
HOMOGENEIZACIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES ELÍPTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Autor:

Miguel Martínez Teruel

Tutores:

Pedro Jesús Martínez Aparicio
José Carmona Tapia

GRADO EN MATEMÁTICAS



MAYO, 2021
Universidad de Almería

Índice general

Introducción	1
1 Conceptos y resultados preliminares	5
1.1. Sucesiones en espacios normados y espacios de Hilbert	5
1.2. Teoría de distribuciones	8
1.3. Espacios de Lebesgue	10
1.4. Espacios de Sobolev	11
1.5. Existencia y unicidad del problema de Dirichlet	13
2 Homogeneización del problema de Dirichlet	17
2.1. Geometría del dominio. Dominio perforado	17
2.2. Problema de Dirichlet en el dominio perforado	22
2.3. Teorema de Homogeneización	23
2.4. Corrector	29
3 Modelo de homogeneización. Agujeros esféricos idénticamente distribuidos	35
3.1. Presentación del dominio	35
3.2. Candidatos para las hipótesis de los agujeros	36
3.3. Verificación de las hipótesis de los agujeros	38
Conclusiones	47
Bibliografía	49

Abstract in English

In physics and engineering it is common to find bodies with heterogeneities. Hence, the concept of homogenization arose, which aims to replace a heterogeneous material by an equivalent homogeneous one. Applied to partial differential equations, it consists of “holing” the domain Ω of a differential problem, obtaining a sequence of domains Ω^ε , and studying the behavior of the solutions of the problem defined in each domain Ω^ε .

Homogenization is a broad concept, giving rise to a large number of authors who have worked on the subject. In particular, this work shows the results of the homogenization of the Dirichlet problem in an open and bounded domain, obtained by F. Murat and D. Cioranescu [1].

In this study, two main aspects are considered. The first one consists of the study of homogenization in an abstract framework, where the importance of the hypotheses of holes and the Homogenization Theorem should be emphasized. The second consists of the exemplification of homogenization by means of a grid of identically distributed holes.

For this study, it will be necessary to introduce some previous concepts that will help to understand homogenization. Among these, we highlight Lebesgue spaces and Sobolev spaces, which will be the spaces where the homogenization process takes place.

Resumen en español

En física e ingeniería es usual la aparición de cuerpos con heterogeneidades. De ahí que surgiera el concepto de homogeneización, que tiene por objetivo sustituir un material heterogéneo por uno homogéneo equivalente. Aplicado a ecuaciones en derivadas parciales, consiste en “agujerear” el dominio Ω del problema diferencial, obteniendo una sucesión de dominios Ω^ε , y estudiar el comportamiento de las soluciones del problema definido en cada dominio Ω^ε .

La homogeneización es un concepto amplio, provocando una gran cantidad de autores que han trabajado al respecto. Concretamente, este trabajo muestra los resultados de la homogeneización del problema de Dirichlet en un dominio abierto y acotado, obtenidos por F. Murat y D. Cioranescu [1].

En este estudio, se plantean dos principales vertientes. La primera consiste en el estudio de la homogeneización en un marco abstracto, donde cabe destacar la importancia de las hipótesis de los agujeros y el Teorema de Homogeneización. La segunda consiste en la ejemplificación de la homogeneización mediante una rejilla de agujeros idénticamente distribuidos.

Para este estudio, será necesario introducir unos conceptos previos que ayuden a la comprensión de la homogeneización. Entre éstos, destacamos los espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev, que serán los espacios donde se realice el proceso de la homogeneización.

Introducción

La teoría de la homogeneización estudia el comportamiento de las soluciones de un problema de ecuaciones en derivadas parciales donde los coeficientes o los dominios donde están planteadas tienen una estructura muy compleja, que puede hacer irresoluble el cálculo numérico de las soluciones. Esta teoría permite obtener modelos mucho más simples, los cuales sin embargo proporcionan buenas aproximaciones de las soluciones del problema original. En muchos casos es usual tratar con coeficientes o dominios que tienen una estructura periódica con un periodo pequeño. Estos problemas aparecen principalmente en modelos que provienen de la ingeniería, donde se construyen materiales y estructuras con estas propiedades. No obstante, en la naturaleza encontramos cierta repetición de patrones, pero no una verdadera periodicidad. Para su estudio es necesario el uso de nuevas herramientas matemáticas, tales como la homogeneización casi-periódica o la homogeneización estocástica. También es importante estudiar problemas donde no hay a priori ningún tipo de periodicidad. Esto permite resolver cuestiones tales como cuál es el conjunto de materiales que podemos obtener en general a partir de la mezcla de ciertos materiales dados, problema fundamental en diseño de materiales.

Otra de las aplicaciones principales de la teoría de homogeneización es en problemas de diseño óptimo. Estos problemas consisten en la obtención de materiales o formas que resulten óptimas bajo cierto criterio. Desde el punto de vista matemático, significa que sean solución de un problema de minimización. Usualmente este tipo de problemas no tiene solución en general. La teoría de la homogeneización proporciona formulaciones relajadas donde los materiales o formas originales son reemplazados por otros más generales que se obtienen mediante un proceso de paso al límite. Esto proporciona modelos bien planteados y que tienen mejores propiedades de regularidad que los de partida. Como consecuencia resultan más adecuados tanto para la obtención de condiciones de optimalidad como para la resolución numérica de estos problemas.

Entrando en los aspectos matemáticos de la homogeneización, se parte de un conjunto abierto y acotado Ω de \mathbb{R}^N que se perfora con agujeros que dependen de un parámetro ε . Así, se obtiene el conjunto Ω^ε , en el cual se plantea el problema de Dirichlet. Las preguntas a considerar serían las siguientes.

- ¿Las soluciones u^ε convergen a algún límite u cuando ε tiende a cero?
- En caso de que el límite exista, ¿puede ser caracterizado?

En este contexto, para un número finito de agujeros, pueden ocurrir dos situaciones distintas.

1. Cuando cada compacto K contenido en Ω es absorbido por los dominios Ω^ε . Es decir, $K \subset \Omega^\varepsilon$ para cierto ε lo suficientemente pequeño. En este caso, las funciones u^ε convergen a la solución del problema de Dirichlet en el dominio Ω . Este caso sucede cuando los valores de ε son “demasiado” pequeños.
2. Cuando los valores de ε son “demasiado” grandes y la sucesión de funciones características en los agujeros converge a una función estrictamente positiva. En ese caso las funciones u^ε tienden a cero. Intuitivamente hablando, los agujeros

“se tragan” el dominio original, haciendo que las funciones u^ε se vayan desvaneciendo.

Este es un estudio clásico realizado por numerosos autores. Algunos de ellos son R. Courant y D. Hilbert en [3], capítulo VI-2.6; J. Nečas en [4], capítulo 3-6; y J. Rauch y M. Taylor en [5].

Sin embargo, el caso que estudiaremos será la perforación del dominio Ω distribuyendo de forma regular los agujeros. Es decir, mientras que en el caso anterior había un número fijo de agujeros cuyo tamaño iba disminuyendo al decrecer el parámetro ε ; en nuestro caso, al disminuir el parámetro ε , los agujeros serán más pequeños; pero, al mismo tiempo, se generarán más agujeros con tal de crear una perforación distribuida de forma uniforme por el conjunto Ω (véanse como ejemplo las Figuras 3.1 y 3.2).

En esta situación tenemos los siguientes casos.

1. Cuando ε es demasiado pequeño de tal forma que las funciones u^ε tienden a la solución del problema de Dirichlet en Ω . Este caso es igual al primero del estudio anterior.
2. Cuando ε es demasiado grande de tal forma que las funciones u^ε tienden a 0. Este caso es igual al segundo del estudio anterior.
3. ¿Qué significa que ε sea demasiado grande o demasiado pequeño? La tercera situación yace entre la primera y la segunda. Entre éstas, existe un valor crítico para los agujeros, que depende del tamaño, número y distribución, en el cual la sucesión de funciones u^ε converge a la solución del problema de Dirichlet en Ω con otro operador, que será la suma del operador inicial y un término extraño.

Este estudio fue descrito por D. Cioranescu y F. Murat en [1].

El objetivo principal de este trabajo será estudiar esta tercera situación, mostrando los resultados más relevantes de este artículo, esclareciendo y detallando la obtención y demostración de estos resultados. Para ello, el trabajo consta de tres capítulos.

El Capítulo 1 consiste en la presentación de los conceptos y resultados necesarios para poder estudiar la homogeneización. Primero, repasamos resultados sobre espacios normados y espacios de Hilbert que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores. Los espacios en los que se realiza la homogeneización son los espacios de Sobolev. Por ello, es necesario definir los conceptos básicos sobre teoría de distribuciones y espacios de Lebesgue. Una vez definidos los espacios de Sobolev, estudiamos la existencia y unicidad de solución del problema de Dirichlet al que aplicaremos la homogeneización.

En el Capítulo 2 mostramos el marco abstracto de la homogeneización. Este capítulo es el centro teórico del trabajo, del cual hay que resaltar dos conceptos muy importantes. El primero es la enunciación de lo que se conoce como **las hipótesis de los agujeros**, que consiste en ciertas hipótesis que se aplican al dominio homogeneizado. La clave para entender la homogeneización reside en el entendimiento de estas 5 hipótesis. El segundo es el **Teorema de Homogeneización**, el resultado más importante de este trabajo, pues da respuesta a la pregunta sobre el comportamiento de la sucesión de soluciones u^ε del problema de Dirichlet en los dominios Ω^ε .

En el Capítulo 3 ejemplificamos el marco abstracto anteriormente descrito, aplicando la homogeneización a un dominio mediante agujeros esféricos idénticamente

distribuidos a lo largo de una rejilla. Como se verá en el Capítulo 2, las hipótesis necesarias para que se cumpla el Teorema de Homogeneización son las hipótesis de los agujeros. Por tanto, este capítulo consistirá principalmente en la verificación de dichas hipótesis para poder aplicar este teorema.

Con respecto a la metodología del trabajo, existen dos principales fuentes. La primera consiste en los conocimientos adquiridos a lo largo del grado. Sobre éstos, cabe destacar la importancia que han tenido las asignaturas Análisis Funcional, Ecuaciones de la Física Matemática y Ecuaciones Diferenciales II, las cuales han sido un base imprescindible para el comienzo de este trabajo. La segunda fuente ha sido el entendimiento y aprendizaje de nuevos conceptos debido al carácter de este trabajo. Este año, paralelamente a la realización de este trabajo, he sido becario del Departamento de Matemáticas gracias a la Beca de Colaboración. Por ello, he tenido que estudiar conceptos como los espacios de Sobolev, que apenas son tratados durante el grado. Así, este trabajo no es otra cosa que el reflejo de mi labor investigadora durante este año.

Conceptos y resultados preliminares

El objetivo principal de este trabajo consistirá en estudiar el proceso de homogeneización de una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico. Para ello, tenemos en cuenta los pasos de la Sección 9.5 de [2] que, esquemáticamente, son:

1. Toda solución clásica es una solución débil.
2. Existencia y unicidad de solución débil.
3. Regularidad de la solución débil.
4. Recuperación de una solución clásica.

Gracias a esto, el estudio lo realizaremos en un “contexto débil”, pues resolviendo la homogeneización en el “contexto débil”, podríamos llegar a obtener una solución clásica, aunque eso ya se escapa de los objetivos de este trabajo.

Por ello, en este capítulo, vamos a definir los espacios en los que nos situaremos así como las propiedades más representativas de éstos.

1.1 Sucesiones en espacios normados y espacios de Hilbert

Principalmente, los espacios en los que trabajaremos son los espacios de Lebesgue y los espacios de Sobolev. Sin embargo, antes de particularizarnos a estos espacios, veamos ciertas propiedades más generales sobre sucesiones en espacios normados y espacios de Hilbert.

De estos espacios, estudiaremos resultados sobre convergencia y convergencia débil. Por tanto, recordemos brevemente la definición de convergencia débil.

Definición 1.1. Sea X un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X converge débilmente a $x \in X$ si, para todo $f \in X'$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Lo notaremos por $x_n \rightharpoonup x$.

