



UNIVERSIDAD  
DE ALMERÍA

# **Estrategias para desarrollar la capacidad de aprender a aprender en Matemáticas para alumnos de la ESO**

## **Strategies to develop the ability to learn to learn in Mathematics for ESO students**

**Autor:** José María López Martín

**Especialidad:** Matemáticas

**Tutor:** José Escoriza López

**Convocatoria:** Junio 2020

**CURSO 2019/2020**



## Resumen

En este trabajo vamos a realizar un análisis de la competencia aprender a aprender, daremos sus características globales y también las adaptadas a la asignatura de matemáticas. Se pondrá de manifiesto su importancia a la hora de mostrar un determinado contenido. Mostraremos cómo el informe PISA habla de esta competencia y de las fases que el alumno tiene que realizar para adquirirla. En dicho análisis, mostraremos los errores que los alumnos cometen a la hora de realizar su aprendizaje de forma autónoma y con la finalidad de trabajar esta competencia, destacando el papel que tiene la motivación a la hora de desarrollar esta capacidad en el proceso de aprendizaje del alumno y cómo puede propiciar un estímulo extra para, así, fomentar el pensamiento crítico del alumno. También veremos la forma en la que se puede solventar estos errores utilizando como recursos la contextualización y la historia de las matemáticas. Por otro lado, avanzaremos en el trabajo explicando la contextualización y la historia de las matemáticas como recursos didácticos, indicando sus características y los enfoques que pueden aportar a la hora de enseñar matemáticas. Pondremos de manifiesto las características y la importancia de las TICs y de los entornos virtuales para realizar una enseñanza en la red. Combinaremos todos estos elementos para construir una metodología sostenida por el aprendizaje basado en el pensamiento, que será la forma de trabajo que utilizaremos para elaborar una propuesta didáctica 3ºESO, creando un entorno virtual con la herramienta *Schoology*, indicando la posibilidad de aplicación docente en un futuro de la propuesta. Para terminar, se expondrán las conclusiones obtenidas.

Palabras clave: Aprender, motivación, contextualización, historia, entorno, herramienta, matemáticas.



## **Abstract**

In this work, we will make an analysis of the learning to learn competence, we will give its global characteristics and also those adapted to the mathematics subject. We will show its importance when showing a certain content. We will show how the PISA report talks about this competence and the phases that the student has to go through to acquire it. In this analysis we will take into account the mistakes that students make when they learn autonomously and with the aim of working on this competence, highlighting the role of motivation when developing this capacity in the student's learning process and how it can provide an extra stimulus to encourage critical thinking in students. We will also see how these mistakes can be solved by using contextualization and the history of mathematics as resources. On the other hand, we will advance in the work by explaining the contextualization and history of mathematics as didactic resources, indicating their characteristics and the approaches they can provide when teaching mathematics. We will show the characteristics and importance of ICTs and virtual environments for teaching on the net. We will combine all these elements to build a methodology sustained by learning based on thought, which will be the working method we will use to elaborate a didactic proposal 3°ESO, creating a virtual environment with the tool Schoology, indicating the possibility of teaching application in the future of the proposal. Finally, the conclusions obtained will be presented.

Keywords: Learning, motivation, contextualization, history, environment, tool, mathematics.



## ÍNDICE

1.	Introducción.	4
2.	Objetivos y justificación.	5
2.1.	Objetivos.	5
2.2.	Justificación.	5
3.	Contextualización.	6
4.	Antecedentes.	7
5.	Aprender a aprender.	8
5.1.	Aprender a aprender y su adaptación a las matemáticas.	8
5.2.	Aprender a aprender según PISA.	9
5.3.	El valor motivacional.	12
5.4.	Errores cometidos al intentar adquirir la competencia.	13
6.	La contextualización como recurso.	15
7.	La historia de las matemáticas como recurso.	17
8.	La enseñanza utilizando recursos online.	19
9.	Una nueva forma de aprender: Aprendizaje basado en el pensamiento.	22
10.	Propuesta didáctica para 3ºESO.	26
11.	Conclusiones.	38
12.	Bibliografía.	39
13.	Anexo.	41
13.1.	Apuntes de ecuaciones de primer y segundo grado.	41



# 1. Introducción

La capacidad de autoaprendizaje en la vida es uno de los aspectos que el ser humano más debe potenciar, ya que es en el autoaprendizaje donde los conceptos y teorías se asimilan de una forma intrínseca y estable. En particular, en matemáticas esta capacidad no iba a ser menos. El conocimiento de las matemáticas, inevitablemente, tiene un proceso de interiorización y de comprensión, que es necesaria para poder entender un concepto. Es aquí donde reside la importancia de plasmar en el proceso de aprendizaje, la capacidad de aprender de forma individual del individuo y en lo que nos concierne, del alumnado. Este proceso no es algo estático, ya que, debido a la diversidad del alumnado, así como la cantidad de estímulos que pueden recibir, se encuentra en una continua postura de querer mejorarlo. El objetivo de este trabajo no es ni más ni menos que explorar esa mejora, una exploración realizada desde una mentalidad abierta y con cabida para, a través de las herramientas de la contextualización y la historia de las matemáticas, realizar un trabajo en el cual se intentará mejorar aspectos, proponer alternativas y analizar lo que engloba aprender a aprender en el campo de las matemáticas como competencia en el alumnado de la ESO, con el añadido de que el instrumento que se utilizará en este trabajo será el uso de las herramientas online. Estamos comprobando que el hecho de que la sociedad se confine, debido al impacto realizado por el COVID-19, no es un impedimento para que el desarrollo de los diversos aspectos de la vida, se detengan. ¿Por qué el aprendizaje de las matemáticas iba a ser menos?, ¿por qué el aprendizaje del alumno no se va a poder desarrollar de la misma manera como si este proceso fuese presencial?, aprender a aprender cómo hemos dicho anteriormente, no es un proceso estático, sino que tiene que adaptarse a las situaciones que se presenten. Por esto mismo, con la finalidad de aportar un granito de arena a esta situación, la finalidad de este trabajo será fomentar la mejora del aprendizaje personal del alumno usando la contextualización y la historia mediante herramientas online.



## 2. Objetivos y justificación

### 2.1. Objetivos

El objetivo final de este TFM es mostrar una alternativa educativa en la cual se pueda realizar una mejora de la competencia aprender a aprender en el alumnado, a través de una docencia virtual y en base a organizadores como la contextualización y la historia de las matemáticas.

Objetivos específicos:

- Indagar en la competencia aprender a aprender.
- Mostrar las debilidades del alumnado al adquirir esta competencia.
- Plantear el uso de la contextualización y de la historia de las matemáticas como mecanismos de mejora.
- Implantar una metodología virtual para realizar la mejora.
- Diseñar una propuesta didáctica que ponga de manifiesto el uso de los elementos de la contextualización y la historia de las matemáticas de forma online.
- Presentar los resultados y discutir su posible aplicación.

### 2.2. Justificación

La realización de este trabajo, como ya he mostrado en la introducción, no es ni más ni menos que indagar en la competencia matemática de aprender a aprender. Esta investigación viene motivada por un interés personal la capacidad que tiene el ser humano en aprender de forma autónoma en base a los estímulos que recibe del medio exterior y de los diferentes contextos que en los que se ve presente, ya que, a mi modo de ver, es un elemento fundamental para



conseguir la asimilación de cualquier tipo de concepto. Ver qué pautas y qué comportamientos hacen que el alumnado cometa errores en este proceso es otro de los motivos por el cual hago este trabajo, y que, para mí, ayudar a que los alumnos consigan sus objetivos y sobre todo que se lleven un conocimiento personal, es algo fundamental como labor docente. Desde mi punto de vista, usar herramientas como la historia de las matemáticas o la contextualización, es algo apasionante, ya que soy amante de la procedencia de cualquier concepto, de su evolución y de la interpretación que ha tenido a lo largo del tiempo. Para terminar, el hecho de plasmar esta idea de trabajo de forma online lo hago por el simple hecho de contribuir a un cambio, un cambio que será futuro ya que, en la situación de confinamiento, es muy complicado, por no decir imposible, realizar una adaptación completa para conseguir realizar la enseñanza de forma óptima. La comunidad educativa ha conseguido salvar la situación, pero eso no quita para que, en un futuro, en cualquier situación que requiera de una enseñanza a distancia, se tenga que conformar con los recursos actuales. Es por eso que quiero realizar una aportación en esta modalidad para futuras situaciones que lo requieran.

### 3. Contextualización

En este apartado hablaré de la contextualización del TFM, no de la contextualización a modo de recurso. Se debe mencionar que, debido a la situación del confinamiento, las prácticas externas, en la segunda fase, se realizarán de forma telemática, es decir, online. La propuesta didáctica que quiero realizar será acorde a esta situación y al centro en el que me encontraba realizando las prácticas. Además, irá dirigida al curso de 3ºESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

El centro es el IES Albaida y se encuentra situado en la entrada del Barrio de Los Molinos y del Diezmo de la ciudad de Almería en la Carretera de Níjar, lugar conocido tradicionalmente como Cuatro Caminos. El alumnado procede de tradicionales barrios obreros como El Diezmo y los Molinos, la zona en expansión de la Avda. del Mediterráneo y la barriada de El Puche,



donde reside una población con un nivel económico, social y cultural bajo o muy bajo. Por ello, existen evidentes diferencias socioculturales y económicas entre el alumnado. Las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas se imparten en ambos grupos de 3º ESO. El grupo al que impartiré clase será 3º ESO A. Esta clase está formada por 26 alumnos/as. En el grupo hay tres alumnos que tienen las Matemáticas de 2º ESO pendientes. El profesor de este grupo será mi tutor de prácticas. De forma telemática, intervendré en la parte de geometría correspondiente al curso, por lo que la unidad didáctica tendrá la geometría como contenido principal.

