TRABAJO DE FIN DE GRADO

ANÁLISIS DEL IMPACTO DE LA CRISIS FINANCIERA EN LA CARTERA ÓPTIMA GLOBAL SEGÚN EL CRITERIO DE EFICIENCIA MEDIA VARIANZA

Autor: D. /Dª. María de las Nieves López García

Tutor/es: D. /Dª. Juan Evangelista Trinidad Segovia

Grado en Finanzas y Contabilidad

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Curso Académico: 2016 / 2017

Almería, junio de 2017

Introducción 2
1. Inicios de la teoría de carteras. 3
1.1. Media-Riesgo. 3
1.1.1. Frontera Eficiente. 4
1.1.2. Curvas de Indiferencia. 5
1.1.3. Cartera Óptima. 7
1.1.4. Diversificación 7
1.1.5. Otra perspectiva del modelo Media-Riesgo. 11
1.2. Teoría de Separación de Tobin. 12
1.3. Modelo Índice de Sharpe. 16
1.3.1. Capital Asset Pricing Model (CAMP). 19
2. Actualidad en la teoría de carteras 22
2.1. Post-Modern Portfolio Theory (PMPT) 22
2.2. Dominio Estocástico. 23
2.2.1. Dominio Estocástico primer grado (DEP). 23
2.2.2. Dominio Estocástico segundo grado (DES). 25
2.2.3. Dominio Estocástico tercer grado (DET). 26
2.3. Fama-French 26
2.4. Black-Litterman 27
3. Impacto de la crisis en la cartera óptima. 28
Conclusión 31
Bibliografía 33

Resumen

En el siguiente trabajo se presenta un estudio sobre el modelo Media-Riesgo de Markowitz y los modelos derivados de este, tanto modelos clásicos como contemporáneos, con el objetivo de estudiar el impacto que ha tenido la crisis financiera sobre la elección de la cartera óptima usando el modelo Media-Riesgo.

En el análisis se usan distintos activos con diferentes categorías de riesgo, incluidos en diferentes índices de mercado, esto es, Índices Inmobiliarios, Índices de Commodities y dos índices representativos de los mercados financieros, Dow Jones y Euro Stoxx 50.

Introducción

El siguiente trabajo tiene como principal objetivo el estudio de las cotizaciones historias de diferentes índices financieros con el fin de estudiar como a afectado la crisis financiera a la elección de la cartera óptima, usando el modelo Media-Riesgo como modelo de estudio.

Este trabajo está divido en tres partes: la primera recoge una explicación del modelo principal de este trabajo, el modelo Media-Riesgo, y otros modelos clásicos creados a partir de este; en segundo lugar se explican otros modelos más actuales, en donde, se trata de explicar las nuevas tendencias actuales, y así reflejar el cambio que se está produciendo en la forma analizar el mercado respecto a los primeros modelos: y en tercer lugar, se realiza el estudio en base al modelo Media-Riesgo de los distintos activos seleccionados, y comprobar así el efecto de la crisis en la elección de la cartera óptima.

1. Inicios de la teoría de carteras.

1.1. Media-Riesgo.

La teoría de carteras que hoy conocemos surgió del artículo "Porfolio Selection" publicado en 1952 por Harry Markowitz, quién realizo otras publicaciones sobre esta materia, las más destacadas son las de 1956 "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints" y la de 1959 "Porfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", en donde fue corrigiendo errores y completando su teoría.

El propósito de Markowitz era crear un modelo matemático que explicará el comportamiento racional del inversor a la hora de buscar una cartera de inversión que maximizará el rendimiento y minimizará el riesgo esperado.

Las hipótesis de partida del modelo son:

1) El inversor siempre preferirá más riqueza que menos, por lo que elegirá la cartera que le aporte mayor rendimiento.
2) El inversor siente una aversión natural al riesgo, por ello preferirá las carteras que lo minimizan.

Matemáticamente se puede expresar de dos maneras:

Maximizar el rendimiento para un nivel de riesgo dado.

$$(Max)E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[R_i] \tag{1.1.}$$

Minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento dado.

$$(Min)\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i,j} \tag{1.2.}$$

$E[R_p]$ Es el rendimiento esperado de la cartera.

$E[R_i]$ Es el rendimiento esperado de cada uno de los valores que componen la cartera.

x_i Es la proporción que tiene cada activo dentro de la cartera, este valor está sujeto a dos restricciones dentro del modelo de Markowitz:

Restricción presupuestal:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1.3.}$$

Condición de no negatividad:

$$x_i \geq 0 \tag{1.4.}$$

σ_p^2 Es la varianza de la cartera, aceptada como medida de dispersión de los rendimientos.

σ_i^2 Es la varianza de los distintos activos que componen la cartera.

$\sigma_{i,j}^2$ Es la covarianza entre los distintos activos de la cartera; esta variable nos muestra como la relación que tienen los distintos activos entre sí afecta al riesgo global de la inversión.

En base a este planteamiento lo que queremos seleccionar es la cartera óptima, pero ¿qué es la cartera óptima?

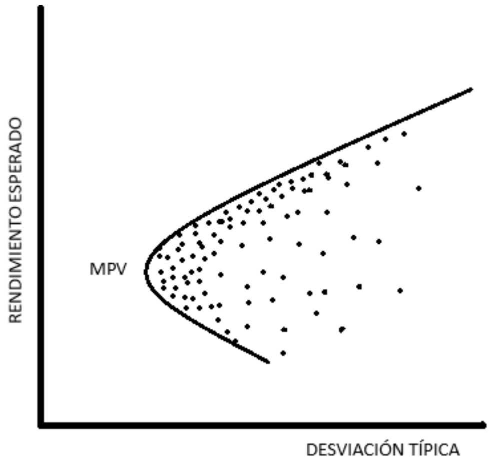
Es aquella cartera que proporciona al inversor el mayor rendimiento posible asumiendo el mínimo riesgo.

Por tanto, la incógnita fundamental para llegar a la cartera óptima es la x_i, pues tendremos que hallar los tantos porcientos que tendríamos que invertir en cada uno de los activos para formar dicha cartera. En este momento, me dispongo a explicar la teoría de Markowitz de forma teórica, por lo que no le prestare mucha atención a esta variable, pero posteriormente hablare sobre la diversificación y mostrare un ejemplo práctico sobre este método donde se podrá ver su importancia dentro del cálculo.

1.1.1. Frontera Eficiente.

Buscando hallar la cartera óptima, Markowitz creo la clasificación de carteras eficientes e ineficientes, lo que actualmente se conoce como la Frontera Eficiente, la cual se crea tras una combinación de la media y la varianza de los distintos activos para crear diferentes carteras.

Gráfica 1.1. Frontera Eficiente.



La MPV es la cartera con menor varianza en la frontera, es decir, la que ofrece el menor riesgo.

Las carteras eficientes son aquellas que se encuentran en la línea superior a partir del MPV porque son la que tienen un rendimiento superior para un mismo riesgo, u obtienen un menor riesgo para un mismo rendimiento. Se suele decir que no existe ninguna cartera que las dominen, es decir, que sean mejores.

Según nos movemos por la parte superior de la línea dibujada (la parte de carteras eficientes) vemos que el riesgo va en aumento y que el rendimiento aumenta más que proporcionalmente para compensarlo, porque como ya hemos dicho, los inversores son adversos al riesgo, y si lo admiten es por la posibilidad de un mayor rendimiento.

Ningún inversor seleccionará carteras de inversión que estén situadas por debajo de MPV, ya que por cada una de las carteras que se encuentran en esa zona existe al menos una cartera que ofrece un mayor rendimiento con un menor riesgo.