Comenzamos con un primer lema, que si bien puede parecer básico, va a ser clave en muchas demostraciones. Esto es debido a que, en la mayoría de los resultados, tomaremos parciales de sucesiones y probaremos lo deseado en estas parciales. Este lema será el puente que provoque que toda la sucesión original verifique lo deseado.

Lema 1.1. Sea X un espacio normado. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X tal que, para algún $x \in X$, de cada sucesión parcial de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se puede extraer otra parcial que converge a x . Entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x . Este resultado también es válido en el contexto de convergencia débil.

Demostración:

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a x . Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n_1 > n_0$ verificando

$$\|x_{n_1} - x\| \geq \varepsilon_0.$$

Definimos el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| \geq \varepsilon_0\}$. Claramente este conjunto es distinto de vacío. De hecho, es numerable e infinito.

Por tanto, existe una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow B$ biyectiva y estrictamente creciente. Si tomamos la parcial $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ llegamos a una contradicción pues, por definición de B , de la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ no podemos extraer ninguna parcial que converja a x .

Así, concluimos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .

Para el caso de convergencia débil, la no convergencia débil da la existencia de un funcional $f_0 \in X'$ y $\varepsilon_0 > 0$. Definimos $B = \{n \in \mathbb{N} : |f_0(x_n) - f_0(x)| \geq \varepsilon_0\}$ y aplicamos el mismo argumento. ■

Para poder demostrar el siguiente resultado, haremos uso de dos teoremas clásicos del Análisis Funcional: el Teorema de Helley y el Teorema de Representación de Riesz. Al tratarse de resultados clásicos cuyas demostraciones se alejan de nuestro tema de estudio, solamente los enunciaremos. Ambas demostraciones pueden consultarse en [8].

Teorema 1.1 (Helley). *Sea X un espacio normado separable y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de elementos de X' . Entonces existe una parcial, que denotamos por $\{T_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, y $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\sigma(n)}(x) = T(x), \forall x \in X.$$

El Teorema de Representación de Riesz no solo se usará de forma explícita en la demostración de la Proposición 1.1, sino que también estará presente de forma sutil durante todo el trabajo debido a la expresión de los funcionales de los espacios de Hilbert en los que se desarrollará nuestro estudio.

Teorema 1.2 (Representación de Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert y se define el operador $T : H \rightarrow H'$ que asigna a cada valor $h \in H$ el funcional lineal $T_h : H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$T_h(u) = \langle u, h \rangle, \forall u \in H.$$

Entonces, T es una isometría lineal de H a H' .

La Proposición 1.1 tendrá dos funciones en el trabajo. La primera consistirá en ser la base de la Proposición 1.4. La segunda consistirá en su propio uso para demostrar la convergencia de funciones características en el modelo de homogeneización.

Proposición 1.1. *Toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert H admite una parcial que converge débilmente.*

Demostración:

Sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de elementos de H . Definimos H_0 como el cierre del espacio generado por $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$. Con lo cual, H_0 es separable. Para cada natural n , definimos $\psi_n \in (H_0)'$ por

$$\psi_n(h) = \langle h, h_n \rangle, \forall h \in H_0.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$|\psi_n(h)| = |\langle h, h_n \rangle| \leq \|h\|C, \forall h \in H_0, \forall n \in \mathbb{N},$$

donde C es la cota de la sucesión $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por tanto, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de funcionales lineales en un espacio normado separable H_0 . Aplicando el Teorema de Helley 1.1, existe una parcial, que denotamos por $\{\psi_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, y $\psi_0 \in (H_0)'$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\sigma(n)}(x) = \psi_0(x), \forall x \in H_0.$$

Por el Teorema de Representación de Riesz 1.2, existe $h_0 \in H_0$ tal que $\psi_0 = T_{h_0}$. Por tanto, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\sigma(n)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, h_{\sigma(n)} \rangle = \langle x, h_0 \rangle = \psi_0(x), \forall x \in H_0.$$

Por ser H un espacio de Hilbert, puede ser expresado mediante la suma directa

$$H = H_0 \oplus (H_0)^\perp.$$

Es decir, todo elemento $h \in H$ puede ser expresado como $h = x + y$ donde $x \in H_0$ e $y \in (H_0)^\perp$. Entonces, definimos la proyección ortogonal $P : H \rightarrow H_0$, que a cada elemento $h \in H$ le asocia $x \in H_0$ tal que $h = x + y$, donde $y \in (H_0)^\perp$.

Si denotamos por Id al operador identidad, claramente se tiene que

$$(Id - P)(H) = P(H)^\perp = (H_0)^\perp.$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\langle (Id - P)(h), h_{\sigma(n)} \rangle = \langle (Id - P)(h), h_0 \rangle = 0, \forall h \in H.$$

Así, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, h_{\sigma(n)} \rangle = \langle h, h_0 \rangle, \forall h \in H.$$

Finalmente, hemos comprobado que $\{h_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a h_0 en H . ■

Durante el proceso de homogeneización, aparecerán convergencias tanto débiles como fuertes. El siguiente resultado nos ayudará a estudiar la convergencia del producto interno de estas sucesiones.

Proposición 1.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de elementos de H tales que, para ciertos $x, y \in H$,*

$$x_n \rightarrow x \text{ débilmente en } H,$$

$$y_n \rightarrow y \text{ fuertemente en } H.$$

Entonces, se cumple que

$$\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Demostración:

Primero, realizamos la acotación

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle|. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora cada uno de los sumandos que hemos obtenido.

Del primero, como la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente, tenemos que está acotada. Es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_n\| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$0 \leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| \leq k \|y_n - y\|.$$

Debido a la convergencia fuerte de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos que

$$k \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

Y así, deducimos que

$$|\langle x_n, y_n - y \rangle| \rightarrow 0.$$

Para el segundo término, definimos el funcional $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$F(z) = \langle z, y \rangle, \forall z \in H.$$

En virtud de la linealidad en la primera variable del producto interno, así como de su continuidad, tenemos que $F \in H'$. Por tanto, debido a la convergencia débil de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a x

$$0 \leq |\langle x_n - x, y \rangle| = |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |F(x_n) - F(x)| \rightarrow 0.$$

Así, llegamos a que

$$|\langle x_n - x, y \rangle| \rightarrow 0.$$

Aplicando los límites calculados a la desigualdad

$$0 \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle|,$$

obtenemos que

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \rightarrow 0,$$

que es equivalente a

$$\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

■

1.2 Teoría de distribuciones

El problema de Dirichlet a estudiar está enunciado de “forma débil”. Es decir, la igualdad del problema diferencial es en términos de distribuciones y no de funciones. Por ello, pasamos a definir la teoría de distribuciones necesaria para enunciar el problema en su “forma débil”.

Principalmente, nos centramos en definir qué es una distribución y qué se entiende por derivada de una distribución.

Definición 1.2. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Definimos el conjunto

$$C_c^p(\Omega) = \{f \in C^p(\Omega) : \text{sop}(f) \text{ compacto}\}.$$

Los elementos de este espacio son conocidos como funciones test. Además, para $p = +\infty$, al conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ lo notamos por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Notación. Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, notamos $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_N|$ y definimos el operador

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definición 1.3. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$. Diremos que $\{\varphi_n\}$ converge en $\mathcal{D}(\Omega)$ a φ si se verifica que:

- Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\text{sop}(\varphi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ se tiene que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente en K .

Definición 1.4. Diremos que $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una distribución en Ω si es lineal y secuencialmente continua, esto es, si para toda sucesión $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente en $\mathcal{D}(\Omega)$ a φ se verifica que $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$.

Al espacio de las distribuciones en Ω lo notaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 1.5. Dada $\alpha \in \mathbb{N}^N$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos la derivada débil de T de multiíndice α , $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particular, para $|\alpha| = 1$ y para $1 \leq i \leq N$, notamos por $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ a la derivada débil de T respecto de la variable x_i , que se obtiene de la forma

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Además, si T y $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ son funciones, se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial x_i} \varphi \, dx = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} T \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por último, denotamos por ∇T al vector formado por las derivadas débiles de T con respecto a cada componente.

1.3 Espacios de Lebesgue

Pasamos a definir los espacios de Lebesgue, pues los espacios de Sobolev se construyen a partir de éstos.

Definición 1.6. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $p \in [1, +\infty[$. Entonces, definimos el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ de la forma

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{medible y } \int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

Estos espacios, vía la relación de equivalencia

$$f \sim g \iff f = g \text{ c.t.p en } \Omega,$$

son normados con

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}, \forall f \in L^p(\Omega).$$

En particular, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f g dx, \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Definición 1.7. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N . Entonces, definimos el espacio de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ de la forma

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{medible y acotada c.t.p} \}.$$

En este espacio se define la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}.$$

Además, definimos los siguientes subespacios de los espacios de Lebesgue.

Definición 1.8. Decimos que Ω' está fuertemente contenido en Ω si $\overline{\Omega'}$ es compacto y $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Lo denotamos por $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Definición 1.9. Dado $p \in [1, +\infty]$, definimos

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{v \in L^p(K), \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto}\}.$$

Claramente se tiene que

$$L^p_{loc}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall p \in [1, +\infty].$$

1.4 Espacios de Sobolev

Una vez definidos los espacios de Lebesgue, estamos en condiciones de definir los espacios de Sobolev, que serán los espacios principales en los que se desarrollará el trabajo.

Como apunte, recordar que estamos trabajando en un contexto de distribución. Por tanto, u es una distribución y $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ de la Definición 1.10 es la derivada débil de u con respecto a la variable x_i .

Definición 1.10. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y sea $p \in [1, +\infty]$. Definimos los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ de la forma

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Estos espacios son normados con

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Además, para cada $p \in [1, +\infty]$ también podemos definir

$$W_{loc}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L_{loc}^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{loc}^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

En particular, para $p = 2$, denotamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ que es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{(L^2(\Omega))^N}, \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

El espacio dual de $W^{1,p}(\Omega)$ se denota por $W^{-1,p}(\Omega)$ y el espacio dual de $H^1(\Omega)$ se denota por $H^{-1}(\Omega)$.

Definimos ahora un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$ que tendrá mucha importancia en el problema de Dirichlet.

Definición 1.11. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es el cierre de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. De forma análoga, denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$, que tiene por producto escalar el inducido por $H^1(\Omega)$.

Para entender mejor los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$, intuitivamente se pueden ver como las funciones pertenecientes a $W^{1,p}(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω , de ahí su importancia en el problema de Dirichlet.

Esto es debido a que, si

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}),$$

entonces $u = 0$ en $\partial\Omega$.

Este resultado requiere de un contexto que se escapa de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, puede consultarse su demostración en [2].

La relación entre los espacios de Lebesgue y los espacios de Sobolev es muy estrecha. Sobre ellos, hay gran cantidad de teoremas sobre embebimientos de unos espacios en otros. Estos embebimientos se conocen como embebimientos de Sobolev.

En nuestro caso, haremos uso del Teorema de Rellich-Kondrachov que nos aporta embebimientos compactos necesarios para la demostración de futuras convergencias. Su demostración puede consultarse en [2].

Teorema 1.3 (Rellich-Kondrachov). *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ está acotado. Entonces los siguientes embebimientos son compactos:*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[, & \text{donde } \frac{1}{p^*} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \text{ si } p < N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[, & & \text{si } p = N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), & & \text{si } p > N. \end{aligned}$$

En particular, $W_0^{1,p}(\Omega)$ está embebido de forma compacta en $L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$ y para todo $N \in \mathbb{N}$.

Otro resultado clásico sobre espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev es la desigualdad de Poincaré, que nos aporta una norma equivalente para el espacio $H_0^1(\Omega)$. Su demostración puede consultarse en [2]

Proposición 1.3 (Desigualdad de Poincaré). *Supongamos que $1 \leq p < +\infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante C , que depende de Ω y p , tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como consecuencia directa de esta desigualdad, en el espacio $H_0^1(\Omega)$, la norma de la Definición 1.10 para este espacio es equivalente a la norma $\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}$.

