



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN PARA TRABAJAR EL
CÁLCULO MENTAL ADITIVO Y MULTIPLICATIVO EN
TERCERO DE PRIMARIA

INTERVENTION PROPOSAL TO WORK ON ADDITIVE
AND MULTIPLICATIVE MENTAL ARITHMETIC IN THIRD
GRADE

AUTOR: ALEJANDRO MIGUEL HIDALGO GARCIA

DIRECTOR: ANTONIO FRIAS ZORRILLA

GRADO DE EDUCACION PRIMARIA

CURSO 2019 – 2020

CONVOCATORIA DE JUNIO

Índice

Resumen	1
1. Introducción.....	3
Capítulo I: Análisis de contenido	4
1.1 Historia	4
1.2 Fenomenología	6
1.3 Estructuras conceptuales	8
1.3.1 Estrategias aditivas	9
1.3.2 Estrategias multiplicativas	13
1.4 Sistemas de representación.....	16
Capítulo II: Análisis cognitivo	17
2.1 Errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje	17
Capítulo III: Análisis de instrucción (PID).....	18
3.1 Identificación	18
3.1.1 Título	18
3.1.2 Justificación	18
3.1.3 Temporalización.....	18
3.2 Concreción curricular	18
3.2.1 Objetivos.....	18
3.2.2 Contenidos.....	19
3.2.3 Competencias Básicas.....	19
3.3 Transposición Didáctica.....	19
3.3.1 Sesiones	19
3.3.2 Temporalización.....	24
3.3.3 La Metodología	25
3.3.4 Los Recursos	25
3.4 Criterios de Evaluación	26
3.5 Participación de las Familias.....	26
Capítulo IV: Conclusiones.....	27
Bibliografía.....	28

"La educación no es preparación para la vida; la educación es la vida en sí misma". -

John Dewey.

Resumen

Este trabajo muestra aspectos muy importantes del cálculo mental y su posible aplicación a un aula, específicamente a tercero de Educación Primaria. Por eso se pretende alcanzar una aproximación a este campo de las matemáticas y aportar un ejemplo de intervención para poder abordarlo en las clases.

El capítulo 1º se divide en cuatro partes: en la primera parte, se habla sobre la historia que ha tenido la de la didáctica del cálculo mental; en la segunda parte, se detalla como el cálculo mental apoya a la adquisición de las competencias básicas y como este tipo de cálculo puede influir a la hora de aprendizaje de las matemáticas; la tercera parte, consta de las principales estrategias para el cálculo mental. Y por último la cuarta parte, donde se centra en las formas de representación.

En el capítulo 2º se hace referencia a las diferentes errores y dificultades que tiene el cálculo mental a la hora del aprendizaje.

En el capítulo 3º se explica cómo se va a llevar a cabo la intervención. Guiándome con las orientaciones metodológicas que se ha aprendido a raíz de la realización de este trabajo. También se presentará algunas actividades para realizar durante la intervención.

En el capítulo 4º y ultimo capitulo, se muestran las conclusiones propias sobre el tema trabajado.

Palabras clave: cálculo mental, enseñanza, estrategias, adición, sustracción, multiplicación.

Abstract

This work depicts very important aspects of mental arithmetic and its possible applications in the classroom, specifically in the third year of Primary Education. Due to this, the aim is to reach an approach to this field of mathematics and to provide an example of classroom intervention.

Chapter 1 is divided into four parts. First, the history of the didactics of mental arithmetic is portrayed. In the second part, it is detailed how mental arithmetic supports the acquisition of the basic competences and how this type of calculus can influence the process of learning mathematics. The third part states the main strategies for mental arithmetic's and, lastly, the fourth part is focused on its forms of representation.

Chapter 2 makes reference to the different errors and difficulties learners can encounter in the process of learning mental arithmetic's.

Chapter 3 explains how the intervention will be carried out, using the methodological guidelines learned during the realization of this project as a guide. Also, it will include a number of activities to complete during the intervention.

And finally, Chapter 4, establishes the conclusions about the topic discussed.

Key words: mental calculation, teaching, strategies, addition, subtraction, multiplication.

1. Introducción

De todos los tipos de trabajos que tenía para poder realizar este trabajo de fin de grado he escogido una propuesta de intención didáctica, ya que este trabajo me podía permitir elaborar una unidad didáctica para poder llevarla a cabo en una clase.

El tema escogido lo tenía más o menos pensado desde que me asignaron a mi tutor. El porqué de este tema viene a que desde pequeño me ha causado mucha intriga el cómo hay personas que suman, multiplican, etc... de forma mental, este interés iba aumentando a lo largo de mi adolescencia especialmente cuando me aficioné a la serie “The Big Bang Theory” en donde varios de los personajes principales podían realizar varias operaciones mentales a la vez. Este interés mío se fue apagando poco a poco debido a la utilización continua de la calculadora, pero este volvió a surgir el año pasado cuando en una asignatura de la carrera me impartieron unas cuantas docencias sobre el cálculo mental, específicamente a la hora de utilizar diversas estrategias que me enseñaron. Gracias a esto estuve decidido a coger el tema del cálculo mental.

Esta intervención va dirigida al aula en la que me situaba a la hora de realizar mis prácticas de último curso de carrera, 3º de Educación Primaria del C.E.I.P “La Romanilla”. Y tenía como propósito el desarrollo de las matemáticas mediante la utilización continuada del cálculo mental tal y como decía Fernández (2004). También quería probarme a la hora de diseñar una intervención y como yo me podía desenvolver en la clase, aunque esto no se va a poder llevar a cabo debido a la situación sanitaria por la que estamos pasando en estos momentos, por lo que no voy a poder realizar el análisis de resultados que tenía previsto. Esto no descarta que en un par de años retome esta intervención para poder concluir con este trabajo “inacabado”.