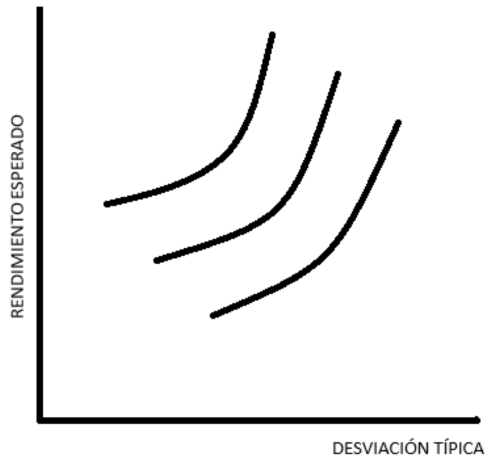
La cartera óptima es siempre una de las carteras eficientes, pero no todas las carteras eficientes son carteras óptimas.

1.1.2. Curvas de Indiferencia.

Para seleccionar nuestra cartera óptima necesitamos usar Curvas de Indiferencia que nos muestren la actitud del inversor frente al riesgo y así poder seleccionar la cartera que mejor se amolde a las necesidades del inversor.

Las Curvas de Indiferencia reflejan la satisfacción o "utilidad" que obtiene un inversor según el rendimiento que podría obtener y teniendo en cuenta el grado de riesgo que tendría que asumir.

Gráfica 1.2. Curvas de Indiferencia.



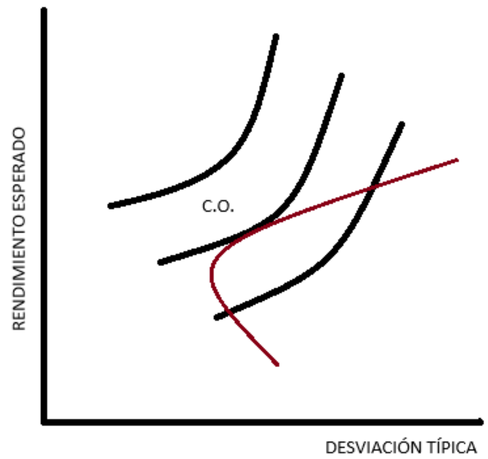
Las principales características de las curvas de indiferencia son:

- Todas las combinaciones de rendimientos y desviaciones típicas en una misma línea ofrecen al inversor el mismo grado de satisfacción.
- Los inversores siempre prefieren un alto rendimiento (media) y un bajo riesgo (desviación típica) por lo que la pendiente de estas curvas refleja la relación de riesgo y rendimiento que requiere el inversor, es decir, nos muestra cuanto ha de incrementar el rendimiento para que esté dispuesto a asumir una unidad adicional de riesgo y mantener el mismo nivel de utilidad.
- Las curvas de indiferencia son convexas respecto al eje x, por lo que un aumento de riesgo tiene que ser compensado con un aumente aún mayor en la rentabilidad.
- Las líneas nunca se cortan porque eso sería una inconsistencia dentro de las preferencias del inversor.
- Las curvas de indiferencia superiores muestran un nivel de satisfacción mayor que las inferiores, así, si el inversor invierte en una cartera que se encuentra en la curva de indiferencia más alta habrá alcanzado la utilidad máxima posible.
- Las curvas de indiferencia son subjetivas, y cambian según el inversor, e incluso, un mismo inversor puede tener varias curvas diferentes dependiendo del momento en que decida invertir.

1.1.3. Cartera Óptima.

Ahora que tenemos la Frontera Eficientes y las Curvas de Indiferencia del inversor, sí podemos hallar la cartera óptima. Lo único que debemos hacer es superponer las dos gráficas:

Gráfica 1.3. Cartera óptima.



El punto de intersección en la curva de indiferencia más alta es la cartera óptima, ya que cumple con la condición de cartera eficiente y se encuentra en una de las curvas de indiferencia. En la gráfica 1.3. la cartera óptima se encuentra dentro de la segunda curva de indiferencia; la curva superior, que es la que ofrece mayor satisfacción al inversor, no debe ser usada ya que no cruza con ninguna de las carteras eficientes, por lo que no nos daría el máximo rendimiento con el menor riesgo posible.

1.1.4. Diversificación

El concepto de diversificación dentro de las inversiones de alguna manera siempre ha existido, Markowitz cubrió con su teoría los efectos que provoca cuando los riesgos de los distintos activos de la cartera están correlacionados.

Recordemos que para el cálculo de la varianza de la cartera se usan las covarianzas entre los distintos activos que la componen (Ecuación 1.2.).

La diversificación es importante en este modelo porque los niveles de riesgo afectan a la Frontera Eficiente. Para comprobarlo de forma sencilla, supongamos que queremos invertir y que tenemos únicamente dos inversiones para escoger.

Pongamos como primer caso que los activos están perfectamente correlacionados, por lo que, si decidimos invertir en ambas inversiones, nuestra cartera no está para nada diversificada.

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = 1 \qquad (1.5.)$$

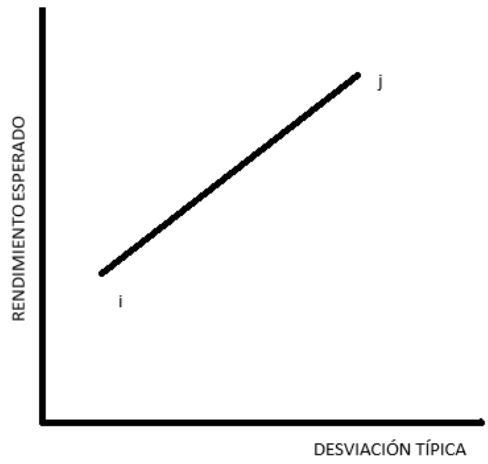
Cuando uno de los activos obtenga buenos rendimiento el otro también lo hará, pero también será así cuando se obtengan perdidas.

En cuanto a la Frontera Eficiente se verá afectada a causa de la desviación típica:

$$\sigma_p = x_i \cdot \sigma_i + (1 - x_i) \cdot \sigma_j \qquad (1.6.)$$

Según esta formulación, vemos que el riesgo total de la cartera depende del riesgo individual de los activos, ponderados según su participación, por lo que la representación gráfica de la Frontera Eficiente en este caso sería:

Gráfica 1.4. Perfecta correlación positiva.



En la gráfica 1.4. podemos ver que el activo i tiene menos riesgo que el activo j, y según vamos aumentando el porcentaje invertido en j el riesgo de la cartera va en aumento.

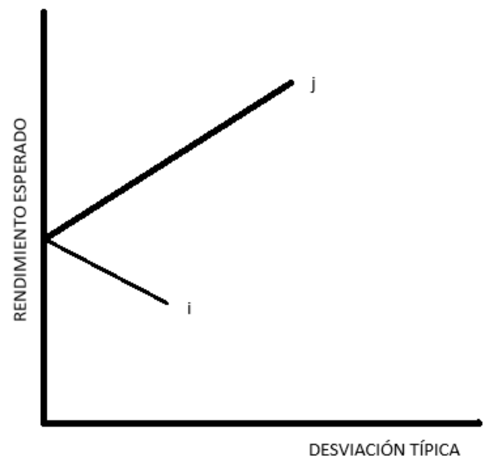
La Frontera Eficiente se ha convertido en una línea recta, donde el inversor tendrá que escoger la inversión que más le satisfaga sin contar con los efectos beneficiosos de la diversificación.

El caso contrario se da cuando los activos tienen una correlación perfectamente negativa.

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = -1 \qquad (1.7.)$$

Ahora cuando uno de los activos entre en pérdidas el otro obtendrá beneficios en la misma proporción.

Gráfica 1.5. Perfecta correlación negativa.