Finalmente, usando la Proposición 1.1 y los embebimientos del Teorema de Rellich-Kondrachov, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Sea Ω un conjunto acotado de \mathbb{R}^N y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de elementos de $H_0^1(\Omega)$. Entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite una parcial, que denotamos por $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que, para cierto $x \in H_0^1(\Omega)$, se verifica que*

$$x_{\sigma(n)} \rightharpoonup x \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

$$x_{\sigma(n)} \rightarrow x \text{ fuertemente en } L^2(\Omega).$$

Demostración:

Primero, usando la Proposición 1.1, como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$, admite una parcial, que denotamos por $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge débilmente a x en $H_0^1(\Omega)$ para cierto $x \in H_0^1(\Omega)$.

Aplicando el Teorema 1.3, tenemos que $H_0^1(\Omega)$ está embebido de forma compacta en $L^2(\Omega)$. Como primera consecuencia de este resultado, tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x en $L^2(\Omega)$.

Si tomamos cualquier parcial de $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotamos por $\{x_{\sigma_1(\sigma(n))}\}_{n \in \mathbb{N}}$, sabemos que esta parcial converge débilmente a x en $L^2(\Omega)$ y que está acotada en $H_0^1(\Omega)$.

Por tanto, al tener un embebimiento compacto de espacios de Hilbert, el operador identidad es un operador compacto. Esto provoca que la imagen de la sucesión $\{x_{\sigma_1(\sigma(n))}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que es ella misma pero vista en $L^2(\Omega)$ admite una parcial convergente fuertemente en $L^2(\Omega)$ a cierto $\tilde{x} \in L^2(\Omega)$. Luego converge débilmente a \tilde{x} en $L^2(\Omega)$. Por la unicidad de límite débil, tenemos que $x = \tilde{x}$.

Finalmente, partiendo de $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, hemos tomado una parcial cualquiera, de la cual, hemos podido extraer otra parcial convergente fuertemente a x en $L^2(\Omega)$. Aplicando el Lema 1.1, concluimos que $\{x_{\sigma(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a x en $L^2(\Omega)$. ■

1.5 Existencia y unicidad del problema de Dirichlet

Esta sección tendrá como objetivo presentar el problema de Dirichlet al cual le aplicaremos la homogeneización.

Además, demostraremos la existencia y unicidad de este problema. Para ello, haremos uso del conocido Teorema de Lax-Milgram, cuya demostración puede consultarse en [2].

Teorema 1.4 (Lax-Milgram). Sean H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, dado cualquier $f \in H'$, existe un único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H.$$

Pasamos a definir el problema de Dirichlet y una formulación que veremos que es equivalente.

Definición 1.12. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, consideramos el siguiente problema de Dirichlet. Encontrar u que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.1)$$

Además, llamamos formulación variacional de (1.1) a

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.2)$$

Lema 1.2. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N y $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, los problemas (1.1) y (1.2) son equivalentes.

Demostración:

Veamos que u verifica

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

si, y solo si,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Partimos de que

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

si, y solo si,

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Esta última expresión la podemos desarrollar, obteniendo que

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \langle -\Delta u, v \rangle = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ahora, aplicamos integración por partes a la primera integral y tenemos

$$\int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} -u \nabla v \hat{n} d\gamma - \int_{\Omega} -\nabla u \nabla v dx,$$

donde \hat{n} es el vector unitario exterior a $\partial\Omega$ y γ es la parametrización de la frontera de Ω . Además, como $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos que $v = 0$ en la frontera de Ω . Así, deducimos que

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Concluimos que u verifica

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

si, y solo si,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que a su vez equivale a que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

■

Proposición 1.5. *Existe, y es única, la solución del problema de Dirichlet (1.1).*

Demostración:

Definimos $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Para que se verifiquen las hipótesis del Teorema 1.4 debemos comprobar que a es una forma bilineal, continua y coerciva.

Primero, comprobamos la linealidad. Sean $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, es lineal en la primera variable ya que

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta \tilde{u}, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta \tilde{u}) \nabla v dx = \int_{\Omega} (\alpha \nabla u + \beta \nabla \tilde{u}) \nabla v dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla v dx = \alpha a(u, v) + \beta a(\tilde{u}, v). \end{aligned}$$

De forma análoga, y queriendo mantener la notación, tomamos $v, \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ y comprobamos que es lineal en la segunda variable, pues

$$\begin{aligned} a(u, \alpha v + \beta \tilde{v}) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\alpha v + \beta \tilde{v}) dx = \int_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v + \beta \nabla \tilde{v}) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\Omega} \nabla u \nabla \tilde{v} dx = \alpha a(u, v) + \beta a(u, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Luego tenemos que es una forma bilineal. Para ver que es continua, comprobamos que es acotada. Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, obtenemos la acotación

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Luego a es acotada y, por tanto, es continua.

Finalmente, comprobamos que es coerciva. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, en este caso, tenemos la igualdad

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Concluimos pues, que a es una forma bilineal, continua y coerciva. Teniendo en cuenta que (1.1) puede escribirse como

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

en virtud del Teorema 1.4 tenemos existencia y unicidad de solución. ■

Homogeneización del problema de Dirichlet

En este capítulo mostraremos, en un marco abstracto, el proceso de homogeneización. Este análisis se basa en los resultados de la primera sección de [1]. El objetivo de este capítulo consistirá en explicar esos resultados de forma detallada y clarificadora.

2.1 Geometría del dominio. Dominio perforado

Principalmente la homogeneización se basa en el estudio del problema de Dirichlet en conjuntos obtenidos a partir del dominio original. Estos conjuntos surgen de “practicar” una serie de “agujeros” al dominio original.

Pasamos a definir estos conjuntos y la geometría que surge en ellos.

Definición 2.1. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N . Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de \mathbb{R}^+ tal que $x_n \rightarrow 0$ y notamos el conjunto $\mathcal{E} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, para cada $\varepsilon \in \mathcal{E}$, se definen conjuntos cerrados T_i^ε , con $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$, que reciben el nombre de agujeros y el dominio perforado

$$\Omega^\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} T_i^\varepsilon.$$

El valor de ε varía tomando valores en \mathcal{E} . Por ello, vamos a definir el concepto de sucesión en términos de ε . La siguiente definición está aplicada para un elemento indeterminado, pues a lo largo de nuestro estudio tendremos varias sucesiones que dependan de ε . Un primer ejemplo que ya podemos pensar es la sucesión de dominios que surge de Ω^ε .

Definición 2.2. Definimos la sucesión en términos de ε de la forma

$$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}} := \{u^{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

En cuanto a la convergencia,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon := \lim_{n \rightarrow +\infty} u^{x_n}.$$

Comentar que tanto u^ε como u^{x_n} es notación y no hay que confundir con exponenciación.

Por otra parte, para tener buenas propiedades sobre el dominio perforado Ω^ε , es necesario imponer algunas hipótesis sobre los agujeros. Si bien pueden parecer extrañas a primera vista, conforme vayamos mostrando resultados y demostraciones entenderemos lo esenciales que son.

Hipótesis de los agujeros. Sean $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ una sucesión de funciones y μ una distribución tal que,

$$w^\varepsilon \in H^1(\Omega), \forall \varepsilon \in \mathcal{E}, \quad (\text{H.1})$$

$$w^\varepsilon = 0 \text{ en los agujeros } T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon), \forall \varepsilon \in \mathcal{E}, \quad (\text{H.2})$$

$$w^\varepsilon \rightharpoonup 1 \text{ débilmente en } H^1(\Omega), \quad (\text{H.3})$$

$$\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega), \quad (\text{H.4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para cada sucesión } \{v^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \text{ tal que } v^\varepsilon = 0 \\ \text{en los agujeros } T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon), \forall \varepsilon \in \mathcal{E}, \\ \text{satisfaciendo } v^\varepsilon \rightharpoonup v \text{ débilmente en } H^1(\Omega) \\ \text{con } v \in H^1(\Omega), \text{ se tiene que} \\ \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \mu, \varphi v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array} \right. \quad (\text{H.5})$$

Como primera consecuencia de estas hipótesis, debemos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$. Esto es debido a que, en el caso $N = 1$, los agujeros tienden a desaparecer en la frontera de Ω . Este hecho provoca que no tenga sentido estudiar la homogeneización en este caso.

Para probar esto, tenemos en cuenta el embebimiento de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset C^{0,1/2}(\mathbb{R})$, donde

$$C^{0,1/2}(\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R}) : \exists k \in \mathbb{R} \text{ verificando } |u(x) - u(y)| < k|x - y|^{1/2}, \forall x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Sean T_i^ε un agujero de Ω^ε y $x_i^\varepsilon \in T_i^\varepsilon$. Entonces, la sucesión $\{x_i^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ es convergente a x^0 para cierto $x^0 \in \overline{\Omega}$. Luego, usando el embebimiento de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \subset C^{0,1/2}(\mathbb{R})$, (H.1) y (H.2), tenemos que

$$|w^\varepsilon(x^0) - 0| = |w^\varepsilon(x^0) - w^\varepsilon(x_i^\varepsilon)| < k|x^0 - x_i^\varepsilon|^{1/2} \rightarrow 0.$$

Así, obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w^\varepsilon(x^0) = 0.$$

Sin embargo, debido a (H.3), deducimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w^\varepsilon(x) = 1, \forall x \in \Omega.$$

Por tanto, $x^0 \in \partial\Omega$. Por la arbitrariedad del agujero T_i^ε , tenemos que todos los agujeros tienden a desaparecer en la frontera de Ω , provocando que descartemos el caso $N = 1$.

Con el siguiente resultado, caracterizamos la distribución μ , clarificando la relación que posee con la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$.

Proposición 2.1. Si $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y μ satisfacen las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5), se tiene que

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla w^\varepsilon|^2 \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De esta igualdad, se tiene como consecuencia directa que μ es una medida positiva y es el límite en el sentido de distribuciones de $\{|\nabla w^\varepsilon|^2\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$.

Demostración:

Debido a las hipótesis (H.1), (H.2) y (H.3), podemos sustituir $v^\varepsilon = w^\varepsilon$ y $v = 1$ en la hipótesis (H.5). Así, tenemos que

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ahora bien, usando integración por partes, obtenemos la expresión

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} -\Delta w^\varepsilon \varphi w^\varepsilon dx = \int_{\partial\Omega} -\varphi w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \hat{n} d\gamma - \int_{\Omega} -\nabla w^\varepsilon \nabla(\varphi w^\varepsilon) dx,$$

donde \hat{n} es el vector unitario exterior a $\partial\Omega$ y γ es la parametrización de la frontera de Ω .

Como $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, el primer sumando obtenido se anula.

Además, desarrollando el segundo sumando, llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \varphi \nabla w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx + \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla w^\varepsilon|^2 \varphi dx + \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

En este punto, si demostramos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

tendremos la igualdad deseada.

En primer lugar, por la hipótesis (H.3), tenemos que $\{\nabla w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente a $\nabla 1 = 0$ en $(L^2(\Omega))^N$.

En segundo lugar, veamos que $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge a 1 fuertemente en $L_{loc}^2(\Omega)$.

Sea $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Entonces, podemos aplicar la acotación

$$\int_{\Omega_0} |w^\varepsilon - 1|^2 dx \leq \int_{\Omega} |(w^\varepsilon - 1)\varphi|^2 dx, \forall 0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ con } \varphi \equiv 1 \text{ en } \overline{\Omega_0}.$$

Nótese que la sucesión $\{w^\varepsilon \varphi\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ es de elementos de $H_0^1(\Omega)$. Así, por el Teorema 1.3 existe una parcial, que seguiremos denotando por $\{w^\varepsilon \varphi\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ convergente fuertemente en $L^2(\Omega)$. Además, debido a la convergencia débil de $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ a 1, sabemos que $\{w^\varepsilon \varphi\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge fuertemente a φ . Por tanto, deducimos que

$$\int_{\Omega} |(w^\varepsilon - 1)\varphi|^2 dx = \int_{\Omega} |w^\varepsilon \varphi - \varphi|^2 dx \rightarrow 0.$$

Y así concluimos que

$$\int_{\Omega_0} |w^\varepsilon - 1|^2 dx \rightarrow 0.$$

Hemos obtenido que la parcial $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge fuertemente a 1 en $L_{loc}^2(\Omega)$. Sin embargo, si extraemos cualquier otra parcial convergente de la sucesión original, debido a la convergencia débil de $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ a 1 en $H^1(\Omega)$ y a la unicidad de límite débil

obtendríamos que esa parcial converge fuertemente a 1 en $L^2_{loc}(\Omega)$. Finalmente, por el Lema 1.1, tenemos que toda la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge fuertemente a 1 en $L^2_{loc}(\Omega)$.