Capítulo I: Análisis de contenido

1.1 Historia

Como se recoge en el libro de Luis Rico y Isidoro Segovia (2011) las primeras huellas del cálculo las podemos encontrar asociadas a la hora de enumerar a las personas de una tribu, contar la cantidad de ganado que se tenía o la cantidad de soldados de un ejército. A lo largo de la historia las tácticas del cálculo han ido cambiando según las necesidades del ser humano, adaptándose a las circunstancias y las posibilidades de la época, aunque en todas las épocas coinciden de que son métodos lo más cómodos, simples, seguros y breves posibles. Las primeras tácticas de cálculo fueron los dedos de las manos y las piedras. Más tarde, la utilización de las piedras cambio y paso a formar parte de los ábacos ya que estos permitían una mejor forma de agrupamientos y de movimientos, a la vez el ábaco te dejaba hacer anotaciones y tomar nota de los resultados anteriores. A partir de la incorporación del Sistema de Numeración Decimal se empieza a desarrollar diversos algoritmos que han evolucionado hasta llegar a los actuales de lápiz y papel. Este fue un cambio fundamental ya que facilito la mecanización de este. En el siglo XVII se construyeron las primeras máquinas de cálculo en el que estaban basadas en el uso de engranajes. Estas máquinas tuvieron una gran evolución durante el siglo XX haciendo que las máquinas registradoras de la época se convirtieran en elementos fundamentales e imprescindibles en grandes comercios. Estas evoluciones de las máquinas de calcular hacen el surgimiento de las actuales calculadoras y ordenadores. En la actualidad uno de los contextos más frecuentes para el cálculo es el sistema monetario ya que cuando se habla de contabilidad es habitual referirse a la gestión de una empresa, por lo común, la estimación y el cálculo mental son muy frecuentes en este tipo de ámbito.

La historia didáctica del cálculo mental es bastante breve debido a que esta enseñanza se empezó a impartir a principios del siglo XIX, aunque esto no quiere decir que no se hiciese antes del siglo XIX, sino que no se empezó a enseñar en la escuela desde esa fecha. Algunos estudios (Gómez, 2005) clasifican diferentes corrientes de enseñanza en la didáctica del cálculo mental.

La primera corriente que surgió se llama el método de las reglas breves. Este método consistió en formar reglas y métodos cortos y variados en la misma operación, estos métodos no tienen relación con las propiedades y principios que confieren. Un ejemplo de esto es “la regla para el nueve”, esta regla se utiliza todas las veces que multiplicando un número por sí mismo o por otro, mientras que sea multiplicar por nueve.

Este método consiste en quitar 1 del número menor, y lo que quedan se convertirán en dieces, tras esto hay que mirar cuantos números quedan para el nueve, y lo que falte hasta el nueve se convertirá en las unidades que al juntarse con los dieces obtenidos anteriormente conseguirán el número que estén buscando.

La siguiente corriente que surgió fueron los métodos de abreviación, estos surgieron debido a la implantación del sistema general en la enseñanza pública, esto se tradujo en una reducción que limitó la enseñanza de métodos de cálculo. Por esto los libros que contenían los antiguos métodos de cálculo perdieron interés en la didáctica, aunque a principios del siglo XX algunos de estos métodos se recuperaron como métodos particulares para abreviar y hacer más cortos los rutinarios cálculos en las que se requerían en algunas ocasiones, estos métodos que se recuperaban no aparecían en la enseñanza obligatoria sino que se podían encontrar capítulos complementarios o avanzados de los libros para aquel alumno o alumna que quería una mayor profundidad o una mayor instrucción. Este método de enseñanza mezcla la forma de columnas con la forma reglada. Un ejemplo de este método es la multiplicación de un número entero por quince, este consiste en añadirle un cero y después sumarle la mitad de ese número. Como observamos con este método la multiplicación se realiza mucho más fácil y rápido que de manera ordinaria.

Otra corriente surgió a principios del siglo XX fue la aritmética mental, en esta corriente se recuperó una antigua teoría que consideraba que la mente se construía por facultades, como si fuera un músculo se puede fortalecer con entrenamiento. Este pensamiento se llegó a considerar una disciplina mental como un objetivo educativo. Para esto se concretó algunas materias apropiadas para el entrenamiento de la mente, la que más destaque fue la aritmética mental, estas consistían en largos listados de simples operaciones y problemas de enunciados para que el alumnado pueda hacerlos con reiteración y de cabeza, estas se recogían en libros de texto.

La última corriente es la de cálculo mental, en esta corriente se abandona la teoría de facultades, explicada anteriormente, y se enfoca a una más orientada al utilitarismo y a las situaciones de la vida real. Bajo esta idea anterior se introduce el término de cálculo mental para hacer referencia al tipo de cálculo que pretende desarrollar la agilidad mental y el cálculo rápido. En este método se centra en casos particulares, por ejemplo, se enseña cómo se multiplica por veinticinco, pero no por veintiséis. Además, continúa con la idea

de que el cálculo mental necesita de una instrucción y para eso se tiene que hacer de forma personal y en soledad.

1.2 Fenomenología

Ahora pasamos a la aplicación del cálculo mental en la vida real, que es donde se haya el sentido de este cálculo. Además, el mismo hecho de aplicar estos conocimientos en distintos contextos es lo que va a facilitar a que el alumnado encuentre utilidad a la teoría que se imparte en las clases. En este ámbito, Ortiz (2011) correlaciona las competencias básicas y las situaciones en las que se pueden utilizar de la siguiente forma:

- Como es de esperar el cálculo mental desarrolla a la competencia matemática debido a los contenidos y destrezas que se trabajan con este tipo de cálculo.
- El cálculo mental ayuda a la interacción con el mundo físico, ya que facilita a la hora de comprender y a describir mejor el entorno que nos rodea, aumentando las posibilidades de relacionarse con la realidad que le rodea y a su vez le ayuda a la transmitir información más necesaria sobre diferentes aspectos del medio.
- El tratamiento de la información y competencia digital, principalmente ayuda a la captación de destrezas en el uso de los números, como puede ser en conceptos como la comparación y la aproximación, ya que cuando se relacionan estos conceptos facilita la comprensión de información que hable sobre cantidades o medidas.
- Incita a la autonomía e iniciativa personal mediante la resolución de problemas ya que al tener que elegir qué tipo de estrategia es más apropiada a la hora de tener que resolver el problema al que se esté enfrentando, esto posibilita que mejore aspectos relacionados con la confianza para así enfrentarse a diferentes situaciones inciertas.
- Ayuda a la competencia de aprender a aprender por el contenido instrumental del cálculo mental debido al uso continuado del cálculo mental está estrechamente relacionado con tres aspectos muy importantes como son la autonomía, la perseverancia y el esfuerzo a la hora de abordar problemas de creciente complejidad, para esto se debe de utilizar una mirada crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados obtenidos. Así como la verbalización del

desarrollo de la actividad ayuda a la reflexión crítica sobre uno mismo, sabiendo que ha aprendido y que falta por aprender.