Al representar la Frontera Eficiente en la gráfica 1.5., esta se divide en dos líneas, esto quiere decir, que tenemos la oportunidad de crear una combinación entre los dos activos que anule el riesgo de la cartera, porque las perdidas en uno de los activos son cubiertas enteramente por los beneficios del otro activo. Esta es una situación donde se aprovecha al máximo el efecto de la diversificación.

Estudiando los dos tramos que se forman vemos que, en el primero de ellos, donde tiene más proporción el activo i, están las carteras ineficientes, porque todas las carteras que lo componen pueden ser superadas por otras con mejor rentabilidad y con el mismo riesgo.

Por lo que, las carteras a elegir son solo las que se encuentra en el segundo tramo, las que van a partir del eje de ordenas hasta j, las carteras eficientes.

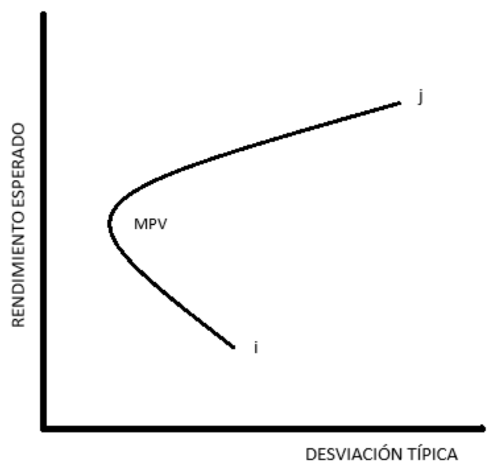
El último caso a estudiar es cuando no existe una perfecta correlación entre los activos que queremos que estén en nuestra cartera. Esta situación es la que se da con más habitualidad, ya que es difícil encontrar activos que estén perfectamente correlacionados, ya sea positiva o negativamente.

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} = -1 > x < 1 \qquad (1.8.)$$

Imaginemos que tenemos una correlación de $\rho = 0{,}5$, entonces decimos que tienen una dependencia positiva, por lo que cuando uno de los activos consiga beneficios o perdidas el otro también los conseguirá, pero en menor medida, en este caso conseguiría un 50% menos.

Si la correlación es $\rho = -0{,}5$, decimos que tienen dependencia negativa, lo que quiere decir que los activos tendrán un comportamiento contrario según esta proporción, es decir cuando un activo obtenga mayores rendimientos, el otro obtendrá la mitad de dicha cantidad en pérdidas.

Gráfica 1.6. Imperfecta correlación.



La Frontera Eficiente ahora sí es como la que se expuso en la explicación del modelo, nos encontramos con la cartera de varianza mínima (MPV), que contiene el riesgo sistemático, es decir, el riesgo que no se puede quitar con la diversificación de los activos, ya que es el que proviene de la exposición común a los factores de riesgo en toda la economía, como los ciclos económicos, los tipos de interés y los tipos de cambio.

Como dijimos anteriormente la Frontera Eficiente es la parte que va desde el MPV hasta j, en donde se encuentran las carteras que ofrecen el mejor rendimiento para un riesgo dado, o viceversa.

Tras estudiar los diferentes casos en donde existen diferentes tipos de correlación entre los activos, queda claro lo importante que es la diversificación a la hora de crear una cartera, pero ¿cómo podemos diversificar? Existen tres maneras clave de diversificar una cartera:

- Diversificación por sectores e industrias.
- Diversificación en distintas clases de activos.
- Diversificación geográfica.

Si conseguimos diversificar adecuadamente podremos reducir o hacer desaparecer el riesgo que proviene de los activos individuales, el llamado riesgo especifico o no sistemático, dejando tan solo el riesgo de mercado o sistemático mencionado anteriormente.

1.1.5. Otra perspectiva del modelo Media-Riesgo.

En 1952 Roy también publico un artículo sobre la selección de carteras, pero lo expuso con otro enfoque, donde buscaba minimizar la probabilidad de pérdida, para que está no fuese superior a la deseada, dándole más prioridad a la seguridad de la inversión:

$$(Min)\Pr(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[R_i] \leq d) \qquad (1.9.)$$

Roy proponía también dentro de su modelo la selección de carteras a partir de la media y la varianza de la cartera, pero en este modelo tiene mayor protagonismo la varianza, pues lo que se busca es determinar cuál es el riesgo máximo, en base a un nivel de confianza y con un horizonte de tiempo determinado, que el inversor estará dispuesto a soportar teniendo en cuanta su nivel de tolerancia al riesgo.

Las diferencias más significativas con Markowitz son que el modelo de Roy sí permite las inversiones negativas y la cartera seleccionada es una específica, que no tiene en cuenta la frontera eficiente que crea Markowitz.

Estas dos teorías enfocadas a la selección de carteras de inversión surgieron en el mismo año, pero fue Markowitz quién ganó el premio Nobel en 1990 por su trabajo. Este hecho no quiere decir que el trabajo de Roy sea menos valido, pero en la época en que se escribieron, Roy no realizo más contribuciones sobre la materia, en cambio, Markowitz sí que hizo diversas publicaciones, algunas ya mencionadas, haciéndole más visible ante el Comité para el Nobel.

La versión de Roy, aunque paso desapercibida en su momento, ha contribuido enormemente al desarrollo de la selección de carteras. Su modelo ha sido usado de base para posteriores estudios y aun en la actualidad se sigue usando, por ejemplo, los autores como Tobin y Sharpe usaron su planteamiento para realizar sus propios trabajos.

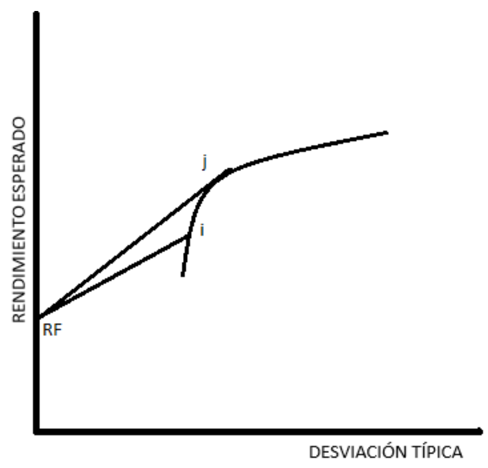
1.2. Teoría de Separación de Tobin.

J. Tobin fue uno de los autores que incorporo nuevas ideas al modelo de Markowitz. Hasta el momento, el modelo solo estudiaba las carteras que estaban compuestas por activos financieros con riesgo, pero Tobin quiso añadir una nueva variable a estudiar, los activos sin riesgo.

Estos activos "sin riesgo" son los emitidos por los Estados, generalmente Bonos, ya que, si el inversor decide no vender antes del vencimiento, este por lo general consigue el rendimiento que esperaba inicialmente al comprarlos.

Al incorporar este tipo de activos sin riesgo al modelo tenemos que estudiar qué proporción del presupuesto vamos a invertir en ellos y cuanto en los demás activos con riesgo, y también, debemos comprobar como la incorporación de estos activos afecta a nuestra Frontera Eficiente.

Gráfica 1.7. Activos no financieros.



Al combinar los activos libres de riesgo (RF) con las diferentes carteras que forman la Frontera Eficiente, se forman líneas que los unen, en la gráfica 1.7. muestro dos posibles combinaciones.

Las líneas de RF siempre empiezan desde el eje de ordenadas, ya que en ese punto es cuando invertimos todo el presupuesto en los activos sin riesgo, provocando que el riesgo de la inversión sea nulo y la rentabilidad esperada sea la rentabilidad del activo libre de riesgo.

Si invirtiéramos todo, por ejemplo, en el punto i, obtendríamos el $E[R_i]$ con el riesgo σ_i^2, ya que no estaríamos invirtiendo nada en el activo libre de riesgo.

Pero si invertimos en ambos activos estaríamos situados en medio de la línea que une a los dos puntos.