## 4. Antecedentes

Tras realizar un barrido general y ver los estudios previos que se han realizado respecto al tema, he seleccionado dos que, creo, son interesantes para el estudio que queremos realizar. El primero de ellos es un artículo en el que se habla de la metacognición como un camino para el aprender a aprender. Osses Bustingorry y Jaramillo Mora (2008) muestran una alternativa posible para mejorar la autonomía de los alumnos. Utilizan la metacognición, que es el conocimiento que tiene el ser humano sobre los propios procesos de aprendizaje. Además, establecen una base educativa que potencia los procesos cognitivos y el autoaprendizaje de los alumnos, haciendo que este proceso mejore la competencia de aprender a aprender, es decir, posibilitar a los alumnos controlar su proceso de aprendizaje y poder llevarlo a otros contextos.

Para finalizar, el último trabajo, que es una tesis doctoral, habla sobre los fundamentos y las herramientas necesarias para implementar la competencia de aprender a aprender en la educación secundaria. Escamilla González (2016) en su trabajo, muestra un análisis de la competencia aprender a aprender desde diversos enfoques, Uno de ellos es la formación y la capacidad que tiene el profesorado para lograr que, en los contenidos del currículo, se ponga de manifiesto los objetivos que tiene esta competencia. Además, señala que la evaluación de la competencia aprender a aprender tiene un papel clave, ya que pone de manifiesto su carácter esencial en la formación y en la optimización de los procesos de aprendizaje. Por último, indica



la relación que existe entre la competencia aprender a aprender y algunas formas de trabajo colaborativo, ya que estas fomentan en el alumnado capacidad de autoaprendizaje, motivación y trabajo en equipo, que son elementos esenciales para desarrollar la competencias, además muestra una estrecha relación entre la competencias y las inteligencias múltiples, ya que estas permiten diferentes enfoques para que el alumno pueda analizar las diferentes etapas del proceso de aprendizaje.

## **5. Aprender a aprender**

### **5.1. Aprender a aprender y su adaptación a las matemáticas**

La capacidad que vamos a estudiar es la competencia aprender a aprender. Carretero y Fuentes (2010) realizan un análisis de esta competencia llegando a la conclusión de que aprender a aprender consiste en que el alumno debe disponer de todos los conocimientos, destrezas y acciones indispensables para tener un aprendizaje regulado de forma propia, aprendiendo a optimizar todos los recursos que disponga para así conseguir, debatir, cuestionar, analizar, comparar, clasificar, valorar y estimar una determinada información con la finalidad de dar forma a un nuevo conocimiento. En definitiva, aprender a aprender es la capacidad que tiene el alumno de organizar su propio aprendizaje, realizándolo de una forma cada vez más exitosa e individual, acorde a las pretensiones que se determinen en cada momento.

Esta definición de la competencia es con la que nos quedaremos para la elaboración de este trabajo. Es destacable mencionar que esta competencia es una competencia básica que está presente en todas las materias. En Matemáticas, sigue la línea general antes mencionada, pero adaptada a los contenidos correspondientes. Para Gutiérrez, Martínez y Nebreda (2008), la



competencia en el campo de las matemáticas se cumple si se tienen en cuenta los siguientes elementos:

- Emplear herramientas matemáticas básicas o asimilar información con estructura matemática como premisa para el proceso de aprendizaje.
- Potenciar los contenidos relacionados con la autonomía, la perseverancia y el esfuerzo del alumno para abordar situaciones complejas que requieren una sistematización, un rigor crítico y una comunicación eficaz para conseguir buenos resultados en el trabajo.
- La verbalización del proceso durante el aprendizaje ayuda a que se asimilen los conceptos aprendidos, además ayuda a la reflexión personal que potencia las posibles estrategias que puede seguir el alumno para que le facilite el aprender a aprender.
- La actividad creadora y su labor de investigar, les harán sentirse capaces de aprender, aumentando su autonomía y responsabilidad y compromiso personal.

## 5.2. Aprender a aprender según PISA

El informe PISA se encarga de recopilar información y de realizar estudios sobre el nivel educativo en diferentes países. Realizan diferentes pruebas, según materias y niveles, al alumnado para poner de manifiesto sus capacidades de aprendizaje, así como ver los errores comunes que cometen. En el caso de las matemáticas, de igual manera, esta evaluación la realiza en base a unas competencias que debe lograr el alumno. Por lo que a nosotros respecta, la competencia aprender a aprender no aparece como tal para PISA, sino como una idea general que se adquiere con el conjunto de elementos que conforman la competencia matemática. Para OECD (2013), la competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas



desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

OECD (2017) destaca las palabras *formular*, *emplear* e *interpretar* como los procesos fundamentales en los cuales los alumnos se verán sometido para desarrollar la competencia matemática. Tal y como está definida la competencia, se fomenta que los alumnos tengan presente el papel de las matemáticas en el mundo, ayudándoles a realizar juicios y análisis que les ayuden en la toma de decisiones, de una forma bien argumentada tal y como se le exige a un ciudadano que sea comprometido y reflexivo respecto a los estímulos que recibe del mundo. Desdoblado estas tres palabras, que podemos mostrarlas como las “etapas” que se deben realizar para adquirir la competencia matemática, se realiza un análisis en profundidad de la competencia matemática. A continuación, voy a citar textualmente la interpretación que realiza el informe sobre estas tres etapas. En cuanto a la etapa de *formular*, OECD (2017) afirma que:

Formular hace referencia a la capacidad del individuo para reconocer e identificar oportunidades para utilizar las matemáticas y, posteriormente, proporcionar la estructura matemática a un problema presentado de forma contextualizada. En el proceso de formulación matemática de las situaciones, los individuos deciden dónde pueden extraer las matemáticas necesarias para analizar, plantear y resolver el problema (p.66).

Esta etapa, a mi modo de ver, es la esencial para conseguir para conseguir la asimilación de esta competencia, ya que es en esta donde alumno muestran todo el aprendizaje matemático que han tenido hasta el momento y dónde pueden ver las carencias y virtudes que tienen del mismo.

En la etapa de *emplear*, OECD (2017) manifiesta que:

El término empleo hace referencia a la capacidad del individuo de aplicar conceptos, datos, procedimientos. En el proceso de empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos para resolver problemas, los sujetos



ejecutan los procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas formulados matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones matemáticas matemáticos necesarios para obtener resultados y encontrar una solución matemática [...] Trabajan sobre un modelo de la situación problemática, establecen regularidades, identifican relaciones entre entidades matemáticas y elaboran argumentos matemáticos (p.67).

En esta etapa es donde el docente puede ver los fallos que cometen los alumnos y verificar que han realizado la etapa anterior de forma correcta. Realizando un análisis en profundidad de los elementos correspondientes a este proceso, el docente puede paliar las carencias que se pueden presentar en la etapa de formulación, ya que viendo el tipo de error que se comete al emplear un concepto puede volver a mostrarlo de una forma alternativa para que el alumnado consiga asimilarlo.

Para terminar, en la etapa de *interpretar*, OCDE (2017) muestra que:

El término interpretar, utilizado en la definición de competencia matemática, se centra en la capacidad del individuo de reflexionar sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas e interpretarlos en el contexto de los problemas de la vida real. Esto implica traducir las soluciones matemáticas o razonar de nuevo sobre el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en dicho contexto. Esta categoría de proceso matemático incluye tanto la categoría "interpretar" como "evaluar" representadas en el modelo de competencia matemática en la práctica definido anteriormente. [...] Los individuos que toman parte en este proceso pueden ser llamados a elaborar y comunicar explicaciones y argumentos en el contexto del problema, reflexionando tanto en el proceso de construcción de modelos como en sus resultados (p.68).

El valor de esta etapa reside en que es aquí donde el alumno pone en práctica lo aprendido en las dos etapas anteriores, ya que, si ha realizado un aprendizaje correcto y acorde a las pretensiones que se le exija, pondrá de manifiesto su capacidad para interactuar con el problema



en el mundo real, teniendo la capacidad de comunicar y elaborar los resultados, acorde al contexto que tiene el problema.

En definitiva, para PISA la competencia aprender a aprender, su esencia viene de forma intrínseca en los que ellos definen como competencia matemática. Ya que las diferentes “etapas” en las cuales estructuran la competencia, se asemejan, por no decir que son idénticas, al proceso que se tiene que realizar por parte del alumnado para adquirir la competencia de aprender a aprender.

### **5.3. El valor motivacional**

A mi modo ver, uno de los elementos esenciales que hay que mejorar para lograr que esta capacidad tenga mejores resultados es la motivación que pueda llegar a tener el alumno, ya que esta es una pieza fundamental para lograr que el alumno refleje un interés mayor para incrementar su capacidad de aprendizaje. Tapia (2005) habla sobre el papel que realiza la motivación en el proceso de aprendizaje del alumno, mostrando cómo puede influir en el significado, la realización y la percepción que pueda tener el alumno a la hora de realizar una actividad. Muestra el valor motivacional que tiene todo el contexto que hay en la realización de una clase, ya que el hecho de cómo está planteada, su desarrollo y cómo interviene el alumno son factores que afectan a la motivación del alumnado. También cabe mencionar que el papel del profesor y los métodos de evaluación, tanto el planteamiento como su utilización, pueden afectar al alumno a la hora de establecer sus criterios de autoaprendizaje. Es por todo ello, que el papel del profesor y de la dinámica que establezca pueden ser fundamentales para ayudar al alumno a crear ese espacio necesario para fomentar sus capacidades de autonomía.