- La metodología fomenta el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística en dos vertientes, por una parte, en la adhesión de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y a la exactitud de su uso. Y, por otra parte, es inevitable incidir en algunos contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Ambas vertientes tratan de facilitar la expresión y propicia a la escucha de explicaciones de los demás para así desarrollar la propia comprensión, el espíritu crítico y la mejora de las habilidades de comunicación.
- La aportación a la competencia social y ciudadana, con esto se refiere a que el trabajo de equipo en el ámbito del cálculo mental adquiere una dimensión singular si se acepta otros puntos de vista diferentes al que tenga un, especialmente a la hora de elegir las estrategias para resolver problemas o ejercicios.

También se observa que Fernández (2004) realiza unos puntos en los que el cálculo mental favorece a la hora del aprendizaje de las matemáticas:

- Comodidad y rapidez. Ya que nos libra del esfuerzo de escribir, en el caso que se haga la operación a papel y lápiz y de la tensión de acertar con las teclas en la calculadora, además el cálculo mental aventaja en tiempo incluso a cuando se utiliza la calculadora.
- Detección de errores en cálculos efectuados por otros medios. Los principales detectores que nos otorga este cálculo son tres:
 1. El primer caso radica en que, si al multiplicar por calculadora 37×98 el número que nos apareciese fuese 3589, claramente hemos fallado a la hora de teclear en la calculadora debido a que 7×8 el 56 y por tanto en las unidades debería aparecer un 6 en vez de un 9.
 2. En el segundo caso se hace referencia a que las cifras deban de corresponder a ordenes mayores, en este caso sería insólito que 292×598 nos diera 874616 ya que al multiplicar 2×5 nos da 10 y por muchas unidades del orden anterior no nos podría salir un 8.
 3. Del mismo modo que si multiplicamos 1290×3789 y la calculadora nos da el número de 56982135, en algún número nos hemos equivocado o hemos puesto más números de los que tenemos en la

multiplicación ya que por observación nos damos cuenta que el número que debemos obtener tiene que rondar entre los tres millones y los ocho millones y por eso no nos puede salir un número que supere esas cifras.

- La práctica continuada del cálculo mental incita al desarrollo de la iniciativa personal y creatividad, esto ocurre debido a la gran variedad de vías que se puede tomar a la hora de realizar una operación aritmética.
- Al llevar una continua practica del cálculo mental desarrolla la memoria inmediata debido a que al operar mentalmente se tiene que almacenar datos relevantes de la operación, esto se ve claramente cuando tienes que calcular $41+58$, con esta suma vemos que primero tenemos que dejar el 1 y el 8 aparte, ya que primero se debe de calcular $40+50$ que en el caso es 110 y retenerlo para sumar $1+8$ y luego sumarlo al número obtenido. Como vemos en este ejemplo tienes que ir reteniendo los números que ya se ha sumado para después sumarlos por completo.
- Esta práctica es una gran oportunidad para desarrollar la atención y la agilidad mental debido a que al implementar actividades que se puedan realizar de forma organizada produce una orientación de la atención, una flexibilidad y prontitud de respuesta al participante. Simultáneamente este participante está obligado realizar de forma singular estas operaciones y posteriormente comparar sus resultados con las demás respuestas que puedan haber.
- Debido a la gran diversidad de estrategias útiles para cada calculo, desarrolla flexibilidad y apertura de mente ya que no existe una estrategia que sea la mejor, sino que hay una que es la mejor para uno mismo, dependiendo de la situación.
- La desarrollada practica del cálculo mental da hincapié a un prestigio social ya que se puede afirmar que este tipo de cálculo en la sociedad despierta admiración e incluso una cierta envidia.
- Por último, no nos podemos olvidar de la satisfacción personal que produce al confirmar que los resultados se han realizado mentalmente están correctos, haciendo que el alumno o alumna se motive cada vez más con las matemáticas.

1.3 Estructuras conceptuales

Antes de empezar con el estudio del cálculo mental cabe señalar que se entiende por calculo metal. El cálculo mental se caracteriza por ser un cálculo que es únicamente de

cabeza y de memoria, sin la ayuda de agentes externos como son el papel y el lápiz, y se desempeña con datos de carácter exacto o aproximado (Ortega y Ortiz, 2002). Dentro de este tipo de cálculo se distinguen dos tipos (Ortiz, 2011):

- El cálculo mecánico o de estímulo-respuesta consiste en un cálculo de memoria en el que existe el riesgo que se olvide rápidamente si se deja de practicar. Un ejemplo claro de este tipo de cálculo son las tablas de multiplicar.
- Cálculo reflexivo o pensado se caracteriza porque el cálculo cada vez es nuevo por lo que depende de la perspectiva que se tenga para elegir una estrategia u otra siendo esta original o no. Esta toma de decisión implica una reflexión de todas las estrategias que se conozcan y escoger la más apropiada para cada situación.

A diferencia del cálculo mecánico y del escrito, que se basa en utilizar un ordenador o una maquina o un papel y lápiz respectivamente, el cálculo mental se realiza sin ningún apoyo (Martínez, 2000).

Tras haber explicado los tipos de cálculo mental cabe destacar que el tipo de cálculo que vamos a utilizar en esta intervención va a ser el cálculo pensado ya que es el propicio para esta intervención, puesto que las van a ser distintas entre si.

Existen numerosas estrategias que ayudan a la resolución mental de diferentes operaciones según el nivel en el que se esté de los distintos campos numéricos. Pero solo expondré las estrategias más comunes y fáciles, estas son las estrategias aditivas, sumas y restas, y las multiplicativas (Ortiz, 2011).

1.3.1 Estrategias aditivas

Para ver las estructuras aditivas hay que indicar primero las estrategias generales en las que me he basado en Gómez (1988):

- **Recolocación:** Consiste en reubicar mentalmente los números agrupándolos según los intereses de la operación, normalmente para formar ceros.
Por ejemplo: $13 + 48 + 37 + 22 = (13 + 37) + (48 + 22) = 50 + 70 = 120$.
- **Descomposición:** Consiste en descomponer uno de los términos para transformar la operación en una equivalente que sea más cómoda a la hora de hacer la operación.

Por ejemplo: $37 + 174 = 30 + 7 + 170 + 4 = (30 + 170) + (7 + 3) + 1 = 200 + 10 + 1 = 211$

- Redondeo: Consiste en cambiar los dos términos de la operación buscando un redondeo para conseguir al menos un cero en cualquier de los dos términos. Este redondeo puede ser por compensación, dirigido a la suma, y por conservación, dirigido a la resta.

