidualizante y Diana White publicó ([21]) otros resultados sobre la dimensión G_C-proyectiva cuando C es semidualizante. También Liu, Huang y Xu realizaron investigaciones de estas dimensiones en [17].

No obstante, las propiedades de los módulos semidualizantes son bastante restrictivas a la hora de estudiar dimensiones homológicas relativas a C, ya que la condición $\mathrm{End}_R(C) \cong R$ hace que C esté cerca de ser un módulo proyectivo. Por eso Driss Bennis, J.R. García Rozas y Luis Oyonarte investigaron en [2] cómo debilitar las condiciones de C sin mermar el interés de los resultados que se pueden obtener. A los módulos que verificaban estas propiedades los llamaron débilmente Wakamatsu tilting porque además la clase de todos estos módulos contiene propiamente a la de los Wakamatsu tilting.

Además existe otro factor importante que refuerza seriamente la idea de plantearse la investigación del Álgebra Homológica relativa a otras clases de módulos que no sean los inyectivos o los proyectivos; como hemos mencionado al principio de esta introducción, el inicio del Álgebra Homológica no se sitúa en un ámbito propio del álgebra, y además, ya dentro de la rama de álgebra, tiene aplicaciones en muy diversas teorías, como la de la Geometría

Algebraica, en la que el estudio de categorías diferentes a las de módulos (como por ejemplo las de haces) es fundamental. Por tanto el paso lógico en la evolución del Álgebra Homológica es su desarrollo en el ámbito categórico. Pero no todas las categorías sobre las que construir homología tenga sentido (categorías abelianas con algunas propiedades adicionales) poseen suficientes objetos proyectivos o inyectivos (por ejemplo las categorías de haces no tienen suficientes proyectivos). Así, estudiar Álgebra Homológica relativa otras clases relevantes de objetos (como pueden ser los planos en las categorías de módulos o de haces) adquiere una relevancia significativa. Éste es el comienzo del Álgebra Homológica Relativa.

Existen otras generalizaciones de los conceptos de módulo Gorenstein proyectivo y de módulo Gorenstein inyectivo, y cuando decimos generalizaciones no nos referimos sólo a generalizaciones dentro de las categorías de módulos, sino extensiones a otras categorías más generales que aquéllas. De entre todos estos nuevos conceptos el más interesante quizás sea el de objetos $\mathscr{X}$-Gorenstein en una categoría abeliana $\mathscr{A}$, siendo $\mathscr{X}$ una subcategoría plena de $\mathscr{A}$. Este concepto fue dado por Sather-Wagstaff, Sharif y White en [19] en donde, entre otras cosas, buscan las condiciones que tiene que verificar la categoría $\mathscr{X}$ para que $\mathscr{G}(\mathscr{X})^2 = \mathscr{G}(\mathscr{X})$, es decir, para que la subcategoría consistente en todos los núcleos de sucesiones completas exactas, $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}(\mathscr{X}), -)$-exactas y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{G}(\mathscr{X}))$-exactas de objetos $\mathscr{X}$-Gorenstein coincida con la subcategoría de los objetos $\mathscr{X}$-Gorenstein. Posteriormente Geng y Ding estudiaron las dimensiones homológicas relativas a estos nuevos objetos ([13]).

Nuestro interés en este trabajo es dar un concepto que generalice a la vez aquéllos de objeto $\mathscr{X}$-Gorenstein proyectivo, de objeto $\mathscr{X}$-Gorenstein inyectivo, de módulo G_C-proyectivo y de módulo G_C-inyectivo, siendo C un módulo débilmente Wakamatsu tilting (y por lo tanto no necesariamente semidualizante), y además que este nuevo concepto tenga sentido y resulte de utilidad en categorías abelianas, no sólo en las categorías de módulos.

Con este propósito consideraremos dos subcategorías plenas $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, y a estos nuevos objetos que definiremos los llamaremos objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein. Nuestro objetivo principal será investigar la subcategoría $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein de $\mathscr{A}$, es decir, aquella subcategoría plena de $\mathscr{A}$ cuyos objetos son todos los objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein de $\mathscr{A}$, y hacer un estudio exhaustivo de las dimensiones homológicas inducidas por esta nueva subcategoría: hablamos de la dimensión $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-proyectiva (o dimensión $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein proyectiva) y de la dimensión $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-inyectiva de los objetos de $\mathscr{A}$ (o dimensión $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein inyectiva).

Así, nuestro camino será en primer lugar caracterizar cuándo un objeto de la categoría $\mathscr{A}$ está en la subcategoría $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y cuándo esta subcategoría verifica las propiedades habituales que permiten desarrollar satisfactoriamente una teoría de la dimensión homología que induce, es decir, cuándo esta subcategoría es cerrada para extensiones, núcleos de epimorfismos, conúcleos de monomorfismos y sumandos directos. Además indagaremos sobre qué condiciones deben satisfacer las subcategorías $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ para estar dentro de $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Este hecho es de gran importancia porque cuando esto suceda la $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva de cualquier objeto será siempre menor que la $\mathscr{X}$-dimensión proyectiva y que la $\mathscr{Y}$-dimensión proyectiva, e igualmente ocurre con las dimensiones inyectivas. Dicho de otra forma, las $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensiones (tanto proyectiva como inyectiva) dan medidas más precisas que las $\mathscr{X}$-dimensiones y que las $\mathscr{Y}$-dimensiones. También descubriremos cuándo $\mathscr{G}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))=\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Finalmente estudiaremos las dimensiones homológicas inducidas por las subcategorías $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Estas dimensiones se definen como longitudes de sucesiones exactas con términos en $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y nosotros probaremos que las podemos calcular a partir de $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-(co)resoluciones exactas. Además veremos que la dimensión de un objeto se puede calcular a partir de cualquier sucesión (o (co)resolución) exacta de objetos en $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ cuyo último conúcleo (primer núcleo) sea el objeto del que queremos calcular la dimensión. Y por supuesto probaremos que la herramienta clásica de cálculo de las dimensiones también funciona para nuestra subcategoría: demostraremos será que las $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensiones las podemos calcular a partir de los funtores Ext^n (la dimensión será el menor n tal que $\mathrm{Ext}^k=0\ \forall k\geq n+1$).

Capítulo 2

Preliminares

El ámbito en el que se desarrollará este trabajo es el de las categorías abelianas, por lo que en muchas ocasiones, cuando nos refiramos a una categoría, no indicaremos que la suponemos abeliana. No obstante, la categoría siempre será abeliana. Mención a parte requieren las subcategorías. Haremos un uso sistemático de subcategorías de estas categorías abelianas, pero por supuesto no necesitarán ser abelianas también. Sin embargo supondremos que verificarán unas condiciones a parte de las que se especifiquen en cada enunciado, y que serán: la subcategoría será siempre plena, cerrada para isomorfismos y contendrá al objeto cero.

Muchos de los resultados que aparecen en esta sección son ampliamente conocidos, tanto su enunciado como su demostración. Esto significa que pueden ser encontrados fácilmente en la literatura (de hecho aparecen en cualquier libro que trate la homología en el ámbito categórico, y de estos libros hay suficientes referencias en el bibliografía que aparece al final de este trabajo, por ejemplo [9] o [18]) y que además no es fácil determinar dónde exactamente aparecieron por primera vez. Por tanto, si escribimos la demostración de alguno de estos resultados, no daremos referencias explícitas. Sí las daremos en los que casos en que las demostraciones no sean incluidas (sólo incluiremos este tipo de demostraciones cuando sean significativamente interesantes o den alguna idea clave para nuestro posterior desarrollo de la teoría).

2.1. Nociones básicas sobre el Álgebra Homológica Clásica

En esta sección presentaremos algunas nociones básicas del Álgebra Homológica. Seguiremos el camino que la evolución de esta teoría ha ido construyendo. Por supuesto se han ido descubriendo muchísimas cosas relativas a la Teoría de Homología a lo largo de todos sus años de desarrollo, y sus aplicaciones en las distintas ramas del Álgebra son enormes. Pero no es nuestra intención ni nuestro cometido hacer un curso intensivo del Álgebra Homológica, sino llegar a uno de los puntos en los que se encuentra activa la investigación en este momento, y por lo tanto, de la enorme cantidad de bifurcaciones que se pueden elegir al recorrer este largo camino, elegiremos las más apropiadas para conseguir llegar al punto de investigación activa al que nos referimos en este párrafo.

Comenzaremos recordando lo que se entiende por un complejo en una categoría abeliana y por los objetos de homología asociados a dicho complejo.

Definición 2.1.1. *Un complejo en una categoría abeliana es una sucesión de objetos y morfismos*

$$\mathcal{M} : \cdots \to M_2 \overset{\delta_2}{\to} M_1 \overset{\delta_1}{\to} M_0 \overset{\delta_0}{\to} M_{-1} \to \cdots$$

de forma que la composición de cualesquiera dos morfismos consecutivos es cero. En otras palabras, la imagen de cualquiera de los morfismos es siempre *un subobjeto del núcleo del siguiente, es decir, siempre hay un monomorfismo* $\operatorname{Im}\delta_i \mapsto \ker\delta_{i-1}$. *A los núcleos de* δ_n *se les suele llamar objetos de ciclos,* $\ker\delta_n = Z_n(\mathcal{M})$, *y a las imágenes objetos de bordes,* $\operatorname{Im}\delta_{n+1} = B_n(\mathcal{M})$.

Un morfismo entre dos complejos $\cdots \to M_2 \to M_1 \to M_0 \to M_{-1} \to \cdots$ *y* $\cdots \to N_2 \to N_1 \to N_0 \to N_{-1} \to \cdots$ *es una sucesión de morfismos en la categoría,* $M_i \to N_i$, *de forma que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Es fácil darse cuenta de que la categoría de complejos construidos sobre una categoría abeliana $\mathscr{A}$ vuelve a ser una categoría abeliana. A esta categoría de complejos la denotaremos como $C(\mathscr{A})$.

Definición 2.1.2. *El n-ésimo objeto de homología de un complejo*

$$\mathcal{C}: \ \cdots \to M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} M_{-1} \to \cdots$$

en una categoría abeliana se define como $H_n(\mathcal{C}) = \operatorname{coker}(\operatorname{Im}(\delta_{n+1} \to \ker\delta_n))$. *Como* $\operatorname{Im}\delta_{n+1} \to \ker\delta_n$ *es un monomorfismo, denotaremos al conúcleo anterior como* $H_n(\mathcal{C}) = \ker\delta_n / \operatorname{Im}\delta_{n+1} = Z_n(\mathcal{C})/B_n(\mathcal{C})$.

Observamos entonces que, intuitivamente, la homología de un complejo da en cierta forma una medida de lo que le falta al complejo para ser exacto. Además, cuando dos complejos están relacionados mediante un homomorfismo de complejos, los grupos de homología de ambos complejos también están relacionados por un morfismo: supongamos que

$$\mathcal{M}: \ \cdots \to M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1 \xrightarrow{\delta_1} M_0 \xrightarrow{\delta_0} M_{-1} \to \cdots$$

y

$$\mathcal{N}: \ \cdots \to N_2 \overset{\delta_2'}{\to} N_1 \overset{\delta_1'}{\to} N_0 \overset{\delta_0'}{\to} N_{-1} \to \cdots$$

son dos complejos y que $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un homomorfismo de complejos,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}"] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"'] & M_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r, "\delta_{i+1}'"'] & N_i \arrow[r, "\delta_i'"'] & N_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_{i+1} \arrow[rr, "\delta_{i+1}"] \arrow[dr, "\overline{\delta}_{i+1}"'] \arrow[dd, "\alpha_{i+1}"'] & & M_i \arrow[dr, "\pi_i"] \arrow[dd, "\alpha_i"] & \\
& \operatorname{Im}\delta_{i+1} \arrow[ur, "\lambda"'] & & \operatorname{coker}\delta_{i+1} \\
N_{i+1} \arrow[rr, "\delta_{i+1}'"] \arrow[dr, "\overline{\delta'}_{i+1}"'] & & N_i \arrow[dr, "\pi_i'"] & \\
& \operatorname{Im}\delta_{i+1}' \arrow[ur, "\lambda'"'] & & \operatorname{coker}\delta_{i+1}'
\end{tikzcd}$$

Como $\pi_i'\alpha_i\delta_{i+1} = \pi_i'\delta_{i+1}'\alpha_{i+1} = 0$, las propiedades del conúcleo proporcionan un único morfismo $c_i : \operatorname{coker}\delta_{i+1} \to \operatorname{coker}\delta_{i+1}'$ tal que $c_i\pi_i = \pi_i'\alpha_i$. Pero entonces $\pi_i'\alpha_i\lambda = c_i\pi_i\lambda = 0$, y las propiedades del núcleo garantizan la existencia de un único morfismo $f_{i+1} : \operatorname{Im}\delta_{i+1} \to \operatorname{Im}\delta_{i+1}'$ tal que $\alpha_i\lambda = \lambda' f_{i+1}$.

Si factorizamos λ como la composición de las dos inyecciones canónicas $q : \operatorname{Im}\delta_{i+1} \to \ker\delta_i$ y $k : \ker\delta_i \to M_i$, hacemos lo mismo con λ', y tenemos en cuenta ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_{i+1} \arrow[rrr, "\delta_{i+1}"] \arrow[dr, "\overline{\delta}_{i+1}"'] \arrow[dd, "\alpha_{i+1}"'] & & & M_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[dd, "\alpha_i"] & M_{i-1} \arrow[dd, "\alpha_{i-1}"] \\
& \operatorname{Im}\delta_{i+1} \arrow[r, "q"'] \arrow[urr, "\lambda"] \arrow[dd, "f_{i+1}"' near start] & \ker\delta_i \arrow[ur, "k"'] & & \\
N_{i+1} \arrow[rrr, "\delta'_{i+1}"] \arrow[dr, "\overline{\delta'}_{i+1}"'] & & & N_i \arrow[r, "\delta'_i"] & N_{i-1} \\
& \operatorname{Im}\delta'_{i+1} \arrow[r, "q'"'] \arrow[urr, "\lambda'"] & \ker\delta'_i \arrow[ur, "k'"'] & &
\end{tikzcd}$$

observamos que $\delta'_i\alpha_i k = \alpha_{i-1}\delta_i k = 0$, por lo que existe, según la Propiedad Universal del Núcleo, un único homomorfismo $g_i : \ker\delta_i \to \ker\delta'_i$ tal que $k'g_i = \alpha_i k$. Componiendo con q obtenemos

$$k'g_i q = \alpha_i k q = \alpha_i\lambda = \lambda' f_{i+1} = k'q'f_{i+1}.$$

Como k' es un monomorfismo concluimos que $g_i q = q' f_{i+1}$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im}\delta_{i+1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] & \ker\delta_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"'] & H_i(\mathcal{M}) \\
\operatorname{Im}\delta'_{i+1} \arrow[r, "q'"'] & \ker\delta'_i \arrow[r] & H_i(\mathcal{N})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por tanto, si aplicamos de nuevo la Propiedad Universal del Conúcleo encontramos el morfismo que andábamos buscando y que llamaremos $H_n(\alpha)$.

Un hecho fundamental en la definición de estos morfismos entre las homologías es que tienen carácter funtorial, es decir, si α, β son dos morfismos de complejos, entonces $H_i(\alpha\beta) = H_i(\alpha)H_i(\beta)\ \forall i$, y $H_i(id) = id\ \forall i$. La razón de este carácter funtorial se debe a la unicidad de todos los morfismos (a causa de que provienen de propiedades universales) que intervienen en la obtención del morfismo entre las homologías que hemos explicado en los párrafos anteriores. Esta unicidad hace además que los funtores H_n sean aditivos, es decir, $H_n(f+g) = H_n(f) + H_n(g)$.

Por otro lado, existe una manera de relacionar los morfismos de complejos en función de cómo se comportan los morfismos inducidos por éstos en los objetos de homología. Hablamos de la relación de homotopía.

Definición 2.1.3. *Si*

$$\mathcal{C}: \ \cdots \to C_2 \stackrel{\delta_2}{\to} C_1 \stackrel{\delta_1}{\to} C_0 \stackrel{\delta_0}{\to} C_{-1} \to \cdots$$

y

$$\mathcal{C}': \ \cdots \to C'_2 \stackrel{\delta'_2}{\to} C'_1 \stackrel{\delta'_1}{\to} C'_0 \stackrel{\delta'_0}{\to} C'{-1} \to \cdots$$

son dos complejos y $\alpha, \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ son dos morfismos de complejos, se dice que α y β son homotópicos si para cada entero n existe un morfismo $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ tal que $\alpha_n - \beta_n = \delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n$.

Proposición 2.1.4. *Si $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ son dos morfismos homotópicos de complejos, entonces para todo entero n se tiene que $H_n(f) = H_n(g)$.*

Demostración. Partimos de la situación

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \arrow[dl, "s_1"'] & C_0 \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \arrow[dl, "s_0"'] & C_{-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_{-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{-1}"] \arrow[dl, "s_{-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_2 \arrow[r, "\delta'_2"'] & C'_1 \arrow[r, "\delta'_1"'] & C'_0 \arrow[r, "\delta'_0"'] & C'_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con $f_n - g_n = \delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n \ \forall n$.

Entonces $H_n(f-g) = H_n(\delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n)$, el morfismo inducido en la homología por $\delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n : \ker\delta_n \to \ker\delta'_n$. Pero $s_{n-1}\delta_n|\ker(\delta_n) = 0$ e $\mathrm{Im}(\delta'_{n+1}s_n) \leq \mathrm{Im}(\delta'_n)$, así que $H_n(\delta'_{n+1}s_n + s_{n-1}\delta_n) = 0$.

Por tanto $H_n(f) - H_n(g) = H_n(f-g) = 0$ ■

En el desarrollo del álgebra homológica existen varias herramientas que resultan totalmente fundamentales. Destacamos dos de estas herramientas, que vamos a presentar a continuación: el Lema de la Serpiente y la sucesión exacta larga de homología.

Proposición 2.1.5. (Lema de la Serpiente)
Asociado a cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' & \end{tikzcd}$$

en el que las filas son exactas, existe una sucesión exacta

$$\ker a \to \ker b \to \ker c \to \operatorname{coker} a \to \operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c.$$

Si además f es un monomorfismo entonces $\ker a \to \ker b$ también lo es, y si g' es un epimorfismo entonces $\operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c$ también lo es.

Demostración. Si $k_1 : K_1 \to A$ es el núcleo de a y $k_2 : K_2 \to B$ es el núcleo de b, como $bfk_1 = f'ak_1 = 0$, existe un único morfismo $\overline{f} : K_1 \to K_2$ tal que $k_2\overline{f} = fk_1$. Repetimos el mismo argumento con K_2 y K_3 y el argumento dual para los conúcleos, y conseguimos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K_1 \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "k_1"'] & K_2 \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "k_2"'] & K_3 \arrow[d, "k_3"'] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "q_1"'] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "q_2"'] & C' \arrow[d, "q_3"'] & \\
 & Q_1 \arrow[r, "\widehat{f}"'] \arrow[d] & Q_2 \arrow[r, "\widehat{g}"'] \arrow[d] & Q_3 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comprobemos que la fila superior del diagrama es exacta.