De esta manera, la sucesión $\{w^\varepsilon \nabla \varphi\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge fuertemente a $\nabla \varphi$ en $L^2_{loc}(\Omega)$. Así, estamos en condiciones de aplicar la Proposición 1.2, obteniendo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \nabla w^\varepsilon, w^\varepsilon \nabla \varphi \rangle = \langle 0, \nabla \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De esta forma, tenemos por un lado

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} = \langle \mu, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Y por otro lado, deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla w^\varepsilon|^2 \varphi \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla w^\varepsilon|^2 \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Por la unicidad del límite, concluimos que

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla w^\varepsilon|^2 \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

■

En el siguiente resultado, mostramos que las hipótesis sobre los agujeros son condiciones exigentes, pues tenemos cierta “casi unicidad”.

Proposición 2.2. Sean $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}, \{\bar{w}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ sucesiones de elementos de $H^1(\Omega)$ y $\mu, \bar{\mu}$ distribuciones pertenecientes a $W^{-1, \infty}(\Omega)$. Supongamos que $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y μ , así como $\{\bar{w}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y $\bar{\mu}$, verifican las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5). Entonces $\mu = \bar{\mu}$ y $w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $H^1_{loc}(\Omega)$.

Demostración:

Veamos primero que $\mu = \bar{\mu}$. Aplicando convenientemente (H.5) e integración por partes, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \bar{w}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} &= \int_{\Omega} -\Delta w^\varepsilon \varphi \bar{w}^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \varphi \nabla w^\varepsilon \nabla \bar{w}^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} \bar{w}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx, \\ \langle -\Delta \bar{w}^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} &= \int_{\Omega} -\Delta \bar{w}^\varepsilon \varphi w^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \varphi \nabla \bar{w}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \, dx + \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla \bar{w}^\varepsilon \nabla \varphi \, dx. \end{aligned}$$

De los dos sumandos que hemos obtenido en cada igualdad, al segundo se le puede aplicar el mismo argumento que se usó en la Proposición 2.1 para resolver el límite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla \bar{w}^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Con el mismo argumento, llegamos a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla \bar{w}^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \bar{w}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Así, calculando el límite a las igualdades de partida, obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \bar{w}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \nabla w^\varepsilon \nabla \bar{w}^\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta \bar{w}^\varepsilon, \varphi w^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Sin embargo, estos límites son conocidos gracias a (H.5). Llegamos finalmente a que

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \bar{\mu}, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Y, por tanto, $\mu = \bar{\mu}$.

Veamos ahora que $w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $H_{loc}^1(\Omega)$. Sea $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, tenemos que probar que

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon)|^2 dx + \int_{\Omega_0} |w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon|^2 dx \rightarrow 0.$$

Por la Proposición 2.1, sabemos que tanto la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ como $\{\bar{w}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ convergen fuertemente a 1 en $L_{loc}^2(\Omega)$. Por tanto, $w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $L_{loc}^2(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega_0} |w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon|^2 dx \rightarrow 0.$$

Por otro lado, podemos hacer la acotación

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon)|^2 \varphi dx, \forall 0 \leq \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ con } \varphi \equiv 1 \text{ en } \bar{\Omega}_0.$$

Además, usando integración por partes, obtenemos que

$$\langle -\Delta(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon), \varphi(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon)|^2 \varphi dx.$$

Ahora bien, desarrollando,

$$\begin{aligned} & \langle -\Delta(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon), \varphi(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle -\Delta \bar{w}^\varepsilon, \varphi(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Y usando (H.5) llegamos a que

$$\langle -\Delta(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon), \varphi(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \mu, 0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle \bar{\mu}, 0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Concluimos pues, que

$$\int_{\Omega_0} |\nabla(w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Finalmente, tenemos que $w^\varepsilon - \bar{w}^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $H_{loc}^1(\Omega)$. ■

2.2 Problema de Dirichlet en el dominio perforado

Una vez estudiado el dominio homogeneizado y sus propiedades, pasamos a plantear el problema de Dirichlet en él y su extensión al dominio original.

Definición 2.3. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in L^2(\Omega)$ y $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Entonces, consideramos el siguiente problema de Dirichlet. Encontrar u^ε que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega^\varepsilon), \\ u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \end{cases} \quad (2.1)$$

Definición 2.4. En el contexto de la Definición 2.3, decimos que u^ε satisface la formulación variacional del problema (2.1) si

$$\begin{cases} \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla v \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega^\varepsilon), \\ u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \end{cases} \quad (2.2)$$

Análogamente al Lema 1.2, los problemas (2.1) y (2.2) son equivalentes.

Definición 2.5. Dada u^ε solución del problema (2.1), definimos la extensión de esta función a Ω de la forma

$$\tilde{u}^\varepsilon = \begin{cases} u^\varepsilon & \text{en } \Omega^\varepsilon, \\ 0 & \text{en } T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon). \end{cases}$$

De la solución extendida obtenemos la siguiente propiedad, clave para la demostración del Teorema de Homogeneización.

Proposición 2.3. Sea \tilde{u}^ε dada por la Definición 2.5. Entonces, la sucesión $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ tiene una parcial que converge a u débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$, para cierto $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración:

Primero, como $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ y \tilde{u}^ε se anula en los agujeros, tenemos que $\tilde{u}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. Además, si tomamos $v = u^\varepsilon$ en (2.2),

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}^\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f u^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} f \tilde{u}^\varepsilon \, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos la acotación

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 = \int_{\Omega} f \tilde{u}^\varepsilon \, dx = \langle f, \tilde{u}^\varepsilon \rangle \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Poincaré 1.3,

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

Y llegamos a la desigualdad

$$\|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, concluimos que

$$\|\tilde{u}^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}^\varepsilon|^2 \, dx = \|\nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Así, tenemos que la sucesión $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por la Proposición 1.4 concluimos que tiene una parcial que converge a u débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$, para cierto $u \in H_0^1(\Omega)$. ■

2.3 Teorema de Homogeneización

El artículo en el que se basa este trabajo [1] tiene por nombre *A strange term coming from nowhere*. En esta sección, enunciaremos y demostraremos el Teorema de Homogeneización, centro del trabajo, en el que veremos la aparición del término extraño que se cita en el título del artículo.

Básicamente, este teorema nos asegura que la sucesión de soluciones extendidas $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge a un elemento que es solución de un problema muy parecido al inicial. La diferencia consiste en la aparición de un sumando extra, el término extraño.

Comenzaremos definiendo este término extraño y el problema que lo contiene.

Definición 2.6. Sea una distribución $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$ y una función $u \in H_0^1(\Omega)$. Entonces definimos el funcional

$$\begin{aligned} \mu u : H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \langle \mu u, v \rangle = \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Lema 2.1. El funcional μu dado por la Definición 2.6 pertenece a $H^{-1}(\Omega)$.

Demostración:

Comprobemos primero que μu es lineal. Sean $v, \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, se cumple la linealidad pues

$$\begin{aligned} \langle \mu u, \alpha v + \beta \tilde{v} \rangle &= \langle \mu, (\alpha v + \beta \tilde{v}) u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \mu, \alpha v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \mu, \beta \tilde{v} u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \alpha \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \beta \langle \mu, \tilde{v} u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \alpha \langle \mu u, v \rangle + \beta \langle \mu u, \tilde{v} \rangle. \end{aligned}$$

Veamos ahora que está acotado. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$. Luego, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|\langle \mu u, v \rangle| = \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Tomando $c = \|\mu\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, que es un valor constante, concluimos que

$$|\langle \mu u, v \rangle| \leq c \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Habiendo demostrado que μu es un funcional lineal y acotado, tenemos que μu pertenece a $H^{-1}(\Omega)$. ■

Definición 2.7. A partir del problema (2.1) y como extensión del mismo, dada $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$ verificando las hipótesis de los agujeros, definimos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde μu es el funcional de $H^{-1}(\Omega)$ de la Definición 2.6.

Al igual que en la sección anterior, podemos obtener una formulación equivalente del problema (2.3).

Definición 2.8. La formulación variacional del problema (2.3) es

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu u, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.4)$$

Lema 2.2. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in L^2(\Omega)$ y $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$. Entonces, los problemas (2.3) y (2.4) son equivalentes.

Demostración:

De forma análoga al Lema 1.2, u satisface (2.3) si, y solo si,

$$\langle -\Delta u + \mu u, v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle + \langle \mu u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Resolviendo el término $\langle -\Delta u, v \rangle$ al igual que en el Lema 1.2, obtenemos la expresión (2.4). ■

Además, usando de nuevo el Teorema de Lax-Milgram 1.4, podemos demostrar la existencia y unicidad de solución del problema con el término extraño.

Proposición 2.4. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , $f \in L^2(\Omega)$ y $\mu \in W^{-1,\infty}(\Omega)$. Entonces, existe, y es única, la solución del problema (2.3).

Demostración:

Definimos $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu u, v \rangle, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

donde μu es el funcional de $H^{-1}(\Omega)$ de la Definición 2.6.

Para que se verifiquen las hipótesis del Teorema 1.4 debemos comprobar que a es una forma bilineal, continua y coerciva.

Primero, demostramos la linealidad. Sean $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces, se verifica la linealidad en la primera variable pues

$$\begin{aligned}
 a(\alpha u + \beta \tilde{u}, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta \tilde{u}) \nabla v \, dx + \langle \mu(\alpha u + \beta \tilde{u}), v \rangle \\
 &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta \tilde{u}) \nabla v \, dx + \langle \mu, v(\alpha u + \beta \tilde{u}) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\
 &= \int_{\Omega} (\alpha \nabla u + \beta \nabla \tilde{u}) \nabla v \, dx + \langle \mu, \alpha v u + \beta v \tilde{u} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\
 &= \alpha \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right) \\
 &\quad + \beta \left(\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \nabla v \, dx + \langle \mu, v \tilde{u} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right) \\
 &= \alpha a(u, v) + \beta a(\tilde{u}, v).
 \end{aligned}$$

De forma análoga, y queriendo mantener la notación, tomamos $v, \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$, verificándose la linealidad en la segunda variable ya que

$$\begin{aligned}
 a(u, \alpha v + \beta \tilde{v}) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\alpha v + \beta \tilde{v}) \, dx + \langle \mu u, \alpha v + \beta \tilde{v} \rangle \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla(\alpha v + \beta \tilde{v}) \, dx + \langle \mu, (\alpha v + \beta \tilde{v}) u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u (\alpha \nabla v + \beta \nabla \tilde{v}) \, dx + \langle \mu, \alpha v u + \beta \tilde{v} u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\
 &= \alpha \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right) \\
 &\quad + \beta \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla \tilde{v} \, dx + \langle \mu, \tilde{v} u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right) \\
 &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, \tilde{v}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que es una forma bilineal. Para ver que es continua, comprobamos que es acotada. Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, obtenemos la acotación

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu u, v \rangle \right| \\
 &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \right| + |\langle \mu u, v \rangle| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dx + \left| \langle \mu, v u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \\
 &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\mu\|_{W^{-1, \infty}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
 &= (1 + \|\mu\|_{W^{-1, \infty}(\Omega)}) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Tomando $c = 1 + \|\mu\|_{W^{-1, \infty}(\Omega)}$, que es constante, tenemos que

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Luego a es acotada y, por tanto, es continua.