Por ejemplo: Compensación $\rightarrow 17 + 45 = (17 + 3) + (45 + 3) = 20 + 47 = 67$.

Conservación $\rightarrow 89 - 47 = (89 + 11) - (47 + 11) = 100 - 55 = 45$

- conteo: Cuando se tiene cierta destreza se recomienda realizar la operación de izquierda a derecha. Dentro del conteo encontramos dos tipos el ascendente y el descendente

Por ejemplo: Ascendente $\rightarrow 147 + 369 = 147 + 300 = 447 + 60 = 507 + 9 = 516$.

Descendente $\rightarrow 58 - 45 =$ de 58 a 50, 8, de 50 a 45,5. Por lo que $8 + 5 = 13$.

Ya vistas las estrategias generales expondré la diferenciación que hizo Ortiz (2011), ya que las separa según el nivel de dificultad para el alumnado.

A. Sumas

1). Estrategias elementales.

Son estrategias que están pensadas para sumar un número de una solo cifra a una determinada cantidad:

- Sumar 10 a un número es añadir una unidad a las decenas y dejar el mismo número que contenga la unidad.

Por ejemplo: $34 + 10 = 44$

- Sumar a un número el 9 o cualquier número que contenga el 9 (19,29,39...). Consiste en sumar 10 (20,30,40...) a la cantidad asignada y restar la unidad.

Por ejemplo: $41 + 9 = 41 + 10 - 1 = 51 - 1 = 50$

- Sumar a un número el número 11 (21,31,41...). Primeramente, se le suma el número 10 (20, 30,40...) y después la unidad.

Por ejemplo: $25 + 21 = 25 + 20 + 1 = (25 + 20) + 1 = 45 + 1 = 46$

- Sumar a un número el 8 (18,28,38...). Al número primero se le sumara el número 10 (20,30,40...) y después restarle 2.

$$\text{Por ejemplo: } 15 + 8 = 15 + 10 - 2 = (15 + 10) - 2 = 25 - 2 = 23$$

2). Artificios.

Esta estrategia es la que sigue el procedimiento que utilizaríamos con la utilización del lápiz y papel.

Por ejemplo: $26 + 15 \rightarrow 5 + 6 = 11$, por lo que me llevo 1 y retengo las unidades que en este caso es 1, $2 + 1 = 3$ y una que me llevo 4. Por lo que ahora juntaríamos las decenas con las unidades por lo que $26 + 15 = 41$. Esta estrategia no la enseñaría en clase porque ya que no es la mejor estrategia para el alumnado.

3). Descomposiciones:

- De un dato. Para poder realizar esta estrategia debemos de descomponer uno del sumando para poder hacer la suma más sencilla y después por medio de la propiedad asociativa unir los sumandos como vemos en el siguiente ejemplo.

$$37 + 16 = 37 + 10 + 6 = (37 + 10) + 6 = 53$$

- De un dato a completar. Se trata de descomponer un sumando para así complementar al otro mediante la propiedad asociativa y podamos hacer ceros como vemos en el siguiente ejemplo.

$$\text{Por ejemplo: } 37 + 16 = 37 + 13 + 3 = (37 + 13) + 3 = 50 + 3 = 53$$

- De un dato por defecto. Primero uno de los sumandos debemos de proponerlo en forma de resta y después juntar los sumandos mediante la propiedad conmutativa y para finalizar realizaríamos la resta.

$$\text{Por ejemplo: } 37 + 16 = 37 + (20 - 4) = (37 + 20) - 4 = 57 - 4 = 53$$

- De dos datos. En esta estrategia se tienen que descomponer los dos sumandos y unir las partes que quieras sumar con la propiedad conmutativa y asociativa.

$$\text{Por ejemplo: } 37 + 16 = 30 + 7 + 10 + 6 = (30 + 10) + (7 + 6) = 40 + 13 = 53$$

4). Recolocación.

En esta estrategia se trata de recolocar mentalmente las unidades para poder agrupar los números para formar decenas seguidas de ceros, como se va a mostrar en el siguiente ejemplo.

$$17 + 46 + 53 + 4 = (17 + 53) + (46 + 4) = 70 + 50 = 120$$

5). Sumas con números terminado en 0.

Esta estrategia se tiene que sumar las cantidades sin los 0, utilizando la estrategia que más guste y cuando se termine la suma se le añaden los 0.

Por ejemplo: $34000 + 45000 = 34 + 45 = 79 \rightarrow 79000$

B. Restas

1). Estrategias elementales.

Son estrategia que están pensadas para restar un número de una sola cifra a una determinada cantidad.

- Restar 10 es lo mismo que quitar una unidad a las decenas.
Por ejemplo: $61 - 10 = (6 - 1) \times 10 + 1 = 50 + 1 = 51$
- Restar a un número el 9 (19,29,39...). Consiste en restar la cantidad de 10 (20,30,40...) y después sumarle 1
Por ejemplo: $61 - 19 = 61 - 20 + 1 = 41 + 1 = 42$.
- Restar a número el número 11 (21,31,41...). Primeramente, se le resta la cantidad de 10 (20,30,40...) y posteriormente se le resta una unidad.
Por ejemplo: $61 - 11 = (61 - 10) - 1 = 51 - 1 = 50$
- Restar a un número el 8 (18,28,38...). Primero se le resta la cantidad de 10 (20,30,40...) y posteriormente se le suman dos unidades.
Por ejemplo: $61 - 18 = (61 - 20) + 2 = 41 + 2 = 43$

2). Artificios.

Esta estrategia es la que sigue el procedimiento que utilizaríamos con la utilización del lápiz y papel. Por ejemplo: $61 - 21$. Primero se empezaría restando las unidades en este caso no tendríamos llevadas, $1 - 1 = 0$, retenemos el 0 en la cabeza y seguiríamos a restar las decenas, $6 - 2 = 4$, y por ultimo juntaríamos las decenas con las unidades en este caso sería 40.

3). Saltos de 10.

En esta estrategia se trata de restar de forma gradual. Primero hay que restas tantos dieces como decenas tenga el sustraendo y después se suman las unidades.

Por ejemplo: $31 - 25 \rightarrow 31 - 10 - 10 - 5 = 21 - 10 - 5 = 11 - 5 = 6 \rightarrow 31 - 25 = 6$

4). Descomposiciones.