Evidentemente $k_3\overline{g}\overline{f} = gfk_1 = 0$, y como k_3 es un monomorfismo concluimos que $\operatorname{Im}\overline{f} \leq \ker\overline{g}$.

El recíproco resulta algo más complicado. Consideramos los núcleos $\lambda' : \ker\overline{g} \to K_2$ y $\lambda : \ker g \to B$. Como la segunda fila del diagrama es exacta vemos que f factoriza a través de λ, es decir, $f = \lambda f_0$ ($f_0 : A \to \operatorname{Im} f = \ker g$). Ahora, $gk_2\lambda' = k_3\overline{g}\lambda' = 0$, por lo que obtenemos un único morfismo $h : \ker\overline{g} \to \ker g$ tal que $k_2\lambda' = \lambda h$. Vemos pues que h es de hecho un monomorfismo. Si calculamos el pullback de h y f_0 obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
P \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m"'] & \ker\overline{g} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
A \arrow[r, "f_0"'] & \ker g \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $fm = \lambda f_0 m = \lambda hl = k_2\lambda' l$, con lo cual, $f'am = bfm = bk_2\lambda' l = 0$, así que $am = 0$ ya que f' es un monomorfismo. Pero entonces m factoriza por $\ker a = K_1$, es decir, existe $s : P \to K_1$ tal que $k_1 s = m$. El morfismo $\overline{f}s : P \to K_2$ verifica que $k_2\overline{f}s = fk_1 s = fm = k_1\lambda' l$, y k_2 es un monomorfismo, por lo tanto $\overline{f}s = \lambda' l$.

La conclusión es que $\operatorname{Im}\overline{f}s = \operatorname{Im}\lambda' l$. Pero l es un epimorfismo así que tenemos $\operatorname{Im}\lambda' l = \operatorname{Im}\lambda' = \ker\overline{g}$. Ahora, no es difícil ver que $\operatorname{Im}\overline{f}s$ es un subobjeto de $\operatorname{Im}\overline{f}$, así que llegamos, como queríamos, a que $\ker\overline{g} \leq \operatorname{Im}\overline{f}$, y por tanto a que la primera fila del diagrama es exacta.

Mediante argumentos completamente duales probaremos ahora la exactitud de la última fila del diagrama.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{g}\widehat{f}q_1 = q_3 g' f' = 0 \\ q_1 \text{ epimorfismo}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{g}\widehat{f} = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\widehat{f} \leq \ker\widehat{g}.$$

Para probar el recíproco consideramos la descomposición épico-mónica de g', que dado que la tercera fila del diagrama es exacta, resulta ser

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "p'"'] & & C' \\ & \operatorname{coker} f' \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Además tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "\widehat{f}"'] & Q_2 \arrow[rr, "\widehat{g}"] \arrow[dr, "\widehat{p}"'] & & Q_3 \\ & & \operatorname{coker}\widehat{f} \arrow[ur, "\widehat{\lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

en el que $\widehat{\lambda}$ existe por las propiedades del conúcleo.

Entonces, $\widehat{p}q_2 f' = \widehat{p}\widehat{f}q_1 = 0$, y así existe $h : \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker}\widehat{f}$ tal que $hp' = \widehat{p}q_2$.

Construimos ahora el pushout de λ y h, obteniendo el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} f' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "m"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} \widehat{f} \arrow[r, "l"'] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Tenemos: $mg' = m\lambda p' = lhp' = l\widehat{p}q_2 \Rightarrow mcg = mg'b = l\widehat{p}q_2 b = 0$. De nuevo, como g es un epimorfismo concluimos que $mc = 0$ y por lo tanto que existe un morfismo $s : Q_3 \to P$ tal que $sq_3 = m$.

Consideramos entonces $s\widehat{g} : Q_2 \to P$:

$$s\widehat{g}q_2 = sq_3 g' = mg' = l\widehat{p}q_2 \Rightarrow s\widehat{g} = l\widehat{p} \Rightarrow \ker s\widehat{g} = \ker l\widehat{p}.$$

Pero l es un monomorfismo así que $\ker l\widehat{p} = \ker \widehat{p} = \operatorname{Im} \widehat{f}$. En definitiva, $\operatorname{Im} \widehat{f} = \ker s\widehat{g}$, y por supuesto $\ker \widehat{g} \leq \ker s\widehat{g}$.

Construyamos ahora el morfismo de conexión $K_3 \xrightarrow{\delta} Q_1$, y para ello consideremos el pullback y el pushout de los morfismos k_3 y g, y f' y q_1 respectivamente. Obtenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & K_3 \arrow[r] \arrow[d, "k_3"] & 0 \\
 & & B \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q_1"'] & B' \arrow[d, "r"] & & \\
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "t"'] \arrow[d] & T \arrow[r, "d"'] \arrow[d] & D \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

en el que, como p es épica, es el conúcleo de su núcleo, es decir, $p = \operatorname{coker} e$, y de forma dual $t = \ker d$.

Si probáramos que $rbqe = 0$ entonces la Propiedad Universal del Conúcleo proporcionaría un único morfismo $\delta_1 : K_3 \to T$ tal que $rbq = \delta_1 p$. Si además supiéramos que $drbq = 0$ entonces $d\delta_1 p = 0$ y como p es un epimorfismo $d\delta_1 = 0$. Por la Propiedad Universal del Núcleo existiría un único $\delta : K_3 \to Q_1$ tal que $t\delta = \delta_1$ y por lo tanto $t\delta p = \delta_1 p = rbq$.

En definitiva tendríamos un morfismo $\delta : K_3 \to Q_1$ que conectaría la sucesión de núcleos y la de conúcleos. δ sería el candidato a morfismo de conexión. Pero para que todo esto funcione todavía necesitamos demostrar que $rbqe = 0$ y que $drbq = 0$.

En primer lugar observamos que $gqe = k_3pe = 0$, así que qe factoriza a través de $\ker g$. Entonces no es difícil comprobar que los pullbacks

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m"'] & E \arrow[d, "qe"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "qe"] \\ A \arrow[r, "f"'] & \ker g \end{tikzcd}$$

son realmente el mismo. Por lo tanto, ya que $\ker g = \operatorname{Im} f$, obtenemos que l es un epimorfismo.

Ahora, como $rbqel = rbfm = rf'am = tq_1am = 0$, y esto significa, ya que l es un epimorfismo, que $rbqe = 0$.

De forma totalmente dual se prueba que también $drbq = 0$.

Para comprobar que la sucesión

$$K_1 \xrightarrow{\overline{f}} K_2 \xrightarrow{\overline{g}} K_3 \xrightarrow{\delta} Q_1 \xrightarrow{\widehat{f}} Q_2 \xrightarrow{\widehat{g}} Q_3$$

es exacta sólo necesitamos comprobar la exactitud en los puntos K_3 y Q_1, pues el resto ya lo hemos hecho.

Al igual que cuando probamos la exactitud en K_2 y en Q_2, la demostración de la exactitud en Q_1 es completamente dual a la de la exactitud en K_3, por lo que sólo expondremos ésta última.

$\underline{\ker \delta \leq \operatorname{Im} \overline{g})}$ Llamemos $h : K_3 \to H$ al conúcleo de $\overline{g}$ y construyamos el pushout de k_3 y h:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
K_3 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k_3"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 0 \\
C \arrow[r, "\varphi"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Después construimos el pushout

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varphi g"] \arrow[d, "b"'] & M \arrow[d, "m"] \\
B' \arrow[r, "\varphi'"'] & N
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi g k_2 = m h \overline{g} = 0$ obtenemos que φg factoriza por $\operatorname{coker} k_2$:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varphi g"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M \\
& \operatorname{coker} k_2 \arrow[ur, "\overline{\varphi g}"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces es fácil observar que el último pushout construido y

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker} k_2 \arrow[r, "\overline{\varphi g}"] \arrow[d, "\overline{b}"'] & M \arrow[d, "m'"] \\
B' \arrow[r, "\varphi'"'] & N
\end{tikzcd}$$

son realmente el mismo pushout ($b = \overline{b} p_b$ es la factorización épico-mónica de b). Por tanto vemos que m' es un monomorfismo.

Ahora, $\varphi' f' a = \varphi' b f = m' \varphi g f = 0$, con lo cual $\varphi' f'$ factoriza por $\operatorname{coker} a$:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "\varphi' f'"] \arrow[dr, "q_1"'] & & N \\
& \operatorname{coker} k_2 \arrow[ur, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

Cuando definimos δ construimos el pushout

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q_1"'] & B' \arrow[d, "r"] \\ Q_1 \arrow[r, "t"'] & T \end{tikzcd}$$

y ahora tenemos dos morfismos $n : Q_1 \to N$ y $\varphi' : B' \to N$ tales que $nq_1 = \varphi' f'$. Las propiedades del conúcleo dicen que existe un único morfismo $\xi : T \to N$ tal que $\xi t = n$ y $\xi r = \varphi'$.

Recordemos además que δ es tal que $t\delta p = rbq$, luego $n\delta p = \xi t\delta p = \xi rbq = \varphi' bq = m'\varphi gq = m'\varphi k_3 p = m'mhp$. Pero p es un epimorfismo, así que $n\delta = m'mh$.

Por lo tanto $\ker n\delta = \ker m'mh$. Ahora bien, como m' y m son monomorfismos, $\ker m'mh = \ker h$, y por otro lado $\ker \delta \leq \ker n\delta$. Además, $h = \operatorname{coker} \overline{g}$ por lo que $\ker h = \operatorname{Im} \overline{g}$. Es decir, acabamos de probar que $\ker \delta \leq \operatorname{Im} \overline{g}$.

$\underline{\operatorname{Im} \overline{g} \leq \ker \delta)}$ Al definir δ construimos el pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & K_3 \arrow[d, "k_3"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

y desde el principio sabemos que $\overline{g} : K_2 \to K_3$ y $k_2 : K_2 \to B$ verifican $gk_2 = k_3\overline{g}$. Por tanto existe un único $u : K_2 \to P$ tal que $k_2 = qu$ y $pu = \overline{g}$.

Entonces

$$\overline{g} = pu \Rightarrow \delta\overline{g} = \delta pu \Rightarrow t\delta\overline{g} = t\delta pu = rbqu = rbk_2 = 0.$$

Como t es un monomorfismo vemos que $\delta\overline{g} = 0$.

La última parte de la demostración es inmediata: si f es un monomorfismo (g' es un epimorfismo) entonces $fk_1 = k_2\overline{f}$ es un monomorfismo ($q_3 g' =$

$\widehat{g}q_2$ es un epimorfismo), por lo que el primer morfismo, es decir, $\overline{f}$ es un monomorfismo (el segundo morfismo, es decir $\widehat{g}$ es un epimorfismo). ■

Teorema 2.1.6. *Si* $0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} C \to 0$ *es una sucesión exacta corta de complejos en la categoría* $C(\mathscr{A})$*, entonces existe una sucesión exacta en* $\mathscr{A}$*:* $H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(M) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(M) \xrightarrow{H_{n-1}(g)} H_{n-1}(C)$ *en la que los morfismos* δ_n *se llaman morfismos de conexión. A la sucesión exacta*

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(M) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(M) \to \cdots$$

se le llama sucesión exacta larga de homología.

Demostración. Dado cualquier complejo X, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_n(X) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d] & Z_n(X) \arrow[d, "k_n"] \\
 & X_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_n"'] & X_n \arrow[d, "\pi_n"] \\
 & \dfrac{X_n}{B_n(X)} \arrow[d] & \dfrac{X_n}{Z_n(X)} \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

(en donde α_n y k_n son las inclusiones y p_n y π_n las proyecciones) permite aplicar la Propiedad Universal del Conúcleo y así encontrar un único morfismo $\gamma_n : \dfrac{X_n}{B_n(X)} \to \dfrac{X_n}{Z_n(X)}$ que completa el diagrama de forma conmutativa. Además, como $\pi_n id$ es un epimorfismo, γ_n también lo es.

Por otro lado, como la categoría $\mathscr{A}$ es abeliana, tenemos un isomorfismo $\dfrac{X_n}{Z_n(X)} \cong B_{n-1}(X)$, por lo que componiendo γ_n con el monomorfismo α_{n-1} : $B_{n-1}(X) \to Z_{n-1}(X)$ obtenemos otro morfismo $\dfrac{X_n}{B_n(X)} \to Z_{n+1}(X)$ cuyo núcleo coincide con el de γ_n.

Ahora bien, el Primer Teorema de Isomorfía de Noether prueba que

$$\frac{X_n/B_b(X)}{Z_n(X)/B_n(X)} \cong \frac{X_n}{Z_n(X)},$$

así que siempre disponemos del siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_n(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n(X) \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{X_n}{B_n(X)} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & 0 \\
 & & \dfrac{X_n}{Z_n(X)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \dfrac{X_n}{Z_n(X)} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

que demuestra que el núcleo de γ_n, y por tanto de $\alpha_{n-1}\gamma_n$, es $H_n(X) \to \dfrac{X_n}{B_n(X)}$. De esta forma hemos encontrado una sucesión exacta

$$0 \to H_n(X) \to \frac{X_n}{B_n(X)} \xrightarrow{\alpha_{n-1}\gamma_n} Z_{n-1}(X).$$

Pero $\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}\gamma_n) = \mathrm{Im}(\alpha_{n-1})$ porque γ_n es épica, así que $\mathrm{coker}(\alpha_{n-1}\gamma_n) =$

$\dfrac{Z_{n-1}(X)}{\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})} = H_{n-1}(X)$. Por tanto la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to H_n(X) \to \frac{X_n}{B_n(X)} \to Z_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X) \to 0.$$

Ahora, dado que

$$0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} C \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos, para todo entero n existe un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\delta_n^A"'] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\delta_n^M"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\delta_n^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & M_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El Lema de la Serpiente proporciona entonces una sucesión exacta

$$0 \to Z_n(A) \xrightarrow{\overline{f}_n} Z_n(M) \xrightarrow{\overline{g}_n} Z_n(C)$$

que permite construir el siguiente diagrama con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & H_n(A) \arrow[d] & H_n(M) \arrow[d] & H_n(C) \arrow[d] \\
 & \dfrac{A_n}{B_n(A)} \arrow[d] & \dfrac{M_n}{B_n(M)} \arrow[d] & \dfrac{C_n}{B_n(C)} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(A) \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"] \arrow[d] & Z_{n-1}(M) \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"] \arrow[d] & Z_{n-1}(C) \arrow[d] \\
 & H_{n-1}(A) \arrow[d] & H_{n-1}(M) \arrow[d] & H_{n-1}(C) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Si lográramos construir una sucesión exacta

$$\frac{A_n}{B_n(A)} \to \frac{M_n}{B_n(M)} \to \frac{C_n}{B_n(C)} \to 0, \tag{2.1}$$

el Lema de la Serpiente proporcionaría la sucesión exacta

$$H_n(A) \to H_n(M) \to H_n(C) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(M) \to H_{n-1}(C)$$

que buscábamos.

Para construir la sucesión 2.1 tendremos en cuenta que $\operatorname{coker}(\delta^A_{n+1}) = \dfrac{A_n}{B_n(A)}$ $\forall n$, y lo mismo ocurre con M y C, por lo que disponemos del siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\delta^A_{n+1}"'] & M_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\delta^M_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta^C_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "p^A_n"'] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "p^M_n"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "p^C_n"'] & 0 \\
 & \dfrac{A_n}{B_n(A)} \arrow[d] & \dfrac{M_n}{B_n(M)} \arrow[d] & \dfrac{C_n}{B_n(C)} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ahora, $p^M_n f_n \delta^A_{n+1} = p^M_n \delta^M_{n+1} f_{n+1} = 0$, así que existe un único morfismo $h_n : \dfrac{A_n}{B_n(A)} \to \dfrac{M_n}{B_n(M)}$ tal que $h_n p^A_n = p^M_n f_n$ (ya que $p^A_n = \operatorname{coker}(\delta^A_{n+1})$).

Por la misma razón existen un único morfismo $t_n : \dfrac{M_n}{B_n(M)} \to \dfrac{C_n}{B_n(C)}$ tal que $t_n p^M_n = p^C_n g_n$.

Además, como $p^C_n g_n$ es un epimorfismo, t_n también lo es.

Por lo tanto ya tenemos la sucesión

$$\frac{A_n}{B_n(A)} \xrightarrow{h_n} \frac{M_n}{B_n(M)} \xrightarrow{t_n} \frac{C_n}{B_n(C)} \to 0$$

y sólo resta demostrar la exactitud en $\dfrac{M_n}{B_n(M)}$. Probaremos pues que $t_n = \operatorname{coker}(h_n)$.

Supongamos pues la situación

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\delta^A_{n+1}"'] & M_{n+1} \arrow[rr, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\delta^M_{n+1}"'] & & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta^C_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "p^A_n"'] & M_n \arrow[rr, "g_n"] \arrow[d, "p^M_n"'] & & C_n \arrow[r] \arrow[d, "p^C_n"'] & 0 \\
& \dfrac{A_n}{B_n(A)} \arrow[r, "h_n"] \arrow[d] \arrow[drr, "0"'] & \dfrac{M_n}{B_n(M)} \arrow[rr, "t_n"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & & \dfrac{C_n}{B_n(C)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & X & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\varphi h_n = 0 \Rightarrow \varphi p^M_n f_n = \varphi h_n p^A_n = 0$. Como $g_n = \operatorname{coker}(f_n)$ existe un único $\xi : C_n \to X$ tal que $\xi g_n = \varphi p^M_n$. Entonces $\xi \delta^C_{n+1} g_{n+1} = \xi g_n \delta^M_{n+1} = \varphi p^M_n \delta^M_{n+1} = 0$, y como g_{n+1} es un epimorfismo obtenemos que $\xi \delta^C_{n+1} = 0$. Pero $p^C_n = \operatorname{coker}(\delta^C_{n+1})$ así que existe un único $\phi : \dfrac{C_n}{B_n(C)} \to X$ tal que $\phi p^C_n = \xi$, con lo cual $\phi p^C_n g_n = \xi g_n = \varphi p^M_n$ y además $\phi p^C_n g_n = \phi t_n p^M_n$. En definitiva $\phi t_n p^M_n = \varphi p^M_n$, es decir, $\phi t_n = \varphi$ porque p^M_n es un epimorfismo. ■

2.2. Introducción al Álgebra Homológica Relativa

Una de las herramientas que utilizaron Cartan y Eilenbergh para el desarrollo de la teoría de (co)homología en las categorías de módulos fue el uso de las resoluciones proyectivas e inyectivas, y la razón por la que éstas son útiles es que hacen que se verifique le Teorema de Comparación. En nuestras categorías no tenemos estas herramientas porque en general no tenemos objetos proyectivos ni objetos inyectivos. Por tanto se hace necesario encontrar na generalización de estos conceptos que no posean las propiedades de los proyectivos y de los inyectivos. El primero que observó este hecho y que dio la generalización pertinente fue Edgar Enochs en 1981 ([6]). Hablamos de las $\mathscr{F}$-resoluciones.