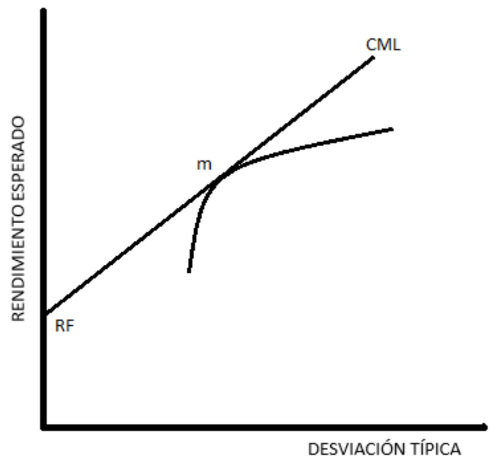
Una vez que hemos entendido el funcionamiento de estas nuevas líneas, nos debemos preguntar si todas las posibles combinaciones que se pueden formar constituyen carteras eficientes. Mirando la gráfica podemos ver a simple vista que no todas las combinaciones son eficientes, pues la línea que une RF con la cartera i esta siempre por debajo a la que une RF con j, lo que provoca que todas las inversiones en esa línea sean ineficientes, pues siempre existirá otra combinación con mejor rentabilidad con el mismo nivel de riesgo y viceversa. En cambio, la línea RF con j no tiene ninguna otra que la supere, por lo que decimos que todas las combinaciones de inversión en ese tramo son eficientes.

Tobin planteó que dentro de la línea donde existen las combinaciones eficientes, existe un punto dentro de la Frontera Eficiente, en donde la combinación entre el activo libre de riesgo y una de las carteras eficientes formaría una cartera con un rendimiento mayor que en cualquier otra combinación posible. Este punto lo llamo Cartera de Mercado (m) y la línea que lo combina con RF se llama Línea de Mercado de Capitales (CML).

La Cartera de Mercado es la que maximiza la pendiente de la CML y es conocida como la cartera óptima de activos con riesgo. En esta cartera, todos los inversores, sin importar sus preferencias, obtienen la mayor utilidad posible cuando existe la posibilidad de prestar y pedir prestado al tipo de interés sin riesgo.

Al dibujar la recta CML, estamos dibujando una recta en donde todas las combinaciones de los activos se consideran más eficientes que las carteras que componen las Frontera Eficiente, pues todas sus combinaciones están por encima de dicha Frontera.

Gráfica 1.8. Línea de Mercado de Capitales.



La ecuación que dibuja la línea CML es:

$$E[R_p] = R + \frac{E[R_i] - R}{\sigma_i} \cdot \sigma_p \qquad (1.10.)$$

$E[R_p]$ Es la rentabilidad espera en la cartera.

R Es la rentabilidad esperada para el activo libre de riesgo.

$E[R_i]$ Es la rentabilidad esperada en los activos con riesgo.

σ_i Es el riesgo en los activos con riesgo que componen la cartera.

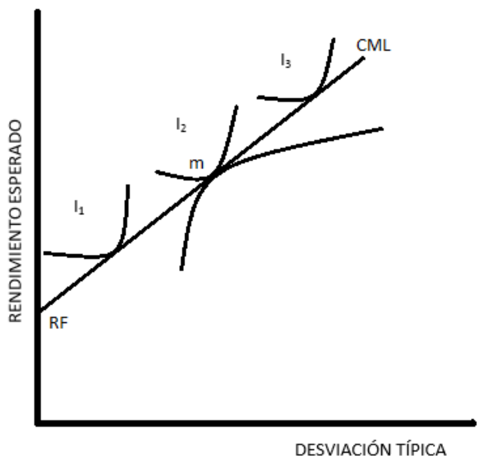
σ_p Es el riesgo total de la cartera.

Si observamos la ecuación 1.10. vemos que como mínimo el inversor conseguirá R de rendimiento. Esté se podrá aumentar según incrementemos el riesgo de nuestra cartera invirtiendo en activos con riesgo; $E[R_i] - R/\sigma_i$ representa la prima de riesgo que el mercado nos da por asumir riesgos, así que según se vaya incorporando activos con riesgo en la cartera nos situaremos en una posición más elevada en la CML consiguiendo mayores rendimientos, pero asumiendo también mayor riesgo.

La Teoría de Separación de Tobin consiste:

- Calcular la Cartera de Mercado y la CML, para lo cual no precisamos saber cuáles son las preferencias del inversor.
- El inversor debe determinar dónde se situara dentro de la línea CML dependiendo de sus preferencias, combinando el activo libre de riesgo con la cartera de mercado y así intentar conseguir la máxima utilidad posible.

Gráfica 1.9. Teoría de separación.



El inversor puede presentar tres tipos de curvas de indiferencia diferentes:

1) En I_1 el inversor es prestamista y destina parte de su presupuesto al activo libre de riesgo y el resto lo invierte en la Cartera de Mercado.
2) En I_2 el inversor invierte todo su presupuesto en la Cartera de Mercado.
3) En I_3 el inversor es prestatario y destina todo su presupuesto más lo que pide prestado en la Cartera de Mercado.

James Tobin desarrollo esta teoría en 1958 y ha sido usada para desarrollar modelos de equilibrio económicos como el CAMP (Capital Asset Pricing Model).

1.3. Modelo Índice de Sharpe.

Sharpe presentó en 1964 su trabajo llamado “Modelos de Mercado”.

Este modelo busca lo mismo que el de Markowitz, encontrar aquella cartera que consigue el máximo rendimiento asumiendo el mínimo riesgo, es decir, la cartera óptima.

Sharpe consiguió solucionar uno de los grandes problemas que tenía el modelo de Markowitz en ese entonces. Este problema era la cantidad de variables que se necesitan calcular hasta llegar a la cartera óptima. Recordemos que tenemos que calcular todos los rendimientos esperados y las varianzas de cada uno de los activos que componen la cartera y trazar una matriz de varianzas-covarianzas, por lo que necesitamos calcular $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$ estimaciones.

Actualmente, esta gran cantidad de cálculos no es un gran problema porque contamos con recursos como la hoja de cálculo que nos ayudan, pero en la época en que se creó el modelo no existía este tipo de ayuda, y calcular todo a mano era un gran trabajo no exento de errores.

Sharpe observo la existencia de una dependencia entre el rendimiento de los activos dentro del mercado, por lo que pensó que se podría representar a través del rendimiento de mercado las distintas variaciones de los rendimientos de los activos.

La fórmula del rendimiento de un activo la expresó así:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_m + \varepsilon_i \qquad (1.11.)$$

R_i Es la rentabilidad del activo i.

α_i Es la parte de rentabilidad del activo i que es independiente del mercado, viene dada por la propia actividad de la empresa.

β_i Es la sensibilidad del activo i a los movimientos del mercado, como la prima de riesgo, el tipo de interés…

ϵ_i Es el término aleatorio que muestra la rentabilidad proveniente de todos aquellos factores que no están dentro del modelo. Se trabaja con esta variable con las siguientes hipótesis:

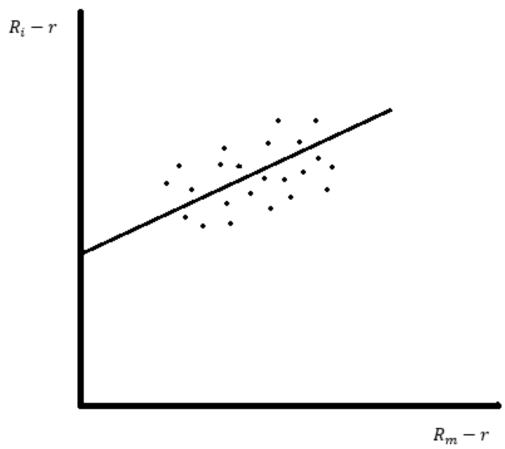
$$E[\epsilon_i] = 0 \qquad (1.12.)$$

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 \tag{1.13.}$$

Unos de los principales objetivos del inversor es conocer si el nivel de rentabilidad de un activo esta por encimo o por debajo del nivel de rendimiento del mercado. Para comprobar esto Sharpe creó lo que se conoce como Línea Característica. Esta curva muestra la relación entre el rendimiento de un activo individual y el de mercado.

$$R_i - r = \alpha_i + \beta_i \cdot (R_m - r) + \varepsilon_i \tag{1.14.}$$

Gráfica 1.10. Línea Característica.