- De un dato: Para poder realizar esta estrategia primero debemos de descomponer en 0 al minuendo y después mediante la propiedad conmutativa juntar el sustraendo con el primer minuendo, retener ese número y después sumar la unidad que se ha descompuesto al principio.

Por ejemplo: $31 - 23 = 30 + 1 - 23 = (30 - 23) + 1 = 7 + 1 = 8$

- De un dato segregado: Se trata de descomponer el sustraendo para formar un cero y restar el minuendo con la descomposición del sustraendo, retener la solución y finalmente restar el número retenido con la otra parte del de la descomposición.

Por ejemplo: $31 - 23 = 31 - 20 - 3 = (31 - 20) - 3 = 11 - 3 = 8$

- De un dato segregado, resta haciendo la misma terminación. En esta estrategia se tiene que hacer una descomposición del sustraendo teniendo en cuenta las unidades del minuendo, después de descomponer el sustraendo se juntara la parte que nos interesa con el minuendo por medio de la propiedad asociativa y para finalizar hacer las restas.

Por ejemplo: $31 - 23 = 31 - 21 - 2 = (31 - 21) - 2 = 10 - 2 = 8$

5). Compensaciones.

En esta estrategia se tendrá que restar al minuendo una cantidad para poder formar un cero, pero esa misma cantidad restada se le tiene que restar al sustraendo también y para finalizar hacer la resta del minuendo y sustraendo.

Por ejemplo: $31 - 23 = (31 - 1) - (23 - 1) = 30 - 22 = 8$

6). Restar números terminados en 0.

Esta estrategia consiste en restar las cantidades sin los 0, utilizando alguna de las estrategias que se han explicado anteriormente y posteriormente se le añaden los 0.

Por ejemplo: $84000 - 41000 = 84 - 41 = 43 \rightarrow 43000$

1.3.2 Estrategias multiplicativas

Así mismo, las estrategias multiplicativas se estructuran de la siguiente forma (Ortiz, 2011):

1). Estrategias elementales.

- Multiplicar un número por 2. Es lo mismo que sumar dos veces.
Por ejemplo: $24 \times 2 \rightarrow 24 + 24 = 48$
- Multiplicar un número por 3. Es lo mismo que sumar el doble de dicho número.
Por ejemplo: $6 \times 3 \rightarrow 6 + 12 = 18$
- Multiplicar un número por 4. Es lo mismo que doblar el doble.
- Por ejemplo: $3 \times 4 \rightarrow 2 \times (3 + 3) = 2 \times 6 = 12$
- Multiplicar un número por 5. Es lo mismo que sustituir el 5 por el 10 y dividirlo entre 2.
Por ejemplo: $5 \times 5 \rightarrow 5 \times (10/2) = (5 \times 10) : 2 = 50 : 2 = 25$
- Multiplicar un número por 6 (7,8,9). Para esta estrategia tenemos que recurrir a la propiedad distributiva, descomponiendo estos números en sumas o restas, o descomponiéndolos en factores:
 1. Ejemplo de multiplicación por 6 $\rightarrow n \times 6 = n \times (5 + 1)$
 2. Ejemplo de multiplicación por 7 $\rightarrow n \times 7 = n \times (5 + 2)$ o $n \times (10 - 3)$
 3. Ejemplo de multiplicación por 8 $\rightarrow n \times 8 = n \times (5 + 3)$ o $n \times (10 - 2)$ o $n \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
 4. Ejemplo de multiplicación por 9 $\rightarrow n \times 9 = n \times (10 - 1)$(n corresponde a cualquier número)
- Multiplicar o dividir por 10. En el primer caso la estrategia es poner un 0 a la derecha del número y en el segundo caso es quitar un 0.
Por ejemplo: $12 \times 10 = 120$, $120 : 10 = 12$

2). Artificios.

Multiplicación de números terminados sólo por 1.

Por ejemplo: $42 \times 11 = 4 \times (4 + 2) \times 2 = 462$

Multiplicación por números 101, 1001:

Por ejemplo: $48 \times 101 = 4848$, $484 \times 1001 = 484484$

3). Descomposiciones.

3.a. Aditivas. Consiste en aplicar la propiedad distributiva:

- Cuadrados: $15 \times 16 = 15 \times (15 + 1) = 15^2 + 15 = 240$
- Descomponer en cuartos y mitades: $44 \times 1,25 = 44 \times (1 + 1/4) = 44 + 11 = 55$, $44 \times 1,5 = 44 \times (1 + 1/2) = 44 + 22 = 66$
- Multiplicaciones por 5, 15, 25... y por un número impar: $15 \times 11 = 15 \times (10 + 1) = 150 + 15 = 165$

3.b. Multiplicativas. Consiste en aplicar la descomposición de factores.

- Multiplicación por 12, 15, 22, 33:
 - $25 \times 12 = 25 \times 3 \times 4 = 75 \times 4 = 300$
 - $25 \times 15 = 25 \times 3 \times 5 = 75 \times 5 = 375$
 - $25 \times 22 = 25 \times 2 \times 11 = 50 \times 11 = 550$
 - $25 \times 33 = 25 \times 3 \times 11 = 75 \times 11 = 825$
- División descomponiendo el divisor en factores:
 - $60 : 12 = 60 : (3 \times 4) = (60 : 3) : 4 = 20 : 4 = 5$
- División descomponiendo el dividendo en factores:
 - $60 : 2 = (30 \times 2) : 2 = 30$

4). Compensación.

Consiste en multiplicar y dividir por un mismo número. En el siguiente ejemplo se observa que el multiplicador se divide entre dos y el multiplicando se multiplica por dos y en el segundo es, al contrario.

Por ejemplo: $24 \times 35 = 14 \times 70 = 980$, $35 \times 20 = 70 \times 10 = 700$

5). Sustituciones.

Para esta estrategia hay que tener en cuenta las equivalencias de los números:

- Multiplicar por 5 ($10/2$), 25 ($100/4$), 75 ($3/4 \times 100$), etc. Para esta estrategia el denominador tiene que ser divisor de algún dato.
 - Por ejemplo: $24 \times 25 = 24 \times 100/4 = 2400/4 = 600$
- Multiplicar por 0,5 ($1/2$), 0,25 ($1/4$), 0,125 ($1/8$), etc. Para esta estrategia tenemos que estar atentos que el denominador sea divisor de algún dato.
 - Por ejemplo: $56 \times 0,125 = 56 \times 1/8 = 7$
- División por 5 ($10/2$), 25 ($100/4$), 75 ($3/4 \times 100$), etc. Para esta estrategia el divisor tiene que ser múltiplo o parte alícuota de 10, 100...