Alsina y Domingo (2007) presentan la motivación por parte del alumnado como la contraposición de la indiferencia, ya que ponen de manifiesto que un alumno estará motivado cuando el contenido que tenga que aprender no le causes indiferencia, a más indiferencia menor será la motivación.



Alsina y Domingo (2007) hablan sobre los subtipos de motivación:

Existen varios subtipos de motivación académica:

- Motivación de competencia, basada en incrementar la propia competencia.
- Motivación de control, que persigue actuar con la máxima autonomía, sin ser obligado.
- Motivación intrínseca, basada en experimentarse absorbido por la naturaleza de la tarea.
- Motivación de logro, basada en experimentar el orgullo que sigue al éxito.
- Motivación por miedo al fracaso, para evitar la experiencia de vergüenza o de humillación que acompaña al fracaso.
- Motivación para el premio, para conseguir premios o recompensas. (p.24).

Skemp (1980), citado por Alsina y Domingo (2007), distingue entre dos tipos de motivación, una motivación extrínseca que consigue motivar al alumnado a base de premios o penalizaciones; y otra motivación intrínseca que proviene del propio alumno a la hora de aprender por su cuenta. Es por esto último, que la competencia aprender a aprender va ligada a un factor alto de motivación intrínseca por parte del alumnado para lograr que cumpla todas las condiciones necesarias para el desarrollo de la competencia y conseguir establecer un proceso de aprendizaje autónomo que sea acorde a los contenidos que se quieran adquirir.

## **5.4. Errores cometidos al intentar adquirir la competencia.**

En esta sección quiero hablar sobre los errores comunes que cometen los alumnos a la hora de desarrollar la competencia de aprender a aprender. El estudio de estos errores que se presentan



en este proceso, hacen que el docente tenga un abanico de posibilidades para corregir las carencias de la metodología que use y, sobre todo, son un factor de motivación, ya que, en mi opinión, un error puede suponer un incremento de confianza a la hora de aprender un nuevo concepto, debido a que los errores suelen aparecer cuando el alumno se ve expuesto a nuevas situaciones, procedimiento esencial para fomentar tu capacidad de autoaprendizaje. En esta línea Ruano, Socas y Pararea (2008) muestran la idea de que el conocimiento del alumno sobre un determinado contenido no parte desde un desconocimiento absoluto, ya que, en su mente hay ya una serie de saberes y conocimientos previos, que hacen que le parezca suficiente y se genere un equilibrio mental entre lo desconocido y lo ya asimilado. Es por ello, que el principal motor para que el alumno logre la asimilación completa del nuevo conocimiento es que tenga un significado acorde a su mente, para esto, el alumno debe dar respuesta a las preguntas que él mismo realiza. Es importante aclarar que el nuevo conocimiento no se añade al anterior, todo lo contrario, esto le genera un conflicto que provoca una reestructuración mental del conocimiento completo, buscando un espacio para lo ya aprendido, posibilitando lograr un equilibrio íntegro. En este proceso es donde aparecen los errores, ya que el hecho de enfrentarse a un conocimiento novedoso provoca una revisión de lo que ya saben, provocando una exposición frente a lo desconocido que les hace ser más propensos a cometer errores.

Es, en esa reestructuración, donde se pone de manifiesto las diferentes cualidades adquiridas por el alumno, cuando las diferentes visiones de un concepto o teoría entran en un contraste llegando a chocar entre ellas, es cuando el alumno entra en un proceso esclarecedor de ideas. Este proceso puede estar provocado por los errores que cometa. Por eso, insisto en que un error puede suponer una nueva vía para acoplar los conceptos en la mente del alumno de la forma conveniente. Estos errores pueden estar desarrollados por muchas variables que intervienen en el proceso de aprendizaje, tal y como dicen Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2004, p.26): “No podemos desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural, entre otras.” Por todo lo acontecido, puedo poner de manifiesto que, según mi entender, los errores más comunes a la hora de adquirir esta competencia son los siguientes:



- La dependencia del alumnado hacia la figura del profesor.
- La tendencia a mecanizar cualquier asimilación de un concepto.
- La falta de motivación y curiosidad a la hora de realizar el aprendizaje.
- La falta de análisis conceptual y contextual de una teoría.
- El miedo a rebatir un concepto que ya creen superado.

## 6. La contextualización como recurso

Esta sección vamos a presentar la contextualización como un recurso didáctico que nos permita mejorar la competencia aprender a aprender. Durante la etapa de adquisición de esta competencia, así como durante la etapa de aprendizaje de una teoría, el alumno tiene que realizar un proceso de modular y estructurar las diferentes percepciones que tiene sobre los estímulos que le genera el hecho de que está aprendiendo algo nuevo. Es, en esos estímulos, donde reside un factor fundamental que permite la asimilación completa e íntegra de un concepto. Aquí juega un papel importante la contextualización, ya que se puede interpretar como el medio de transporte que toma el estímulo para llegar a la mente del alumno. De forma menos abstracta, si tomamos el ejemplo del estudio de funciones de variable real como un simple problema en el cual tomamos una función  $f(x)$  con variable  $x$  y queremos calcular la imagen en ciertos puntos, el hecho de mostrar conceptos como función, variable e imagen de forma tan teórica puede suponer que el alumno no lo identifique con los conocimientos que ya posee. Por ejemplo, si esa misma situación, la presentamos como un problema en el que  $f(x)$  mida la cantidad de dinero que genera una empresa en un tiempo  $x$  y pedimos el beneficio en una determinada etapa, es decir, la imagen de la función, esto supone un valor extra que puede estar asociado a un impulso motivacional que haga que el alumno pueda asimilar el concepto de forma correcta. El hecho de contextualizar un problema puede suponer una gran ayuda, ya que hace que el alumno se vea más cerca de los conocimientos abstractos de las matemáticas.



En esta tarea tiene un papel fundamental la alfabetización matemática que según OECD (citado en Rico, 2007) se define como:

la capacidad individual para identificar y comprender el papel  
que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados,  
utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades  
de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (p.49).

Tal y como expresa Rico (2007), en el proceso de alfabetización, las situaciones y los contextos son fundamentales, ya que el hecho de tratar un determinado problema matemático, a su forma de resolución y de explicación, dependen de las situaciones en las que se encuentre el problema. La situación es la parte donde se encuentra el problema a resolver, dando la oportunidad de localizar una alternativa en función de lo que surge y condiciona a la problemática planteada. Existen relaciones entre situación y contexto, tal y como manifiestan Pajares, Rico y Sanz (2004), dicha relación parte de que los problemas y las soluciones pueden ponerse de manifiesto en diversas situaciones y contextos. Los problemas aparecen en situaciones en las que el alumno se ve expuesto en su día a día. Las situaciones forman parte de ese día a día, dando la consistencia necesaria al mundo real. En cambio, los problemas dentro de una situación determinada, tiene un contexto mucho más concreto. En definitiva, la unión del contexto y de la situación otorgan al alumno la capacidad de localizar el problema en función de los fenómenos y estímulos que provoca la situación problemática en cuestión.

Es por ello, que pueden surgir diferentes tipos de problemas matemáticos en función de la tarea que se quiera realizar. Para Pajares, Rico y Sanz (2004), las situaciones y contextos que puede presentar un problema se pueden enfocar desde un punto de vista que muestre la distancia entre el problema y las matemáticas que se tengan que emplear para la resolución de la tarea en cuestión. Si dicha tarea se ciñe a elementos puramente matemáticos, el contexto de la tarea será intra-matemático, mientras que, si la relación entre el problema y las matemáticas se hace explícita, influyendo la situación en la solución e interpretación, el contexto de la tarea



será extra-matemático, que son los tipos de contextos que el alumno se encuentra en la vida cotidiana. Es aquí donde la contextualización de un problema es un recurso esencial para la mejora de la competencia aprender a aprender, ya que tratar el método de aprendizaje con tareas con contexto extra-matemático, puede aportar al alumno una motivación extrínseca que facilite y que predisponga a la asimilación de conceptos de una forma más esclarecedora.

## 7. La historia de las matemáticas como recurso

En esta sección vamos a presentar a la historia de las matemáticas como un recurso didáctico que sirva para mejorar la competencia de aprender a aprender. Durante la etapa de aprendizaje, el alumno necesita visualizar el porqué de un determinado concepto o teoría, ya que esto posibilita esclarecer el camino de su aprendizaje, esta cuestión se puede abordar desde la procedencia del concepto, de la evolución que ha tenido con el pasar del tiempo y las diferentes interpretaciones que ha podido tener. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras ha tenido diferentes demostraciones, desde la versión realizada en el *Zhoubi Suanjing* hasta la versión de Euclides en su obra *Los Elementos*. Estas circunstancias no se suelen explicar al alumnado en la etapa de secundaria. No se pretende que adquieran el conocimiento que se desarrolla en ambas demostraciones, pero sí mostrar desde un punto de vista motivacional, las diferentes formas en las que a lo largo de la historia se han ido moldeando, adaptando y optimizando el teorema de Pitágoras. Este hecho se puede aplicar a cualquier contenido matemático, haciendo que el alumno realice un viaje a través del tiempo que le permita entender cómo y porqué se conoce actualmente dicho contenido. Respondiendo a esas preguntas, se le posibilita una base de conocimientos que le ayuda a su total comprensión. La implantación de la historia en la enseñanza de las matemáticas se puede implementar de diversas formas, desde una breve introducción histórica en el comienzo de un tema, hasta unos apuntes complementarios que



expliquen los acontecimientos importantes para el desarrollo de un cierto contenido. Entre todas esas posibilidades, existe una forma mucho más precisa que se consigue a través del método genético.