Definición 2.2.1. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, diremos que un complejo*

$$\cdots \to A_1 \to A_0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots$$

en $\mathscr{A}$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exacto (*$\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exacto) si para todo $X \in \mathscr{X}$ el complejo*

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(X, A_1) \to \mathrm{Hom}(X, A_0) \to \mathrm{Hom}(X, A^0) \to \mathrm{Hom}(X, A^1) \to \cdots$$

$$(\cdots \to \mathrm{Hom}(A^1, X) \to \mathrm{Hom}(A^0, X) \to \mathrm{Hom}(A_0, X) \to \mathrm{Hom}(A_1, X) \to \cdots)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Si X es un objeto de una subcategoría $\mathscr{X}$, el hecho de la sucesión $X \to A \to 0$ sea $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta significa, ni más ni menos, que $X \to A$ es una X-precubierta en el sentido de Enochs ([6]). Las precubiertas son construcciones que emulan en cierto modo las propiedades que tienen los objetos proyectivos, que tan escasos son en el ámbito categórico. El concepto dual es el de preenvolvente, que hace lo propio respecto a los objetos inyectivos.

Pero existen además las cubiertas y las envolventes (también aparecieron en [6]), que no son sino precubiertas o preenvolventes con una propiedad adicional. Estos conceptos generalizan los ya existentes en la homología clásica en las categorías de módulos de cubierta proyectiva y envolvente inyectiva.

Demos pues estos conceptos de los que estamos hablando.

Definición 2.2.2. *Si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ y A es un objeto de $\mathscr{A}$, una $\mathscr{X}$-precubierta de A es un morfismo $f : X \to A$ con X en $\mathscr{X}$, de forma que la sucesión $X \xrightarrow{f} A \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta. En otras palabras, para cada objeto X' de $\mathscr{X}$ y cada morfismo $X' \to A$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

puede ser completado de manera conmutativa.

$f : X \to A$ es una $\mathscr{X}$-cubierta de A si además de ser una precubierta verifica la siguiente propiedad: cualquier morfismo que complete conmutativamente el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

es un automorfismo.

Los conceptos duales son los de (pre)envolvente.

Definición 2.2.3. *Si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ y A es un objeto de $\mathscr{A}$, una $\mathscr{X}$-preenvolvente de A es un morfismo $f : A \to X$ con X en $\mathscr{X}$, de forma que la sucesión $0 \to A \xrightarrow{f} X$ es $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X},)$-exacta, o lo que es lo mismo, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[dl, dashed] \\ X' & \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativa para todo objeto X' de $\mathscr{X}$ y todo morfismo $A \to X'$.

f es una $\mathscr{X}$-envolvente además cualquier morfismo que complete conmutativamente el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, dashed] \\ X & \end{tikzcd}$$

es un automorfismo.

Si A es un objeto de $\mathscr{A}$ que posee una $\mathscr{X}$-precubierta $f_0 : X_0 \to A$ y llamamos $K_0 = \ker f_0$, la sucesión $0 \to K_0 \to X_0 \to A \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta. Si K_0 también posee una $\mathscr{X}$-precubierta $f_1 : X_1 \to K_0$ y llamamos $K_1 = \ker f_1$, obtenemos otra sucesión $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to K_1 \to X_1 \to K_0 \to 0$. Pegando ambas sucesiones obtenemos otra sucesión, $0 \to K_1 \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$ que también es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta.

Si pudiéramos continuar este proceso (porque todos los núcleos que vamos calculando tuvieran $\mathscr{X}$-precubiertas) obtendríamos una sucesión

$$\cdots X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

que sería $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y no necesariamente exacta (salvo que las $\mathscr{X}$-precubiertas fueran epimorfismos).

Estas sucesiones $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas son las que cumplen el ingrediente que se necesita para que se verifique el Teorema de Comparación, como veremos a continuación, y que básicamente dice que si elegimos dos sucesiones $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas de un mismo objeto A, ambas sucesiones son homotópicas y por lo tanto la cohomología que resulta de ellas es la misma.

Por supuesto, si en lugar de precubiertas construimos preenvolventes obtenemos sucesiones $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$-exactas que van hacia la derecha y que también verifican el Teorema de Comparación.

Antes de demostrar el Teorema de Comparación daremos nombre a este tipo de sucesiones Hom-exactas.

Definición 2.2.4. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Una $\mathscr{X}$-resolución de un objeto A de $\mathscr{A}$ es un complejo* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$*-exacto*

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

(no necesariamente exacto) con $X_i \in \mathscr{X}$. Si el complejo es exacto, diremos que es una $\mathscr{X}$-resolución exacta de A.

Una $\mathscr{X}$-corresolución de un objeto A de $\mathscr{A}$ es un complejo $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{X})$*-exacto*

$$0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

(no necesariamente exacto) con $X^i \in \mathscr{X}$. Si el complejo es exacto, diremos que es una $\mathscr{X}$-corresolución exacta de A.

Al complejo obtenido a partir de una resolución (corresolución) eliminando el último (primer) término de la sucesión se le llama complejo reducido. En nuestro caso, el complejo reducido de la $\mathscr{X}$-resolución de A es

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to 0,$$

y el de la $\mathscr{X}$-corresolución de A es

$$0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$$

A la subcategoría plena formada por todos los objetos de $\mathscr{A}$ que admitan $\mathscr{X}$-resoluciones ($\mathscr{X}$-corresoluciones) la llamaremos $\mathrm{res}(\mathscr{X})$ ($\mathrm{cores}(\mathscr{X})$) y notaremos por $\widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ ($\widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{X})$) a la subcategoría plena formada por todos los objetos de $\mathscr{A}$ que admitan $\mathscr{X}$-resoluciones exactas ($\mathscr{X}$-corresoluciones exactas).

Teorema 2.2.5. (Teorema de Comparación)
Si $\cdots \to X_1 \overset{f_1}{\to} X_0 \overset{f_0}{\to} A \to 0$ *y* $\cdots \to X'_1 \overset{g_1}{\to} X'_0 \overset{g_0}{\to} A \to 0$ *son dos* $\mathscr{X}$*-resoluciones de* A *entonces existe un homomorfismo entre los complejos reducidos que es único salvo homotopía.*

Dualmente, si $0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ *y* $0 \to A \to X'^0 \to X'^1 \to \cdots$ *son dos* $\mathscr{X}$*-corresoluciones de* A *entonces existe un homomorfismo entre los complejos reducidos que es único salvo homotopía.*

Demostración. Los argumentos para demostrar los dos enunciados el teorema son totalmente duales, por lo que sólo demostraremos uno de ellos.

Partimos pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "g_2"'] & X'_1 \arrow[r, "g_1"'] & X'_0 \arrow[r, "g_0"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactitud del complejo inferior proporciona un morfismo $\alpha_0 : P_0 \to P'_0$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "g_2"'] & X'_1 \arrow[r, "g_1"'] & X'_0 \arrow[r, "g_0"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, el complejo $\mathrm{Hom}(X_1, X'_1) \overset{g_{1*}}{\to} \mathrm{Hom}(X_1, X'_0) \overset{g_{0*}}{\to} \mathrm{Hom}(X_1, A) \to 0$ vuelve a ser exacto, y $\alpha_0 f_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X'_0)$ es tal que $g_{0*}(\alpha_0 f_1) = g_0 \alpha_0 f_1 = f_0 f_1 = 0$, por lo que existe $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X'_1)$ tal que $\alpha_0 f_1 = g_1 \alpha_1$, es decir, completamos conmutativamente otro cuadrado del diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[r, "g_2"'] & X'_1 \arrow[r, "g_1"'] & X'_0 \arrow[r, "g_0"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Repetimos este proceso para cada n y obtenemos el homomorfismo de complejos que buscábamos.

Si tenemos dos homomorfismos de complejos, por ejemplo α y β, podemos hacer lo siguiente: $g_0\alpha_0 = f_0 = g_0\beta_0 \Rightarrow g_0(\alpha_0 - \beta_0) = 0$. Por tanto tenemos $\alpha_0 - \beta_0 \in \mathrm{Hom}(X_0, X_0')$ de forma que $g_{0*}(\alpha_0 - \beta_0) = 0$. Como el complejo $\mathrm{Hom}(X_0, X_1') \overset{g_{1*}}{\to} \mathrm{Hom}(X_0, X_0') \overset{g_{0*}}{\to} \mathrm{Hom}(X_0, A) \to 0$ es exacto, encontramos $s_0 : X_0 \to X_1'$ tal que $g_1 s_0 = \alpha_0 - \beta_0$ y tenemos la primera parte de la homotopía.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2-\beta_2"'] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1-\beta_1"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0-\beta_0"] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_2' \arrow[r, "g_2"'] & X_1' \arrow[r, "g_1"'] & X_0' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, $\alpha_1 - \beta_1 - s_0 f_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X_1')$ es tal que

$$g_1(\alpha_1 - \beta_1 - s_0 f_1) = \alpha_0 f_1 - \beta_0 f_1 - g_1 s_0 f_1 = \alpha_0 f_1 - \beta_0 f_1 - (\alpha_0 - \beta_0) f_1 = 0,$$

así que otra vez existe $s_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2')$ tal que $g_2 s_1 = \alpha_1 - \beta_1 - s_0 f_1$, es decir, $\alpha_1 - \beta_1 = g_2 s_1 - s_0 f_1$, y tenemos la segunda parte de la homotopía

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2-\beta_2"'] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1-\beta_1"'] \arrow[dl, dashed, "s_1"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0-\beta_0"] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_2' \arrow[r, "g_2"'] & X_1' \arrow[r, "g_1"'] & X_0' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Repitiendo este argumento obtenemos todas las partes de la homotopía.

■

Corolario 2.2.6. *Si* $\mathbf{X} : \cdots \to X_1 \overset{f_1}{\to} X_0 \overset{f_0}{\to} A \to 0$ *y* $\mathbf{X}' : \cdots \to X_1' \overset{g_1}{\to} X_0' \overset{g_0}{\to} A \to 0$ *son dos $\mathscr{X}$-resoluciones de A entonces los objetos de cohomología de ambas son isomorfos..*

Dualmente, si $0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ *y* $0 \to A \to X'^0 \to X'^1 \to \cdots$ *son dos* $\mathscr{X}$*-corresoluciones de* A *entonces los objetos de cohomología de ambas son isomorfos.*

Demostración. El Teorema de Comparación proporciona dos morfismos de complejos $\alpha : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ y $\beta : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ y también asegura que $\alpha\beta$ e $id_{\mathbf{X}'}$ son morfismos homotópicos. Por tanto podemos aplicar la Proposición 2.1.4 y obtenemos que $H_n(\alpha)H_n(\beta) = H_n(\alpha\beta) = H_n(id_{\mathbf{X}'} = id_{H_n(\mathbf{X}')}$.

Por el mismo argumento $H_n(\beta)H_n(\alpha) = H_n(\beta\alpha) = H_n(id_{\mathbf{X}}) = id_{H_n(\mathbf{X})}$, con lo cual $H_n(\beta) = H_n(\alpha)^{-1}$. ■

Definición 2.2.7. *Sea* $\mathscr{X}$ *una subcategoría de una categoría abeliana* $\mathscr{A}$*. La subcategoría ortogonal a derecha (a izquierda) de* $\mathscr{X}$*, que notaremos por* $\mathscr{X}^\perp$ *(*$^\perp\mathscr{X}$*), es la subcategoría plena formada por todos los objetos* Y *de* $\mathscr{A}$ *tales que* $\mathrm{Ext}^i(X, Y) = 0$ *(*$\mathrm{Ext}^i(Y, X) = 0$*) para todo* $X \in \mathscr{X}$ *y todo* $i > 0$*.*

Diremos que $\mathscr{X}$ *es auto-ortogonal si* $\mathrm{Ext}^i(X, X') = 0$ *para todo* $X, X' \in \mathscr{X}$ *y todo* $i > 0$*, o lo que es lo mismo, si* $\mathscr{X}^\perp = {}^\perp\mathscr{X} = \mathscr{X}$*.*

Si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son dos subcategorías de $\mathscr{A}$ que verifican que $\mathscr{X} \subseteq {}^\perp\mathscr{Y}$, entonces $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(X, Y) = 0\ \forall X \in \mathscr{X}, \forall Y \in \mathscr{Y}$, es decir, $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}^\perp$. Por tanto vemos que la condición $\mathscr{X} \subseteq {}^\perp\mathscr{Y}$ es equivalente a la condición $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}^\perp$.

Los siguientes cuatro resultados hacen en parte referencia a unas propiedades bien conocidas de los pushouts y de los pullbacks que permiten la construcción de unos diagramas conmutativos con filas y columnas exactas que se especifican en los correspondientes enunciados. Decimos que hacen referencia en parte a estas conocidas propiedades porque nosotros probaremos además que si las sucesiones de partida son Hom-exactas entonces las filas y columnas resultantes en el diagrama conmutativo también lo son, hecho que necesitaremos más adelante en nuestro trabajo. No conocemos que esta última parte haya sido comentada con anterioridad en la literatura y por eso damos la demostración completa de los resultados.

Lema 2.2.8. *Sean* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to B \to D \to E \to 0$ *sucesiones exactas en una categoría abeliana* $\mathscr{A}$. *Entonces, tomando el pushout* $F \in Ob(\mathscr{A})$ *de* $B \to C$ *y* $B \to D$, *se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Además, si $\mathscr{X}$ *es una una subcategoría de* $\mathscr{A}$ *tal que* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to B \to D \to E \to 0$ *son* $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas), se tiene que todas las filas y columnas del diagrama son* $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas).*

Demostración. Dadas las sucesiones exactas $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ y

$0 \to B \overset{\alpha}{\to} D \overset{\beta}{\to} E \to 0$ en $\mathscr{A}$, tomamos el pushout de g y α, (F, κ_1, κ_2):

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\kappa_1"] & 0 \\
 & & D \arrow[r, dashed, "\kappa_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & F & \\
 & & E \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Las propiedades del pushout (véase por ejemplo [20, Proposition 5.1 y página 92]) nos dicen que como α es monomorfismo entonces κ_1 es monomorfismo, que como g es epimorfismo entonces κ_2 es epimorfismo y que como g es el conúcleo de f, entonces κ_2 es el conúcleo de αf.

Si tomamos el morfismo $0 : C \to E$, tenemos que $0 = 0g = \beta\alpha$ y entonces existe una única $\lambda : F \to E$ tal que $\lambda\kappa_1 = 0$ y $\lambda\kappa_2 = \beta$, es decir,

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha f"'] & D \arrow[r, "\kappa_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
 & & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

es un diagrama conmutativo con las dos filas y la columna central exactas. Además, como $\beta = \lambda\kappa_2$ es un epimorfismo, λ es epimorfismo.

Falta ver que λ es el conúcleo de κ_1.

Si $\phi : F \to G$ es tal que $\phi\kappa_1 = 0$ entonces $\phi\kappa_1 g = \phi\kappa_2\alpha = 0$, con lo cual (ya que β es el conúcleo de α) existe un único $\varphi : E \to G$ tal que $\phi\kappa_2 = \varphi\beta = \varphi\lambda\kappa_2$, luego $\phi = \varphi\lambda$ por ser κ_2 epimorfismo. Es decir, $\lambda = \operatorname{coker}(\kappa_1)$.

Ahora, si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ tal que las sucesiones exactas $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to B \to D \to E \to 0$ son $\operatorname{Hom}(-, \mathscr{X})$-exactas, tomamos $X \in \mathscr{X}$ y aplicamos $\operatorname{Hom}(-, X)$ al diagrama (2.2), y nos queda el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \operatorname{Hom}(E,X) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(E,X) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F,X) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(D,X) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(A,X) \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(C,X) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(A,X) \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{Hom}(D, X) \to \operatorname{Hom}(A, X)$ es un epimorfismo porque es composición de epimorfismos, y aplicando el Lema de la Serpiente se tiene que $\operatorname{Hom}(F, X) \to \operatorname{Hom}(C, X)$ tiene conúcleo cero, es decir, es epimorfismo.

Por último, si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ tal que las sucesiones exactas $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to B \to D \to E \to 0$ son $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas, tomamos $X \in \mathscr{X}$ y aplicamos $\operatorname{Hom}(X, -)$ al diagrama (2.2), y nos queda el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(X,B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}(X,C) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_{1*}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, "(\alpha f)_*"'] & \mathrm{Hom}(X,D) \arrow[r, "\kappa_{2*}"'] \arrow[d, "\beta_*"'] & \mathrm{Hom}(X,F) \arrow[d, "\lambda_*"] & \\
 & & \mathrm{Hom}(X,E) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,E) & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $\beta_* = \lambda_* \kappa_{2*}$ es epimorfismo entonces λ_* es epimorfismo. Para ver que κ_{2*} es epimorfismo tomamos C' el conúcleo de κ_{2*} y aplicamos el Lema de la Serpiente al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,A) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X,E) & \\
 & 0 & C' & &
\end{tikzcd}$$

Obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,A) \to 0 \to 0 \to C' \to 0$$

que demuestra que $C' = 0$ y por tanto que κ_{2*} es un epimorfismo. ■

Lema 2.2.9. *Sean* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to A \to D \to E \to 0$ *sucesiones exactas en una categoría abeliana* $\mathscr{A}$*. Tomando el pushout* F *de* $A \to B$ *y* $A \to D$ *se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Además, si $\mathscr{X}$ *es una subcategoría de* $\mathscr{A}$ *tal que* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to A \to D \to E \to 0$ *son* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas), entonces todas las filas y columnas del diagrama son* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas).*

Demostración. Dadas las sucesiones exactas $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ y

$0 \to A \overset{\alpha}{\to} D \overset{\beta}{\to} E \to 0$ en $\mathscr{A}$, tomamos el pushout de f y α, (F, κ_1, κ_2):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\kappa_1"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & D \arrow[r, dashed, "\kappa_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & F & & \\
 & E \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Como f es monomorfismo entonces κ_2 es monomorfismo y como α es monomorfismo entonces κ_1 es monomorfismo (véase [20, Proposition 5.1 and page 92]). Ahora tomamos $0 : D \to C$ y como $0 = 0\alpha = gf$ entonces existe una única $\lambda : F \to C$ tal que $\lambda\kappa_2 = 0$ y $\lambda\kappa_1 = g$. De la misma forma tomamos $0 : B \to E$ y como $0f = \beta\alpha$ existe una única $\nu : F \to E$ tal que $\nu\kappa_1 = 0$ y $\nu\kappa_2 = \beta$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\kappa_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\kappa_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & F \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[d, "\nu"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Como $g = \lambda\kappa_1$ es epimorfismo entonces λ es epimorfismo y como $\beta = \nu\kappa_2$ es epimorfismo entonces ν es epimorfismo. Sólo resta demostrar que ν es el conúcleo de κ_1 y que λ es el conúcleo de κ_2. Ambas demostraciones se hacen de la misma forma por lo que solo haremos la prueba de la primera afirmación. Para ello sea $\mu : F \to L$ tal que $\mu\kappa_1 = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\kappa_1"'] \arrow[ddr, "0"] & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\kappa_2"'] \arrow[d, "\beta"'] & F \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"'] & \\
 & E \arrow[r, equal] \arrow[d] & E \arrow[d] & L \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos pues que $0 = \mu\kappa_1 f = \mu\kappa_2\alpha$ y por tanto que existe un único $\varphi : E \to L$ tal que $\varphi\beta = \mu\kappa_2$ ya que $\beta = \operatorname{coker}\alpha$.