Por ejemplo: $180 : 25 = 80 \times 4/100 = 7,2$

- División por $0,5(1/2)$, $0,25(1/4)$, $0,2(2/10)$, etc. En esta estrategia el denominador tiene que ser divisor de algún dato.

Por ejemplo: $48 : 0,5 = 48 : 1/2 = 96$

- Porcentajes: 10% ($1/10 = 0,1$), 20% ($1/5 = 0,20$), 25% ($1/4 = 0,25$), etc.

Por ejemplo: $25\% \ 200 = (1/4) \times 200 = 1 \times 50 = 50$

- Exponencial: Para poder utilizar esta estrategia hay que aprender las propiedades de las potencias.

Por ejemplo: $16 \times 16 = 2^4 \times 2^4 = 2^8 = 256$

1.4 Sistemas de representación

El sistema que utilizamos para la representación del cálculo mental es el sistema decimal que pertenece a la numeración posicional, solo para la escritura de la respuesta ya que el algoritmo se hace mentalmente. En este sistema de numeración la posición de los números nos indica si son unidades, decenas, centenas....

Según Cabrera (2009) los primeros sistemas de numeración posicional de las que tenemos constancia son el sistema de numeración babilónico y el maya. El primero consistía en un sistema sexagesimal posicional en el que tenían dos símbolos uno para representar las unidades y otro para el número 10, el segundo sistema agrupaba las cantidades de 20 en 20, por lo que se trata de un sistema en base 20 con la utilización del 5 como base auxiliar, en el que utilizaban puntos para indicar números del 1 al 4 y el 5 lo representaban con una línea horizontal, a partir del 5 añadían puntos para indicar los números del 6 al 9 y así respectivamente.

Cabrera (2009) argumenta que los sistemas de numeración actuales son utilizados sobre todo en sistemas informáticos. Estos sistemas son el sistema binario, que consiste en la codificación por medio de 0 y 1, el sistema octal, que consiste en usar los números del 0 al 7 y es el sistema de numeración si solo tuviéramos cuatro dedos, y, por último, encontramos el sistema hexadecimal, que es un sistema que utiliza dígitos para los números del 0 al 9 y a su vez utiliza letras para referirse a los números del 10 al 15.

El sistema que se utiliza en nuestra vida corriente es el sistema de numeración decimal que está dentro de la de los sistemas posicionales. Para este sistema decimal utilizamos los números del 0 al 9. Este sistema está formado por un conjunto de números,

símbolos, signos y unas reglas que nos permiten representar números. En este sistema se tienen que escribir las cifras de izquierda a derecha en orden decreciente en relación con el orden de las unidades. Además, utilizamos este sistema mayoritariamente ya que tiene una correspondencia exacta con el entorno en el que nos rodea (Ochoa, 2007)

Capítulo II: Análisis cognitivo

2.1 Errores, dificultades y obstáculos de aprendizaje

Gómez (1995) hace una reflexión en el que analiza los diferentes errores que recogió en una de sus investigaciones y los separó en mecánicos y de calidad.

Los primeros errores en el estudio de Gómez (1995) aparecían cuando el alumno estaba falto de motivación, estaba cansado, nervioso... haciendo que el estudiante pierda el control del problema, por lo que no tiene sentido tachar al alumno de falta de estudio, es decir que todavía no ha aprendido las estrategias, ya que este puede resolver correctamente el mismo ejercicio a la semana siguiente, incluso si no se le corrige la primera vez el ejercicio. Dentro de los errores mecánicos distingue a su vez dos tipos; los perseverativos, que ocurren cuando un número se queda grabado en el pensamiento; y los que denomina inercia de acción, este error lo realizan los niños cuando operan con el signo equivocado por que anteriormente ha realizado el mismo tipo de operación. Este último error también lo recoge Del Puerto (2006) aunque argumenta que este fallo proviene de un error del lenguaje.

Los otros tipos de errores que distinguió Gómez (1995) son los de calidad que a su vez los distinguen en dos; los errores de memorización pobremente establecida, en el que el alumno guarda en la memoria resultados erróneos de operaciones como puede ser las tablas de multiplicación; y por ultimo distingue el ultimo error como la forma en la que el niño ha aprendido las reglas, es decir que a veces el alumnado aprende reglas que son parcialmente erróneas, este último fallo lo tiene que detectar el docente ya que va a seguir utilizando este error hasta que se le corrija.

A su vez también se observa como Pérez (2010) expone una serie de dificultades cuando se habla sobre el cálculo, principalmente achaca los siguientes fallos a las estructuración y representación espacial de los cálculos:

- Dificultades a la hora de la comprensión y manejo de los números ya que, aunque el alumno sepa calcular mentalmente no es capaz de hacer una conexión entre estos números y lo que estos significan.
- Dificultades a la hora de entender un sistema de numeración.
- Dificultades para la seriación especialmente en seriaciones descendientes.
- Dificultades a la hora de realizar operaciones y a la comprensión para realizar las acciones correctas en cada diferente cálculo.

Capítulo III: Análisis de instrucción (PID)

3.1 Identificación

3.1.1 Título

El título para esta intervención es: Números en la cabeza

3.1.2 Justificación

Esta intervención está pensada para el colegio en el que estaba haciendo las prácticas, que por desgracia no se ha podido llevar a cabo debido a la situación que ha generado el coronavirus. Específicamente está dirigido a la clase en la que me encontraba, 3º de Educación Primaria. Esta clase contaba con un total de 28 alumnos y alumnas de entre 8 y 9 años. De estos 28 alumnos tengo que destacar la presencia de uno que está diagnosticado con TEA, pero este no resulta un problema en la clase debido a que este se medica y sigue las clases normales.

3.1.3 Temporalización

Esta intervención requiere de seis sesiones en el que estará basado al cien por cien en el área de las Matemáticas, específicamente en el cálculo mental.

3.2 Concreción curricular

3.2.1 Objetivos

Esta intervención tiene unos objetivos bastante claros:

- Incrementar la confianza y la independencia mediante el cálculo mental.
- Verbalizar el proceso llevado mientras se opera mentalmente.
- Desarrollar las estrategias que se presentan en la clase.