Urbaneja (2004) escribe que:

La aplicación del método genético en la enseñanza, que ha sido reivindicado por grandes matemáticos y profesores de Matemáticas, pretende demostrar que, para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto.[...].No sólo las dificultades son las mismas sino que los estudiantes deberán superarlas aproximadamente de la misma manera en que lo hicieron los matemáticos a lo largo de la historia, familiarizándose de forma gradual con los nuevos problemas, empezando por el nivel intuitivo, que va fraguando de forma progresiva métodos, técnicas, ideas y conceptos (pp. 22-23).

Tal y como muestra Palenzuela Rodríguez (2017), el método genético es una herramienta que aporta cosas positivas tanto al profesorado como al alumnado. Para el profesorado, es una oportunidad de visualizar y tratar de primera mano los obstáculos, complicaciones y pautas erróneas que los matemáticos han cometido en el pasado, para así mostrar los conocimientos matemáticos a los alumnos de una forma más esclarecedora y enriquecedora. En cuanto a los alumnos, les va a permitir comprender y pensar en profundidad las matemáticas que están estudiando, ya que sabrán su origen y su principal esencia.

La historia de las matemáticas tiene una gran importancia en la educación, ya que como hemos ido viendo, puedo aportar al alumno diferentes puntos de vista que fomenten su aprendizaje, este aprendizaje no tiene porqué ser únicamente matemático, ya que puede ser cultural y social. Para terminar, según Meavilla-Seguí (2008), el uso de la historia de las matemáticas como recurso es beneficioso por los siguientes aspectos:



- Facilita al profesor materiales y recursos didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de sus alumnos y alumnas.
- Permite descubrir el lado ameno de las Matemáticas y puede influir favorablemente en la motivación de los estudiantes.
- Ayuda a inculcar en los alumnos y alumnas valores como el esfuerzo, la constancia, el trabajo, la humildad, la disponibilidad, etc.
- Contribuyen a valorar la aportación de las mujeres en la construcción y el desarrollo de dicha disciplina.
- Permite aprender con la ayuda de unos profesores muy especiales: los grandes sabios de otros tiempos.
- Muestra que dicha disciplina es una ciencia viva y que sus conceptos y procedimientos suelen cambiar con el tiempo.
- Permite dar una visión más humana de dicha ciencia (la Matemática no es obra de los dioses, es el resultado del trabajo de hombres y mujeres que suelen equivocarse). Este hecho puede contribuir a que el alumno no se sienta frustrado ante sus errores y pueda aprender de ellos.
- Los profesores (alumnos) pueden aprovecharse especialmente de la perspectiva histórica de las Matemáticas, descubriendo métodos alternativos para la resolución de problemas, distintos de los que generalmente enseñan (aprenden) en clase y que pueden ser beneficiosos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.
- Puede contribuir a apreciar la utilidad de esta disciplina en la resolución de problemas prácticos.
- Permite mostrar a los estudiantes el papel capital de las Matemáticas en la construcción de la cultura humana.

## 8. La enseñanza utilizando recursos online

El aprendizaje de las matemáticas por parte del alumnado siempre ha supuesto un gran esfuerzo por parte de las familias, ya que estas buscan una infinidad de recursos para que sus hijos



dispongan de la mejor formación, ya sea desde un profesor particular hasta recursos como vídeos o apuntes en internet. En esto último es donde me quiero detener, sobre todo en la importancia que puede tener el uso de estos recursos, mucho más en la situación que está atravesando el mundo debido al confinamiento que ha supuesto el cierre de las aulas y la adaptación del sistema educativo a una enseñanza plenamente a distancia.

Esta transformación, realizada de una forma rápida y con carencias, hace que tengamos la duda si este tipo de educación posibilita al alumno a conseguir los medios y los conocimientos necesarios para realizar su proceso personal de aprendizaje, es por ello que en esta parte del trabajo hablaré de diversas formas y recursos para posibilitar al docente lograr sus objetivos, con visión de futuro para que, en una situación de característica similares, la educación disponga de una hoja de ruta para intentar mantener la normalidad.

En esta tarea, tienen una gran importancia el uso de las TICs y de los entornos virtuales, ya que son estos los que pueden crear un ambiente similar al generado en clase, acercando al docente al alumnado y mostrando al alumno la diversidad de conocimientos que desea lograr.

Las TICs posibilitan situaciones interesantes en las que el docente tiene la oportunidad de mostrar un conocimiento desde otro punto de vista, más práctico y alternativo al que el alumnado está acostumbrado en clase, ofreciendo procesos de análisis, reflexión y síntesis de los contenidos. Como muestran Talebian, Mohammadi, Rezvanfar (2014) las TICs están formadas por el hardware, software, la red de internet y los medios de imagen y sonido, que se emplean para recopilar, contar, procesar, transmitir y presentar información como una nueva forma de servicio. Se pueden dividir en dos grupos, en infraestructuras de la información y de la comunicación y las tecnologías de la información. Las TICs posibilitan una nueva forma de enseñanza acorde a los tiempos actuales, ya que son utilizadas por muchos centros educativos en el proceso de enseñanza y de organización de los contenidos que quieren impartir. Las TICs se usan en muchas áreas educativas para aportar material a los alumnos, enviar y compartir contenido, enviar y compartir contenido, comunicarse entre los diferentes miembros de la clase (ya sea entre profesores, entre alumnos y entre alumnos y profesores), enseñar contenidos fuera



del aula, realizar búsquedas académicas, en definitiva un amplio espectro de posibilidades que aplicadas de una forma coherente a la educación, hacen que sean un elemento innovador y regenerador de los métodos de enseñanza.

En este contexto, juega un papel importante el e-learning una forma de aprendizaje fundamentada en el uso de las TICs. Consiste en la creación de un entorno online, a través de diversas plataformas en las que el docente tiene que adaptar los contenidos de una clase convencional de tal forma que, independientemente del momento en el que el alumno acceda a ellos, disponga del material de clase. La principal característica de este contexto de aprendizaje, lo muestra Area y Adell (2009, p.2), “el proceso formativo tiene lugar totalmente o en parte a través de una especie de aula o entorno virtual en el cual tiene lugar la interacción profesor-alumnos, así como las actividades de los estudiantes con los materiales de aprendizaje.”

Por ello, en el hecho de la creación de un entorno es donde reside el mayor trabajo por parte del docente a la hora de seguir el e-learning, ya que es aquí dónde va a tener el contacto con el alumno. Este proceso, tal y como muestra Casal (2004), se inicia teniendo en cuenta que para elaborar esta enseñanza es necesario tener un software que disponga de herramientas y medios que permitan el desarrollo completo del curso. En definitiva, que muestre un entorno sencillo y accesible para que los alumnos puedan aprender, acceder a la información, compartir dudas y consultas; siendo todo esto flexible e intuitivo respecto a las necesidades que pueden tener tanto el alumno como el profesor. Combinar un buen entorno de aprendizaje con una dinámica continua de e-learning, es el principal objetivo que se tiene para que este tipo de aprendizaje se mantenga de una forma coherente. En cuanto a la dinámica de aprendizaje, al alumno se le debe asegurar el acceso al material didáctico, el contacto con el profesor y los compañeros, poder realizar tareas de índole individual y grupal que favorezcan a la mejora de su aprendizaje, la organización y planificación del estudio y el intercambio de información, es decir, todas las características que se tienen de forma presencial pero llevadas al entorno virtual. Tanto la evaluación, como la disposición de trabajo, tienen que ser dinámicas y adaptadas a la disponibilidad frente al medio que tengan los alumnos. En resumen, el empleo correcto de un



entorno virtual depende de muchos factores tales como la calidad del material aportado por el profesor, el uso idóneo de las herramientas de comunicación (videoconferencias, correos, foros de debate, etc) y la actitud de los integrantes de esta dinámica, ya que este es un factor, que como estamos mostrando a lo largo de este trabajo, determina el éxito que puede llegar a tener el alumno ante esta posibilidad de aprender, todo ellos de la mano y del buen uso de las TICs.

## **9. Una nueva forma de aprender: Aprendizaje basado en el pensamiento.**

En este punto del trabajo, tras realizar una exploración de la competencia aprender a aprender, así como la visión que tenemos de la misma y los más que posibles errores que se pueden cometer a la hora de adquirirla, un análisis de la contextualización y de la historia de las matemáticas como recursos didácticos y mostrar las TICs y los entornos virtuales como herramientas para realizar una enseñanza a distancia de calidad; nos falta como juntar todas estas piezas de tal forma que en el contexto que nos está tocando vivir debido al estado de alarma y al confinamiento, logremos transmitir al alumnado una enseñanza justa y acorde a la situación que fomente una dinámica de trabajo autónomo con la intención de mejorar la competencia de aprender a aprender.