Por otro lado observamos que $\varphi\beta\alpha = 0 = 0f$, así que, por las propiedades del pushout, existe un único $\phi : F \to L$ tal que $\varphi\beta = \phi\kappa_2$ y $0 = \phi\kappa_1$. Pero $\varphi\nu : F \to L$ y $\mu : F \to L$ son dos morfismos que, al igual que ϕ, verifican que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\nu\kappa_2 = \varphi\beta \\ \varphi\nu\kappa_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{y que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\kappa_2 = \varphi\beta \\ \mu\kappa_1 = 0 \end{array} \right.$$

Por tanto, la unicidad de ϕ garantiza que $\phi = \varphi\nu = \mu$.

Si existiera otro $\varphi' : E \to L$ tal que $\varphi'\nu = \mu$ entonces $\varphi'\nu\kappa_2 = \mu\kappa_2$. Pero $\varphi'\nu\kappa_2 = \varphi'\beta$, así que tendríamos que $\varphi'\beta = \mu\kappa_2$, y por tanto que $\varphi' = \varphi$ porque φ era el único morfismo tal que $\varphi\beta = \mu\kappa_2$. Deducimos pues que $\nu = \operatorname{coker}\kappa_1$.

Supongamos ahora que $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ tal que las sucesiones exactas $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to A \to D \to E \to 0$ son también

$\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas, tomamos $X \in \mathscr{X}$ y aplicamos $\operatorname{Hom}(X, -)$ al diagrama (2.4). Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(X, A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \operatorname{Hom}(X, B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\kappa_{1*}"] & \operatorname{Hom}(X, C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(X, D) \arrow[r, "\kappa_{2*}"'] \arrow[d, "\beta_*"'] & \operatorname{Hom}(X, F) \arrow[r, "\lambda_*"'] \arrow[d, "\nu_*"] & \operatorname{Hom}(X, C) & \\
 & \operatorname{Hom}(X, E) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(X, E) & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Como $g_* = \lambda_* \kappa_{1*}$ es epimorfismo entonces λ_* es epimorfismo. Con el mismo razonamiento se prueba que ν_* es epimorfismo.

Por último, si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de $\mathscr{A}$ tal que las sucesiones exactas $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to A \to D \to E \to 0$ son $\operatorname{Hom}(-, \mathscr{X})$-exactas, tomamos $X \in \mathscr{X}$ y aplicamos $\operatorname{Hom}(-, X)$ al diagrama (2.4), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{Hom}(E,X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\nu^*"'] & \mathrm{Hom}(E,X) \arrow[d, "\beta^*"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C,X) \arrow[r, "\lambda^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(F,X) \arrow[r, "\kappa_2^*"] \arrow[d, "\kappa_1^*"'] & \mathrm{Hom}(D,X) \arrow[d, "\alpha^*"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C,X) \arrow[r, "g^*"'] & \mathrm{Hom}(B,X) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(A,X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Veamos que κ_1^* es epimorfismo (que κ_2^* es epimorfismo se comprueba de la misma forma). Si $h \in \mathrm{Hom}(B, X)$ entonces $f^*(h) = hf \in \mathrm{Hom}(A, X)$. Como α^* es epimorfismo existe $m \in \mathrm{Hom}(D, X)$ tal que $\alpha^*(m) = m\alpha = hf$, y como F es el pushout de α y f existe un único $\mu : F \to X$ ($\mu \in \mathrm{Hom}(F, X)$) tal que $\mu\kappa_1 = h$ y $\mu\kappa_2 = m$. En definitiva tenemos que existe $\mu \in \mathrm{Hom}(F, X)$ tal que $\kappa_1^*(\mu) = h$, es decir, κ_1^* es un epimorfismo. ■

Los dos resultados que acabamos de demostrar tienen sus correspondientes duales relativos a los pullbacks. A continuación daremos tales dualizaciones sin entrar en las demostraciones toda vez que, como decimos, son totalmente duales.

Lema 2.2.10. *Sean $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to D \to E \to B \to 0$ sucesiones exactas en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Entonces tomando el pullback F de $A \to B$ y $E \to B$ se puede construir el siguiente diagrama conmutativo* *con filas y columnas exactas*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & D \arrow[r, equal] \arrow[d] & D \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Además, si $\mathscr{X}$ *es una una subcategoría de* $\mathscr{A}$ *tal que* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to D \to E \to B \to 0$ *son* $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas), entonces todas las filas y columnas del diagrama anterior son* $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{X})$*-exactas (*$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exactas).*

Lema 2.2.11. *Sean* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *y* $0 \to D \to E \to C \to 0$ *sucesiones exactas en una categoría abeliana* $\mathscr{A}$*. Entonces tomando el pullback* F *de* $B \to C$ *y* $E \to C$ *se puede construir el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas*

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & D \arrow[r, equal] \arrow[d] & D \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Además, si $\mathscr{X}$ es una una subcategoría tal que $0 \to A \to B \to C \to 0$ y $0 \to D \to E \to C \to 0$ son $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas ($\operatorname{Hom}(-, \mathscr{X})$-exactas), entonces todas las filas y columnas del diagrama son $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas ($\operatorname{Hom}(-, \mathscr{X})$-exactas).

Lema 2.2.12. *Supongamos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbf{A}: & \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\mathbf{B}: & \cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "g_n"] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\mathbf{C}: & \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d''_n"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, tiene las columnas exactas y las filas son complejos. Si **A** *y* **C** *son exactos entonces* **B** *es exacto.*

Demostración. Sean $A_n \overset{u_n}{\to} K_n \overset{v_n}{\to} A_{n-1}$ y $C_n \overset{u''_n}{\to} M_n \overset{v''_n}{\to} C_{n-1}$ las descomposiciones épico-mónicas de d_n y d''_n respectivamente, y $u'_n : B_n \to L_n$ el conúcleo de d'_{n+1}. Como $d'_n d'_{n+1} = 0$ entonces existe un único $v'_n : L_n \to B_{n-1}$ tal que $v'_n u'_n = d'_n$. Además, como $0 = d_{n-1} d_n = d_{n-1} v'_n u'_n$ y u'_n es epimorfismo se tiene que $d_{n-1} v'_n = 0$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & A_n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, two heads, "u_n"'] & & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & A_{n-2} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & & K_n \arrow[ur, hook, "v_n"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & B_n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, two heads, "u'_n"'] & & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & B_{n-2} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & & L_n \arrow[ur, "v'_n"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, two heads, "u''_n"'] & & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & M_n \arrow[ur, hook, "v''_n"'] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Si probamos que v'_n es un monomorfismo habremos terminado porque en ese caso $\ker d'_n = \ker(v'_n u'_n) = \ker u'_n = \operatorname{Im} d'_{n+1}$.

Pero antes de probar que v'_n es un monomorfismo necesitamos hacer algunos cálculos.

Como $u'_n f_n d_{n+1} = u'_n d'_{n+1} f_{n+1} = 0$ entonces (u_n es el conúcleo de d_{n+1}) existe un único $\gamma_n : K_n \to L_n$ tal que $\gamma_n u_n = u'_n f_n$, y como $f_{n-1} d_n = d'_n f_n$ entonces $f_{n-1} v_n u_n = v'_n u'_n f_n = v'_n \gamma_n u_n$, luego $f_{n-1} v_n = v'_n \gamma_n$ (por ser u_n epimorfismo).

De la misma forma, como $u''_n g_n d'_{n+1} = u''_n d''_{n+1} g_{n+1} = 0$ entonces (u'_n es el conúcleo de d'_{n+1}) existe una única $\gamma'_n : L_n \to M_n$ tal que $\gamma'_n u'_n = u''_n g_n$, y como $g_{n-1} d'_n = d''_n g_n$ entonces $g_{n-1} v'_n u'_n = v''_n u''_n g_n = v''_n \gamma'_n u'_n$ luego $g_{n-1} v'_n = v''_n \gamma'_n$ (por ser u'_n epimorfismo).

Tenemos pues que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & A_n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "u_n"'] & & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & A_{n-2} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & & K_n \arrow[ur, "v_n"'] \arrow[dd, bend right, "\gamma_n"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & B_n \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "u'_n"'] & & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd] & B_{n-2} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
 & & & L_n \arrow[ur, "v'_n"'] \arrow[dd, bend right, "\gamma'_n"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, "u''_n"'] & & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & M_n \arrow[ur, "v''_n"'] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Además, γ'_n es un epimorfismo porque $\gamma'_n u'_n = u''_n g_n$ que es un epimorfismo, y γ_n es un monomorfismo porque $v'_n \gamma_n = f_{n-1} v_n$ que es un monomorfismo.

Veamos que γ'_n es el conúcleo de γ_n, es decir, que la sucesión

$$0 \to K_n \xrightarrow{\gamma_n} L_n \xrightarrow{\gamma'_n} M_n \to 0$$

es exacta.

Sea $\mu : L_n \to X$ tal que $\mu\gamma_n = 0$. Componiendo con u_n obtenemos que $0 = \mu\gamma_n u_n = \mu u'_n f_n$, así que como g_n es el conúcleo de f_n existe un único $\psi : C_n \to X$ tal que $\psi g_n = \mu u'_n$. Componiendo ahora con d'_{n+1} obtenemos que $\mu u'_n d'_{n+1} = 0$, luego $0 = \psi g_n d'_{n+1} = \psi d''_{n+1} g_{n+1}$, y como g_{n+1} es epimorfismo, $\psi d''_{n+1} = 0$. Entonces (como u''_n es el conúcleo de d''_{n+1}) existe un único $\lambda : M_n \to X$ tal que $\lambda u''_n = \psi$. De esta forma $\mu u'_n = \psi g_n = \lambda u''_n g_n = \lambda\gamma'_n u'_n$, y por ser u'_n epimorfismo, $\mu = \lambda\gamma'_n$.

Para probar la unicidad de λ supongamos que tenemos $\lambda' : M_n \to X$ tal que $\lambda'\gamma'_n = \mu$. Entonces $\lambda'\gamma'_n u'_n = \mu u'_n = \psi g_n = \lambda u''_n g_n = \lambda\gamma'_n u'_n$. Pero u'_n es un epimorfismo así que $\lambda'\gamma_n' = \lambda\gamma_n' = \mu$. Como λ era el único morfismo con esta propiedad deducimos que $\lambda = \lambda'$ y por tanto que γ_n' es el conúcleo de γ_n.

Con todo lo que acabamos de ver obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & A_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-2}"] & \cdots \\
 & L_n \arrow[r, "v_n'"] \arrow[d, "\gamma_n'"'] & B_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}'"] \arrow[d, "g_{n-1}"] & B_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-2}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M_n \arrow[r, "v_n''"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}''"] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

en el que todas las columnas son exactas, la primera y la tercera filas son exactas, y la segunda fila es un complejo.

Probemos, ahora sí, que v_n' es monomorfismo y, como ya explicamos antes, tendremos que la segunda fila también es exacta.

Sea $\phi : X \to L_n$ un morfismo tal que $v_n'\phi = 0$. Entonces $0 = g_{n-1}v_n'\phi = v_n''\gamma_n'\phi$, y como v_n'' es monomorfismo necesariamente $\gamma_n'\phi = 0$. Ahora, γ_n es el núcleo de γ_n' así que existe un único $\varphi : X \to K_n$ tal que $\gamma_n\varphi = \phi$, y componiendo con v_n' tenemos que $0 = v_n'\phi = v_n'\gamma_n\varphi = f_{n-1}v_n\varphi$. Por ser f_{n-1} y v_n monomorfismos obtenemos que $\varphi = 0$, luego $\phi = \gamma_n\varphi = 0$. ∎

Lema 2.2.13. *Supongamos que el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "d_1"'] & B_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y tiene las filas exactas. Consideramos además las inclusiones $\kappa_{A_i} : A_i \to B_{i+1} \oplus A_i$ *y* $\kappa_{B_{i+1}} : B_{i+1} \to B_{i+1} \oplus A_i$ *y las proyecciones* $\pi_{A_i} : B_{i+1} \oplus A_i \to A_i$ *y* $\pi_{B_{i+1}} : B_{i+1} \oplus A_i \to B_{i+1}$. *Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *Si* f_n *es un isomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \to A_{n-1} \xrightarrow{\varphi} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \xrightarrow{\Delta_{n-1}} \cdots \to B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \to 0,$$

en donde

$$\begin{array}{l} \varphi = -k_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + k_{B_{n-1}} f_{n-1} \\ \Delta_i = (-\kappa_{A_{i-2}}\delta_{i-1} + \kappa_{B_{i-1}} f_{i-1})\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_{i-1}} d_i \pi_{B_i} \ \forall i,\ 1 < i < n \\ \Delta_1 = f_0 \pi_{A_0} + d_1 \pi_{B_1} \end{array}$$

2. *Si* f_0 *es un isomorfismo entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \to A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \to B_2 \oplus A_1 \xrightarrow{\rho} B_1 \to 0,$$

en donde

$$\begin{array}{l} \Delta_{n+1} = -\kappa_{A_{n-1}}\delta_n + \kappa_{B_n} f_n \\ \Delta_i \textit{ son los del punto anterior } \forall i,\ 2 < i \le n \\ \rho = f_1 \pi_{A_1} + d_2 \pi_{B_2} \end{array}$$

Demostración. Veamos en primer lugar que la sucesión

$$\mathbf{X} : \quad 0 \to A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \to B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \to 0$$

es exacta.

Que es un complejo no tiene mayor dificultad:

$$\Delta_{i-1}\Delta_i = ((-\kappa_{A_{i-1}}\delta_i + \kappa_{B_i} f_i)\pi_{A_i} + \kappa_{B_i} d_{i+1} \pi_{B_{i+1}})$$

$$((-\kappa_{A_i}\delta_{i+1} + \kappa_{B_{i+1}} f_{i+1})\pi_{A_{i+1}} + \kappa_{B_{i+1}} d_{i+2} \pi_{B_{i+2}}) =$$

$$= \kappa_{A_{i-1}}\delta_i\delta_{i+1}\pi_{A_{i+1}} - \kappa_{B_i} f_i \delta_{i+1}\pi_{A_{i+1}} + 0 + 0 +$$

$$+\kappa_{B_i} d_{i+1} f_{i+1}\pi_{A_{i+1}} + \kappa_{B_i} d_{i+1} d_{i+2}\pi_{B_{i+2}} =$$

$$0 - \kappa_{B_i} f_i \delta_{i+1}\pi_{A_{i+1}} + \kappa_{B_i} f_i \delta_{i+1}\pi_{A_{i+1}} + 0 = 0$$

para todo $i \in \{3, \ldots, n\}$, y de igual forma se comprueba que $\Delta_n\Delta_{n+1} = 0$ y que $\Delta_1\Delta_2 = 0$.

Probemos ahora que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la sucesión

$$0 \longrightarrow B_i \xrightarrow{\kappa_{B_i}} B_i \oplus A_{i-1} \xrightarrow{(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}} A_{i-1} \longrightarrow 0.$$

es exacta.

Sea $\eta : B_i \oplus A_{i-1} \to X$ tal que $\eta\kappa_{B_i} = 0$ y consideremos $\psi : A_{i-1} \to X$ dado por $\psi = \eta(-1)^{i-1}\kappa_{A_{i-1}}$. Veamos que $\psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta$:

$$\begin{aligned}\psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} &= \eta(-1)^{i-1}\kappa_{A_{i-1}}(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} = \\ &= \eta\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} + \eta\kappa_{B_i}\pi_{B_i} = \eta(\kappa_{A_{i-1}}\pi_{A_{i-1}} + \kappa_{B_i}\pi_{B_i}) = \\ &= \eta 1_{B_i \oplus A_{i-1}} = \eta.\end{aligned}$$

Como $(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}$ es un epimorfismo (es básicamente la proyección) ψ es el único que verifica $\psi(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \eta$. Por tanto $(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}} = \operatorname{coker} \kappa_{B_i}$ y la sucesión es exacta.

El siguiente diagrama tiene pues las dos columnas y la primera y tercera filas exactas, y la segunda fila es un complejo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "\kappa_{B_{i+1}}"'] & B_i \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_{B_i}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \oplus A_i \arrow[r, "\Delta_{i+1}"] \arrow[d, "(-1)^i \pi_{A_i}"'] & B_i \oplus A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\delta_i"] \arrow[d] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Probemos que además es conmutativo.

$$\Delta_{i+1}\kappa_{B_{i+1}} = ((-\kappa_{A_{i-1}}\delta_i + \kappa_{B_i} f_i)\pi_{A_i} + \kappa_{B_i} d_{i+1}\pi_{B_{i+1}})\kappa_{B_{i+1}} = \kappa_{B_i} d_{i+1}$$

así que el cuadrado superior es conmutativo. Ahora,

$$(-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}\Delta_{i+1} = (-1)^{i-1}\pi_{A_{i-1}}((-\kappa_{A_{i-1}}\delta_i + \kappa_{B_i} f_i)\pi_{A_i} + \kappa_{B_i} d_{i+1}\pi_{B_{i+1}}) =$$

$$(-1)^{i-1}(-\delta_i)\pi_{A_i} = \delta_i(-1)^i\pi_{A_i}$$

y por tanto el cuadrado inferior también es conmutativo.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.2.12 y así obtenemos que $\mathbf{X}$ es una sucesión exacta.

Probemos ya las dos afirmaciones del enunciado. Demostraremos sólo el primer punto, pues el segundo totalmente análogo.

En primer lugar, como f_n es isomorfismo existe f_n^{-1}. Veamos que el morfismo $\phi : B_n \oplus A_{n-1} \to A_{n-1}$ dado por $\phi = \delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}$ es el conúcleo de Δ_{n+1}:

$$\begin{aligned}\phi\Delta_{n+1} &= (\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}})(-\kappa_{A_{n-1}}\delta_n + \kappa_{B_n} f_n) = \\ &= \delta_n f_n^{-1} f_n - \delta_n = 0.\end{aligned}$$

Ahora, sea $h : B_n \oplus A_{n-1} \to Z$ tal que $h\Delta_{n+1} = 0$. Entonces $-h\kappa_{A_{n-1}}\delta_n + h\kappa_{B_n} f_n = 0$, luego $h\kappa_{A_{n-1}}\delta_n = h\kappa_{B_n} f_n$. Tomando el morfismo $\tau : A_{n-1} \to Z$ dado por $\tau = h\kappa_{A_{n-1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\tau\phi &= h\kappa_{A_{n-1}}(\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}) = h\kappa_{A_{n-1}}\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + h\kappa_{A_{n-1}}\pi_{A_{n-1}} = \\ &= h\kappa_{B_n} f_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + h\kappa_{A_{n-1}}\pi_{A_{n-1}} = h(\kappa_{B_n}\pi_{B_n} + \kappa_{A_{n-1}}\pi_{A_{n-1}}) = \\ &= h1_{B_n \oplus A_{n-1}} = h\end{aligned}$$

Para probar la unicidad de τ consideramos $\tau' : A_n \to Z$ tal que $\tau'\phi = h$. Componiendo con $\kappa_{A_{n-1}}$ tenemos por un lado que $\tau'\phi\kappa_{A_{n-1}} = \tau'$ y por otro que $\tau'\phi\kappa_{A_{n-1}} = h\kappa_{A_{n-1}} = \tau$.