Finalmente, comprobamos que es coerciva. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, deducimos que

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla u \, dx + \langle \mu u, u \rangle \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 + \langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1}^2 + \langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.1, μ es una medida positiva. Por tanto $\langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0$. Así, se tiene que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|u\|_{H_0^1}^2 + \langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = a(u, u), \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Concluimos pues, que a es una forma bilineal, continua y coerciva. Teniendo en cuenta que (2.4) puede escribirse como

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

en virtud del Teorema 1.4 tenemos existencia y unicidad de solución. ■

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado más importante del trabajo que clarifica el resultado de la homogeneización del problema de Dirichlet.

Teorema 2.1 (Teorema de Homogeneización). Sean $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y μ satisfaciendo las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5). Sea la sucesión $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ de soluciones de los problemas (2.1) definidos para cada $\varepsilon \in \mathcal{E}$ y la consiguiente sucesión de extensiones $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$. Entonces

$$\tilde{u}^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

donde u es la única solución de (2.3).

Demostración:

Primero, por la Proposición 1.4 tenemos la existencia de una parcial de $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, que seguiremos denotando por $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, y de $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\tilde{u}^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

$$\tilde{u}^\varepsilon \rightarrow u \text{ fuertemente en } L^2(\Omega).$$

Comprobemos que u es la única solución del problema (2.3).

Primero, nótese que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la función $w^\varepsilon \varphi$ pertenece a $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$. Esta conclusión se deduce de las dos siguientes afirmaciones.

Sea $Q^\varepsilon = \mathbb{R}^N - \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} T_i^\varepsilon$. Entonces, la función w^ε es la extensión, anulándose en los agujeros T_i^ε , de una función perteneciente a $H_0^1(Q^\varepsilon)$.

Del mismo modo, si tomamos la sucesión $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ definida en (H.5), para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se tiene que $v^\varepsilon \varphi$ es la extensión, anulándose en los agujeros T_i^ε , de una función perteneciente a $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

De esa forma, como podemos tomar $v^\varepsilon = w^\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, tenemos que $w^\varepsilon \varphi$ pertenece a $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$.

Por tanto, podemos tomar $v = w^\varepsilon \varphi$ en (2.2), llegando a que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla (w^\varepsilon \varphi) dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f w^\varepsilon \varphi dx.$$

Desarrollando y pasando a la extensión en Ω , que recordemos que es nula en los agujeros, se verifica que

$$\int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx = \int_{\Omega} f w^\varepsilon \varphi dx. \quad (\diamond)$$

Para poder tomar límite, cuando ε tiende a cero, vamos a estudiar el límite en cada uno de los tres términos que componen (\diamond) .

Para el primer término, debido a la convergencia de $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la Proposición 2.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{u}^\varepsilon &\rightharpoonup \nabla u \text{ débilmente en } L^2(\Omega)^N, \\ w^\varepsilon \nabla \varphi &\rightarrow \nabla \varphi \text{ fuertemente en } L_{loc}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Por tanto, usando la Proposición 1.2 obtenemos que

$$\int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx.$$

Para el segundo término, podemos obtenerlo a través de integración por partes de la integral

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \tilde{u}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} -\Delta w^\varepsilon \varphi \tilde{u}^\varepsilon dx = \int_{\partial\Omega} -\varphi \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \hat{n} d\gamma + \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon \nabla (\varphi \tilde{u}^\varepsilon) dx,$$

donde \hat{n} es el vector unitario exterior a $\partial\Omega$ y γ es la parametrización de la frontera de Ω . Como $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la integral sobre $\partial\Omega$ es 0. Además, desarrollando el gradiente, llegamos a que

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \tilde{u}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx + \int_{\Omega} \tilde{u}^\varepsilon \nabla \varphi \nabla w^\varepsilon dx.$$

Nótese que en esta igualdad obtenemos el segundo término de (\diamond) . Despejándolo, tenemos que

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx = \langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \tilde{u}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \tilde{u}^\varepsilon \nabla \varphi \nabla w^\varepsilon dx.$$

Descrito de esta manera, podemos calcular el límite. Aplicando la hipótesis (H.5),

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi \tilde{u}^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \rightarrow \langle \mu, \varphi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Además, se cumple

$$\begin{aligned} \nabla w^\varepsilon &\rightharpoonup \nabla 1 \text{ débilmente en } L^2(\Omega)^N, \\ \tilde{u}^\varepsilon \nabla \varphi &\rightarrow u \nabla \varphi \text{ fuertemente en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Por tanto, usando la Proposición 1.2 deducimos que

$$-\int_{\Omega} \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi \, dx \rightarrow -\int_{\Omega} u \nabla \varphi \nabla 1 \, dx = 0.$$

Así, tenemos el límite del segundo término de (\diamond),

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \, dx \rightarrow \langle \mu, \varphi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Para el último término, tenemos en cuenta que

$$f w^\varepsilon \varphi \rightarrow f \varphi \text{ fuertemente en } L^2(\Omega).$$

Luego, se tiene que

$$\int_{\Omega} f w^\varepsilon \varphi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Así, una vez calculados los límites correspondientes, tomando límite en (\diamond), obtenemos que u verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \langle \mu, \varphi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Como $u \in H_0^1(\Omega)$, deducimos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \langle \mu, \varphi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Por la densidad de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$, se cumple que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \langle \mu, \varphi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Aplicando de nuevo que $u \in H_0^1(\Omega)$ y la Definición 2.6, tenemos que u satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \langle \mu u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

que es la formulación variacional de (2.3). Por el Lema 2.2, tenemos que u es solución de (2.3). Y por la Proposición 2.4, concluimos que es la única solución de (2.3).

Por último, recordemos que u es el límite de $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, que era una parcial de la sucesión original. Ahora bien, si partimos de una parcial cualquiera, podemos extraer una parcial convergente cuyo límite también verificará este problema (haciendo exactamente la misma demostración). Por la unicidad de solución del problema (2.3), de cualquier parcial podemos extraer otra parcial convergente débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$. Concluimos por el Lema 1.1 que la sucesión original $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$. ■

2.4 Corrector

El objetivo de esta sección consistirá en mostrar un resultado de tipo corrector. Es decir, veremos que las soluciones u^ε del problema de Dirichlet en Ω^ε pueden ser escritas como el producto de la solución del problema límite u y las funciones test w^ε más un resto r^ε cuya sucesión $\{r^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge a 0 fuertemente en $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Para ello, comenzamos viendo el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Supongamos que existe la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ que verifican las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5). Para toda sucesión $\{z^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y elemento z verificando*

$$\begin{cases} z^\varepsilon \rightharpoonup z & \text{débilmente en } H_0^1(\Omega), \\ z^\varepsilon = 0 & \text{en } T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon), \end{cases}$$

se cumple que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \langle \mu, z^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Demostración:

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Consideramos la integral

$$\int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon - w^\varepsilon \nabla \varphi - \varphi \nabla w^\varepsilon|^2 dx.$$

Desarrollando esta integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon - w^\varepsilon \nabla \varphi - \varphi \nabla w^\varepsilon|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |w^\varepsilon \nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega} |\varphi \nabla w^\varepsilon|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \nabla \varphi dx - 2 \int_{\Omega} \varphi \nabla z^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} w^\varepsilon \varphi \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, integrando por partes y desarrollando el gradiente, obtenemos que

$$\langle -\Delta w^\varepsilon, z^\varepsilon \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi \nabla z^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx + \int_{\Omega} z^\varepsilon \nabla \varphi \nabla w^\varepsilon dx.$$

Por tanto, agrupando y sustituyendo, la integral inicial queda de la forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} |w^\varepsilon|^2 |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\nabla w^\varepsilon|^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} w^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \nabla \varphi dx - 2 \langle -\Delta w^\varepsilon, z^\varepsilon \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} z^\varepsilon \nabla \varphi \nabla w^\varepsilon dx + 2 \int_{\Omega} w^\varepsilon \varphi \nabla w^\varepsilon \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema de Rellich-Kondrachov 1.3 que nos permite tomar una parcial, que denotamos con el índice ε' (y consecuentemente $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$), tal que la sucesión $\left\{ \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon'}|^2 dx \right\}_{\varepsilon' \in \mathcal{E}'}$ sea convergente. Además, podemos tomarla de tal forma que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon'}|^2 dx = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^\varepsilon|^2 dx.$$

Ahora, tomamos límite cuando ε' tiende a 0 en la igualdad anterior teniendo en cuenta las Proposiciones 1.2 y 2.1 y la hipótesis (H.5), tenemos que

$$0 \leq \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^{\varepsilon'} - w^{\varepsilon'} \varphi)|^2 dx = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon'}|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \langle \mu, \varphi^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ - 2 \int_{\Omega} \nabla z \nabla \varphi dx - 2 \langle \mu, z \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Y reordenando, concluimos que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon}|^2 dx = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon'}|^2 dx \geq - \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \langle \mu, \varphi^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ + 2 \int_{\Omega} \nabla z \nabla \varphi dx + 2 \langle \mu, z \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Esta desigualdad es cierta para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si tomamos una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converja fuertemente a z en $H_0^1(\Omega)$, obtenemos finalmente

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon}|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \langle \mu, z^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

■

El estudio clásico de la semicontinuidad inferior débil de la energía $\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx$ implica que para cualquier sucesión $\{v^{\varepsilon}\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ que converja débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a v , se tiene

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v^{\varepsilon}|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Sin embargo, si los elementos z^{ε} de la sucesión se anulan en los agujeros, entonces el resultado mejora obteniendo una nueva energía:

$$\int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon}|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \langle \mu, z^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Aun con este resultado, vamos a imponer más condiciones que nos aportarán más propiedades útiles de cara a obtener el corrector.

Proposición 2.6. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.5. Si además la sucesión $\{z^{\varepsilon}\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ verifica que*

$$\int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon}|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \langle \mu, z^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)},$$

entonces

$$z^{\varepsilon} - w^{\varepsilon} z \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } W_0^{1,1}(\Omega).$$

Demostración:

Usando la Proposición 2.5, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se verificaba la igualdad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^{\varepsilon} - w^{\varepsilon} \varphi)|^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z^{\varepsilon}|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \langle \mu, \varphi^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ - 2 \int_{\Omega} \nabla z \nabla \varphi dx - 2 \langle \mu, z \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Teniendo en cuenta la nueva hipótesis de convergencia, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \langle \mu, z^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \\ &\quad + \langle \mu, \varphi^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - 2 \int_{\Omega} \nabla z \nabla \varphi dx - 2 \langle \mu, z \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Completando cuadrados, llegamos a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla(z - \varphi)|^2 dx + \langle \mu, (z - \varphi)^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

En el caso en el que $z \in \mathcal{D}(\Omega)$, bastaría tomar $\varphi = z$, teniendo así que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|z^\varepsilon - w^\varepsilon z\|_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon z)\|_{(L^2(\Omega))^N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon z)|^2 dx = 0.$$

Por tanto, $z^\varepsilon - w^\varepsilon z$ converge a 0 fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Y como $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, tenemos que $z^\varepsilon - w^\varepsilon z$ converge a 0 fuertemente en $W_0^{1,1}(\Omega)$.

En el caso en el que $z \notin \mathcal{D}(\Omega)$, fijamos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|z - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \delta, \text{ para cierto } \delta > 0.$$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(z - \varphi)|^2 dx + \langle \mu, (z - \varphi)^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \|z - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \langle \mu, (z - \varphi)^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|z - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \|z - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (1 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}) \delta^2. \end{aligned}$$

Por tanto, existe ε_0 tal que, para cada $\varepsilon < \varepsilon_0$, se cumple que

$$\|z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \delta^2,$$

donde $C_1 = 1 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)}$.