La dispersión de puntos nos muestra los rendimientos que pertenecen a cada uno de los activos. El rendimiento de los activos estará fuera de Línea Característica según el error aleatorio ε_i.

La pendiente de esta línea variara según β_i. Esta variable es conocida también como Beta del Mercado y es usada como una medida del riesgo sistemático, esto es, del riesgo de un activo respecto al mercado en el que cotiza.

$$\beta_m = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} \tag{1.15.}$$

Esta variable puede tomar distintos valores:

- $\beta_i > 1$, se consideran betas agresivas porque el riesgo de los títulos es mayor que el que ofrece el mercado, esto es común en empresas de alta tecnología.
- $\beta_i < 1$, son betas defensivas, ahora el riesgo de los activos es menor que el de mercado, suelen darse en sectores como el financiero por tener políticas conservadoras.
- $\beta_i = 1$, son betas neutrales, los activos tienen el mismo riesgo que el mercado.

Pero para crear y analizar la Línea Característica debemos calcular el rendimiento esperado del activo y más concretamente el rendimiento esperado de nuestra cartera.

La rentabilidad y la varianza esperada de un activo vienen expresada:

$$E[R_i] = \alpha_i + \beta_i \cdot E[R_m] \tag{1.16.}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{1.17.}$$

La rentabilidad del activo está compuesta por el rendimiento que proviene por el propio funcionamiento de la empresa (α_i) y el rendimiento del mercado, cuya influencia esta ponderada en base a beta ($\beta_i E[R_m]$).

Si descomponemos la ecuación de la varianza podremos estudiar los dos tipos de riesgo que están dentro de una inversión:

- el riesgo sistemático:

$$\beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 \tag{1.18.}$$

- el riesgo específico:

$$\sigma_\varepsilon^2 \tag{1.19.}$$

Si lo que el inversor quiere es invertir en una cartera, la rentabilidad y la varianza se calcularían:

$$E\left[R_p\right] = \alpha_p + \beta_p \cdot E[R_m] \tag{1.20.}$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \tag{1.21.}$$

El modelo de Sharpe tratara de optimizar los rendimientos bajo las restricciones que tenía Markowitz.

$$(Max)E\left[R_p\right] = \alpha_p + \beta_p \cdot E[R_m] \tag{1.22.}$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Aplicando está formulación podremos hallar la cartera óptima, y ahora, el número de variables a calcular se han reducido considerablemente, siendo el número de estimaciones a calcular tan solo de $3N + 2$.

1.3.1. Capital Asset Pricing Model (CAMP).

El CAMP es un modelo que intenta explicar la formación de precios de los activos financieros. Fue creado simultáneamente por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966). Las hipótesis previas de este modelo son:

- El mercado de capitales es perfecto, lo que quiere decir que todos los que interactúan en el mercado cuentan con la misma información.
- Todos los inversores utilizan el criterio media-varianza para la selección de sus carteras de inversión.

- No se tienen en cuenta los impuestos y la inflación.
- Las expectativas de todos los inversores son idénticas, por lo que, todos los inversores encogen sobre el mismo conjunto de carteras, tienen la misma frontera eficiente y el mismo horizonte temporal.
- Y un inversor puede pedir y prestar al interés libre de riesgo.

En el CAMP todos los inversores invierten todo, o casi todo su presupuesto en la cartera de mercado, por lo que para empezar a plantear este modelo necesitamos apoyarnos en la Línea de Mercado de Capitales (CML). Esta línea ya fue explicada y la planteamos con la ecuación 1.10.

Ahora nos debemos centrar en los diferentes tipos de riesgos que hay en una inversión que como sabemos son el riesgo sistemático y el riesgo especifico. Este último riesgo no lo vamos a tener en cuenta en planteamiento del modelo porque es un riesgo que es posible eliminar creando una cartera bien diversificada. El riesgo sistemático recordemos que ya fue formulado en la ecuación 1.18.

En la formulación de la CML usamos la desviación típica de la cartera, así si la calculamos a partir de la fórmula del riesgo sistemático y sustituimos obtenemos una ecuación llamada Línea del Mercado de Activos (SML).

$$\sigma_P = \beta_i \cdot \sigma_i$$

$$E[R_p] = R + \frac{E[R_i] - R}{\sigma_i} \cdot \beta_i \cdot \sigma_p$$

(1.23.)

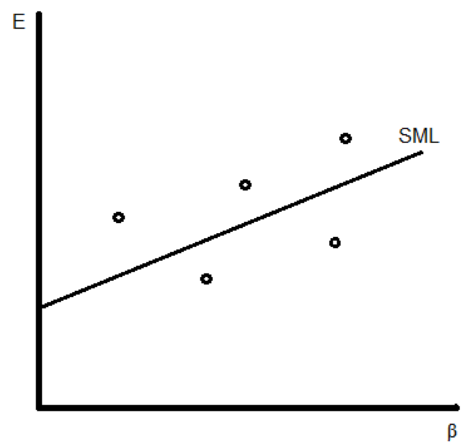
$$E[R_p] = R + (E[R_i] - R) \cdot \beta_i$$

Con esta nueva formulación estamos expresando el rendimiento en base a β_i, por lo que podemos obtener el riesgo de un título en base al riesgo de mercado.

$$E[R_i] = R + (E[R_m] - R) \cdot \beta_i \qquad (1.24.)$$

Por lo que el rendimiento mínimo de un activo será el rendimiento del activo libre de riesgo, y en base a β_i del mercado irá aumentan el rendimiento esperado de la prima de riesgo.

Gráfico 1.11. Línea del Mercado de Activos.



La representación de la SML en la gráfica 1.11. nos dice:

- Si el rendimiento de un activo está por encima de la SML significa que está infravalorado, por lo que sus rendimientos serán más altos que los que ofrece el mercado, entonces todos los inversores lo querrán adquirir provocando que el precio del activo suba, reduciendo su rendimiento hasta situarse en la línea.
- En cambio, los activos que están por debajo de la SML están ofreciendo una rentabilidad menor a la de mercado, por lo que nadie las va a querer adquirir. Su precio tenderá a bajar, aumentando la rentabilidad ofrecida hasta situarse también en la línea.

Este proceso se repite haciendo que todos los activos se sitúen en la línea y en sus inmediaciones.

2. Actualidad en la teoría de carteras

Los modelos explicados hasta ahora son algunos de los modelos clásicos de la selección de carteras relacionados con el modelo Media-Riesgo de Markowitz. Los investigadores en esta materia han ido exponiendo diversas críticas a estos modelos donde destacaban que las conclusiones obtenidas, en muchas ocasiones, no se reflejan en la vida real de una forma muy visible.

La variable con la que más se ha experimentado a la hora de crear nuevos métodos de selección de carteras ha sido el riesgo. Lo que se está intentando es que esta variable exprese unos valores más realistas. Veamos algunos modelos actuales:

2.1.Post-Modern Portfolio Theory (PMPT)

Esta teoría fue creada por B.M. Rom y K. Ferguson en 1991. En su trabajo quisieron dar solución a algunos problemas detectados en la teoría de Markowitz que hacen que las carteras seleccionadas como óptimas no siempre sean las mejores en el mercado real.