Ahora, como $\mathbf{X}$ es una sucesión exacta tenemos que $A_{n-1} = \operatorname{coker}\Delta_{n+1} \cong \ker\Delta_{n-1}$, pongamos que mediante un isomorfismo $\overline{\varphi}$. Entonces, llamando $\varphi = k\overline{\varphi}$ ($k : \ker\Delta_{n-1} \to B_{n-1} \oplus A_{n-2}$ es la inclusión) la sucesión

$$0 \to A_{n-1} \xrightarrow{\varphi} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \xrightarrow{\Delta_{n-1}} B_{n-2} \oplus A_{n-3} \to \cdots$$

es exacta.

Además podemos determinar que $\varphi = -\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}$ pues

$$(-\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1})\phi = (-\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1})(\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \pi_{A_{n-1}}) =$$

$$\begin{aligned}= \underbrace{-\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1}\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n}}_{0} - \kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1}\pi_{A_{n-1}} + \\ + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}\delta_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}\pi_{A_{n-1}} =\end{aligned}$$

$$= -\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1}\pi_{A_{n-1}} + \kappa_{B_{n-1}}d_n f_n f_n^{-1}\pi_{B_n} + \kappa_{B_{n-1}}f_{n-1}\pi_{A_{n-1}} =$$

$$= (-\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}}f_{n-1})\pi_{A_{n-1}} + \kappa_{B_{n-1}}d_n\pi_{B_n} = \Delta_n.$$

■

Es conveniente destacar que, según la demostración del resultado anterior, incluso si las filas del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "d_1"'] & B_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

no son exactas sino que son simplemente complejos, entonces la sucesión

$$\mathbf{X}: \quad 0 \to A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} \cdots \to B_1 \oplus A_0 \xrightarrow{\Delta_1} B_0 \to 0$$

sigue siendo un complejo (aunque no exacto). Este hecho se puede generalizar a cualquier morfismo de complejos: si

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de complejos, entonces siempre se puede construir otro complejo de la forma

$$\cdots \to B_{n+2} \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+2}} B_{n+1} \oplus A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \to \cdots$$

en el que $\Delta_n = \kappa_{B_{n-1}}d_n\pi_{B_n} + (-\kappa_{A_{n-2}}\delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}}f_{n-1})\pi_{A_{n-1}}$ ($\kappa_{A_n} : A_n \to B_{n+1} \oplus A_n$ y $\kappa_{B_n} : B_n \to B_n \oplus A_{n-1}$ siguen siendo las inclusiones y $\pi_{A_n} : B_{n+1}\oplus A_n \to A_n$ y $\pi_{B_{n+1}} : B_{n+1}\oplus A_n \to B_{n+1}$ siguen siendo las proyecciones). Este complejo juega un papel muy importante a la hora de hacer cálculos he el álgebra homológica, y recibe el nombre de mapping cone de f.

Definición 2.2.14. *Si f es un morfismo de complejos*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

al complejo

$$\cdots \to B_{n+2} \oplus A_{n+1} \xrightarrow{\Delta_{n+2}} B_{n+1} \oplus A_n \xrightarrow{\Delta_{n+1}} B_n \oplus A_{n-1} \xrightarrow{\Delta_n} B_{n-1} \oplus A_{n-2} \to \cdots$$

en el que $\Delta_n = \kappa_{B_{n-1}} d_n \pi_{B_n} + (-\kappa_{A_{n-2}} \delta_{n-1} + \kappa_{B_{n-1}} f_{n-1}) \pi_{A_{n-1}}$ $\forall n$ (con κ_{A_n} y κ_{B_n} las inclusiones y π_{A_n} y π_{B_n} las proyecciones) se le llama mapping cone de f y se denota por $M(f)$. Así $M(f)_n = B_n \oplus A_{n-1}$.

Como ya vimos en el resultado anterior y acabamos de comentar, si los dos complejos son exactos entonces el mapping cone es exacto.

Definición 2.2.15. *Dado un complejo A, se llama suspensión n-ésima de A, y se denota por $A[n]$, al complejo definido como $A[n]_i = A_{n+i}$, $\delta_i^{A[n]} = (-1)^n \delta_{n+i}^A$.*

Proposición 2.2.16. *Si $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es un morfismo de complejos entonces siempre existe una sucesión exacta de complejos*

$$0 \to \boldsymbol{B} \to M(f) \to \boldsymbol{A}[-1] \to 0$$

dada por

$$0 \longrightarrow B_i \xrightarrow{\kappa_{B_i}} B_i \oplus A_{i-1} \xrightarrow{\pi_{A_{i-1}}} A_{i-1} \longrightarrow 0.$$

Demostración. Véase la demostración del Lema 2.2.13. ∎

Lema 2.2.17 (Lema de la Herradura). *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, cerrada bajo sumas directas finitas. Si M' y M'' tienen $\mathscr{X}$-resoluciones exactas y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta y* $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exacta, entonces M tiene una $\mathscr{X}$-resolución exacta.*

Demostración. Como $M', M'' \in \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$ existen las sucesiones exactas y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas

$$\cdots \to X_1' \to X_0' \to M' \to 0$$

$$\cdots \to X_1'' \to X_0'' \to M'' \to 0$$

con $X_i', X_i'' \in \mathscr{X}$. Considerando $K_{i-1}' = \operatorname{Im}(X_i' \to X_{i-1}')$ y $K_{i-1}'' = \operatorname{Im}(X_i'' \to X_{i-1}'')$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d, "\alpha_0'"'] & & K_0'' \arrow[d, "\alpha_0''"] & \\
 & X_0' \arrow[d, "d_0'"'] & & X_0'' \arrow[d, "d_0''"] \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

en donde λ existe de forma que $g\lambda = d_0''$ porque la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta.

Consideramos entonces la sucesión exacta corta $0 \to X_0' \xrightarrow{\iota_1} X_0' \oplus X_0'' \xrightarrow{\pi_2} X_0'' \to 0$ y por la Propiedad Universal del Coproducto encontramos un único morfismo $d_0 : X_0' \oplus X_0'' \to M$ tal que $d_0\iota_1 = fd_0'$ y $d_0\iota_2 = \lambda$. Pero como $i_1\pi_1 + i_2\pi_2 = id$ vemos que

$$gd_0 = gd_0(i_1\pi_1 + i_1\pi_2) = gd_0i_1\pi_1 + gd_0i_2\pi_2 = gfd_0'\pi_1 + gd_0i_2\pi_2 = gd_0i_2\pi_2.$$

Por tanto $gd_0 = gd_0 i_2 \pi_2 = g\lambda\pi_2 = d_0''\pi_2$. Es decir, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d, "\alpha_0'"'] & & K_0'' \arrow[d, "\alpha_0''"] & \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "d_0'"'] & X_0' \oplus X_0'' \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "d_0"'] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d, "d_0''"] \arrow[dl, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

Además, como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas sabemos que $X_0' \oplus X_0'' \in \mathscr{X}$.

Ahora llamamos $K_0 = \operatorname{Ker} d_0$ y $C = \operatorname{Coker} d_0$ y consideramos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d, "\alpha_0'"'] & K_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & K_0'' \arrow[d, "\alpha_0''"] & \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "d_0'"'] & X_0' \oplus X_0'' \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "d_0"'] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d, "d_0''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & C \arrow[d] & 0 & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Aplicando el Lema de la Serpiente obtenemos que $C = 0$ y que el siguiente diagrama es conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0' \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0'"'] & K_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & K_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "d_0'"'] & X_0' \oplus X_0'' \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "d_0"'] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d, "d_0''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Falta ver que $0 \to K_0 \to X_0' \oplus X_0'' \to M \to 0$ y $0 \to K_0' \to K_0 \to K_0'' \to 0$ son $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas. Para ello, como las sucesiones exactas $0 \to K_0' \to X_0' \to M' \to 0$, $0 \to K_0'' \to X_0'' \to M'' \to 0$ y $0 \to X_0' \to X_0' \oplus X_0'' \to X_0'' \to 0$ son $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas (ésta última por ser escindida), dado un $X \in \mathscr{X}$ aplicamos $\mathrm{Hom}(X, -)$ y tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, K_0') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, K_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, K_0'') \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, X_0') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, X_0' \oplus X_0'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, X_0'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, M') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, M'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Aplicando otra vez el Lema de la Serpiente obtenemos que $\mathrm{Hom}(X, K_0) \to \mathrm{Hom}(X, K_0'')$ y $\mathrm{Hom}(X, X_0' \oplus X_0'') \to \mathrm{Hom}(X, M)$ son epimorfismos como queríamos.

Pero como la sucesión $0 \to K_0' \to K_0 \to K_0'' \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$ exacta y $K_0', K_0'' \in \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ podemos repetir el argumento e ir construyendo la $\mathscr{X}$-resolución exacta de M. ■

Por supuesto el dual del Lema de la Herradura también se verifica y su prueba no requiere ninguna técnica distinta. Por tanto lo enunciamos sin dar su demostración.

Lema 2.2.18. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, cerrada bajo sumas directas finitas. Si M' y M'' tienen $\mathscr{Y}$-corresoluciones exactas y $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta, entonces M tiene una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta.*

Observación. El Lema de la Herradura se verifica también cuando en lugar de resoluciones exactas de M' y M'' se tienen simplemente resoluciones de ambos. Por supuesto la resolución que se obtiene de M en este caso no será tampoco exacta. Una demostración de esta versión del Lema de la Herradura se puede encontrar por ejemplo en [9, Lemma 8.2.1].

Lema 2.2.19. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{Y} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{X}$. Dada la sucesión exacta*

$$0 \to A \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to B \to 0$$

se tiene $\mathrm{Ext}^k(Y, B) \cong \mathrm{Ext}^{k+n}(Y, A)$ para todo $Y \in \mathscr{Y}$.

Demostración. Si $K_i = \mathrm{Im}(X_i \to X_{i-1})$ tenemos la sucesión exacta corta $0 \to A \to X_{n-1} \to K_{n-1} \to 0$, y dado $Y \in \mathscr{Y}$ calculamos la sucesión exacta larga asociada a ella por el funtor $\mathrm{Hom}(Y,-)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}(Y,A) \to \mathrm{Hom}(Y,X_{n-1}) \to \mathrm{Hom}(Y,K_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^1(Y,A) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(Y,X_{n-1})}_{0} \to \mathrm{Ext}^1(Y,K_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^2(Y,A) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^2(Y,X_{n-1})}_{0} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\mathrm{Ext}^k(Y,X_{n-1})}_{0} \to \mathrm{Ext}^k(Y,K_{n-1}) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,A) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{k+1}(Y,X_{n-1})}_{0} \to \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,K_{n-1}) \to \cdots$$

luego $\mathrm{Ext}^k(Y,K_{n-1}) \cong \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,A)\ \forall k \geq 1$.

Ahora, para cada i, $1 \leq i \leq n-2$, tomando la sucesión $0 \to K_{i+1} \to X_i \to K_i \to 0$ hacemos lo mismo y tenemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}(Y,K_{i+1}) \to \mathrm{Hom}(Y,X_i) \to \mathrm{Hom}(Y,K_i) \to \mathrm{Ext}^1(Y,K_{i+1}) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(Y,X_i)}_{0} \to \mathrm{Ext}^1(Y,K_i) \to \mathrm{Ext}^2(Y,K_{i+1}) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^2(Y,X_i)}_{0} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\mathrm{Ext}^k(Y,X_i)}_{0} \to \mathrm{Ext}^k(Y,K_i) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,K_{i+1}) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{k+1}(Y,X_i)}_{0} \to \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,K_i) \to \cdots$$

Entonces

$$\mathrm{Ext}^k(Y,K_i) \cong \mathrm{Ext}^{k+1}(Y,K_{i+1}) \cong \mathrm{Ext}^{k+n-1-i}(Y,K_{n-1}) \cong \mathrm{Ext}^{k+n-i}(Y,A).$$

Por último, calculando la sucesión exacta larga asociada a $0 \to K_1 \to X_0 \to B \to 0$ obtenemos

$$0 \to \mathrm{Hom}(Y,K_1) \to \mathrm{Hom}(Y,X_0) \to \mathrm{Hom}(Y,B) \to \mathrm{Ext}^1(Y,K_1) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^1(Y,X_0)}_{0} \to \mathrm{Ext}^1(Y,B) \to \mathrm{Ext}^2(Y,K_1) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^2(Y,X_0)}_{0} \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\operatorname{Ext}^k(Y, X_0)}_{0} \to \operatorname{Ext}^k(Y, B) \to \operatorname{Ext}^{k+1}(Y, K_1) \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{k+1}(Y, X_0)}_{0} \to \cdots$$

Por tanto

$$\operatorname{Ext}^k(Y, B) \cong \operatorname{Ext}^{k+1}(Y, K_1) \cong \operatorname{Ext}^{k+n}(Y, A).$$

■

Dualmente obtenemos.

Lema 2.2.20. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}^{\perp}$. Dada la sucesión exacta*

$$0 \to A \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to B \to 0$$

se tiene $\operatorname{Ext}^{k+n}(B, Y) \cong \operatorname{Ext}^k(A, Y)$ *para todo $Y \in \mathscr{Y}$.*

Teorema 2.2.21. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{X}$ es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Dadas las siguientes sucesiones exactas*

$$0 \to A_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$
$$0 \to B_n \to X'_{n-1} \to \cdots \to X'_1 \to X'_0 \to M \to 0$$

con $X_i, X'_i \in \mathscr{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ se tiene,

$$A_n \in \mathscr{X} \Leftrightarrow B_n \in \mathscr{X}.$$

Demostración. En primer lugar ponemos nombres a los morfismos

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{g_n} X'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_1 \xrightarrow{g_1} X'_0 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0$$

y llamamos $A_i = \operatorname{Ker} f_{i-1}$, $B_i = \operatorname{Ker} g_{i-1}$.

Si $A_n \in \mathscr{X}$, por el Lema 2.2.19 tenemos que

$$\operatorname{Ext}^k(X, A_i) \cong \operatorname{Ext}^{k+n-i}(X, A_n) = 0 \ \forall X \in \mathscr{X}, \ \forall k > 0.$$

Entonces la sucesión exacta

$$0 \to A_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta. Por tanto existe $h_0 : X'_0 \to X_0$ tal que $g_0 = f_0 h_0$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas;

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X'_1 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dr, "v'_1"'] & & X'_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[dd, "h_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
B_2 \arrow[ur, "u'_2"'] & & B_1 \arrow[ur, "u'_1"'] \arrow[dd, dashed, "\lambda_1"'] & & & \\
\cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "v_1"'] & & X_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
A_2 \arrow[ur, "u_2"'] & & A_1 \arrow[ur, "u_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Como $0 = g_0 u'_1 = f_0 h_0 u'_1$ y A_1 es el núcleo de f_0, existe un único $\lambda_1 : B_1 \to A_1$ tal que $u_1 \lambda_1 = h_0 u'_1$. Por tanto, como $\operatorname{Ext}^1(X'_1, A_2) = 0$, existe $h_1 : X'_1 \to X_1$ tal que $v_1 h_1 = \lambda_1 v'_1$ y entonces $f_1 h_1 = u_1 v_1 h_1 = u_1 \lambda_1 v'_1 = h_0 u'_1 v'_1 = h_0 g_1$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X'_2 \arrow[rr, "g_2"] \arrow[dr, "v'_2"'] & & X'_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[dd, "h_1"] & X'_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[dd, "h_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & B_2 \arrow[ur, "u'_2"'] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "v_2"'] & & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & A_2 \arrow[ur, "u_2"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Repetimos este argumento hasta llegar al siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r] \arrow[d] & X'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el Lema 2.2.13 obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to B_n \to A_n \oplus X'_{n-1} \to X_{n-1} \oplus X'_{n-2} \to \cdots \to X_1 \oplus X'_0 \to X_0 \to 0$$

en la que todos los objetos salvo B_n están en $\mathscr{X}$. Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, $\ker(X_1 \oplus X'_0 \to X_0) \in \mathscr{X}$ y así también se tiene que $\ker(X_2 \oplus X'_1 \to X_1 \oplus X'_0) \in \mathscr{X}$ pues es precisamente el núcleo del epimorfismo

$$X_2 \oplus X'_1 \to \ker(X_1 \oplus X'_0 \to X_0).$$

Repitiendo este argumento vemos que todos los núcleos $\ker(X_i \oplus X'_{i-1} \to X_{i-1} \oplus X'_{i-2})) \in \mathscr{X}$ para todo $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Por tanto también $B_n = \ker(A_n \oplus X'_{n-1} \to X_{n-1} \oplus X'_{n-2}) \in \mathscr{X}$. ■

Dualmente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.22. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{X}$ es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Dadas las siguientes sucesiones exactas*

$$0 \to M \to X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to A_n \to 0$$
$$0 \to M \to X'_0 \to X'_1 \to \cdots \to X'_{n-1} \to B_n \to 0$$

con $X_i, X'_i \in \mathscr{X}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, se tiene

$$A_n \in \mathscr{X} \Leftrightarrow B_n \in \mathscr{X}.$$

Capítulo 3

Categorías $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein

En este capítulo es donde vamos a desarrollar las ideas nuevas y propias que dan lugar a este Trabajo Fin de Máster. Muchas de las demostraciones de los preliminares no han sido obtenidas de ninguna referencia bibliográfica, sino que han sido elaboradas por el autor de este Trabajo Din de Máster, pero todas corresponden a hechos conocidos en el ámbito del Álgebra Homológica y por eso han sido incluidas en la sección de preliminares. Sin embargo,l trabajo que se desarrollará a partir de este punto corresponde a ideas que nos han surgido a nosotros y que sirven para extender algunas construcciones y teorías que se han venido estudiando en la literatura durante los últimos años por numerosos investigadores.

3.1. Subcategorías $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein

Dedicaremos esta sección a dar la definición y las primeras propiedades de los objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein. Caracterizaremos la "estructura"de los objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein y veremos cuándo la subcategoría formada por todos los objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein es cerrada para extensiones, núcleos de epimorfismos, conúcleos de monomorfismos y sumandos directos. También estudiaremos cuando las subcategorías $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ están dentro de $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Como se indicó en la introducción, este hecho es de gran importancia porque significa que la $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión siempre será menor que la $\mathscr{X}$-dimensión y que la $\mathscr{Y}$-dimensión y por tanto las $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensiones medirán mejor que las $\mathscr{X}$-dimensiones y que las $\mathscr{Y}$-dimensiones.

Definición 3.1.1. *Dada una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y dos subcategorías $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, diremos que un objeto M de $\mathscr{A}$ es $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein si existe una sucesión exacta,* $\operatorname{Hom}(\mathscr{X},-)$*-exacta y* $\operatorname{Hom}(-,\mathscr{Y})$*-exacta en $\mathscr{A}$, de la siguiente forma*

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

con $X_i \in \mathscr{X}$ e $Y^i \in \mathscr{Y}$ para $i \geq 0$, tal que $M = \operatorname{Im}(X_0 \to Y^0)$.