Ahora bien, vamos a estudiar la norma de $z^\varepsilon - w^\varepsilon z$ en $W_0^{1,1}(\Omega)$. Primero, aplicando la desigualdad triangular, tenemos la acotación

$$\|z^\varepsilon - w^\varepsilon z\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} = \|z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi + w^\varepsilon \varphi - w^\varepsilon z\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq \|z^\varepsilon - w^\varepsilon \varphi\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} + \|w^\varepsilon(z - \varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}.$$

El primer sumando ya lo tenemos acotado por $\sqrt{C_1} \delta$. Para estudiar el segundo sumando, realizamos la acotación

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon(z - \varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} &= \|\nabla(w^\varepsilon(z - \varphi))\|_{(L^1(\Omega))^N} = \|w^\varepsilon \nabla(z - \varphi) + (z - \varphi) \nabla(w^\varepsilon)\|_{(L^1(\Omega))^N} \\ &\leq \|w^\varepsilon \nabla(z - \varphi)\|_{(L^1(\Omega))^N} + \|(z - \varphi) \nabla(w^\varepsilon)\|_{(L^1(\Omega))^N} \\ &\leq \|w^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla(z - \varphi)\|_{(L^1(\Omega))^N} + \|(z - \varphi)\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla(w^\varepsilon)\|_{(L^1(\Omega))^N}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ está acotada en $H^1(\Omega)$ existe $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon(z - \varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} &\leq \|w^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla(z - \varphi)\|_{(L^1(\Omega))^N} + \|(z - \varphi)\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla(w^\varepsilon)\|_{(L^1(\Omega))^N} \\ &\leq k(\|\nabla(z - \varphi)\|_{(L^1(\Omega))^N} + \|(z - \varphi)\|_{L^1(\Omega)}) = k\|z - \varphi\|_{W^{1,1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Y como $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$, se verifica que

$$\|w^\varepsilon(z - \varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq C_2 \delta,$$

donde $C_2 = k\sqrt{C_1}$.

En definitiva, tenemos que

$$\|z^\varepsilon - w^\varepsilon z\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq (\sqrt{C_1} + C_2)\delta, \text{ para cualquier } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Por tanto, $z^\varepsilon - w^\varepsilon z$ converge a 0 fuertemente en $W_0^{1,1}(\Omega)$. ■

Gracias a estos resultados, estamos en condiciones de presentar el Teorema del corrector.

Teorema 2.2 (Corrector). *Sea $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ la sucesión de soluciones extendidas de los problemas de Dirichlet (2.1) para cada valor ε . Supongamos que existe una sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ que verifican las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5). Entonces, existe una sucesión $\{r^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ tal que*

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon = w^\varepsilon u + r^\varepsilon, \\ r^\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ fuertemente en } W_0^{1,1}(\Omega), \end{cases}$$

donde u es la solución de (2.3).

Demostración:

Usando el Teorema de Homogeneización 2.1 se tiene que

$$\tilde{u}^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

donde u es la solución del problema (2.3).

Además, $\tilde{u}^\varepsilon = 0$ en T_i^ε con $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$. Por tanto, se verifica la Proposición 2.5. Veamos que también se verifica la Proposición 2.6.

Para ello, recordamos la formulación variacional de los problemas (2.1) y (2.3), que son, respectivamente

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla \tilde{u}^\varepsilon \nabla v \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \langle \mu, uv \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = \tilde{u}^\varepsilon$ en la primera igualdad y teniendo en cuenta la convergencia de $\{\tilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, se tiene que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla \tilde{u}^\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f \tilde{u}^\varepsilon \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} f u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \langle \mu, u^2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Por tanto, se verifica la Proposición 2.6. Finalmente, si definimos

$$r^\varepsilon = \tilde{u}^\varepsilon - w^\varepsilon u,$$

se verifica

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon = w^\varepsilon u + r^\varepsilon, \\ r^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ fuertemente en } W_0^{1,1}(\Omega). \end{cases}$$

■

Modelo de homogeneización. Agujeros esféricos idénticamente distribuidos

En el capítulo anterior mostramos el marco abstracto en el que hemos podido resolver la homogeneización. Sin embargo, ciertos conceptos tales como las hipótesis de los agujeros pueden resultar ambiguos. De hecho, fácilmente podemos plantearnos, ¿de verdad podemos encontrar un ejemplo en el que se verifiquen tales hipótesis?

Ante esta pregunta, este capítulo tiene como objetivo mostrar un modelo de homogeneización así como la ejemplificación de los conceptos vistos previamente.

3.1 Presentación del dominio

Primero, describiremos la geometría del modelo que vamos a estudiar.

Para cada valor de $\varepsilon \in \mathcal{E}$, recubrimos \mathbb{R}^N (con $N \geq 2$) con cubos P_i^ε de lado 2ε . De cada cubo, extraemos la bola T_i^ε que es concéntrica al cubo P_i^ε y de radio a^ε con $0 < a^\varepsilon < \varepsilon$.

De esa forma, hemos perforado \mathbb{R}^N con bolas de radio a^ε que están idénticamente distribuidas. Denotamos ese conjunto por Q^ε . Es decir,

$$Q^\varepsilon = \mathbb{R}^N - \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i^\varepsilon.$$

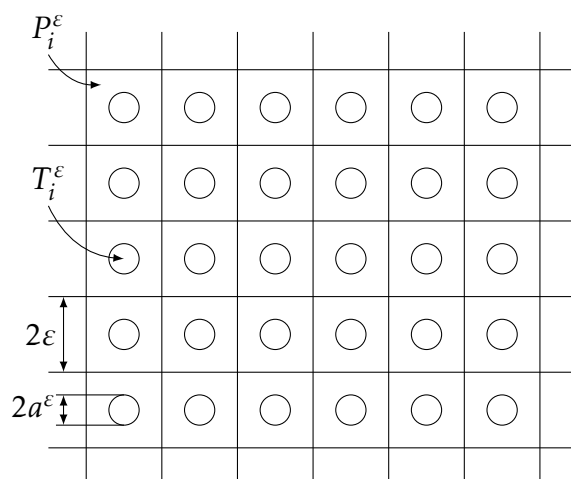


Figura 3.1: Conjunto Q^ε , caso $N = 2$.

Ahora bien, dado Ω conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N , obtenemos el dominio perforado Ω^ε intersecando con Q^ε . Es decir,

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \cap Q^\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i^\varepsilon.$$

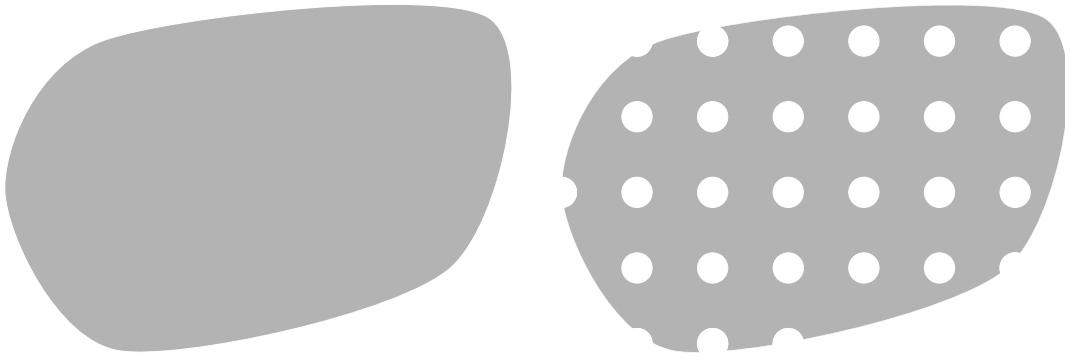


Figura 3.2: Dominio Ω y dominio perforado Ω^ε , caso $N = 2$.

Una vez definido Ω^ε , nuestro objetivo es encontrar un radio de los agujeros a^ε de tal forma que existan $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y μ verificando las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5). Para ello, denotamos por B_i^ε a las bolas concéntricas con T_i^ε y de radio ε . Además, denotamos por C_i^ε a los cubos abiertos centrados en las esquinas de los cubos P_i^ε y de lado $\frac{2(\sqrt{N}-1)}{\sqrt{N}}\varepsilon$.

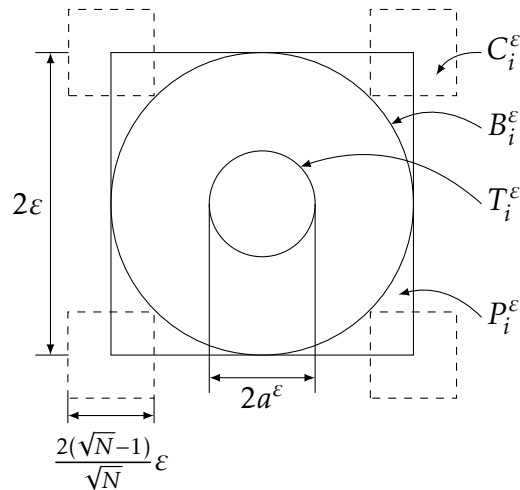


Figura 3.3: Estructura de P_i^ε , caso $N = 2$.

Una vez definido el marco geométrico en el que vamos a trabajar, ya estamos en condiciones de presentar la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ que cumplan las hipótesis de los agujeros.

3.2 Candidatos para las hipótesis de los agujeros

En esta sección, vamos a presentar de forma explícita la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ que, posteriormente, demostraremos que verifican las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5) para poder aplicar el Teorema de Homogeneización 2.1.

En las definiciones, haremos distinción entre el caso $N = 2$ y $N \geq 3$. Sin embargo, debido a la similitud de resultados, estudiaremos ambos casos de forma simultánea.

Definición 3.1. Dado $\varepsilon \in \mathcal{E}$, definimos en coordenadas polares el elemento w^ε dependiendo del caso.

- Caso $N = 2$:

$$\begin{cases} w^\varepsilon = 0 & \text{en } T_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon = \frac{\log(a^\varepsilon) - \log(r)}{\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon)} & \text{en } B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon = 1 & \text{en } P_i^\varepsilon - B_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon \text{ continua en las fronteras.} \end{cases}$$

- Caso $N \geq 3$:

$$\begin{cases} w^\varepsilon = 0 & \text{en } T_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon = \frac{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (r)^{-(N-2)}}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}} & \text{en } B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon = 1 & \text{en } P_i^\varepsilon - B_i^\varepsilon, \\ w^\varepsilon \text{ continua en las fronteras.} \end{cases}$$

Nótese que de esta forma, tenemos definida w^ε en todo \mathbb{R}^N . En particular, la tenemos definida en Ω .

Es claro que $\Delta w^\varepsilon = 0$ en $P_i^\varepsilon - B_i^\varepsilon$ y en T_i^ε . Veamos que también $\Delta w^\varepsilon = 0$ en $B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon$.

- Caso $N = 2$:

$$w^\varepsilon = \frac{\log(a^\varepsilon) - \log(r)}{\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon)} = \frac{\log(a^\varepsilon) - \log(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})}{\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon)}.$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_1} = \frac{-x_1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)}, \quad \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_1^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2} = \frac{-x_2}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)}, \quad \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_2^2} = \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

$$\Delta w^\varepsilon = \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0.$$

- Caso $N \geq 3$:

$$w^\varepsilon = \frac{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (r)^{-(N-2)}}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}} = \frac{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-(N-2)}}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}}.$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{(N-2)x_i \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-N}}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}}.$$

$$\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i^2} = \frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}} \left(\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-N} - N x_i^2 \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-N-2} \right).$$

$$\Delta w^\varepsilon = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x_i^2} = \frac{(N-2) \left(N \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-N} - N \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}\right)^{-N} \right)}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - (\varepsilon)^{-(N-2)}} = 0.$$

Definición 3.2. Dado $\varepsilon \in \mathcal{E}$, definimos la distribución μ dependiendo del caso.

- Caso $N = 2$:

$$\mu = \frac{\pi}{2C_0}.$$

- Caso $N \geq 3$:

$$\mu = \frac{S_N(N-2)}{2^N} C_0^{N-2}.$$

Donde S_N es la superficie de la esfera unidad en \mathbb{R}^N y C_0 es una constante con $C_0 > 0$.

3.3 Verificación de las hipótesis de los agujeros

El objetivo principal de este capítulo reside en esta sección: demostrar el Teorema 3.1 que nos confirma que, bajo la construcción realizada en las anteriores secciones, se verifican las hipótesis de los agujeros. Así, podremos aplicar el Teorema de Homogeneización 2.1 que nos confirmará la homogeneización del problema planteado.