Observaron que estos errores eran producidos por el uso de la desviación típica como medida de riesgo dentro de la selección de carteras, así que, propusieron otra forma diferente de medir el riesgo.

En este modelo se busca que el riesgo sea un valor que exprese la verdadera concepción del riesgo que tienen los inversionistas.

Si preguntamos a una persona qué piensa que es el riesgo dentro de una cartera de inversión, es muy poco probable que lo primero que diga sea algo como "es la volatilidad del rendimiento medio de una cartera". Lo más probable es que nos digan conceptos más sencillos y cercanos a la vida real, los tres conceptos fundamentales que recogemos en este modelo son:

- El riesgo de pérdida, es decir, de obtener resultados negativos.
- El riesgo de un rendimiento insuficiente, menor del esperado.
- El riesgo de no alcanzar sus metas.

En base a este planteamiento este modelo usa el "Riesgo a la baja". Los inversores siempre se fijan metas que quieren alcanzar al realizar una inversión. Dos inversores invirtiendo en una misma inversión tendrán riesgos diferentes ya que sus situaciones y sus metas no serán las mismas. Cuando se usa la desviación típica como medida de riesgo, estamos suponiendo que todos los inversores tienen la misma percepción de riesgo, pero en este modelo usamos un riesgo que va a depender de quien sea el que invierta. Un inversor se fijará una meta, si esta no se cumple se considerará que se ha realizado una mala inversión, de ahí el nombre riesgo a la baja.

Otra razón para no usar la desviación típica como medida de riesgo, es que los rendimientos de los distintos activos no suelen seguir una distribución normal, haciendo que el planteamiento matemático de Markowitz sobre el riesgo sea inexacto.

El Riesgo a la baja se expresa como un porcentaje que nos muestra la frecuencia en que los rendimientos obtenidos están por debajo de la meta fijada.

Es importante destacar que el Riesgo a la baja no puede reemplazar a la desviación típica dentro del modelo de Markowitz, pues el método de análisis es totalmente diferente.

2.2.Dominio Estocástico.

Este es un método que trata el problema de selección de una cartera a partir de un planteamiento menos estricto que el que tienen los modelos clásicos.

Su objetivo es ordenar las distintas posibilidades de inversión, a través de una serie de criterios, en un ambiente de incertidumbre.

Clasificaremos las familias de las curvas de utilidad según el comportamiento del inversor, creando tres clases de Dominio Estocástico:

2.2.1. Dominio Estocástico primer grado (DEP).

El DEP considera que el inversor siempre va a querer más rentabilidad que menos, por lo que una inversión es preferible a otra si se cumple, para funciones de utilidad no decrecientes ($U'(r) > 0$):

$$E_x U(r) > E_y U(r) \tag{2.1.}$$

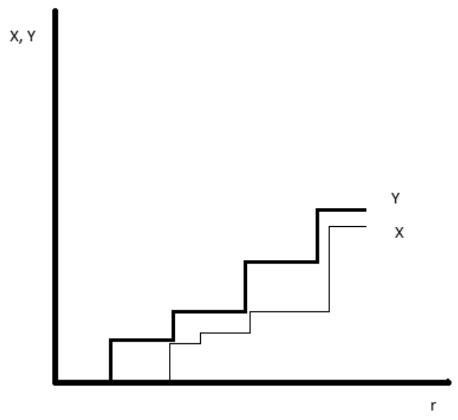
A partir de las hipótesis de partida se intenta crear una relación entre las distintas opciones de inversión usando sus funciones de distribución.

Si estudiamos las inversiones X e Y, diremos que X domina a Y si:

$$X(r) \leq Y(r) \tag{2.2.}$$

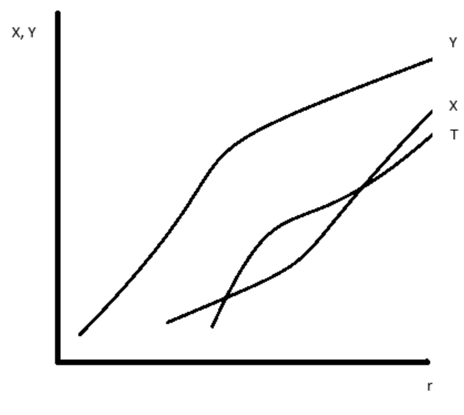
Teniendo que existir al menos un valor en r_0 que cumpla $X(r) < Y(r)$. Gráficamente se podría expresar:

Gráfico 2.1. Distribución tipo discreto, DEP.



Si las variables siguen una distribución de tipo discreto vemos que en algunos puntos se pueden tocar, pero Y siempre está por encima de X, por lo que decimos que X domina a Y cumpliendo con $X(r) \leq Y(r)$.

Gráfica 2.2. Distribución tipo continua, DEP.



En una distribución de tipo continuo, a las inversiones X y T no se les puede aplicar el DEP ya que se cortan entre sí, haciendo que en un tramo se de $X(r) \leq T(r)$ y en otro $T(r) \leq X(r)$, no cumpliendo con la hipótesis previa. Estas inversiones si se pueden comparar con Y, y vemos que:

X domina a Y porque $X(r) < Y(r)$

T domina a Y porque $T(r) < Y(r)$

2.2.2. Dominio Estocástico segundo grado (DES).

Ahora los inversores a parte de preferir siempre más rentabilidad que menos también van a ser adversos al riesgo, por lo que las funciones de utilidad ahora van ser decrecientes y cóncavas ($U'(r) > 0$; $U''(r) < 0$).

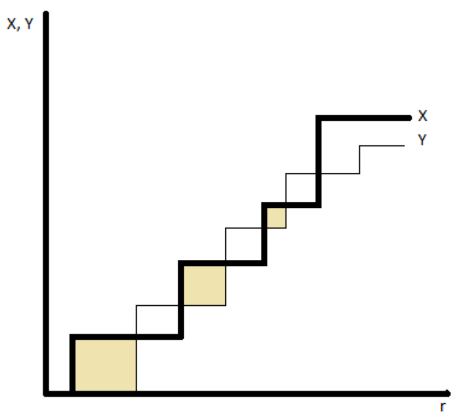
Bajo estas nuevas hipótesis diremos que la inversión X domina a Y cuando

$$\int_m^n X(r)dr \leq \int_m^n Y(r)dr \tag{2.3.}$$

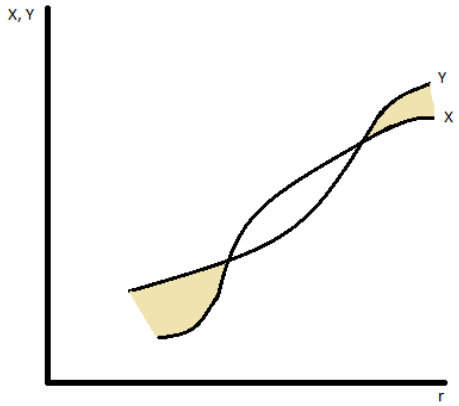
Y se debe poder demostrar que en al menos en un punto de r_0 se verifica la desigualdad.

Explicare esta formulación a través de unos ejemplos gráficos:

Gráfico 2.3. Distribución de tipo discreto, DES.



Gráfica 2.4. Distribución de tipo continúo. DES.



He diferenciado las distintas clases de áreas según un sombreado. Vemos que ahora las distribuciones de las inversiones, tanto discreta como continua, pueden cruzarse, la única condición que se debe cumplir es que las áreas no sombreadas por el lado izquierdo de cualquier valor de r_0, sean de menor tamaño que las áreas sombreadas ($X < Y$).