A la subcategoría plena que contiene los objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein la notaremos $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Si suponemos que las categorías $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ contienen al objeto cero entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ contiene al objeto cero. Además, la subcategoría $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo isomorfismos.

De la definición, abusando del lenguaje, se tiene:

1. $\mathscr{X} \cap \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$

2. $(\widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X}) \cap \mathscr{Y}) \cup (\mathscr{X} \cap \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$

Esta subcategoría generaliza a muchas ya conocidas:

1. $\mathscr{G}(\mathcal{P}roj(\mathscr{A}), \mathcal{P}roj(\mathscr{A})) = G\mathcal{P}roj(\mathscr{A})$ es la subcategoría de los objetos Gorenstein proyectivos y $\mathscr{G}(\mathcal{I}nj(\mathscr{A}), \mathcal{I}nj(\mathscr{A})) = G\mathcal{I}nj(\mathscr{A})$ es la subcategoría de los objetos Gorenstein inyectivos, estudiadas por ejemplo

en [8]. Más generalmente, dada una subcategoría $\mathscr{X}$, la subcategoría $\mathscr{G}(\mathscr{X})$ se define como la de todos los objetos que son el núcleo de alguna diferencial de una $\mathscr{X}$-resolución completa (véase por ejemplo [19]), coincide con $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$.

2. En la categoría R-Mod, tenemos que la categoría de los módulos G_C-proyectivos, estudiada por ejemplo en [2], es $\mathscr{G}(\mathcal{P}roj(R), \mathrm{Add}_R(C))$.

Proposición 3.1.2. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Si M es $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein entonces, para $i \geq 0$, se tiene*

$$\mathrm{Im}(Y^i \to Y^{i+1}) \in \mathscr{X}^{\perp} \qquad \mathrm{Im}(X_{i+1} \to X_i) \in {}^{\perp}\mathscr{Y} \qquad M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$$

Si además $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales se tiene

$$\mathrm{Im}(Y^i \to Y^{i+1}), \mathrm{Im}(X_{i+1} \to X_i) \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$$

Demostración. Como M es $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein entonces existe una sucesión exacta, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

con $X_i \in \mathscr{X}$ e $Y^i \in \mathscr{Y}$ para $i \geq 0$, tal que $M = \mathrm{Im}(X_0 \to Y^0)$. Llamando $M_i = \mathrm{Im}(X_i \to X_{i-1})$ y $M^i = \mathrm{Im}(Y_{i-1} \to Y^i)$ y $M_0 = M^0 = M$, tenemos que las siguientes sucesiones exactas cortas son $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exactas

$$0 \to M_{i+1} \to X_i \to M_i \to 0 \qquad\qquad 0 \to M^i \to Y^i \to M^{i+1} \to 0$$

Dado $X \in \mathscr{X}$, veamos por ejemplo que $\mathrm{Ext}^n(X, M^i) = 0$ para $i \geq 0$ (de forma análoga obtendríamos $\mathrm{Ext}^n(M_i, Y) = 0$ $\forall Y \in \mathscr{Y}$), consideramos la sucesión exacta larga que nos proporciona el funtor $\mathrm{Hom}(X,-)$ aplicado a la sucesión $0 \to M^i \to Y^i \to M^{i+1} \to 0$

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, M^i) \to \mathrm{Hom}(X, Y^i) \to \mathrm{Hom}(X, M^{i+1}) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^1(X, M^i) \to \mathrm{Ext}^1(X, Y^i) \to \cdots$$

Como $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$, se tiene que $\mathrm{Ext}^k(X, Y^i) = 0$ y al ser $0 \to M^i \to Y^i \to M^{i+1} \to 0$ $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta, obtenemos $\mathrm{Ext}^1(X, M^i) = 0$ para todo $i \geq 0$.

Por otro lado, considerando términos superiores de la sucesión anterior, para $j > 0$;

$$\cdots \to \underbrace{\mathrm{Ext}^j(X, Y^i)}_{0} \to \mathrm{Ext}^j(X, M^{i+1}) \to \mathrm{Ext}^{j+1}(X, M^i) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{j+1}(X, Y^i)}_{0} \to \mathrm{Ext}^{j+1}(X, M^{i+1}) \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^{j+1}(X, M^i) \cong \mathrm{Ext}^j(X, M^{i+1})$, luego $\mathrm{Ext}^j(X, M^i) = 0$ para todo $i \geq 0$ y $j \geq 1$.

Para la segunda parte, supongamos que $\mathscr{Y}$ es auto-ortogonal, entonces dado $Y \in \mathscr{Y}$, volviendo a usar el razonamiento anterior aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, Y)$ a la sucesión $0 \to M^i \to Y^i \to M^{i+1} \to 0$, tendríamos que $\mathrm{Ext}^j(M^i, Y) = 0$. ■

Proposición 3.1.3. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. M es $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein si, y solamente si M admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta, M admite una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta y $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$.*

Demostración. Si $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ entonces por la proposición anterior $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$ y es claro que admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta y una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta.

Supongamos ahora que $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$, que admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta y una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta. Sea una $\mathscr{X}$-resolución exacta de M

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0 \tag{3.1}$$

Veamos que esta $\mathscr{X}$-resolución exacta es $\operatorname{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta (de forma dual podemos ver que una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta de M es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta). Para ello, dado $Y \in \mathscr{Y}$, usamos el lema 2.2.20 y tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1(\operatorname{Ker}(X_i \to X_{i-1}), Y) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}(M, Y) = 0,$$

entonces la $\mathscr{X}$-resolución de M dada en (3.1) es $\operatorname{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta. Y por tanto M es $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein. ■

Proposición 3.1.4. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son cerradas bajo sumas directas finitas entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Sea la sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donde M' y M'' son $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein.

En primer lugar veamos que $M \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$ ($M \in \mathscr{X}^{\perp}$ es análogo), para ello, dado $Y \in \mathscr{Y}$, consideramos la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ dada por el funtor $\operatorname{Hom}(-, Y)$;

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', Y) \to \operatorname{Hom}(M, Y) \to \operatorname{Hom}(M', Y) \to$$

$$\to \underbrace{\operatorname{Ext}^1(M'', Y)}_{0} \to \operatorname{Ext}^1(M, Y) \to \underbrace{\operatorname{Ext}^1(M', Y)}_{0} \to \cdots$$

$$\cdots \underbrace{\operatorname{Ext}^i(M'', Y)}_{0} \to \operatorname{Ext}^i(M, Y) \to \underbrace{\operatorname{Ext}^i(M', Y)}_{0} \to \cdots$$

entonces $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(M, Y) = 0$, es decir, $M' \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Así, $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$.

Veamos que M tiene una $\mathscr{X}$-resolución exacta y una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta. Como $M' \in \mathscr{X}^{\perp}$ entonces la sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y como M', M'' tienen $\mathscr{X}$-resoluciones exactas, por el lema de la herradura (lema 2.2.17), tenemos que M tiene una $\mathscr{X}$-resolución exacta. De forma dual, como $M'' \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$ entonces la sucesión anterior también es $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta y como M', M'' tienen $\mathscr{Y}$-corresoluciones exactas por el lema dual de la herradura (lema 2.2.18), M tiene una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta. De esta forma, por la proposición 3.1.3, $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. ■

Proposición 3.1.5. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es cerrada bajo sumandos directos.*

Demostración. Sea $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ tal que $G = A \oplus B$, entonces $0 = \mathrm{Ext}^k(G, Y) \cong \mathrm{Ext}^k(A, Y) \oplus \mathrm{Ext}^k(B, Y)$ para todo $Y \in \mathscr{Y}$ y para todo $k > 0$, luego $A, B \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$. De la misma forma $A, B \in \mathscr{X}^{\perp}$.

Veamos que B tiene una $\mathscr{X}$-resolución exacta (análogamente se comprueba que tiene una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta). Como $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ entonces existe la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to K_0 \to X_0 \to G \to 0$ con $X_0 \in \mathscr{X}$ y $K_0 \in \mathscr{X}^{\perp} \cap \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$, junto con la sucesión exacta escindida (y por tanto $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta) $0 \to A \to G \to B \to 0$, consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

considerando ahora la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta $0 \to K_0 \to P_0 \to A \to 0$ y la sucesión exacta escindida $0 \to B \to G \to A \to 0$, tomamos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

si observamos la sucesión exacta $0 \to K_0 \to D_0 \to G \to 0$, como $K_0, G \in \mathscr{X}^{\perp}$ tenemos que $D_0 \in \mathscr{X}^{\perp}$ y podemos aplicar el lema de la herradura y por tanto, $D_0 \in \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$. Entonces existe la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta

$0 \to K_1 \to X_1 \to D_0 \to 0$ con $X_1 \in \mathscr{X}$ y $K_1 \in \mathscr{X}^{\perp} \cap \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ que junto con la sucesión $0 \to B \to D_0 \to P_0 \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & D_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ahora componiendo $0 \to P_1 \to X_1 \to P_0 \to 0$ y $0 \to P_0 \to X_0 \to B \to 0$ tenemos la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta

$$0 \to P_1 \to X_1 \to X_0 \to B \to 0.$$

Continuaríamos considerando el diagrama pullback dado por las sucesiones $0 \to K_1 \to P_1 \to B \to 0$ y $0 \to A \to G \to B \to 0$ y siguiendo el mismo proceso hasta obtener una $\mathscr{X}$-resolución exacta de B.

De forma dual tendríamos que B admite una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta, y por tanto $B \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. ■

Proposición 3.1.6. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son cerradas bajo sumas directas finitas y $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos.*

Demostración. Sea la sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ con $M, M'' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Dado $Y \in \mathscr{Y}$ y considerando la sucesión exacta larga asociada al funtor $\mathrm{Hom}(-, Y)$, tenemos que $M' \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$, si, dado $X \in \mathscr{X}$, consideramos la sucesión exacta larga asociada al funtor $\mathrm{Hom}(X, -)$ tenemos que $\mathrm{Ext}^{>1}(X, M') = 0$.

Veamos ahora que M' tiene una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta, para ello sea

$$0 \to M \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta de M con $C^0 = \mathrm{Im}(Y^0 \to Y^1)$, entonces, como $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ y $0 \to M \to Y^0 \to C^0 \to 0$ son $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exactas, consideramos el siguiente diagrama pushout que tiene filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exactas que nos da el lema 2.2.9

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & Y^0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C^0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C^0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

como la sucesión $0 \to M'' \to P \to C^0 \to 0$ es $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta y $M'', C^0 \in \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$ por el dual del lema de la herradura (lema de 2.2.18) tenemos que $P \in \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$

$$0 \to P \to Y'^1 \to Y'^2 \to \cdots$$

y, como $0 \to M' \to Y^0 \to P \to 0$ es $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exacta, se obtiene

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & Y^0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & Y'^1 \arrow[r] & \cdots \\
& & & P \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta de M'.

Por otro lado, como $M'' \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, podemos tomar $0 \to K_0'' \to X_0'' \to M'' \to 0$ con $X_0'' \in \mathscr{X}$ y $K_0'' \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y} \cap \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$, por la proposición 3.1.2. Consideramos entonces el diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & K_0'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

De la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta $0 \to K_0'' \to P \to M \to 0$, como $K_0'', M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y} \cap \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ (tomando las sucesiones exactas largas que nos dan los funtores $\mathrm{Hom}(X,-)$ y $\mathrm{Hom}(-,Y)$ para cualesquiera $X \in \mathscr{X}$ e $Y \in \mathscr{Y}$), tenemos que $P \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$ y por el lema de la herradura (lema de 2.2.17) tenemos que $P \in \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$. Entonces existe la sucesión exacta $0 \to K_0' \to X_0' \to P \to 0$ con $K_0' \in \mathscr{X}^{\perp} \cap \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ y consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0' \arrow[r] \arrow[d] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & X_0'' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, por la segunda fila, $P' \in \mathscr{X}$. Y por la primera columna tenemos que $M' \in \mathscr{X}^{\perp}$, además, juntando una $\mathscr{X}$-resolución exacta de K_0' con esta sucesión exacta corta, se tiene que $M' \in \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$.

Así, $M' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ por la proposición 3.1.3. ∎

El resultado dual.

Proposición 3.1.7. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son cerradas bajo sumas directas finitas y $\mathscr{X}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos, entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos.*

Proposición 3.1.8. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Entonces $\mathscr{X} \subseteq \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$ si, y solamente si $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Dado $X \in \mathscr{X}$ es claro que $X \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$ y que $X \in \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$ (basta tomar $0 \to X \to X \to 0$) y, por hipótesis $X \in \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$, luego $X \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

$\Leftarrow$) Basta usar que $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \subseteq \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$. ■

El resultado dual.

Proposición 3.1.9. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Entonces $\mathscr{Y} \subseteq \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$ si, y solamente si $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

Definición 3.1.10. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Diremos que el par $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible a izquierda si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y cerradas bajo sumas directas finitas, $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$ y $\mathscr{X} \subseteq \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$.*

Dualmente, diremos que el par $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible a derecha si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales y cerradas bajo sumas directas finitas, $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$ e $\mathscr{Y} \subseteq \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$.

Y diremos que el par $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible si lo es a derecha e izquierda.

Proposición 3.1.11. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible a izquierda. Entonces todos los núcleos de las $\mathscr{X}$-resoluciones exactas de M son objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein.*

Demostración. Sea $\cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$ una $\mathscr{X}$-resolución exacta de M. Llamando $K_0 = \operatorname{Ker}(X_0 \to M)$, tenemos la sucesión exacta $0 \to K_0 \to X_0 \to M \to 0$. Dados $X \in \mathscr{X}$ e $Y \in \mathscr{Y}$ y considerando las sucesiones exactas largas asociadas a la sucesión anterior dadas por los funtores $\mathrm{Hom}(X,-)$ y $\mathrm{Hom}(-,Y)$ se comprueba que $K_0 \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$.

Veamos para acabar que K_0 tiene una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta. Como $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ podemos tomar $0 \to X_0 \to Y_1 \to C_1 \to 0$ con $Y_1 \in \mathscr{Y}$ y $C_1 \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y} \cap \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$ y consideramos el siguiente diagrama pushout con filas exactas y $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exactas que nos da el lema 2.2.8

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

como $0 \to M \to P \to C_1 \to 0$ es una sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exacta, por el dual del lema de la herradura (lema de 2.2.18) tenemos $P \in \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$. Entonces componiendo una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta de P con $0 \to K_0 \to Y_1 \to P \to 0$ tenemos una $\mathscr{Y}$-corresolución exacta de K_0.

Por tanto $K_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. ■

Notemos que en la proposición anterior no necesitamos que $\mathscr{X}$ sea cerrada bajo núcleos de epimorfismos, que en tal caso sería evidente.

El resultado dual.

Proposición 3.1.12. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible a derecha. Entonces todos los conúcleos* *de las $\mathscr{Y}$-corresoluciones exactas de M son objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein.*

No es extraño darse cuenta de que si un objeto es Gorenstein proyectivo y X es la resolución proyectiva completa cuyo núcleo de la diferencial de grado 0 es M, entonces los núcleos de todas las diferenciales de X son objetos Gorenstein proyectivos. No obstante este hecho no parece igual de claro en el caso de los objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein. Sin embargo, a partir de las proposiciones 3.1.11 y 3.1.12 resulta inmediato que esto es así, es decir, si

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

es una sucesión exacta, $\operatorname{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta y $\operatorname{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exacta, entonces todos los núcleos de $X_{n+1} \to X_n$, los de $Y^n \to Y^{n+1}$ y $\ker(X_0 \to Y^0)$ son objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein.

En el siguiente resultado demostramos que, cuando el par $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible, el proceso de iteración de la construcción de los objetos $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein estabiliza en el segundo paso. Es decir, podemos construir los objetos Gorenstein relativos a dos clases $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, pero al construir los objetos Gorenstein relativos respecto a $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ no obtenemos nada nuevo. Esto generaliza lo que Sather-Wagstaff y otros probaron en [19, Corollary 4.10].

Teorema 3.1.13. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Si el par $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible entonces $\mathscr{G}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))=\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

Demostración. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$. Dado $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ basta tomar la sucesión

$$0 \longrightarrow M = M \longrightarrow 0$$

$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \supseteq \mathscr{G}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$. Dado $M \in \mathscr{G}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$ existe una sucesión exacta $\operatorname{Hom}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}),-)$-exacta y $\operatorname{Hom}(-,\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$-exacta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G^0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G^1 \arrow[r] & \cdots \\
& & M_1 \arrow[ur] & & M \arrow[ur] & & M^1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

con $G_i, G^i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, $M_i = \operatorname{Im}(G_i \to G_{i-1})$, $M^i = \operatorname{Im}(G^{i-1} \to G^i)$ y $M = \operatorname{Im}(G_0 \to G^0)$.

Como $\mathscr{X} \subseteq \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$ tenemos que $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, y como la sucesión (3.2) es $\operatorname{Hom}(\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}),-)$-exacta entonces también es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta. Con el razonamiento análogo tenemos que la sucesión (3.2) es también $\operatorname{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exacta. De esta forma tenemos que $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$.

Veamos que $M \in \widehat{\operatorname{res}}(\mathscr{X})$ ($M \in \widehat{\operatorname{cores}}(\mathscr{Y})$ es análogo). Como $G_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ existe la sucesión exacta $0 \to K_0 \to X_0 \to G_0 \to 0$ con $X_0 \in \mathscr{X}$ y $K_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ (por la proposición 3.1.8), junto con la sucesión $0 \to M_1 \to G_0 \to M \to 0$ construimos el diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X},-)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

ya tenemos el primer eslabón $0 \to P_0 \to X_0 \to M \to 0$ de la $\mathscr{X}$-resolución exacta de M. Tomando las sucesión $0 \to K_0 \to P_0 \to M_1 \to 0$ y la sucesión

$0 \to M_2 \to G_1 \to M_1 \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $G_1, K_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, por la proposición 3.1.4, se tiene que $D_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, entonces existe $0 \to K'_0 \to X'_0 \to D_0 \to 0$ exacta con $X'_0 \in \mathscr{X}$ y $K'_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Junto con la sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to M_2 \to D_0 \to P_0 \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K'_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K'_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & D_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to P_1 \to X'_0 \to P_0 \to 0$ es el segundo eslabón de la $\mathscr{X}$-resolución de M, continuando con las sucesiones exactas $0 \to K_0' \to P_1 \to M_2 \to 0$ y $0 \to M_3 \to G_2 \to M_2 \to 0$, y repitiendo el proceso indefinidamente obtendríamos la $\mathscr{X}$-resolución exacta de M. ■

Hasta ahora entendemos los objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein como aquéllos que se obtienen como núcleos de sucesiones

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$$

que son exactas, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exactas, y tales que $X_i \in \mathscr{X}$, $Y^i \in \mathscr{Y}$ $\forall i$. En el siguiente teorema probamos que bajo ciertas condiciones sobre las clases $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, tanto la posición de los X_i y los Y^i como la cantidad de unos y de otros presentes en la sucesión resulta totalmente irrelevante, hasta el punto de que no importa si en la sucesión ni siquiera hay objetos de una de las dos clases. Esto resulta de gran utilidad a la hora de hacer un tratamiento de los objetos $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein.