- Realizar el cálculo mental de forma precisa y rápida.
- Apreciar las capacidades del cálculo mental fuera del colegio.
- Aceptar y escuchar las estrategias que hayan utilizado los compañeros.
- Aprender a utilizar TICs

3.2.2 *Contenidos*

Los contenidos que se van a presentar en esta intervención son:

- Estrategias aditivas y multiplicativas del cálculo mental.
- Elaborar y usar estrategias personales del cálculo mental.
- Explicación verbal del proceso seguido en la realización de cálculos mentales.

3.2.3 *Competencias Básicas*

Las competencias que se van a intentar llevar a cabo son:

- La competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología. (CMCT)
- La competencia de aprender a aprender. (CAA)
- La competencia digital. (CD)

3.3 *Transposición Didáctica*

3.3.1 *Sesiones*

1º Sesión

1. Escribe de cuanto en cuanto suman estas series de sumas

- | | |
|----------------------------------|------------------------|
| a) 124, 134, 144, 154, 164, | Suma de en |
| b) 32, 40, 48, 56, 64 | Suma de en |
| c) 15, 26, 37, 48, 59, | Suma de en |
| d) 129, 140, 151, 162, 173, | Suma de en |

2. Calcula mentalmente y une mediante flechas.

- | | |
|----------------|--------|
| a) $325 + 100$ | 1) 238 |
|----------------|--------|

- d) 151 – 211 4) 528
e) 800 – 458 5) 30

3. De los siguientes números, ¿cuál es el que más se acerca a 1498?

- a) 1500 c) 1450
b) 1550 d) 1425

4. Semejantes (Juego)

Este juego es una variación de buscar las parejas. Para este juego necesitamos dos montones de cartas. El primer montón constara con las operaciones y el segundo con las soluciones de las operaciones. Para comenzar el juego se deberá de deberán de esparcir el primer montón y se tiene que mantener diferenciado con el segundo montón para que los niños y niñas sepan que tienen que deben de coger una carta de ambos lados. Si se ve que este último dato hace el juego muy fácil se mezclaran los montones para complicar más el juego.

Esta sesión es muy similar a la primera debido a que se van a terminar de explicar todas las estrategias elementales del cálculo aditivo, por lo que se pretende lo mismo que en la primera sesión.

4° Sesión

1. Forma números pares e impares con los números de la tabla

Este ejercicio consiste en elaborar números pare e impares con diferentes operaciones ya sea utilizando dos números o los que tengan en gana. Para puntuar se deberá de hacer decir primero cual es el resultado y después explicar oralmente el proceso que han seguido hasta llegar a la solución e indicar si es par o impar, si está bien a la pareja se le otorga un punto y si no cambiamos de pareja.

21	38	150	175
40	26	42	100
57	8	91	324

13	15	74	51
67	23	88	121

2. Bingo matemático (Juego)

Mismo juego que en la segunda sesión, pero en este caso en los tapones añadimos operaciones de sustracciones.

En esta sesión a parte de terminar las descomposiciones del cálculo aditivo servirá de repaso para todas las estrategias aditivas del cálculo mental y se tendrá que poner en practica la mayoría de estas estrategias

Sesión 5

1. Resuelve estas operaciones con las estrategias explicadas previamente.

a) $13 \times 2 =$

b) $27 \times 3 =$

c) $25 \times 4 =$

d) $38 \times 5 =$

2. Une mediante flechas.

a) 11×6 1) 306

b) 16×8 2) 175

c) 25×7 3) 66

d) 34×9 4) 128

3 Pon el resultado de estas operaciones.

a) $15 \times 10 =$

b) $100 \times 31 =$

c) $50 : 10 =$

d) $100 : 10 =$

4. Los dados (Juego)

Para este juego el alumnado se tendrá que poner en tríos o en parejas y cada grupo necesitará cuatro dados. Primeramente, se tendrán que poner números aleatorios en la pizarra, después cada grupo tendrá que tirar los cuatro dados que poseen y tras esto tendrán que hacer las operaciones mentales que vean convenientes para poder realizar uno de los números de la pizarra, pueden combinar las operaciones, si no pueden formar un número se tiran otra vez los dados. Cuando puedan formar un número estos lo tendrán que escribir en la libreta para posteriormente ver los diferentes caminos que han elegido los grupos para poder formar cada número. Cada número que se tenga correctamente se sumará un punto para el grupo.

En esta sesión se explicarán las estrategias elementales de las estrategias multiplicativas. Se centrará en afianzar los conocimientos de la última explicación y repasar todas las estrategias explicadas en las otras sesiones. Esta sesión sería la última en la que se realizarán explicaciones ya que creo que estas son las estrategias más adecuadas para este curso de Primaria.

6º Sesión

1. Control

2. Juegos que más le hayan gustado de las otras sesiones

En esta sesión se va a realizar el control para ver si han llegado a captar los conocimientos y nos dice los errores que estos tienen y poder repasarlos en esta misma sesión. En el caso que el examen haya sido un éxito se podrá realizar cualquier juego que se hayan expuesto en esta intervención.

3.3.2 Temporalización

La temporalización va a depender de cada sesión por lo que los detallare sesión por sesión.

Para la primera sesión la explicación ocupará veinte minutos, cada actividad se realizará entre cinco y siete minutos en lo que se incluye las correcciones de cada una. El juego ocupará el resto de la clase hasta el final.

Para la segunda sesión considero que el contenido va a ser más complicado por lo que las explicaciones ocuparán treinta minutos, el ejercicio planteado se realizará en siete minutos y el resto del tiempo sobrante se utilizará para el juego de dicho día.

Para la tercera sesión las explicaciones serán de veinticinco minutos, las actividades necesitarán seis minutos aproximadamente. Si sobra tiempo se realizará el juego de dicho día.

Para la cuarta sesión se resolverán dudas sobre las sesiones anteriores por lo que dejaré quince minutos para resolver estas. Después de esto se plantearán dos juegos el primero ocupará veinte minutos y diez minutos para el último juego.

En la quinta sesión estimo que el contenido necesitará veinticinco minutos, las actividades se realizarán entre cinco y siete minutos, todo el tiempo restante de la clase se dedicará al juego.

En la última sesión se planteará el control en el que ocupará quince minutos de la clase, en el resto de la clase se realizarán los juegos que elijan los alumnos incluso se podrá realizar dos o tres juegos a la vez, si estos no se deciden.

3.3.3 La Metodología

La metodología que se va a seguir en esta intervención es una que será activa y participativa, favoreciendo cuando se pueda el trabajo grupal o la cooperación, se intentará hacer ejemplos del entorno que sea atractivos y significativos para el alumnado para que facilite el aprendizaje.