Como es bien sabido, en educación para llegar a transmitir un conocimiento por parte del docente al alumnado, se utilizan una serie de estrategias o metodologías para conseguir dicho objetivo. La propuesta que quiero transmitir necesita una base, un sostén mediante el cual todos los factores que he expuesto en el anterior párrafo sigan un línea coherente y estable que consiga cohesionar todos los conocimientos para así mejorar el aprendizaje de la competencia aprender a aprender. Tras una exploración y análisis de las diferentes metodologías en las cuales me pudo ayudar, he llegado a la conclusión, debido a sus características, que la más idónea es la conocida como el *Aprendizaje basado en el pensamiento*. Esta metodología tiene como principal objetivo cultivar la cultura del pensamiento en los alumnos, dejando a un lado



el mero hecho de memorizar y potenciando sus capacidades de exploración y pensamiento lógico, por este hecho se dice que en realidad su objetivo primordial es mejorar la capacidad de aprender a aprender. A continuación, vamos a exponer las principales ideas que recoge esta metodología.

El principal valedor de esta teoría es el Robert J. Swartz, citando unas de sus palabras, “Enseñar a pensar a los niños les hace mejores estudiantes y personas”, pone de manifiesto que incrementando la capacidad de pensamiento de los alumnos, no solo mejoramos las capacidades intelectuales en una determinada materia, en nuestro caso en matemáticas, sino que formamos pensadores para el mundo real que puedan contribuir de forma activa a la mejora de su entorno y tener una mayor soltura a la hora de enfrentarse a un problema en diferentes contextos. Es por esto, que el docente tiene la tarea de enseñar a sus alumnos un determinado tipo de pensamientos, que sea útil y encaje en las pretensiones que se quieren lograr. Tal y como indican Swartz, Regan, Costa, Beyer y Killick (2014), la forma de pensamiento que se lleva a la práctica es muy diversa, por eso mismo hay que seguir una hoja de ruta para esclarecer que pasos hay que realizar cuando se pretende mostrar un tipo concreto, por tanto, no basta con mostrar una tarea que fomente un determinado contenido, sino que tienen que ser algo más complejas como la toma de decisiones, cuyo objetivo principal será que el alumno tome la mejor decisión, la resolución de problemas, buscando siempre la mejor solución, y la conceptualización, con la finalidad de tener una mayor comprensión profunda de un tema. Estas tareas emplean una serie de destrezas, o componentes del pensamiento, que mejorarán la capacidad de aprendizaje del alumno.

→ Procesar y ampliar información.

◆ Generar ideas.

- Buscar ideas: Explorar distintas posibilidades plasmando las diferentes ideas que vayan surgiendo.
- Síntesis: Combinar las diferentes ideas surgidas para obtener nuevas y realizar analogías para facilitar su comprensión.



- Ampliación de ideas: Sacar ideas de otras ideas e informaciones analizadas.
- ◆ Aclarar ideas.
  - Análisis: Comparar y verificar ideas. Relacionar ideas del mismo contexto. Realizar secuencias de ideas. Mostrar ideas objetivas y subjetivas.
  - Analizar argumentos: Elaborar conclusiones y razones sobre la validez o no de una idea. Saber posicionarse de forma coherente respecto a una idea.
- Evaluación crítica de la información.
  - ◆ Información básica
    - Juzgar la objetividad de la información.
    - Juzgar la fiabilidad, la credibilidad y la finalidad de de las fuentes de información.
    - Juzgar el grado de trascendencia de una determinada información en un tema o problema.
  - ◆ Inferencia.
    - Juzgar la posibilidad de que la información sea causal.
    - Juzgar la posibilidad de que la información sea una predicción.
    - Juzgar si una información trata un tema concreto o se refiere a una generalización.
    - Juzgar la importancia de los pensamientos análogos a un tema.
- Argumentos
  - Juzgar la precisión de las suposiciones que muestra una idea.
  - Juzgar la importancia y el peso de los razonamientos en los que se sustentan las conclusiones.
  - Juzgar la veracidad del razonamiento condicionado al contexto.



Esta hoja de ruta llega a ser muy esclarecedora a la hora de elaborar actividades o tareas con la finalidad de provocar un aumento de pensamiento crítico en los alumnos. Cohesionar esta metodología con la contextualización y la historia de las matemáticas es una tarea bastante apasionante desde mi punto de vista, ya que estos dos elementos proporcionan una serie de ideas y preguntas, tales que, el simple hecho de explicar el tema con los conceptos teóricos no te lo va a proporcionar. A modo de ejemplo, si nos encontramos explicando el tema de probabilidades, si usamos la contextualización, y estamos realizando un ejercicio de cálculo de probabilidades usando como espacio muestral una baraja de cartas, este hecho ya hace que acerques al alumno el concepto de probabilidad, logrando una motivación y un surgir de preguntas mucho más real que el que podría otorgar un problema en el que solo encontremos contexto matemático. ¿Cuántas cartas de un determinado tipo hay?, ¿Si cambio de baraja, las probabilidades serán iguales?, ¿Qué es lo que me asegura que un tipo de carta esté en la baraja? Una serie de preguntas que el alumno se puede plantear, el simple hecho de que esto ocurra le instala la idea de lo que puede ser la probabilidad, como la visualiza, para qué sirve, en qué situaciones la puedo usar, etc. Al igual ocurre con la historia, podemos acercar al alumno la evolución del concepto de probabilidad o la vida e importancia de un matemático o matemática en ese campo, mostrarles que todo tiene un motivo de existencia. ¿Por qué el concepto de probabilidad es el que conocemos?, ¿Por qué no sirve otro que se hubiese establecido?, ¿Qué es lo que provocó su elaboración? Preguntas, y más preguntas, este es el principal objetivo y que estos dos recursos aportan un amplio arsenal de ellas que el docente puede usar a su mejorar la forma de pensamientos.

Pero es obvio que no siempre esto va a surgir de la nada, no todos los alumnos van a tener esa capacidad, es por ello, que para que esto se desarrolle de forma plena, en ocasiones esas preguntas las debe presentar el docente. Hay muchas formas de hacerlo, durante la clase, con actividades que no sean convencionales, trabajos, debates, visualización de videos, etc. Una vez que esto está instaurado como una forma constante de aprendizaje el alumno, se habitúa a ello, logrando no depender tanto del docente y consiguiendo por el mismo buscar estos recursos.



Ahora bien, tal y como estamos exponiendo en el trabajo, esto lo queremos desarrollar de forma online. Es muy importante para ello, que el docente cree un entorno de aprendizaje sencillo, donde los alumnos tengan acceso a todos los materiales necesarios. A la hora de impartir clase, las plataformas de videoconferencias son esenciales para mantener un contacto directo con los alumnos, donde cada uno pueda intervenir de forma escrita o bien utilizando el micro. En ese entorno virtual, es esencial el funcionamiento de los foros de debate, donde el docente debe abrir temas de discusión sobre los contenidos de la unidad pertinente. La elaboración de tareas y actividades de toda índole ya sea de exposición de ideas respecto a un determinado vídeo expuesto, o la valoración u opinión argumentada sobre una idea vista en clase. Todo esto lo vamos a ver, de una forma más concreta, en la propuesta didáctica.

## 10. Propuesta didáctica para 3ºESO

Este apartado contiene la descripción de una propuesta didáctica basada en la metodología expuesta en el apartado anterior. Como es bien sabido, la situación de pandemia que está atravesando el mundo ha hecho que la comunidad educativa, junto con los responsables políticos pertinentes, hace que se tomen una serie de medidas y adaptaciones para que el curso se pueda finalizar. Estas medidas, tal y como hemos ido exponiendo a lo largo del trabajo, son de carácter online, es decir, centrar lo que resta de curso en una docencia enfocada en la teledocencia. En mi experiencia práctica en el IES Albaida, he empleado esta forma a la hora de dar clase, pero debido a la brevedad de este periodo y sobre todo a la rápida adaptación, que no por ello buena, de los contenidos ha supuesto que no sea tan amplia como se esperaba, pero si me aportó la idea de propuesta didáctica para mi trabajo de fin de máster. Es por ello que esta propuesta seguirá esa línea mostrando una ampliación de contenidos, acorde a los que se ven en el curso de 3ºESO, con la finalidad de mostrar y de mejorar la competencia de aprender a aprender.



A continuación, propondré una serie de ejemplos en los cuales se pondrá de manifiesto la metodología empleada con el objetivo de mejorar la competencia de aprender a aprender basada en un aprendizaje ligado a la contextualización y la historia de las matemáticas.

No solo se intentará lograr ese objetivo, sino que también otro que van de la mano:

- Familiarizar a los alumnos con entornos de trabajo diferentes al habitual.
- Lograr una colaboración entre todos los alumnos, ya sea en forma de trabajo grupales o debatiendo en foros.
- Incrementar el factor motivacional de los alumnos, mostrando una secuencia de trabajo que lo favorezca.
- Mostrar una enseñanza basada en el respeto y en valores de colaboración y trabajo en equipo.

Según viene indicado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, los contenidos de la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 3ºESO, vienen clasificados en los siguientes bloques:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números y álgebra.
- Bloque 3. Geometría.
- Bloque 4. Funciones.
- Bloque 5. Estadística y probabilidad.