Teorema 3.1.14. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son auto-ortogonales, cerradas bajo sumas directas finitas y $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$. Entonces son equivalentes*

1. $\mathscr{X} \subseteq \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$ *e* $\mathscr{Y} \subseteq \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$

2. $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *si, y solo si, existe una sucesión exacta,* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$*-exacta y* $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$*-exacta*

$$\cdots \to A_1 \to A_0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots$$

con $A_i, A^j \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ *y* $M = \mathrm{Im}(A_0 \to A^0)$.

Demostración. 1.⇒2. En este caso tendremos que probar que dada una sucesión exacta $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta

$$\cdots \to A_1 \to A_0 \to A^0 \to A^1 \to \cdots$$

con $A_i, A^j \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$ y $M = \mathrm{Im}(A_0 \to A^0)$, entonces $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

En primer lugar, como $\mathscr{X} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{Y}$ y ambas son auto-ortogonales, tenemos que $M \in \mathscr{X}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathscr{Y}$.

Veamos que $M \in \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ (de forma dual se prueba que $M \in \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$). Notando $M_i = \mathrm{Im}(A_i \to A^{i-1})$ para $i > 0$ y $M_0 = M$ tenemos las sucesiones exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$ exactas $0 \to M_i \to A_{i-1} \to M_{i-1} \to 0$.

Como $\mathscr{X} \in \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$ e $\mathscr{Y} \in \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$ tenemos que $\mathscr{X} \cup \mathscr{Y} \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, y como $A_0 \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$, existe $0 \to K_0 \to X_0 \to A_0 \to 0$ con $X_0 \in \mathscr{X}$ y $K_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ (por la proposición 3.1.11). Con la sucesión anterior y $0 \to M_1 \to A_0 \to M \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& K_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Así $0 \to P_0 \to X_0 \to M \to 0$ es una sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta (que será el primer eslabón de la $\mathscr{X}$-resolución exacta de M).

Tomando las sucesiones exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas $0 \to K_0 \to P_0 \to M_1 \to 0$ y $0 \to M_2 \to A_1 \to M_1 \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $A_1, K_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, por la proposición 3.1.4, se tiene que $D_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, entonces existe la sucesión exacta y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to K_0' \to X_1 \to D_0 \to 0$ con $X_1 \in \mathscr{X}$ y $K_0' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, junto con la sucesión $0 \to M_2 \to D_0 \to P_0 \to 0$ tomamos el diagrama pullback con filas y columnas exactas y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_0' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & D_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

ya tenemos el segundo eslabón $0 \to P_1 \to X_0' \to P_0 \to 0$, es decir, la sucesión exacta y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta $0 \to P_1 \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$. Continuando con las sucesiones exactas y $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exactas $0 \to K_0' \to P_1 \to M_2 \to$

0 y $0 \to M_3 \to A_2 \to M_2 \to 0$, y repitiendo el proceso indefinidamente obtendríamos la $\mathscr{X}$-resolución exacta de M. De esta forma $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

2.⇒1. Dado $X \in \mathscr{X}$, la sucesión $0 \longrightarrow X = X \longrightarrow 0$ es exacta, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta, entonces $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y por la proposición 3.1.8 tenemos que $\mathscr{X} \subseteq \widehat{\mathrm{cores}}(\mathscr{Y})$. De igual forma obtendremos $\mathscr{Y} \subseteq \widehat{\mathrm{res}}(\mathscr{X})$. ■

Lema 3.1.15. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible a izquierda. Dada la sucesión exacta*

$$0 \to A_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ entonces existen la sucesión exacta

$$0 \to K_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

con $X_i \in \mathscr{X}$ y el morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & G_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. Dada la sucesión exacta

$$0 \to A_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

llamamos $A_i = \mathrm{Im}(G_i \to G_{i-1})$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ y consideramos la sucesión exacta $0 \to A_1 \to G_0 \to M \to 0$. Como $G_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ existe la sucesión exacta $0 \to G'_0 \to X_0 \to G_0 \to 0$ con $X_0 \in \mathscr{X}$ y $G'_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

Con estas sucesiones exactas consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.10

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& G_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
& & & X_0 \arrow[r] \arrow[dd] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & P_1 \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
\cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & A_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Ahora consideramos las sucesiones exactas $0 \to G_0' \to P_1 \to A_1 \to 0$ y $0 \to A_2 \to G_1 \to A_1 \to 0$ y el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & G_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

como $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo extensiones entonces $D_1 \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, por tanto existe la sucesión exacta $0 \to G_1' \to X_1 \to D_1 \to 0$ con $X_1 \in \mathscr{X}$ y $G_1' \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Con esta sucesión y la sucesión exacta $0 \to A_2 \to D_1 \to P_1 \to 0$ consideramos el siguiente diagrama pullback que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & G_1' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

entonces, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[d, equal] \\
A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[d] \\
A_2 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & A_1
\end{tikzcd}$$

y por tanto, el diagrama siguiente también conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & & X_1 \arrow[r] \arrow[dd] & X_0 \arrow[r] \arrow[dd] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
 & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dd] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & G_1 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & A_2 \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

considerando ahora las sucesiones exactas $0 \to G_1' \to P_2 \to A_2 \to 0$ y $0 \to A_3 \to G_2 \to A_2 \to 0$ continuaríamos hasta hasta el paso n. ■

El resultado dual.

Lema 3.1.16. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-compatible a derecha. Dada la sucesión exacta*

$$0 \to M \to G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_{n-1} \to A_n \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ entonces existen la sucesión exacta

$$0 \to M \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_{n-1} \to K_n \to 0$$

con $Y_i \in \mathscr{Y}$ y el morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & G_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & A_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_{n-1} \arrow[r] & K_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.1.17. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible a izquierda y $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos. Entonces, dadas las sucesiones exactas*

$$0 \to A_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

$$0 \to B_n \to H_{n-1} \to \cdots \to H_1 \to H_0 \to M \to 0$$

con $G_i, H_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0,\dots,n-1\}$, se tiene

$$A_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad B_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y}).$$

Demostración. Supongamos que $A_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ entonces $A_n \in \mathscr{X}^{\perp}$, llamando $A_i = \mathrm{Im}(G_i \to G_{i-1})$ y como $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, se tiene que dado $X \in \mathscr{X}$ $\mathrm{Ext}^1(X, A_i) = \mathrm{Ext}^{1+n-i}(X, A_n) = 0$, luego la sucesión

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta.

Por otro lado, aplicando el lema anterior (3.1.15), existe el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[r] & H_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H_1 \arrow[r] & H_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

con $X_i \in \mathscr{X}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ahora, llamando $K_i = \operatorname{Im}(X_i \to X_{i-1})$, vamos a construir un morfismo de complejos partiendo de las siguientes sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "v_0"'] & & X_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & & & K_1 \arrow[ur, "v_0"'] & & & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] & G_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "l_0"'] & & G_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & & A_1 \arrow[ur, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

como la sucesión inferior es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta, tenemos que la sucesión $0 \to A_1 \to X_0 \to M \to 0$ es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta (en particular $\operatorname{Hom}(X_0, -)$-exacta), luego tenemos que existe $h_0 : X_0 \to G_0$ tal que $d_0 h_0 = f_0$. Como $0 = f_0 v_0 = d_0 h_0 v_0$ y k_0 es el núcleo de d_0 entonces existe un único $\lambda_1 : K_1 \to A_1$ tal que $h_0 v_0 = k_0 \lambda_1$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "v_0"'] & & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[dd, "h_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& & & & & K_1 \arrow[ur, "v_0"'] \arrow[dd, "\lambda_1"'] & & & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] & G_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "l_0"'] & & G_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & & & A_1 \arrow[ur, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Si continuamos razonando que $0 \to A_2 \to G_1 \to A_1 \to 0$ es $\operatorname{Hom}(X_1, -)$-exacta y así sucesivamente obtendremos el morfismo de complejos deseado, es decir,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "h_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "h_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "d_n"] & G_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "d_1"] & G_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora, aplicando el lema 2.2.13 a este morfismo de complejos, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to K_n \to A_n \oplus X_{n-1} \to \cdots \to G_1 \oplus X_0 \to G_0 \to 0.$$

Como $\mathscr{X}$ está en $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos tenemos, que $K_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Por último, si aplicamos el lema 2.2.13 en el morfismo de complejos (3.3), tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to K_n \to B_n \oplus X_{n-1} \to \cdots \to H_1 \oplus X_0 \to H_0 \to 0.$$

En esta sucesión todos los objetos son $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein salvo $B_n \oplus X_{n-1}$, tomando los núcleos posteriores, como $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, son $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein. Así, tenemos la siguiente sucesión exacta para algún $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$

$$0 \to K_n \to B_n \oplus X_{n-1} \to G \to 0$$

al ser $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ cerrada bajo extensiones $B_n \oplus X_{n-1} \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, y por ser cerrada bajo sumandos directos $B_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. ■

El resultado dual.

Teorema 3.1.18. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible a derecha e $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo conúcleos* *de monomorfismos. Entonces, dadas las sucesiones exactas*

$$0 \to M \to G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_{n-1} \to A_n \to 0$$

$$0 \to M \to H_0 \to H_1 \to \cdots \to H_{n-1} \to B_n \to 0$$

con $G_i, H_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se tiene

$$A_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad B_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}).$$

3.2. Dimensión $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein proyectiva

En esta sección trataremos la dimensiones proyectiva inducida por las subcategorías $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Probaremos que $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva de un objeto (que tenga dimensión finita) quedará totalmente determinada por el mínimo grado del funtor Ext a partir del cual todos son cero, es decir, será el menor natural n tal que $\mathrm{Ext}^k = 0 \ \forall k \geq n+1$. También estudiaremos bajo qué condiciones la dimensión $\mathscr{X}$-proyectiva coincide con la dimensión $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-proyectiva.

Definición 3.2.1. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Diremos que la $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva de un objeto $M \in \mathscr{A}$ es menor o igual que n, y notaremos $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\mathrm{pd}(M) \leq n$, si existe una sucesión exacta*

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Si n es el menor entero no negativo por el que existe esta sucesión entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\mathrm{pd}(M) = n$.

Proposición 3.2.2. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible a izquierda. Dado M de $\mathscr{A}$, si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{pd}(M)$ es finita entonces M admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta. Además se tiene que $M \in \mathscr{X}^{\perp}$.*

Demostración. Por definición existe la sucesión exacta

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Aplicando el lema 3.1.15 tenemos que existe la sucesión exacta

$$0 \to K_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$$

con $X_i \in \mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ahora aplicando el teorema 3.1.17, tenemos que K_n es $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein. Además, esta sucesión es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta ya que si llamamos $K_i = \mathrm{Im}(X_i \to X_{i-1})$ tenemos que $\mathrm{Ext}^k(X, K_i) \cong \mathrm{Ext}^{n-i+k}(X, K_n) = 0$ para todo $X \in \mathscr{X}$.

Por último basta unir esta sucesión exacta y $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$-exacta con una $\mathscr{X}$-resolución exacta de K_n y obtendríamos una $\mathscr{X}$-resolución exacta de M.

Para ver que $M \in \mathscr{X}^{\perp}$, basta usar el lema 2.2.19 y tenemos $\mathrm{Ext}^k(X, M) \cong \mathrm{Ext}^{k+n}(X, G_n) = 0$ para todo $k > 0$ y todo $X \in \mathscr{X}$. ■

Definición 3.2.3. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$, diremos que el par $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda (derecha) si $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible y $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos ($\mathscr{Y}$ es cerrada bajo conúcleos de monomorfismos).*

Proposición 3.2.4. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Entonces dado un M de $\mathscr{A}$ se tiene, $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \to M \to P \to G \to 0$ con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y P admite una $\mathscr{Y}$-resolución exacta de longitud n.*

Demostración. $\Rightarrow$). Lo haremos por inducción sobre n. Si $n = 0$ es claro pues existe $0 \to M \to Y_0 \to M' \to 0$ con $M' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ por la proposición 3.1.12.

Si $n \geq 1$ como $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$ existe la sucesión exacta

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

la descomponemos en las sucesiones exactas

$$0 \to K \to G_0 \to M \to 0$$

$$0 \to G_n \to \cdots \to G_1 \to K \to 0$$

así $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(K) \leq n-1$, por hipótesis de inducción, existe

$$0 \to K \to P' \to G' \to 0$$

con $G' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y P' admite una $\mathscr{Y}$-resolución exacta de longitud $n-1$.

$$0 \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_0 \to P' \to 0$$

Consideramos el siguiente diagrama pushout con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.8

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

así $D \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, por ser $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ cerrada bajo extensiones (segunda columna). Entonces existe la sucesión exacta $0 \to D \to Y \to G'' \to 0$ con $Y \in \mathscr{Y}$ y $G'' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Consideramos el siguiente diagrama pushout con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.9

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

entonces, tenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \\
 & & & & P' \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

además, dado $Y' \in \mathscr{Y}$ como $\mathscr{Y}$ es auto-ortogonal se tiene

$$\mathrm{Ext}^1(Y', P') = \mathrm{Ext}^{n+1}(Y', Y_{n-1}) = 0$$

por lo que la sucesión exacta anterior es una $\mathscr{Y}$-resolución exacta de longitud n.

$\Leftarrow$). Tenemos la sucesión exacta $0 \to M \to P \to G \to 0$ y la $\mathscr{Y}$-resolución exacta de longitud n de P

$$0 \to Y_n \to \cdots \to Y_0 \to P \to 0$$

Tomamos $K = \mathrm{Ker}(Y_0 \to P)$, y consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

como $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos, se tiene $P' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, y por tanto tenemos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & & K \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

luego $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\,\mathrm{pd}(M) \leq n$. ■

Notemos que en el recíproco de la proposición 3.2.4 sólo necesitamos que la $\mathscr{Y}$-resolución exacta de P sea exacta (no necesitamos que sea $\operatorname{Hom}(\mathscr{Y}, -)$-exacta). De esta forma, se puede la proposición anterior se puede formular:

Proposición 3.2.5. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Entonces dado un M en $\mathscr{A}$ se tiene, $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \to M \to P \to G \to 0$ con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y existe una sucesión exacta $0 \to Y_n \to \cdots \to Y_0 \to P \to 0$ con todo $Y_i \in \mathscr{Y}$.*

Teorema 3.2.6. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Para todo objeto M de $\mathscr{A}$ y todo entero $n \geq 1$, si $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$ entonces existe una sucesión exacta $0 \to P \to G \to M \to 0$, con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y P admite una $\mathscr{Y}$-resolución exacta de longitud $n-1$. Además, $P \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})^{\perp}$.*

Demostración. Por definición, existe una sucesión exacta $0 \to N \to G_0 \to M \to 0$ donde $G_0 \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(N) \leq n-1$. Por la proposición 3.2.4 existe una sucesión exacta $0 \to N \to P \to G' \to 0$ donde $G' \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y P admite una $\mathscr{Y}$-resolución exacta

$$0 \to Y_{n-1} \to \cdots \to Y_0 \to P \to 0.$$

Consideramos el siguiente diagrama pushout con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.8

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo extensiones tenemos que $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Por último, tenemos que $\operatorname{Ext}^k(G,P) \cong \operatorname{Ext}^{k+n-1}(G,Y_{n-1}) = 0$, luego $P \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})^{\perp}$. ■

Corolario 3.2.7. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Todo objeto de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita tiene una $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-precubierta especial.*

Como consecuencia de este corolario, veamos que si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M)$ es finita, esta dimensión se puede calcular con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-resoluciones de M.

Corolario 3.2.8. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Si un objeto M de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$ si, y solo si, M admite una $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-resolución exacta de longitud n.*

Proposición 3.2.9. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Si existe una sucesión exacta y*

$\operatorname{Hom}(-,\mathscr{Y})$-*exacta* $0 \to G' \to G \to M \to 0$ *con* $G, G' \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *entonces* $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Demostración. Calculando la sucesión exacta larga del funtor $\operatorname{Hom}(-,Y)$, para algún $Y \in \mathscr{Y}$, a la sucesión de la hipótesis, como es $\operatorname{Hom}(-,\mathscr{Y})$-exacta, se tiene que $\operatorname{Ext}^k(M,Y) = 0$.

Por definición $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq 1$ entonces aplicando el teorema 3.2.6 existe una sucesión exacta $0 \to Y \to G'' \to M \to 0$ con $Y \in \mathscr{Y}$ y $G'' \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Como $\operatorname{Ext}(M,Y) = 0$, entonces esta sucesión escinde, luego M es sumando directo de G'' y, por tanto, es $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-Gorenstein. ■

Teorema 3.2.10. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Para un objeto M de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M)$ finita son equivalentes:*

1. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq n$
2. $\operatorname{Ext}^i(M,Y) = 0$ *para todo* $i > n$ *y todo* $Y \in \mathscr{Y}$.
3. *Dada la sucesión exacta*

$$\cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *para todo* $i \geq 0$, *se tiene* $\operatorname{Ker}(G_i \to G_{i-1}) \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *para todo* $i \geq n-1$.

Demostración. Por el teorema 3.1.17 es claro que 1. ⇔ 3.. Para 1. ⇒ 2. basta aplicar el lema 2.2.20.

2. ⇒ 1. Como la dimensión de M es finita existe una sucesión exacta del tipo

$$0 \to G_m \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

donde $G_0, \ldots, G_m \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ (con $m > n$, pues en otro caso habríamos terminado) y consideramos el n-ésimo núcleo, que tiene $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita

$$0 \to K_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0.$$

Aplicando el lema 2.2.20, tenemos $\operatorname{Ext}^i(K_n, Y) \cong \operatorname{Ext}^{i+n}(M, Y) = 0$ para todo entero $i > 0$, y todo $Y \in \mathscr{Y}$. Como K_n tiene dimensión proyectiva finita, tenemos que existe la sucesión exacta

$$0 \to G'_s \to \cdots \to G'_0 \to K_n \to 0,$$

donde $G'_0, \ldots, G'_m \in \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Descomponemos esta sucesión en sucesiones exactas cortas $0 \to C'_j \to G'_{j-1} \to C'_{j-1} \to 0$, para $j = 1, \ldots, m$, donde $C'_m = G'_m$ y $C'_0 = K_n$. Ahora, aplicando el lema 2.2.20 tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1(C'_{j-1}, Y) \cong \operatorname{Ext}^j(K_n, Y) = 0$$

para todo $j = 1, \cdots m$, y todo $Y \in \mathscr{Y}$. Por último, aplicando la proposición 3.2.9 sucesivamente tenemos que $C'_{m-1}, \ldots, C'_0$ son $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein. En particular $K_n = C'_0$ es $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein. ■

Corolario 3.2.11. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Si M es un objeto de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita entonces*

$$\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} : \ \operatorname{Ext}^i(M, Y) \neq 0 \ \ \textit{para algún} \ \ Y \in \mathscr{Y}\}.$$

Proposición 3.2.12. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta donde dos de los tres objetos tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita, entonces el tercero también, y además:*

1. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M') \leq \text{máx}\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M), \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'')-1\}$.

2. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \leq \text{máx}\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'), \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'')\}$.

3. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') \leq \text{máx}\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M')+1, \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M)\}$.

Demostración. En primer lugar, veamos que los tres objetos admiten $\mathscr{X}$-resoluciones exactas.

- Si M' y M'' tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita entonces, por la proposición 3.2.2, $M', M'' \in \mathscr{X}^{\perp}$ y admiten $\mathscr{X}$-resoluciones exactas. Como $\operatorname{Ext}^1(X, M') = 0$ para todo $X \in \mathscr{X}$, la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta, entonces aplicando el lema 2.2.17 tenemos que M también admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta.

- Si M' y M tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita entonces, por la proposición 3.2.2, $M', M \in \mathscr{X}^{\perp}$ y admiten $\mathscr{X}$-resoluciones exactas. Entonces existe la sucesión exacta $0 \to K_1 \to X_0 \to M \to 0$ donde $X_0 \in \mathscr{X}$ y $K_1 \in \mathscr{X}^{\perp}$ admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta, consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

como $K_1, M' \in \mathscr{X}^{\perp}$ entonces $P \in \mathscr{X}^{\perp}$ y la sucesión $0 \to K_1 \to P \to M' \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta. Aplicando el lema 2.2.17 tenemos que P admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta y por tanto M'' también.

- Si M y M'' tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita entonces, por la proposición 3.2.2, $M, M'' \in \mathscr{X}^{\perp}$ y admiten $\mathscr{X}$-resoluciones exactas. Entonces existe la sucesión exacta $0 \to K_1'' \to X_0'' \to M'' \to 0$ donde $X_0'' \in \mathscr{X}$ y $K_1'' \in \mathscr{X}^{\perp}$ admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta, consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.11

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K_1'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

como $K_1'', M \in \mathscr{X}^{\perp}$ entonces $P \in \mathscr{X}^{\perp}$ y la sucesión $0 \to K_1'' \to P \to M \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta. Aplicando el lema 2.2.17 tenemos que P admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta. Entonces existe $0 \to K_1' \to X \to P \to 0$ donde $X \in \mathscr{X}$ y $K_1' \in \mathscr{X}^{\perp}$ admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta, consideramos el siguiente diagrama pullback con filas y columnas exactas que nos da el lema 2.2.10

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K_1' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K_1' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & X_0'' \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{X}$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos entonces $X_0' \in \mathscr{X}$ y de la primera sucesión exacta vertical, se tiene que $M' \in \mathscr{X}^{\perp}$ y admite una $\mathscr{X}$-resolución exacta.

Ahora, en cualquier caso, la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, -)$-exacta y los objetos M' y M'' admiten $\mathscr{X}$-resoluciones exactas. Entonces consideramos el diagrama que nos da el la demostración del lema 2.2.17

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_1' \arrow[r] \arrow[d] & X_1' \oplus X_1'' \arrow[r] \arrow[d] & X_1'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0' \arrow[r] \arrow[d] & X_0' \oplus X_0'' \arrow[r] \arrow[d] & X_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Tomamos n como el máximo de las dos $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensiones proyectivas finitas conocidas, y consideramos $K'_n = \operatorname{Ker}(X'_{n-1} \to X'_{n-2})$, $K_n = \operatorname{Ker}(X'_{n-1} \oplus X''_{n-1} \to X'_{n-2} \oplus X''_{n-2})$ y $K''_n = \operatorname{Ker}(X''_{n-1} \to X''_{n-2})$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \to K'_n \to K_n \to K''_n \to 0.$$

- Si M' y M tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita, por el teorema 3.2.10 tenemos que $K'_n, K_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ luego $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(K''_n) \leq 1$ y, por tanto, $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') \leq n+1$.

- Si M' y M'' tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita, por el teorema 3.2.10 tenemos que $K'_n, K''_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, y como $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo extensiones, se tiene $K_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-$\operatorname{pd}(K_n) \leq n$.

- Si M y M'' tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita, por el teorema 3.2.10 tenemos que $K_n, K''_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, y como $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es cerrada bajo núcleos de epimorfismos se tiene $K'_n \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y, por tanto, $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(K'_n) \leq n$.

■

Corolario 3.2.13. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta donde los tres objetos tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión proyectiva finita, entonces:*

1. *Si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \neq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'')$ entonces*

   $$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M') = \max\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M), \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') - 1\}.$$

2. *Si* $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') \neq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M')+1$ *entonces*

$$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) = \text{máx}\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'), \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'')\}.$$

3. *Si* $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) \neq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M')$ *entonces*

$$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') = \text{máx}\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M')+1, \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M)\}.$$

Demostración. Para probar este resultado usaremos la caracterización del corolario 3.2.11.

1. Si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) < \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') = n$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\operatorname{Ext}^n(M'',Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\operatorname{Hom}(-,Y)$;

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^{n-1}(M,Y) \to \operatorname{Ext}^{n-1}(M',Y) \to \operatorname{Ext}^{n}(M'',Y) \to$$

$$\to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n}(M,Y)}_{0} \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n}(M',Y)}_{0} \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n+1}(M'',Y)}_{0} \to \cdots$$

   tenemos que $\operatorname{Ext}^{n-1}(M',Y) \neq 0$ por ser $\operatorname{Ext}^{n}(M'',Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M',Y) = n-1$.

   Si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M'') < \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) = n$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\operatorname{Ext}^n(M,Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\operatorname{Hom}(-,Y)$;

$$\cdots \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n}(M'',Y)}_{0} \to \operatorname{Ext}^{n}(M,Y) \to \operatorname{Ext}^{n}(M',Y) \to$$

$$\to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n+1}(M'',Y)}_{0} \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n+1}(M,Y)}_{0} \to \underbrace{\operatorname{Ext}^{n+1}(M',Y)}_{0} \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^n(M', Y) \cong \mathrm{Ext}^n(M, Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-$\mathrm{pd}(M', Y) = n$.

2. Si $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M'') < \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M') + 1 = n + 1$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\mathrm{Ext}^n(M', Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\mathrm{Hom}(-, Y)$;

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n(M'', Y) \to \mathrm{Ext}^n(M, Y) \to \mathrm{Ext}^n(M', Y) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M'', Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M, Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M', Y)}_{0} \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^n(M, Y) \neq 0$ por ser $\mathrm{Ext}^n(M', Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-$\mathrm{pd}(M, Y) = n$.

Si $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M') + 1 < \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M'') = n$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\mathrm{Ext}^n(M'', Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\mathrm{Hom}(-, Y)$;

$$\cdots \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n-1}(M', Y)}_{0} \to \mathrm{Ext}^n(M'', Y) \to \mathrm{Ext}^n(M, Y) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n}(M', Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M'', Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M, Y)}_{0} \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^n(M, Y) \cong \mathrm{Ext}^n(M'', Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-$\mathrm{pd}(M, Y) = n$.

3. Si $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M) < \mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$- $\mathrm{pd}(M') = n$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\mathrm{Ext}^n(M', Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la

sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\mathrm{Hom}(-,Y)$;

$$\cdots \to \underbrace{\mathrm{Ext}^n(M,Y)}_{0} \to \mathrm{Ext}^n(M',Y) \to \mathrm{Ext}^{n+1}(M'',Y) \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M,Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M',Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+2}(M'',Y)}_{0} \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^{n+1}(M'',Y) \cong \mathrm{Ext}^n(M',Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-$\mathrm{pd}(M'',Y) = n+1$.

Si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\,\mathrm{pd}(M') < \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\,\mathrm{pd}(M) = n$ entonces existe $Y \in \mathscr{Y}$ tal que $\mathrm{Ext}^n(M,Y) \neq 0$, así considerando los términos superiores de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ por el funtor $\mathrm{Hom}(-,Y)$;

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^n(M'',Y) \to \mathrm{Ext}^n(M,Y) \to \underbrace{\mathrm{Ext}^n(M',Y)}_{0} \to$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M'',Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M,Y)}_{0} \to \underbrace{\mathrm{Ext}^{n+1}(M',Y)}_{0} \to \cdots$$

tenemos que $\mathrm{Ext}^n(M'',Y) \neq 0$ por ser $\mathrm{Ext}^n(M,Y) \neq 0$, por tanto $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-$\mathrm{pd}(M'',Y) = n$.

■

Notemos que si $\mathscr{X}$ es una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ que es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo núcleos de epimorfismos, tenemos que $\mathscr{G}(\mathscr{X}) = \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{X})$ cumple todos los resultados vistos hasta ahora. Y además:

Proposición 3.2.14. *Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{X}$ es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada* *bajo núcleos de epimorfismos. Dado M de $\mathscr{A}$, si $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M)$ es finita entonces $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M) = \mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\mathrm{pd}(M)$.*

Demostración. Es claro que $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X})$, luego $\mathscr{X}\text{-pd}(M) \geq \mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\mathrm{pd}(M)$.

Para ver que son iguales procedemos por inducción sobre $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M) = n$.

Si $n = 0$, tenemos que $M \in \mathscr{X} \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X})$.

Supongamos que $n \geq 1$. Como $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M) = n$, existe la sucesión exacta

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$$

con $X_i \in \mathscr{X}$. Si consideramos $K = \mathrm{Ker}(X_0 \to M)$, tenemos la sucesión exacta $0 \to K \to X_0 \to M \to 0$ con $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(K) \leq n-1$, si fuera $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(K) = m < n-1$ podríamos encontrar la sucesión exacta $0 \to X'_m \to \cdots \to X'_0 \to K \to 0$ con $X'_i \in \mathscr{X}$ y tendríamos la sucesión exacta

$$0 \to X'_m \to \cdots \to X'_0 \to X_0 \to M \to 0,$$

es decir, $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M) \leq m+1 < n$ que es una contradicción, luego $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(K) = n-1$. Entonces, por hipótesis de inducción, $\mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\mathrm{pd}(K) = n-1$ y, por el teorema 3.2.10, tenemos que $\mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\mathrm{pd}(M) = n$. ■

Teorema 3.2.15. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a izquierda, $\mathscr{G}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$. Entonces, dado M de $\mathscr{A}$;*

1. *Si $\mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-pd}(M)$ es finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-pd}(M) = \mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-pd}(M)$.*

2. *Si $\mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M)$ es finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{pd}(M) = \mathscr{X}\text{-}\mathrm{pd}(M)$.*

Demostración. Por la proposición 3.2.14, 2. es consecuencia directa de 1. De esta forma, probaremos 1. usando inducción sobre $n = \mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\operatorname{pd}(M)$.

Si $n = 0$ no hay nada que probar por hipótesis.

Si $n = 1$, por el teorema 3.2.6, existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to E \to M \to 0$$

con $X \in \mathscr{X}$ y $E \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$. Si $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) = 0$ entonces $0 \to X \to E \to M \to 0$ es $\operatorname{Hom}(-, \mathscr{Y})$-exacta, y como $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$, en particular es $\operatorname{Hom}(-, X)$-exacta, lo que quiere decir que es escindida, y por tanto $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X})$, lo que es una contradicción.

Sea $n = \mathscr{X}\text{-}\operatorname{pd}(M) > 1$. Entonces existe la sucesión exacta

$$0 \to K \to E \to M \to 0$$

con $\mathscr{G}(\mathscr{X})\text{-}\operatorname{pd}(K) = n - 1$. Aplicando hipótesis de inducción $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(K) = n - 1$ y, por el teorema 3.2.10, $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\text{-}\operatorname{pd}(M) = n$. ■

3.3. Dimensión $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-Gorenstein inyectiva

Todos los resultados de la sección anterior tiene su versión dual referente a la dimensión $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-inyectiva cuya demostración no va más allá de repetir los argumentos dualizando las ideas correspondientes. Por eso hemos incluido esta sección en la que damos las versiones duales a las que nos referimos, pero no redactamos ninguna demostración.

Definición 3.3.1. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Diremos que la $\mathscr{G}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-dimensión inyectiva de un objeto $M \in \mathscr{A}$ es menor* *o igual que n, y notaremos $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$, si existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_{n-1} \to G_n \to 0$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Si n es el menor entero no negativo por el que existe esta sucesión entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) = n$.

Proposición 3.3.2. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-compatible a derecha. Dado M de $\mathscr{A}$, si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-$\mathrm{id}(M)$ es finita entonces M admite una $\mathscr{Y}$-resolución exacta. Además se tiene que $M \in {}^{\perp}\mathscr{Y}$.*

Proposición 3.3.3. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Entonces dado un M de $\mathscr{A}$ se tiene, $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \to G \to P \to M \to 0$ con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y P admite una $\mathscr{X}$-corresolución exacta de longitud n.*

Proposición 3.3.4. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Entonces dado un M en $\mathscr{A}$ se tiene, $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$ si, y solamente si, existe la sucesión exacta $0 \to G \to P \to M \to 0$ con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y existe una sucesión exacta $0 \to P \to X_0 \to \cdots \to X_n \to 0$ con todo $X_i \in \mathscr{X}$.*

Teorema 3.3.5. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Para todo objeto M de $\mathscr{A}$ y todo entero $n \geq 1$, si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$ entonces existe una sucesión exacta $0 \to M \to G \to P \to 0$, con $G \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ y P admite una $\mathscr{X}$-corresolución exacta de longitud $n-1$. Además, $P \in {}^{\perp}\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

Corolario 3.3.6. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Todo objeto de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión inyectiva finita tiene una $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-preenvolvente especial.*

Corolario 3.3.7. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Si un objeto M de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión inyectiva finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$ si, y solo si, M admite una $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-corresolución exacta de longitud n.*

Proposición 3.3.8. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Si existe una sucesión exacta y* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},-)$*-exacta $0 \to M \to G \to G' \to 0$ con $G, G' \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ entonces $M \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

Teorema 3.3.9. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Para un objeto M de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)$ finita son equivalentes:*

1. $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M) \leq n$
2. $\mathrm{Ext}^i(X,M) = 0$ *para todo $i > n$ y todo $X \in \mathscr{X}$.*
3. *Dada la sucesión exacta*

$$0 \to M \to G_0 \to G_1 \to \cdots$$

con $G_i \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i \geq 0$, se tiene $\mathrm{Coker}(G_{i-1} \to G_i) \in \mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ para todo $i \geq n-1$.

Corolario 3.3.10. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Si M es un objeto de $\mathscr{A}$ con $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión inyectiva finita entonces*

$$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)=\sup\{i\in\mathbb{N}:\ \ \mathrm{Ext}^i(X,M)\neq 0\ \ \textit{para algún}\ \ X\in\mathscr{X}\}.$$

Proposición 3.3.11. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha. Si $0\to M'\to M\to M''\to 0$ es una sucesión exacta donde dos de los tres objetos tienen $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$-dimensión inyectiva finita, entonces el tercero también, y además:*

1. *$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'')\leq \max\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M),\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M')-1\}$, y se tiene la igualdad si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)\neq\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'')$.*

2. *$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)\leq \max\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'),\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'')\}$, y se tiene la igualdad si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'')+1\neq\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M')$.*

3. *$\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M')\leq \max\{\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M'')+1,\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)\}$, y se tiene la igualdad si $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)\neq\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M')$.*

Proposición 3.3.12. *Sea $\mathscr{Y}$ una subcategoría de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{Y}$ es auto-ortogonal, cerrada bajo sumas directas finitas y cerrada bajo conúcleos de monomorfismos. Dado M de $\mathscr{A}$, si $\mathscr{Y}\text{-}\mathrm{id}(M)$ es finita entonces $\mathscr{Y}\text{-}\mathrm{id}(M)=\mathscr{G}(\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)$.*

Teorema 3.3.13. *Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ subcategorías de una categoría abeliana $\mathscr{A}$ tales que $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es G-perfecto a derecha, $\mathscr{G}(\mathscr{Y})\subseteq\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ e $\mathscr{Y}\subseteq\mathscr{X}$. Entonces, dado M de $\mathscr{A}$;*

1. *Si $\mathscr{G}(\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)$ es finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)=\mathscr{G}(\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)$.*

2. *Si $\mathscr{Y}\text{-}\mathrm{id}(M)$ es finita entonces $\mathscr{G}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\text{-}\mathrm{id}(M)=\mathscr{Y}\text{-}\mathrm{id}(M)$.*

Bibliografía

[1] Luchezar L. Avramov y Alex Martsinkovsky, Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension, Proc. London Math. Soc. **85 (2)** (2002), 393-440.

[2] Driss Bennis, Juan Ramón García Rozas y Luis Oyonarte, Relative Gorenstein dimensions, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 65-91.

[3] Driss Bennis y Najib Mahdou, Global Gorenstein dimensions, Proc. Amer. Math. Soc. **138 (2)** (2010), 461-465.

[4] Henri Cartan y Samuel Eilenberg, Homological algebra, Princeton University Press 1956.

[5] Lars Winther Christensen y Sean Sather-Wagstaff, Transfer of Gorenstein dimensions along ring homomorphisms, J. Pure Appl. Algebra **214 (6)** (2010), 982-989.

[6] Edgar E. Enochs, Injective and flat covers, envelopes and resolvents, Israel J. Math. **39** (1981), 189-209.

[7] Edgar E. Enochs y Overtoun M.G. Jenda, Gorenstein injective and flat dimensions, Math. Japon. **44 (2)** (1996), 261-268.

[8] Edgar E. Enochs y Overtoun M.G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, Math. Z. **220** (1995), 611-633.

[9] Edgar E. Enochs y Overtoun M.G. Jenda, Relative homological algebra, Walter de Gruyter, 2000.

[10] Edgar E. Enochs y Overtoun M.G. Jenda, Ω-Gorenstein projective and flat covers and Ω-Gorenstein injective envelopes, Comm. Alg. **32 (4)** (2004), 1453-1470

[11] Edgar E. Enochs, Overtoun M.G. Jenda y J. Xu, Covers and envelopes over Gorenstein rings, Tsukuba J. Math. **20 (2)** (1996), 487-503.

[12] Edgar E. Enochs y Juan Antonio López-Ramos, Gorenstein injective envelopes and covers over n-perfect rings, Quaest. Math. **30 (1)** (2007), 35-44.

[13] Yuxian Geng y Nanqing Ding, W-Gorenstein modules, J. Algebra **325** (2011), 132-146.

[14] Henrik Holm, Gorenstein homological dimensions, J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), 167-193.

[15] Henrik Holm, Rings with finite Gorenstein injective dimension, Proc. Amer. Math. Soc. **132 (5)** (2003),1279-1283.

[16] H. Holm y P. Jørgensen, Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions, J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), 423-445.

[17] Zenfeng Liu, Zhaoyong Huang y Aimin Xu, *Gorenstein projective dimension relative to a semidualizing bimodule*, Comm. Algebra **41** (2013), 1–18.

[18] Barry Mitchell, Theory of categories, Academic Press Inc. 1965.

[19] Sean Sather-Wagstaff, Tirdad Sharif y Diana White, Stability of Gorenstein categories, J. London Math. Soc. **77 (2)** (2008), 481-502.

[20] Bo Stenström, Rings of quotients, Springer-Verlag, 1975.

[21] D. White, *Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module*, J. Comm. Algebra **2** (2010), 111-137.