2.2.3. Dominio Estocástico tercer grado (DET).

Por último, tenemos un inversor que siempre prefiere más rendimiento que menos, que es adverso al riesgo y además añade que tiene una aversión al riesgo absoluta decreciente.

Ahora la inversión X dominara a la de Y cuando $E_xU(r) > E_yU(r)$, y cuando la función de utilidad cumpla todas las restricciones $U'(r) > 0$; $U''(r) < 0$; $U'''(r) > 0$

2.3. Fama-French

El modelo Fama-French fue creado en 1992 por Eugene Fama y Kenneth French como un modelo alternativo al CAMP para la valoración de activos.

El cálculo del CAMP bajo sus hipótesis previas hace que en el modelo no se use toda la información de existe en el mercado real, haciendo que las conclusiones obtenidas no siempre se ajusten a la realidad en todos los mercados, y es porque la beta de mercado no contiene toda la información sobre los retornos medios de los distintos activos.

Para suplir este inconveniente hicieron que la rentabilidad del activo no estuviese determinada tan solo por la beta de mercado, sino que crearon tres factores:

- El rendimiento de la cartera de mercado.
- El rendimiento de una cartera según su tamaño.
- El rendimiento de una cartera según su crecimiento.

$$E_A = R_f + \beta_i \cdot (R_M - R_f) + \beta_{cap} \cdot SMB + \beta_{ratio} \cdot HML \qquad (2.4.)$$

Los nuevos factores añadidos son los dos últimos, SMB es la diferencia de rendimientos entre empresas pequeñas y grandes; y HML es la diferencia de rendimientos de las empresas comparando su valor en libros con su valor bursátil.

Con esta forma de cálculo se consiguen unos rendimientos que, según los distintos estudios realizados con este modelo, se acercan más a la realidad en los mercados.

El primer estudio comparativo lo realizaron Fama y French en 1996 en donde compararon los rendimientos obtenidos con su modelo y con el CAMP, usaron información de 48 empresas que cotizaban en los índices AMEX, NYSE y NASDAQ, durante un periodo de 5 años.

2.4. Black-Litterman

Este modelo fue creado por Fisher Black y Robert Litterman en 1990, está basado en el modelo de Markowitz y lo que busca es incorporar las expectativas propias del inversor sobre los futuros rendimientos que pueden esperar de un activo o de una cartera.

Parte al igual que Markowitz, con la hipótesis de que el mercado está en equilibrio, creencia que ayuda a identificar las posibles desviaciones que se puedan producir, y así, sacar ventaja de ellas.

Los autores combinan el equilibrio de mercado con las expectativas de los inversionistas sobre este para intentar estar un paso por delante del mercado y tomar ventaja de las posibles desviaciones que se puedan producir.

Así pues, tras analizar el mercado el inversor puede tener una o varias visiones sobre un posible comportamiento diferente de algunos activos respecto al mercado en general. Estas visiones se pueden expresar en términos absolutos o relativos.

A cada percepción sobre los activos se les asigna un nivel de confianza, normalmente representado por la desviación típica. Si el inversor no tiene claro la evolución futura en el precio de un activo la desviación será grande y viceversa.

3. Impacto de la crisis en la cartera óptima.

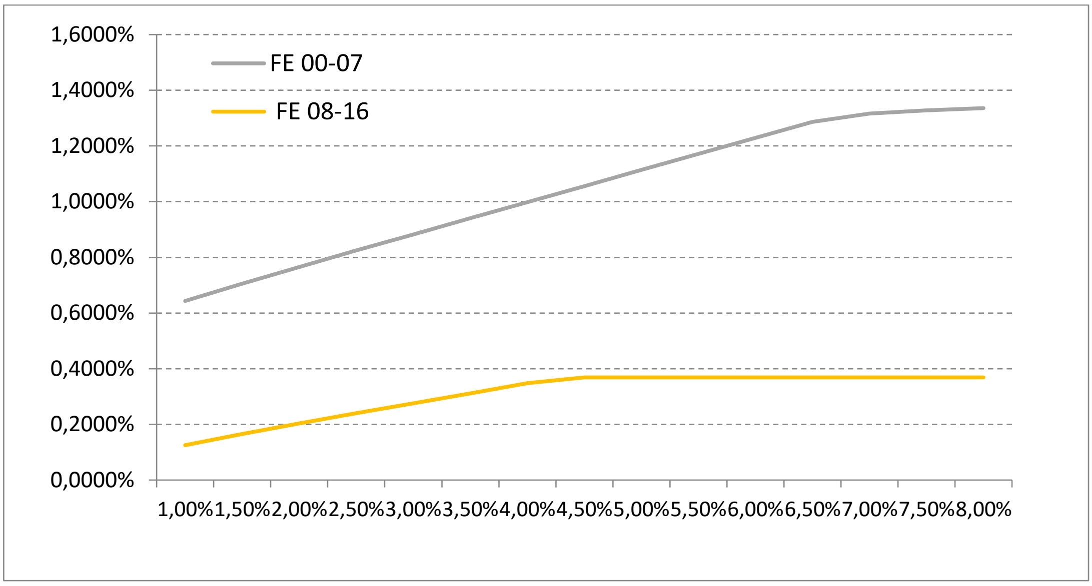
El presente capítulo tiene como objetivo ilustrar una aplicación del modelo de Markowtiz presentando como principal novedad la inclusión como activos factibles no sólo activos financieros sino activos de toda clase de riesgo, excepto renta fija. Para ello hemos considerado diversos índices que abarcan desde materias primas hasta activo inmobiliarios pasando por mercados financieros. Así, los índices incluidos han sido:

- Dow Jones: es un índice bursátil que contiene las 30 empresas más significativas de la Bolsa de Valores de New York y Nasdaq.
- Eurostoxx 50: es otro índice bursátil que incluye las 50 compañías más importantes de la zona euro.
- Índice de materias primas agrícolas: incluye los precios de madera, algodón, lana, caucho y pieles.
- Índice del petróleo crudo: es el resultado del promedio de tres precios al contado, Dado Brent, West Texas Intermediate y Dubai Fateh.
- Índice de combustibles: incluye los precios del crudo, el gas natural y el carbón.
- Índice del precio de las viviendas en USA: es un índice que refleja el promedio obtenido con los distintos precios medios de las viviendas que existen en los 51 estados en los que está compuesto USA.

Hemos seleccionado el periodo comprendido entre 2000 y 2016 con observaciones de precios mensuales y hemos calculado las rentabilidades logarítmicas. A efectos de analizar el impacto de la crisis financiera hemos dividido nuestro análisis en dos periodos de tiempo: 2000-2007 y 2008-2016.

La gráfica 1 muestra las Fronteras Eficientes para cada periodo considerado.

Gráfica 3.1. Fronteras Eficientes (2000-07/2008-16).



Podemos observar claramente como para el primer periodo la rentabilidad de la Frontera Eficiente para los activos considerados estaba muy por encima del periodo dos para los mismos niveles de riesgo, pudiéndose alcanzar hasta un 1,33% mensual de retorno para el caso de un inversor más propendo al riesgo. En términos generales la prima de riesgo, marcada por la pendiente de la curva, es también claramente superior. Para el segundo periodo la rentabilidad máxima no supera el 0,37% para un riesgo máximo del 4,5%.

Las tablas 1 y 2 contienen la composición de la Cartera Óptima para cada nivel de riesgo en los dos periodos considerados.

Tabla 3.1. Composición de la Cartera Óptima para el periodo 2000 – 2007.