Hay que destacar que el Bloque 1 hace referencia a las actitudes y razonamientos que el alumno debería de emplear para mejorar sus capacidades matemáticas, es por esto que va intrínseco en el resto de bloques. Mi idea es proponer el desarrollo de un tema según los contenidos. Para ello, utilizaremos la distribución por temas siguiente:

1. Números racionales.
2. Potencias y Raíces.
3. Progresiones.



4. Proporcionalidad numérica.
5. Polinomios.
6. Ecuaciones de primer y segundo grado.
7. Sistemas de Ecuaciones.
8. Lugares geométricos. Áreas y perímetros.
9. Movimientos y semejanzas.
10. Funciones.
11. Funciones lineales y cuadráticas.
12. Estadística.
13. Probabilidad.

Según esta disposición, para realizar la propuesta didáctica, voy a seleccionar el tema de ecuaciones de primer y segundo grado. Una vez que tenemos seleccionado el tema que vamos a tratar, el primer paso es la creación de un entorno virtual. Para ello, he seleccionado la herramienta online *Schoology* que permite la creación de cursos online. Es una herramienta diversa y dinámica, que permite que los alumnos ingresen en el curso que se creó. Además, tiene un interfaz amigable y muy visual, que permite tener al alcance todos los materiales que proporcione el profesor. Se pueden agregar carpetas para organizar el contenido, agregar tareas que se quieran mandar al alumnado, agregar pruebas y cuestionario sobre un tema concreto, agregar una evaluación, añadir archivos, enlaces y herramientas externas a lo que es el entorno, por ejemplo un video de YouTube, exponer un tema de discusión donde los alumnos puedan debatir y plasmar las opiniones que consideren oportunas, visualizar un álbum de medios ya sea de imágenes, listas de reproducción o galería de videos, agregar paquetes/aplicaciones relacionados con la plataforma. Este último será interesante porque aquí podemos agregar la aplicación *Teams Meeting* que nos permitirá crear las sesiones de videoconferencia para impartir las correspondientes clases con los alumnos. En la siguiente imagen, se verá la distribución de la página principal del curso.



The screenshot shows a Schoology course interface. At the top, the course title is '3ºESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: Prueba para TFM' with a 'Notificaciones' button. Below the title are 'Agregar Contenido' and 'Opciones' buttons. A left sidebar contains 'Opciones del Curso' and 'Materiales' with sub-items: Actualizaciones, Libreta de calificaciones, Configuración de calificaciones, Medallas, Asistencia, Miembros, and Teams Meeting. The main content area shows a folder 'Ecuaciones de primer y segundo grado.' with a brief introduction: 'Lo que vamos a aprender en este tema es lo siguiente:' followed by a bulleted list: 'Resolver una ecuación de primer grado.', 'Estudiar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.', 'Resolver ecuaciones de segundo grado.', and 'Resolver problemas mediante ecuaciones.' Below this is a section for 'Personajes históricos relacionados: Diofanto de Alejandría, Bhaskara, Tartaglia, Cardano, Bombelli y Descartes.' On the right, there is a 'Actividades próximas' section with a calendar icon and a note: 'No hay tareas o eventos agendados.'

En la parte superior de la imagen, podemos ver el nombre del curso, yo lo he llamado *3ºESO Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas: Prueba para TFM*. En la parte de la izquierda, podemos ver las diferentes opciones que da el curso para el docente dónde puede clasificar el material, ver que actualizaciones ha sufrido el entorno, una libreta de calificaciones donde puede realizar un seguimiento a los alumnos, medallas para destacar alguna tarea o propuesta de un alumno, una lista para controlar la asistencia si lo considera, una lista con todos los miembros pertenecientes al curso y la herramienta *Teams Meeting* para crear las sesiones de videoconferencia. A la derecha aparece un calendario donde se muestran las actividades que se van a realizar próximamente, en la imagen no hay ninguna porque no hay nada programado todavía. Para terminar este análisis, en el centro como se puede apreciar, aparecen las carpetas de los diferentes temas que se van a ver en el curso, así como una breve introducción a ellos indicando los contenidos que los alumnos van a aprender y también algunos personajes históricos relacionados con el tema. Este breve resumen, es una forma de usar los recursos didáctico de la contextualización y de la historia, ya que pone al alumno en la tesitura de lo que van a ver en el tema, provocando una visión alternativa a la que puede tener con el mero hecho de indicar únicamente el título del tema. Para entrar en el curso, los alumnos deberán acceder a la página principal de *Schoology* e iniciar sesión como estudiante.



UNIVERSIDAD  
DE ALMERÍA

Máster en profesorado de  
educación secundaria obligatoria,  
bachillerato, formación  
profesional y enseñanza de  
idiomas

PowerSchool Is Here to Help

Looking for Distance Learning tools? Get started with Schoology immediately at no cost today.

LEARN MORE

Distance Learning Readiness Kit

With schools closing around the world due to COVID-19, we wanted to share resources and tools to help you keep learning going.

Inmediatamente, les pedirán el código de acceso al curso.

Sign up for Schoology [Back](#)

Access Code

Enter the access code provided by your instructor

Continue

El código que debe introducir para formar parte de este curso es N9MD-KJ2H-RG9ZT.

Tras mostrar como los alumnos se pueden dar de alta en el curso, vamos a explicar la organización y lo que se va a realizar en el tema.

- Ecuaciones de primer y segundo grado.



La distribución del contenido de este tema, adaptados al entorno virtual y a la intención de mejorar la competencia de aprender a aprender, sin dejar de lado los contenidos puramente del tema, serán de la siguiente forma:

- **Conceptos:**

- Ecuación. Miembro. Término. Incógnita. Grado.
- Ecuaciones equivalentes.
- Ecuación de primer grado. Regla de la suma. Regla del producto.
- Ecuaciones de segundo grado. Ecuación de segundo grado incompleta. Ecuación de segundo grado completa.
- Historia de las matemáticas.
- Contextualizar.
- Foro de debate.
- Vídeos explicativos.

- **Procedimientos:**

- Identificar los elementos de una ecuación.
- Transformar una ecuación en otra ecuación equivalente.
- Resolver una ecuación de primer grado.
- Resolver una ecuación de segundo grado.
- Estudiar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado usando el discriminante.
- Utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado para la resolución de problemas.
- Visualizar contenidos relacionados con la historia de las ecuaciones.
- Plantear problemas con contexto de la vida real usando ecuaciones de primer y segundo grado.
- Búsqueda de material relacionado complementario sobre un contenido concreto.



- Utilizar los medios digitales para plasmar una idea, debatir sobre una información y evaluar los conocimientos adquiridos.
- **Disposiciones:**
  - Seguridad a la hora de resolver cualquier tipo de ecuación.
  - Fluidez y claridad a la hora de emplear el lenguaje algebraico.
  - Predisposición para valorar los posibles errores cometidos durante la resolución de las ecuaciones.
  - Valoración de la historia de las matemáticas a la hora de aprender.
  - Saber interpretar un problema en un determinado contexto.
  - Soltura a la hora de utilizar las herramientas del entorno virtual.

Los objetivos que se quieren conseguir en este tema son:

- Resolver una ecuación de primer grado.
- Resolver una ecuación de segundo grado.
- Estudiar las soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Resolver problemas usando las ecuaciones de primer y segundo grado.
- Aprender a usar el entorno virtual, así como todos los elementos que proporciona.
- Utilizar la historia de las matemáticas como método a la hora de estudiar.
- Aprender a contextualizar una expresión matemática en un problema de la vida real.

En la siguiente imagen, se podrá visualizar la página principal del tema dentro del entorno virtual, así como todos los elementos que forman parte.



3ºESO Matemáticas Orientadas a las Enseña ...

Ecuaciones de primer y segundo grado.

Agregar Contenido Opciones

Apuntes Ecuaciones de primer y segundo grado.pdf 222 KB

Foro de debate  
En este foro de debate se expondrán las dudas e ideas relacionadas con las ecuaciones de primer y segundo grado.

Video sobre la Historia de las ecuaciones

Tarea sobre la Historia de las ecuaciones  
Una vez visualizado el video sobre la historia de las ecuaciones, realiza lo siguiente:  
Un resumen (14-16 líneas) de la temática del video.  
¿Pensas que las ...

Video resolver ecuación de primer grado

Video resolver ecuación de segundo grado

Video resolver problemas con contexto

Tarea: Grabación de explicaciones  
En esta tarea tienes que grabarte explicando como resolver una ecuación de primer grado, una ecuación de segundo grado y un problema con contexto.  
En el foro que se denomina "Debate ...

Foro Debate de videos

Entrega de los ejercicios que se proponen en los apuntes  
Aquí tienes que entregar la resolución de los ejercicios que se proponen en el archivo de apuntes de ecuaciones de primer y segundo grado.

Tarea: Resumen y mapa conceptual.  
Aquí tienes que entregar un resumen del tema y un mapa conceptual donde se indique la utilidad de cada concepto.

Prueba de evaluación

En primer lugar, se debe mencionar que, para este tema, se necesitarán cuatro sesiones presenciales a través de la videoconferencia. Una vez que se habilite la sesión usando la aplicación *Teams Meeting*, se les proporcionará a los alumnos el enlace de acceso. Los contenidos que se verán en cada una de las sesiones se organizarán de la siguiente manera:

- Sesión 1: Ecuación y ecuaciones equivalentes. Se explicará los elementos que tiene una ecuación y además se verán las ecuaciones equivalentes, así como algunos ejemplos de ecuaciones equivalentes.
- Sesión 2: Ecuaciones de primer grado. Se explicará el concepto de ecuación de primer grado y como resolver ecuaciones de primer grado, se verán algunos ejemplos.