Para alcanzar este objetivo, haremos uso de la distribución delta de Dirac.

Definición 3.3. Definimos la distribución delta de Dirac para las fronteras ∂B_i^ε y ∂T_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$ de la forma

$$\langle \delta_i^\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\partial B_i^\varepsilon} \varphi(s) ds, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

$$\langle \bar{\delta}_i^\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\partial T_i^\varepsilon} \varphi(s) ds, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Una vez introducida esta distribución, veamos el siguiente resultado que nos ayudará a demostrar el Teorema 3.1.

Lema 3.1. Sea $N \geq 2$. Supongamos que los centros de las esferas ∂B_i^ε , $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$, de radio ε son los nodos de un rejilla de \mathbb{R}^N cuyas celdas son de lado 2ε . Tomando δ_i^ε de la Definición 3.3, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon \longrightarrow \frac{S_N}{2^N} \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración:

Definimos la función auxiliar q^ε de la forma

$$\begin{cases} q^\varepsilon = \frac{r^2 - \varepsilon^2}{2} & \text{en } B_i^\varepsilon, \forall i \in \{1, \dots, n(\varepsilon)\}, \\ q^\varepsilon = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N - \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B_i^\varepsilon. \end{cases}$$

Veamos algunas propiedades de esta función.

- $\Delta q^\varepsilon = N$ en B_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$.

$$q^\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \varepsilon^2}{2} \implies \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_i} = x_i \implies \frac{\partial^2 q^\varepsilon}{\partial x_i^2} = 1 \implies \Delta q^\varepsilon = \sum_{i=1}^N 1 = N.$$

- $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \hat{n}} = \varepsilon$ en ∂B_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$.

Como \hat{n} , que es el vector normal a la superficie de ∂B_i^ε , tiene la misma dirección que el vector r y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial r} = r \text{ en } B_i^\varepsilon,$$

obtenemos que $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \hat{n}} = \varepsilon$ en ∂B_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$.

- $|\nabla q^\varepsilon| \leq \varepsilon$ en B_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$.

Como $\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_i} = x_i$ en B_i^ε , se tiene que $|\nabla q^\varepsilon| = |x| = r \leq \varepsilon$ en B_i^ε para todo $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$.

Una vez visto las principales propiedades de q^ε , veamos que $q^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Sea $\Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^N$, entonces

$$\begin{aligned} \|q^\varepsilon\|_{W_{loc}^{1,\infty}(\Omega_0)} &= \|q^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_0)} + \|q^\varepsilon\|_{(L^\infty(\Omega_0))^N} \\ &= \inf\{C : |q^\varepsilon| \leq C \text{ en c.t.p de } \Omega_0\} + \inf\{C : |\nabla q^\varepsilon| \leq C \text{ en c.t.p de } \Omega_0\} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, por la arbitrariedad de Ω_0 , tenemos que $q^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Además, por este motivo también obtenemos que $\Delta q^\varepsilon \rightarrow 0$ fuertemente en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo, computemos de forma explícita la función Δq^ε .

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por la definición de q^ε y aplicando integración por partes dos veces obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta q^\varepsilon \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} q^\varepsilon \Delta \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{B_i^\varepsilon} q^\varepsilon \Delta \varphi \, dx.$$

De nuevo, integramos por partes dos veces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{B_i^\varepsilon} q^\varepsilon \Delta \varphi \, dx &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \left(\int_{\partial B_i^\varepsilon} q^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \, ds - \int_{B_i^\varepsilon} \nabla q^\varepsilon \nabla \varphi \, dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \left(\int_{\partial B_i^\varepsilon} q^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \, ds - \left(\int_{\partial B_i^\varepsilon} \varphi \frac{\partial q^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, ds - \int_{B_i^\varepsilon} \Delta q^\varepsilon \varphi \, dx \right) \right). \end{aligned}$$

Usando la definición y propiedades vistas sobre q^ε , tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta q^\varepsilon \varphi \, dx = N \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{B_i^\varepsilon} \varphi \, dx - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \int_{\partial B_i^\varepsilon} \varphi \, ds.$$

Si definimos la función característica χ_B^ε en las bolas B_i^ε , es decir,

$$\chi_B^\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{en } \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B_i^\varepsilon, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N - \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B_i^\varepsilon, \end{cases}$$

y la distribución delta de Dirac según la Definición 3.3, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta q^\varepsilon \varphi \, dx = N \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \chi_B^\varepsilon \, dx - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En definitiva, llegamos a que

$$\Delta q^\varepsilon = N \chi_B^\varepsilon - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon.$$

Para terminar esta demostración usando la igualdad recién obtenida, veamos la convergencia de χ_B^ε en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Primero, por la definición de χ_B^ε , la sucesión $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ está acotada en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Por tanto, por la Proposición 1.1 y teniendo en cuenta que estamos en el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, en la topología débil, la sucesión $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ admite una parcial, que seguiremos denotando por $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, convergente débilmente* a cierto $k \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \chi_B^\varepsilon \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f k \, dx, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Calculemos el valor de k . Si tomamos $f \equiv 1$ en el cubo unidad y fuera de él se anule, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f \chi_B^\varepsilon \, dx &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{B_i^\varepsilon} 1 \, dx = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon \left(\int_{S(0,r)} 1 \, ds \right) dr = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon S_N r^{N-1} \, dr \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{S_N \varepsilon^N}{N} = \frac{S_N \varepsilon^N}{N} n(\varepsilon) = \frac{S_N}{N 2^N} \longrightarrow \frac{S_N}{N 2^N} = \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{S_N}{N 2^N} \, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $k = \frac{S_N}{N 2^N}$.

Ahora bien, dada cualquier parcial de la sucesión original $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, esta parcial está acotada porque la original está acotada. Aplicando la Proposición 1.1 y el mismo argumento que acabamos de realizar. La parcial admitirá otra parcial convergente débilmente* a $\frac{S_N}{N 2^N}$. Así, usando el Lema 1.1, tenemos que la sucesión original $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente* a $\frac{S_N}{N 2^N}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Veamos que esta convergencia también se da fuertemente en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Sea $\Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^N$. Tenemos que comprobar que

$$\left\| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N 2^N} \right\|_{W^{-1,\infty}(\Omega_0)} \longrightarrow 0.$$

Debido a la definición de norma en $W^{-1,\infty}(\Omega_0)$, se cumple que

$$\left\| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N 2^N} \right\|_{W^{-1,\infty}(\Omega_0)} = \sup \left\{ \left| \int_{\Omega_0} \left(\chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N 2^N} \right) \varphi \, dx \right| : \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_0), \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Omega_0)} \leq 1 \right\}.$$

Tenemos la acotación

$$\left\| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N 2^N} \right\|_{W^{-1,\infty}(\Omega_0)} \leq \int_{\Omega_0} \left| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N 2^N} \right| \, dx.$$

Ahora bien, como $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente* a $\frac{S_N}{N2^N}$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \chi_B^\varepsilon dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{S_N}{N2^N} dx, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

En particular, si tomamos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

obtenemos

$$\int_{\Omega_0} \chi_B^\varepsilon dx \rightarrow \int_{\Omega_0} \frac{S_N}{N2^N} dx \implies \int_{\Omega_0} \left| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N2^N} \right| dx \rightarrow 0.$$

Por tanto, se cumple que

$$\left\| \chi_B^\varepsilon - \frac{S_N}{N2^N} \right\|_{W^{-1,\infty}(\Omega_0)} \rightarrow 0,$$

esto es, $\{\chi_B^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge fuertemente a $\frac{S_N}{N2^N}$ en $W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Recopilando información, tenemos

$$\begin{cases} \Delta q^\varepsilon = N \chi_B^\varepsilon - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon, \\ \chi_B^\varepsilon \rightarrow \frac{S_N}{N2^N} \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N), \\ \Delta q^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Así, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon = N \chi_B^\varepsilon - \Delta q^\varepsilon \rightarrow N \frac{S_N}{N2^N} = \frac{S_N}{2^N} \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Una vez demostrado este resultado, ya podemos verificar las hipótesis de los agujeros para la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ descritas en la sección anterior. ■

Teorema 3.1. Si se toma

$$\begin{cases} a^\varepsilon = \exp\left(-\frac{C_0}{\varepsilon^2}\right) & \text{si } N = 2, \\ a^\varepsilon = C_0 \varepsilon^{\frac{N}{N-2}} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

entonces la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ y la distribución μ descritas en las Definiciones 3.1 y 3.2 verifican las hipótesis de los agujeros (H.1)-(H.5).

Demostración:

Primero, por la definición de w^ε , para cada valor de ε , esta función es continua, derivable a trozos y se anula en los agujeros. Por tanto, se satisfacen (H.1) y (H.2). Además, como μ es constante, también se verifica (H.4).

Para demostrar (H.3), vamos a calcular el valor de $\|\nabla w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}^2$. Consideramos $n(\varepsilon)$, que es el número de cubos P_i^ε , como $\frac{\text{vol}^N(\Omega)}{(2\varepsilon)^N}$. Podemos hacer esta consideración pues, a la hora de tomar el límite, estos valores se comportan de la misma forma. Así, obtenemos

$$\|\nabla w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \sim \frac{\text{vol}^N(\Omega)}{(2\varepsilon)^N} \int_{P_i^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon|^2 dx.$$

Pasamos a calcular la integral sobre P_i^ε según el caso.

- Caso $N = 2$:

$$|\nabla w^\varepsilon|^2 = \frac{1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2 (x_1^2 + x_2^2)} = \frac{1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2 r^2} \text{ en } B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \int_{P_i^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon| dx &= \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} \frac{1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2 (x_1^2 + x_2^2)} dx \\ &= \frac{1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2} \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} \frac{1}{r^2} dx = \frac{1}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2} \int_0^{2\pi} \int_{a^\varepsilon}^\varepsilon \frac{1}{r} dr d\theta \\ &= \frac{2\pi(\log(\varepsilon) - \log(a^\varepsilon))}{(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))^2} = \frac{-2\pi}{\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

- Caso $N \geq 3$:

$$|\nabla w^\varepsilon|^2 = \frac{(N-2)^2 (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{-N+1}}{((a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)})^2} = \frac{(N-2)^2 r^{-2N+2}}{((a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)})^2} \text{ en } B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \int_{P_i^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon| dx &= \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} \frac{(N-2)^2 (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{-N+1}}{((a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)})^2} dx \\ &= \left(\frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \right)^2 \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} r^{-2N+2} dx \\ &= \left(\frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \right)^2 \int_{a^\varepsilon}^\varepsilon \left(\int_{S_r} r^{-2N+2} \right) dr \\ &= \left(\frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \right)^2 \int_{a^\varepsilon}^\varepsilon r^{-2N+2} S_N r^{N-1} dr \\ &= \left(\frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \right)^2 S_N \int_{a^\varepsilon}^\varepsilon r^{-N+1} dr \\ &= \left(\frac{N-2}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \right)^2 S_N \frac{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}}{N-2} = \frac{S_N (N-2)}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}}. \end{aligned}$$

Una vez calculado el valor de la integral, sustituimos el valor de a^ε según el enunciado del teorema y obtenemos el límite de $\|\nabla w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N}$.

- Caso $N = 2$, $a^\varepsilon = \exp\left(-\frac{C_0}{\varepsilon^2}\right)$:

$$\frac{\text{vol}^2(\Omega)}{(2\varepsilon)^2} \int_{P_i^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon|^2 dx = \frac{\text{vol}^2(\Omega)(-2\pi)}{(2\varepsilon)^2(\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon))} = \frac{\text{vol}^2(\Omega)\pi}{2C_0 + 2\varepsilon^2\log(\varepsilon)}.$$

Y llegamos a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}^2(\Omega)\pi}{2C_0 + 2\varepsilon^2\log(\varepsilon)} = \frac{\text{vol}^2(\Omega)\pi}{2C_0}.$$

- Caso $N \geq 3$, $a^\varepsilon = C_0 \varepsilon^{\frac{N}{N-2}}$:

$$\frac{\text{vol}^N(\Omega)}{(2\varepsilon)^N} \int_{P_i^\varepsilon} |\nabla w^\varepsilon|^2 dx = \frac{\text{vol}^N(\Omega)S_N(N-2)}{(2\varepsilon)^N((a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)})} = \frac{\text{vol}^N(\Omega)S_N(N-2)}{2^N(C_0^{-(N-2)} - \varepsilon^2)}.$$

Y obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^N} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}^N(\Omega)S_N(N-2)}{2^N(C_0^{-(N-2)} - \varepsilon^2)} = \frac{\text{vol}^N(\Omega)S_N(N-2)}{2^N} C_0^{N-2}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $0 \leq w^\varepsilon \leq 1$ para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, la sucesión $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ está acotada en $H^1(\Omega)$ tanto en el caso $N = 2$ como en el caso $N \geq 3$.