3.3.4 Los Recursos

Los recursos para estas sesiones son muy variados y los podemos distinguir en dos tipos los espaciales y los materiales. Para el primer tipo de recurso podemos encontrar el aula en la que vamos a llevar a cabo esta intervención en la que encontramos dos pizarras una de tiza y otra digital. Para el segundo tipo podemos encontrar tapones de botellas para la elaboración del juego del bingo matemático, a su vez para este juego se necesitará una bolsa o cubo para meter todos los tapones, también se requiere el uso del cartón para la elaboración de las cartas del juego de los semejantes, también necesitamos varias barajas

de cartas españolas y dados para desarrollar los últimos juegos descritos anteriormente, asimismo se necesita los materiales básicos que el alumnado lleva a clase como puede ser la libreta, lápiz, goma, etc... y material básico de las clases como las tizas y borrador.

3.4 Criterios de Evaluación

La evaluación es un proceso imprescindible para el proceso educativo, ya que este nos informa de los errores que tiene nuestro alumnado y podemos orientarlos para modificar los errores que estos cometen, además, nos informan si la propuesta está siendo correcta con este tipo de alumnado y nos permite hacer cambios en la estrategia que se ha llevado a cabo.

Los criterios que se van a tomar en cuenta son:

- Conoce las estrategias enseñadas en clase.
- Es capaz de desarrollar las estrategias de manera mental.
- Es capaz de desarrollar las diferentes estrategias de forma oral.
- Hace cálculos mentales precisos.

Los instrumentos usados para esta PID es la elaboración de un control al final de esta en la que se propondrá un examen de diez preguntas en el que tendrán un tiempo de quince minutos para elaborarlo. También se evaluará mediante la observación directa, la participación en la clase a la hora de corregir los ejercicios y el interés que este muestre en la clase, durante las explicaciones y correcciones de los ejercicios.

3.5 Participación de las Familias

Durante mi investigación he encontrado una app llamada “Cálculo mental (Matemáticas, Entrenamiento mental)”, esta app tiene varias funciones y varios niveles de dificultad. Esta app tiene tres niveles diferentes de dificultad: principiante, fácil e intermedio también se puede desbloquear un nivel más si el alumno es capaz de completar el modo intermedio en un tiempo determinado. Tiene cuatro modos de juego en el que podemos elegir entre las sumas, restas, multiplicación y división. También cuenta con la función de una gráfica por nivel de dificultad en que podemos ver nuestras partidas de esa dificultad y cómo vamos progresando con el cálculo mental. Creo que esta app puede ser muy útil, ya que en esta app aparte de entrenar individualmente se puede jugar uno

contra uno con el padre o la madre. Estas interacciones pueden hacer que el alumno aprenda de manera más rápida y significativa.

Capítulo IV: Conclusiones

Gracias a la elaboración de este trabajo de fin de grado he podido adquirir y afianzar conocimientos que desde pequeño siempre he querido obtener gracias a esto creo que he progresado en el ámbito matemático sobre todo en el cálculo mental.

Recordando viejos tiempos de la Primaria con amigos también he visto que no nos hicieron mucho hincapié sobre este tema, sino que más bien dábamos algunas cosas de pasada y sin llegar a profundizar lo suficiente para que fuese un aprendizaje significativo. También tengo que decir que en la actualidad durante las practicas que he realizado nunca se han impartido clases sobre cálculo mental excepto este último año de carrera y puede ser porque yo se lo hubiese comentado a mi tutora al principio de las practicas. Tras haber realizado este trabajo de fin de grado esto me parece inconcebible debido a que tras ver que aportaciones otorga el cálculo mental a la hora del aprendizaje del alumnado no me puedo concebir la idea de que los profesores no dediquen ciertas clases durante el mes para poder ir desarrollando este tipo de cálculo.

Esto me hace pensar que no todos los docentes están preparados para poder impartir clase de cálculo mental como dijeron Ortega y Ortiz (2002) por lo que la educación se ha estancado en este sentido, en mi opinión no siempre es culpa de los profesores sino de quien enseña a estos porque si ellos no le han prestado atención al cálculo mental no creo que estos piensen en el cálculo mental durante sus clases. En mi caso mis docentes de la carrera le han hecho hincapié en este tipo de cálculo y por eso retome mi gusanillo de la adolescencia en aprender más sobre este cálculo.

Lo único que me ha disgustado de este trabajo es que no lo he podido plantear en la clase. Me hubiese gustado tener este acercamiento, el ponerme a prueba delante de una clase explicando una intervención que yo he realizado y experimentar los cambios que tienes que hacer mientras la iba realizando, la espontaneidad que se debe de tener para realizar este trabajo.

Para concluir cabe decir que las matemáticas en general, y el cálculo mental son muy útiles en muchas de las situaciones a las que nos enfrentamos en nuestra vida diaria, así que si se enseña podremos formar ciudadanos competentes que se puedan enfrentar a varios problemas en el futuro.

Bibliografía

- Bedoya, E., & Orozco, M. (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3(11-12), 55-62.
- Del Puerto, S., Minnaard, C. L., & Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación*, 38.
- Fernández, J. (2004). *Del cálculo mental*. Madrid: ONCE José Enrique Taices
- Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É., ... & Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(1), 9-40.
- Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 17-29.
- Gómez Alfonso, B. (1994). Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores.
- Gómez, B. (1988): *Numeración y Cálculo. Síntesis*.
- Jiménez Ibáñez, J. J. (2012). Estrategias de cálculo mental. *Obtenido de IES Alhama de Corella: <http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei>*.
- Martín, M. D. C. C. (2009). Los distintos sistemas de numeración.
- Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Bilbao: Madrid, CISS PRAXIS.
- Ochoa, C. G. (2007). Los Sistemas de Numeración. *Artículo no publicado. Caracas*.
- Ortega, T., & Ortiz, M. (2002). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 5(3), 271-292.
- Ortega del Rincón, T., Ortiz Vallejo, M., & Novo Martín, M. (2002). *Cálculo mental*.
- Ortiz, M. (2011). *Cálculo metal en el aula*. CCSS. Madrid.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). Análisis Didáctico en Educación Matemática.

Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal de estudiantes de magisterio.

Segovia, I. y Rico, L. (Coords.) (2011). Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Pirámide.

Vallejo, M. (2010). Dificultades de aprendizaje. *Revista digital de innovación y experiencias educativas*, 25, 1-10.