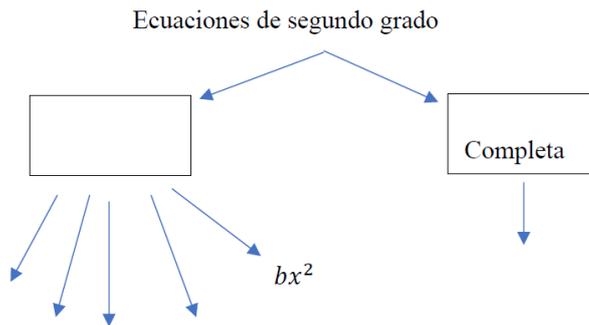
- Sesión 3: Ecuaciones de segundo grado. Discriminante. Se explicará el concepto de ecuación de segundo grado, se resolverán ecuaciones de segundo grado completas e incompletas, además se estudiará el número de soluciones de una ecuación de segundo grado usando el discriminante. Se verán algunos ejemplos.
- Sesión 4: Resolución de problemas con contexto de la vida real. Se resolverá, algunos problemas en los que se tienen que usar ecuaciones de primer y segundo grado.

Quiero destacar que estas sesiones tienen carácter complementario, es decir, la esencia de esta propuesta es que el alumno pueda adquirir los conocimientos de este tema de forma autónoma teniendo como base los elementos del entorno virtual. El hecho de establecer estas sesiones de videoconferencia es porque el profesor tiene un papel de apoyo y no tanto como elemento fundamental en el proceso de aprender el tema.

Los alumnos seguirán unos apuntes, elaborados por el profesor, con la idea de que se muestre al alumno a los contenidos referentes a ecuaciones de primer y segundo grado de una forma alternativa, para así fomentar su capacidad de aprendizaje. A lo largo de la explicación, se muestra a los alumnos curiosidades históricas relacionadas con las ecuaciones de primer y segundo grado, ejercicios en los cuales se muestre un contexto histórico y también ejercicios en los cuales los alumnos tienen que organizar las ideas recibidas. Algunos ejemplos son los siguientes:



**Ejercicio:** Completa el siguiente esquema:



Sabías que existe un problema famoso con el que se puede conocer la edad de Diofanto de Alejandría, su enunciado es el siguiente:

*“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de la vida de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”*



**Ejercicio:** Resuelve el problema de Diofanto. Plantea un problema similar con la edad de una persona de un contexto diferente.

Se habilitará un foro de debate en el que los alumnos pueden poner de manifiesto sus dudas o ideas sobre las ecuaciones de primer y segundo grado, este apartado es esencial que tenga una dinámica constante, ya que es, a parte de las sesiones de videoconferencia, la principal herramienta de comunicación que existen entre los alumnos y el profesor.

También se les proporcionará un enlace a un video de *YouTube* en el cual se hará uso de la historia de las matemáticas como recurso, ya que se explicará toda la historia relacionada con las ecuaciones de primer y segundo grado, de una forma clara y dinámica. A este vídeo se le asociará una tarea que los alumnos deberán realizar, en ella se pide un resumen del video, se les pregunta sobre la importancia de las ecuaciones en el contexto de la vida real y además que busquen un video relacionado y que expliquen, el foro de debate, por qué lo han elegido. El objetivo de esta tarea es hacer que el alumno incremente su motivación desde el punto de vista de la búsqueda de información y sobre todo desde la construcción mental en la cual se manifiesta la importancia del tema que se está tratando. El enunciado de la tarea es el siguiente:

*Una vez visualizado el vídeo sobre la historia de las ecuaciones, realiza lo siguiente:*

- 1. Un resumen (14-16 líneas) de la temática del vídeo.*
- 2. ¿Piensas que las ecuaciones son necesarias en la vida cotidiana?, ¿por qué? (5-6 líneas).*
- 3. Busca otro vídeo relacionado con el tema, explica por qué lo has elegido. (10-12 líneas). Opcional: Muestra este vídeo y su explicación en el foro de debate.*



Se les habilitará tres enlaces a videos de *YouTube* en los cuales se verán explicaciones sobre los contenidos del tema, en el caso de que tengan dudas sobre ellos. Esto sirve como un recurso de búsqueda de información, hacerles ver que no solo se tienen que ceñir al libro de texto o a la explicación que realice el profesor. Una vez que vean estos vídeos, se habilita una tarea en la cual tienen que hacer ellos ahora el papel de profesor, deben grabarse explicando la resolución de una ecuación de primer grado, una de segunda grado y un problema contextualizado. Este contexto digital, hace que puedan poner en práctica todos los contenidos aprendidos, además de que mejorarán sus capacidades de expresión, así como el recurso de medios digitales. Una vez que tengan el vídeo grabado tienen que subirlo a un foro habilitado para este tema y opinar sobre la explicación que realice otro compañero. El objetivo de esto, además de los antes citados, es mejorar su sentido crítico y de expresión objetiva en cuanto a una idea concreta, además de potenciar la puesta de ideas en común y el hecho de saber aprender de una crítica constructiva que realice una persona en su mismo nivel que, desde mi perspectiva, en una clase presencial esta iniciativa no sería tan viable.

En cuanto a tareas, se habilitarán dos más. En la primera de ella los alumnos deberán entregar todos los ejercicios que han ido apareciendo en el archivo de apuntes del tema. En la otra tarea los alumnos deben realizar un resumen del tema y un mapa conceptual de los elementos que aparecen en el tema. El objetivo de estas tareas es, por una parte, mantener un toque de la dinámica tradicional en la cual los alumnos tienen que realizar ejercicios prácticos pero desde un punto de vista mucho más mental, ya que no se reducen a meros cálculos, sino a pensar más en la estructura de los conceptos y de cómo manipularlos para obtener los resultados exigidos, y también se marca el objetivo de la interpretación propio del temario de una forma más simbólica y sobre organizativa que le proporciona al alumno una facilidad a la hora de asimilar un determinado contenido, en este caso el relacionado con las ecuaciones de primer y segundo grado.

Para terminar, se habilitará una prueba de evaluación en la que los alumnos demostrarán todas sus capacidades adquiridas en este tema, se realizarán preguntas de multiopción, preguntas de



verdadero o falso, preguntas de rellenar huecos y preguntas de respuestas cortas, con el objetivo de que el alumno pueda tener libertad, dentro de lo que una prueba posibilita.

En cuanto a la evaluación, el reparto de la nota será un 70% el conjunto de actividades y un 30% la prueba de evaluación., exigiendo en ambas la participación en todos los apartados y un % mínimo de un cuarto respecto a cada asignación. A mi modo de ver, el dar más peso a las actividades supone una motivación extra para el alumnado y hará que pongan todo su empeño en realizarlas de forma satisfactoria. En este contexto virtual se debe premiar la actitud y la disposición a querer aprender a aprender.

Esta propuesta para mejorar la competencia de aprender a aprender se puede implementar en cualquier contexto, ya que puede ser complementaria a una enseñanza presencial y, sobre todo en situaciones como las que el mundo está viviendo con la pandemia, posibilitan a la comunidad educativa dar una enseñanza más allá de lo tradicional, mejorando capacidades que a lo mejor por el hecho de lo que puede suponer la inconexión de los elementos educativos, el alumno no podría desarrollar.

## 11. Conclusiones

Tras la realización de este estudio sobre la competencia de aprender a aprender, he llegado a la conclusión de que esta competencia es fundamental, por no decir la que más peso tiene, a la hora enseñar a los alumnos cualquier contenido, en el caso que nos ocupa: matemáticas. Entran en juego capacidades del alumno que le permiten enfrentarse a cualquier tipo de problema, partiendo desde la forma en la que lo perciben hasta la forma en la que ejecutan los conocimientos que poseen para resolverlo.

Como se ha puesto de manifiesto durante el trabajo, el hecho de adquirir esta competencia no es tarea fácil ya que es inevitable cometer una serie de errores a la hora de fomentar el aprendizaje en base a esta competencia. El usar la contextualización y la historia de las matemáticas nos posibilitan de amplias alternativas para paliar esos errores y, sobre todo,



formas alternativas para inculcar en los alumnos esa motivación y visión que muchas veces necesitas a la hora de estudiar. El llevar todo esto al contexto online, como hemos visto es una tarea que puede ser sencilla y sobre todo ilusionante, ya que la creación de un entorno virtual para el docente puede ser un lugar donde recoger toda la información y todas las maneras que la red posibilitan, mostrando una forma propia e innovadora para realizar una enseñanza en base a la motivación y al mejorar las capacidades de pensamiento del alumnado. Esto también lleva intrínseco un proceso de aprender a aprender para el docente, ya que el exponerse a crear estas formas de aprendizaje hacen que su pensamiento, su visión de lo que entiende por enseñar se moldee al contexto que vivimos con la pandemia, y ya no solo con esto, sino con cualquier situación de características similares. Cabe destacar, que el uso de estos recursos didácticos, además de usarlos como una forma de mejorar de la competencia, se ve plasmado en un modo de metaenseñanza para el docente, ya que también es expuesto a dicha mejora a la hora de crear y adaptarse a los recursos que disponen al intentar mejorar esta capacidad en los alumnos. Es, por todo ello, por lo que lo innovador es conseguir la adaptación completa de los contenidos esenciales para una enseñanza basada en el pensamiento, utilizando como medios la historia de las matemáticas y el contexto. Es una alternativa para que el alumno consiga aprender a aprender.