	Porcentaje en cada activo					
Rentabilidad	**Combustible**	**Petróleo crudo**	**M.P. Agrícola**	**Eurostoxx 50**	**Dow Jones**	**House P. USA**
0,55%	0,00%	0,00%	2,25%	0,00%	1,30%	96,45%
0,64%	0,00%	0,00%	13,50%	0,00%	0,00%	86,50%
0,71%	0,00%	0,00%	21,64%	0,00%	0,00%	78,36%
0,77%	0,00%	0,00%	29,40%	0,00%	0,00%	70,60%
0,82%	0,00%	0,00%	37,02%	0,00%	0,00%	62,98%
0,88%	0,00%	0,00%	44,58%	0,00%	0,00%	55,42%

0,94%	0,00%	0,00%	52,10%	0,00%	0,00%	47,90%
1,00%	0,00%	0,00%	59,60%	0,00%	0,00%	40,40%
1,06%	0,00%	0,00%	67,08%	0,00%	0,00%	32,92%
1,11%	0,00%	0,00%	74,55%	0,00%	0,00%	25,45%
1,17%	0,00%	0,00%	82,02%	0,00%	0,00%	17,98%
1,23%	0,00%	0,00%	89,48%	0,00%	0,00%	10,52%
1,29%	0,00%	0,00%	96,93%	0,00%	0,00%	3,07%
1,32%	0,00%	25,90%	74,10%	0,00%	0,00%	0,00%
1,33%	0,00%	68,74%	31,26%	0,00%	0,00%	0,00%
1,34%	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

En el primer periodo considerado podemos observar como los activos financieros tienen participación nula en la cartera para todos los niveles de riesgo considerados siendo los productos estrella los activos inmobiliarios y materias primas. Llama la atención que la cartera más diversificada es aquella que tiene mayores niveles de riesgo. Claramente para ese periodo de tiempo la inversión en activos inmobiliarios en USA era una inversión con unos niveles de rentabilidad más que razonables (6%) pero con bajos niveles de riesgo hasta que explotó la burbuja.

Tabla 3.2. Composición de la Cartera Óptima para el periodo 2008 – 2016.

	Porcentaje en cada activo					
Rentabilidad	**Combustible**	**Petróleo crudo**	**M.P. Agrícola**	**Eurostoxx 50**	**Dow Jones**	**House P. USA**
0,08%	0,61%	0,00%	0,00%	0,00%	0,55%	98,83%
0,12%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	17,28%	82,72%
0,17%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	31,10%	68,90%
0,20%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	43,86%	56,14%
0,24%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	56,27%	43,74%
0,28%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	68,50%	31,50%
0,31%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	80,65%	13,35%
0,35%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	92,74%	7,26%
0,37%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%

En el siguiente periodo, por el contrario, la tendencia cambia de forma radical pasando la mayoría de las carteras a estar formadas por combinaciones de activos financieros y activos inmobiliarios de forma exclusiva.

La menor rentabilidad de las inversiones en activos inmobiliarios queda de manifiesto en la progresiva pérdida de peso de estos en la cartera a medida que se requiere una mayor rentabilidad de la cartera. El efectivo que las políticas expansivas de la FED tuvieron entre otros efectos un aumento de la rentabilidad de los mercados financieros americanos en contraposición a los europeos, lo que se ha traducido en que el Dow Jones forme parte de nuestra Cartera Óptima a lo largo de este segundo periodo.

No obstante este segundo periodo, claramente marcado por las turbulencias de la crisis financiera acarrea, desde el punto de vista del criterio Media Varianza unas posibilidades de inversión mucho más restringidas, ya que las combinaciones óptimas quedan limitadas en todos los escenarios a tan sólo dos productos, y una rentabilidad mucho más limitada para los mismos niveles de riesgo.

Conclusión

Del estudio empírico puede deducirse como el modelo planteado es capaz de describir perfectamente el impacto que sobre las distintas posibilidades de inversión ha tenido la crisis financiera.

En las Fronteras Eficientes hemos visto como la rentabilidad en general en el segundo periodo, el cual termina en 2016, está muy por debajo del primero. En lo que respecta a la cartera óptima vemos como las materias primas desaparecen por completo para dar entrada a los activos financieros. Respecto a estos últimos decir que en su mayoría pertenecientes al mercado americano donde las políticas expansivas de la Reserva Federal han provocado un aumento de los precios de las empresas cotizadas sin precedentes, al contrario que en Europa donde la inestabilidad de la zona euro se ha trasladado sin lugar a duda alguna a los mercados bursátiles cuya rentabilidad no puede en ningún caso competir con los mercados del otro lado del Atlántico.

Para concluir, diremos que llama la atención como los activos inmobiliarios no han perdido peso de forma significativa. A nuestro entender la explicación radica en que, si bien el mercado de la vivienda en estados unidos se desplomó durante los primeros años de la crisis, la diversidad en la demanda, así como la reacción de las autoridades monetarias contribuyeron a la recuperación del mercado. No obstante, la rentabilidad del mismo queda muy alejada de la que tuvo en la primera década del siglo XXI.

Bibliografía

Bick, A. (2004). The mathematics of the portfolio frontier: a geometry-based approach. The Quarterly Review of Economics and Finance, 44(2), 337-361.

Czerwinsici, F. (2014). Valoración de activos, con enfoque sobre CAPM y APT.

Elton, E. J., Gruber, M. J., & Padberg, M. W. (1976). Simple criteria for optimal portfolio selection. The Journal of Finance, 31(5), 1341-1357.

Fama, E. F., & French, K. R. (1992). The cross-section of expected stock returns. the Journal of Finance, 47(2), 427-465.

Fama, E. F., & French, K. R. (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. The journal of finance, 51(1), 55-84.

Feldman, D., & Reisman, H. (2003). Simple construction of the efficient frontier. European Financial Management, 9(2), 251-259.

Franco-Arbeláez, L. C., Avendaño-Rúa, C. T., & Barbutín-Díaz, H. (2011). Modelo de Markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión. *Tecno Lógicas*, (26), 71-88.

García Olalla, M., Martínez García, F. J., & Fernández González, E. (2014). *Manual del asesor financiero*. Madrid: Paraninfo.

Hernández, A. C., Acero, G. J., & Muñoz, D. M. C. (2015). Valoración de activos de renta variable para el mercado accionario colombiano en los sectores industrial, comercial y de servicios 2009-2013: Modelos Fama & French y Reward Beta. *Sinapsis*, *7*(7), 118-136.

Levy, H., & Post, T. (2005). Investments. Pearson Education.

Lintner, J. (1965). Security prices, risk, and maximal gains from diversification. The journal of finance, 20(4), 587-615.

López Lubián, F. J., & Garvía Estévez, P. (2005). Bolsa, mercados y técnicas de inversión (2a ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.

Markowitz, H. M. (1968). Portfolio selection: efficient diversification of investments (Vol. 16). Yale university press.

Markowitz, H. M. (1999). La historia temprana de la teoría del portafolios 1600 a 1960. *Revista Contaduría y Administración*, (195), 13-30.

Medarde Muguerza, N. (2014). El modelo de tres factores de Fama y French aplicado al mercado español.

Merton, R. C. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. Journal of financial and quantitative analysis, 7(04), 1851-1872.

Pinto, R. M. G. (2008). Análisis costo beneficio de la implementación del modelo de Black-Litterman para asignación de activos en portafolios de inversión.

Rambaud, S. C., Pérez, J. G., Granero, M. Á. S., & Segovia, J. E. T. (2009). Markowitz's model with Euclidean vector spaces. European Journal of Operational Research, 196(3), 1245-1248.

Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. Management science, 9(2), 277-293.

Swisher, P., & Kasten, G. W. (2005). Post-modern portfolio theory. *JOURNAL OF FINANCIAL PLANNING-DENVER-*, *18*(9), 74.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. The review of economic studies, 25(2), 65-86.

Villalón, J. G. (1989). Generalización del dominio estocástico como criterio de selección de inversiones. In *Anales de estudios económicos y empresariales* (No. 4, pp. 65-74). Servicio de Publicaciones.