Aplicando la Proposición 1.1, existe una parcial, que seguimos denotando por $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$, tal que

$w^\varepsilon \rightharpoonup w$ débilmente tanto en como en $H^1(\Omega)$ y en $L^2(\Omega)$ para cierto $w \in H^1(\Omega)$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que $w = 1$. Para ello, vamos a tomar la función característica χ_C^ε en los cubos C_i^ε de lado $\frac{2(\sqrt{N}-1)}{\sqrt{N}}\varepsilon$ (ver Figura 3.3), es decir,

$$\chi_C^\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{en } \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} C_i^\varepsilon, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N - \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} C_i^\varepsilon. \end{cases}$$

Por construcción tanto de w^ε como de χ_C^ε , es claro que $w^\varepsilon \chi_C^\varepsilon = \chi_C^\varepsilon$. Estudiemos la convergencia de χ_C^ε .

La sucesión $\{\chi_C^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$. Por tanto, aplicando la Proposición 1.1, en la topología débil, admite una parcial, que seguiremos denotando por $\{\chi_C^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ que converge débilmente* a cierto $k \in L^\infty(\Omega)$, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \chi_C^\varepsilon dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f k dx, \forall f \in L^1(\Omega).$$

Si tomamos $f \equiv 1$ en el cubo unidad y que se anule fuera de él, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f \chi_C^\varepsilon dx &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{C_i^\varepsilon} 1 dx = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \left(\frac{2(\sqrt{N}-1)}{\sqrt{N}} \varepsilon \right)^N = \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}} \right)^N \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (2\varepsilon)^N \\ &= \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}} \right)^N \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{1}{n(\varepsilon)} = \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}} \right)^N \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}} \right)^N = \int_{\mathbb{R}^N} f \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}} \right)^N dx. \end{aligned}$$

Así, la parcial $\{\chi_C^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente* a $\left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}}\right)^N$ en $L^\infty(\Omega)$.

Ahora bien, dada cualquier parcial de la sucesión original, podemos realizar el mismo argumento obteniendo que admite otra parcial convergente débilmente* al mismo límite en $L^\infty(\Omega)$. Por tanto, por el Lema 1.1, la sucesión original $\{\chi_C^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente* a $\left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}}\right)^N$ en $L^\infty(\Omega)$.

Además, como $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, también tenemos la convergencia débil de $\{\chi_C^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ en $L^2(\Omega)$.

Finalmente, tomando límite débil en $L^2(\Omega)$, se deduce que

$$w^\varepsilon \chi_C^\varepsilon = \chi_C^\varepsilon \rightharpoonup w \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}}\right)^N = \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}}\right)^N \implies w = 1.$$

Hemos demostrado que la parcial $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente a 1 en $H^1(\Omega)$. Sin embargo, dada cualquier parcial de la sucesión original, podemos aplicarle el mismo argumento que acabamos de realizar, obteniendo que de cualquier parcial, podemos obtener otra parcial convergente débilmente a 1 en $H^1(\Omega)$. Por el Lema 1.1, la sucesión original $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ converge débilmente a 1 en $H^1(\Omega)$, verificándose así (H.3).

Por último, veamos que se verifica (H.5). Para ello, vamos a estudiar la función $-\Delta w^\varepsilon$. Sea $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w^\varepsilon, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} -\Delta w^\varepsilon v \, dx = \int_{\partial\Omega} -v \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, dx + \int_{\Omega} \nabla w^\varepsilon \nabla v \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} \nabla w^\varepsilon \nabla v \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \left(\int_{\partial B_i^\varepsilon} v \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, ds + \int_{\partial T_i^\varepsilon} v \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, ds - \int_{B_i^\varepsilon - T_i^\varepsilon} v \Delta w^\varepsilon \, dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{\partial B_i^\varepsilon} v \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, ds + \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{\partial T_i^\varepsilon} v \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \, ds. \end{aligned}$$

Usando la distribución Delta de Dirac, podemos expresar

$$-\Delta w^\varepsilon = \mu^\varepsilon - \gamma^\varepsilon,$$

donde

$$\mu^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \Big|_{\partial B_i^\varepsilon} \delta_i^\varepsilon \quad \text{y} \quad \gamma^\varepsilon = - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \Big|_{\partial T_i^\varepsilon} \bar{\delta}_i^\varepsilon.$$

Para poder calcular el límite de la hipótesis (H.5), estudiemos el comportamiento de μ^ε y γ^ε .

Primero, es claro por la definición de γ^ε que

$$\langle \gamma^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = 0, \quad \forall v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } v^\varepsilon = 0 \text{ en } T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon).$$

Por otro lado, vamos a calcular explícitamente μ^ε y obtener el límite de la sucesión $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ según el caso. Para ello, recordemos que \hat{n} , que es el vector normal a la superficie de ∂B_i^ε , tiene la misma dirección que el vector r .

- Caso $N = 2$:

$$\begin{aligned}\mu^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \Big|_{\partial B_i^\varepsilon} \delta_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{-\frac{1}{r}}{\log(a^\varepsilon) - \log(\varepsilon)} \Big|_{r=\varepsilon} \delta_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\frac{1}{r}}{\frac{C_0}{\varepsilon^2} + \log(\varepsilon)} \Big|_{r=\varepsilon} \delta_i^\varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{C_0}{\varepsilon^2} + \log(\varepsilon)} \delta_i^\varepsilon = \frac{1}{C_0 + \varepsilon^2 \log(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon.\end{aligned}$$

Usando el Lema 3.1,

$$\mu^\varepsilon \longrightarrow \frac{S_2}{4C_0} = \frac{\pi}{2C_0} = \mu \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, converge fuertemente en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ y como $H^{-1}(\Omega) \subset W^{-1,\infty}(\Omega)$ obtenemos que

$$\mu^\varepsilon \longrightarrow \mu \text{ fuertemente en } H^{-1}(\Omega).$$

- Caso $N \geq 3$:

$$\begin{aligned}\mu^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \hat{n}} \Big|_{\partial B_i^\varepsilon} \delta_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{(N-2)r^{-(N-1)}}{(a^\varepsilon)^{-(N-2)} - \varepsilon^{-(N-2)}} \Big|_{r=\varepsilon} \delta_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{(N-2)\varepsilon^{-(N-1)}}{C_0^{-(N-2)}\varepsilon^{-N} - \varepsilon^{-(N-2)}} \delta_i^\varepsilon \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{N-2}{C_0^{-(N-2)}\varepsilon^{-1} - \varepsilon} \delta_i^\varepsilon = \frac{(N-2)C_0^{N-2}}{1 - C_0^{N-2}\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varepsilon \delta_i^\varepsilon.\end{aligned}$$

Por el Lema 3.1,

$$\mu^\varepsilon \longrightarrow \frac{S_N(N-2)}{2^N} C_0^{N-2} = \mu \text{ fuertemente en } W_{loc}^{-1,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

En particular, converge fuertemente en $W^{-1,\infty}(\Omega)$ y como $H^{-1}(\Omega) \subset W^{-1,\infty}(\Omega)$ obtenemos que

$$\mu^\varepsilon \longrightarrow \mu \text{ fuertemente en } H^{-1}(\Omega).$$

Finalmente, en ambos casos, para cada sucesión $\{v^\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ tal que $v^\varepsilon = 0$ en T_i^ε con $1 \leq i \leq n(\varepsilon)$, satisfaciendo $v^\varepsilon \rightharpoonup v$ débilmente en $H^1(\Omega)$ para cierto $v \in H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle -\Delta w^\varepsilon, \varphi v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \langle \mu^\varepsilon, \varphi v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle \gamma^\varepsilon, \varphi v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle \mu^\varepsilon, \varphi v^\varepsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \longrightarrow \langle \mu, \varphi v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica (H.5). ■

Conclusiones

Si bien no suele ser lo convencional, me gustaría exponer como primera conclusión cómo me ha afectado este trabajo como matemático, pues tiene bastante importancia. Durante este año, he sido becario del Departamento de Matemáticas gracias a la Beca de Colaboración. En este periodo, mi objetivo fue estudiar los espacios de Sobolev y la teoría de homogeneización. Por tanto, este trabajo ha sido para mí la exposición detallada y bien estructurada de todos los conocimientos que he ido adquiriendo durante este año. Es cierto que ha habido un punto de partida, pues las asignaturas como Ecuaciones Diferenciales II, Análisis Funcional y Ecuaciones de la Física Matemática han sido una base imprescindible para el comienzo de este trabajo. Ahora bien, una vez definidos los espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev, el resto de resultados han dependido de estos espacios, que no son los “lugares de trabajo” más usuales durante el grado. Por tanto, este trabajo ha sido un punto y aparte en mi carrera como matemático. Primero, ha sido un reto por partida doble, no solo el tema a estudiar ha conllevado largos días de estudio sino que la expresión y síntesis de estos conceptos de forma escrita también ha implicado muchas horas de trabajo. Segundo, este trabajo ha sido un primer vistazo al mundo de la investigación, mundo en el cual me gustaría trabajar en el futuro. Además, estudiar la homogeneización me ha dado la oportunidad de poder escribir en el futuro algún artículo y poder iniciarme oficialmente en la investigación. Esta oportunidad debo agradecerla a mis tutores Pedro Jesús Martínez Aparicio y José Carmona Tapia, a los cuales agradezco sobremanera la ayuda y trato que me han dado durante todo el curso.

Pasando a conclusiones más intrínsecas del trabajo, espero haber podido transmitir con claridad el pilar principal de este trabajo: el Teorema de Homogeneización. Tomando este resultado como centro de estudio, el Capítulo 1 y Capítulo 2 han consistido en la explicación de todo lo necesario para poder enunciar y demostrar este teorema. Una vez visto este teorema y su corrector, el lector puede preguntarse, ¿de verdad existe algún modelo al que pueda aplicarle estos resultados? Ahí es donde interviene el Capítulo 3 que ha ejemplificado el uso del Teorema de Homogeneización. Si bien estos han sido los objetivos de contenido, también ha habido objetivos de forma. En cuanto a la forma del trabajo, ha sido escrito bajo esta máxima: debe ser un trabajo consistente. Es decir, dando por hecho el nivel que se obtiene al terminar el grado, este trabajo contiene todo lo necesario para su propio entendimiento.

Finalmente, quisiera agradecerle a usted, lector o lectora, el tiempo que ha dedicado a mi trabajo y espero que le haya resultado interesante, instructiva y útil la teoría de homogeneización.

Bibliografía

- [1] D. Cioranescu, F. Murat, *A strange term coming from nowhere*. En: *Topics in the mathematical modelling of composite materials. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Volumen 31, páginas 45-93. Birkhäuser, Boston, MA 1997.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin 2010.
- [3] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Volumen I. Interscience, Nueva York, 1953.
- [4] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, París, 1967.
- [5] J. Rauch, M. Taylor, *Potential and scattering theory on wildly perturbed domains*. J.Funct. Anal., 18, 1975, 27-59.
- [6] L. Tartar. *The general theory of homogenization. A personalized introduction*. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
- [7] F. Murat, L. Tartar. *Calculus of variations and homogenization*. En: *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, ed. por L. Cherkaev, R.V. Kohn. Birkhäuser, Boston, 1998, 139-174.
- [8] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*, Pearson, 2010.