## 12. Bibliografía

- Alsina, Á., & Domingo, M. (2007). *Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas*. Suma, 56, 23-31.
- Area, M., & Adell, J. (2009). *E-learning: enseñar y aprender en espacios virtuales*. Tecnología Educativa. La formación del profesorado en la era de Internet, 391-424.
- Carretero Torres, M., & Fuentes Agustí, M. (2010). *La competencia de aprender a aprender*. Aula de innovación educativa, (192), 0007-10.
- Casal, S. M. S. (2004). Metodología didáctica en entornos virtuales de aprendizaje. *Etic@ net*, (3), 15.



- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Revista Premisa, 6(23), 23-32.
- Escamilla González, A. (2016). *La competencia para aprender a aprender en educación secundaria obligatoria: fundamentos y herramientas de un programa integrado para su desarrollo* (Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid).
- Gutiérrez Ocerín, L., Martínez Rosales, E., & Nebreda Sainz, T. (2008). *Las Competencias Básicas en el Área de Matemáticas*. Cuadernos de Educación de Cantabria, 5.
- Jefatura del Estado (2014), *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>
- OCDE (2017), *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris.
- OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing, Paris.
- Osses Bustingorry, S., & Jaramillo Mora, S. (2008). *Metacognición: un camino para aprender a aprender*. Estudios pedagógicos (Valdivia), 34(1), 187-197.
- Pajares, R., Rico, L., & Sanz, Á. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Ministerio de Educación.
- Palenzuela Rodríguez, H. (2017). *¿Por qué incluir la Historia de la Matemática en el aula?* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Almería, Almería, España.
- Rico, L. (2007). *La competencia matemática en PISA*. PNA, 1(2), 47-66.
- Ruano, R. M., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal,*



*generalización y modelización en álgebra*. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2(2), 61-74.

- Seguí, V.M. (2008) *Algunas razones para introducir la historia de las matemáticas en las aulas de secundaria*. Sigma, núm. 32, pp. 221-237.
- Swartz, R. J., Reagan, R., Costa, A. L., Beyer, B. K., & Kallick, B. (2014). *El aprendizaje basado en el pensamiento* (Vol. 4). Ediciones SM España.
- Talebian, S., Mohammadi, H. M., & Rezvanfar, A. (2014). *Information and communication technology (ICT) in higher education: advantages, disadvantages, conveniences and limitations of applying e-learning to agricultural students in Iran*. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 152, 300-305.
- Tapia, J. A. (2005). *Motivación para el aprendizaje: la perspectiva de los alumnos*. La orientación escolar en centros educativos, 209-242.
- Urbaneja, P. M. G. (2004). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. Suma, 45, 17-28.

## 13. Anexo

### 13.1. Apuntes de ecuaciones de primer y segundo grado.

#### Ecuaciones de primer y segundo grado.

Lo que vamos a aprender en este tema es lo siguiente:

- Resolver una ecuación de primer grado.
- Estudiar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Resolver ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas mediante ecuaciones.



Personajes históricos relacionados: *Diofanto de Alejandría, Bhaskara, Tartaglia, Cardano, Bombelli y Descartes.*

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que solo es cierta para algunos valores de las variables.

Los principales elementos de una ecuación son:

- **Miembros:** son cada una de las expresiones algebraicas separadas por el signo “=”.
- **Términos:** son los sumandos de cada miembro. El término que aparece sin variable se denomina término independiente.
- **Incógnitas:** Son las letras cuyos valores numéricos no conocemos.
- **Grado:** De todos los términos de la ecuación que tengan incógnita, es el mayor número al que este elevado la incógnita.

Las **soluciones de una ecuación** son los valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación consistirá en buscar dichas soluciones.

Diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Sabías que fue Descartes quien asoció a las constantes las primeras letras del abecedario a,b,c... y a las incógnitas por las últimas x,y,z.

Ejemplo:  $x + a = bx - c$



**Ejercicio:** Considera una ecuación de primer grado, muestra 3 ecuaciones equivalentes a ella y otras 3 que no lo sean. ¿Por qué has elegido esas ecuaciones? (Argumentalo en 1-2 líneas)

Una **ecuación de primer grado** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se puede expresar de la forma  $ax + b = 0$ , cuya solución única es  $x = \frac{-b}{a}$ . **Pregunta:** ¿Qué valores pueden tomar  $a$  y  $b$ ?

Para su resolución se tiene en cuenta la trasposición de términos.

- **Regla de la suma:** Si a los dos miembros de una ecuación les sumamos o les restamos un mismo número, obtenemos ecuaciones equivalentes.
- **Regla del producto:** Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero, obtenemos ecuaciones equivalentes.

A la hora de resolver una ecuación de primer grado...

- Si un término está sumando en un miembro, pasa al otro miembro restando y viceversa.
- Si un término está multiplicando en un miembro, pasa al otro miembro dividiendo y viceversa.



**Ejemplo:** Resuelve la ecuación de primer grado  $3x + 2 = x - 6$ .

Lo primero que tenemos que hacer, es pasar los términos que tengan incógnitas a uno de los miembros de la ecuación y los términos independientes irán al otro miembro.

$$3x - x = -6 - 2$$

Observar que la  $x$  del miembro de la derecha pasa restando ya que en su estado inicial tenía signo positivo, al igual que el 2 del miembro de la izquierda que pasa al otro miembro como -2. Operamos y obtenemos:

$$2x = -8$$

Ahora bien, nuestro objetivo es despejar la incógnita  $x$ , luego el 2 que se encuentra acompañándola esta multiplicando, por lo que pasará al otro miembro dividiendo.

$$x = -4$$

**Ejercicio:** Considera una ecuación de primer grado cuya solución sea  $x = 4$ , resuélvela indicando los pasos que realizas. ¿Se te ocurre como puedes obtener la solución  $x = -4$  teniendo la misma ecuación?



Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se puede expresar de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

**Pregunta:** ¿Qué valores pueden tomar  $a$ ,  $b$  y  $c$ ?

Según esos posibles valores las ecuaciones de segundo grado se pueden clasificar en **completas** e **incompletas**. ¿A qué valores crees que se corresponden cada caso?

Las **soluciones** de las ecuaciones de segundo grado completas se obtienen a partir de la siguiente fórmula:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . ¿Cómo se obtendrían las soluciones de las ecuaciones de segundo grado incompletas?

La expresión  $b^2 - 4ac$  se llama **discriminante** y nos permite averiguar cuanta soluciones puede tener la ecuación:

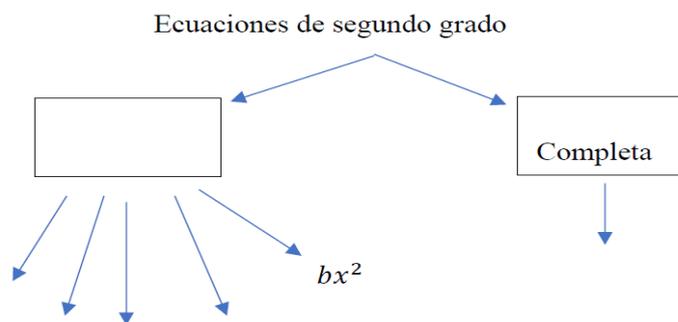
- Si  $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones diferentes.
- Si  $b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene una solución (doble).
- Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación no tiene solución.

Sabías que fue Bhaskara el que formuló la ecuación de resolución de la ecuación de segundo grado, tal y como la conocemos. Hasta entonces, fue Diofanto de Alejandría quien consiguió mayores avances en esta teoría.



**Ejercicio:** Usando el discriminante, construye tres ecuaciones de segundo grado diferentes. ¿Se te ocurre alguna forma de hacerlo sabiendo las soluciones?

**Ejercicio:** Completa el siguiente esquema:





No solo podemos resolver ecuaciones de primer y segundo grado de la forma que hemos visto, sino que también nos pueden servir a la hora de resolver problemas de la vida real.

**Pregunta:** ¿Se te ocurre alguna situación en la que puedas usar las ecuaciones de primer grado?, ¿y las de segundo grado?

Por ejemplo, podemos tener el siguiente enunciado: “*Juan ha comprado en la papelería unas libretas y unos bolígrafos. Cada libreta cuesta 3 euros y cada bolígrafo 1 euro, ha comprado 6 bolígrafos y en total ha pagado 18 euros. ¿Cuántas libretas ha comprado?*”

Lo principal a la hora de resolver un problema es saber lo que tenemos que calcular, una vez que tengamos esto le asignamos una incógnita. En nuestro caso la incógnita  $x$  representará el número de libretas que ha comprado Juan.

A continuación, tenemos que establecer la ecuación que nos relacione todos los datos del enunciado. En este caso tenemos que:

$$3x + 1 \cdot 6 = 18$$

$3x$  representa el gasto total en libretas y  $1 \cdot 6$  el gasto total en bolígrafos, la suma nos dará el gasto total, Si resolvemos obtenemos

$$3x = 18 - 6$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

Luego la solución es  $x = 4$ , pero esta no es la solución de nuestro problema ya que estamos en el contexto de que Juan ha ido de compras. Por tanto, adaptando la solución, tenemos que Juan ha comprado 4 libretas.

**Ejercicio:** Elabora un enunciado de un problema real en los que las siguientes ecuaciones se utilicen:

a)  $7x - 4 = 10$       b)  $4x^2 = 16$



Sabías que existe un problema famoso con el que se puede conocer la edad de Diofanto de Alejandría, su enunciado es el siguiente:

*“Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de la vida de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.”*

**Ejercicio:** Resuelve el problema de Diofanto. Plantea un problema similar con la edad de una persona de un contexto diferente.