Existencia de autovalores para problemas de contorno. Teoremas de comparación y de oscilación.

Trabajo Fin de Grado

Autora:
Ainoa Fernández López

Tutor:
José Carmona Tapia

Grado en Matemáticas

Julio, 2021
Universidad de Almería

Índice general

1 Introducción 1

2 Problemas de autovalores autoadjuntos 5
2.1. Problemas homogéneos 5
2.2. Problemas no homogéneos. Función de Green 8
2.3. Existencia de autovalores 14

3 Descomposición espectral del espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$ 21

4 Teoremas de comparación y de oscilación para ecuaciones lineales de segundo orden 27
4.1. Teoremas de comparación 27
4.2. Existencia de autovalores 33
4.3. Condiciones de contorno periódicas 37

5 Conclusiones 47

Bibliografía 49

Abstract in English

Sometimes, the solution of boundary value problems for partial differential equations can be reduced to the solution of ordinary differential equations which contain a parameter and which are subject to certain boundary conditions. Specifically, we are going to study, in a finite interval, the so called self-adjoint eigenvalue problems for linear differential equations. We will deal with the parameter values (eigenvalues) for which the solution are non-trivial (eigenfunctions). It is interesting to note that a lot of information about eigenvalues and eigenfunctions can be obtained without actually solving the problem. In fact, we will demonstrate the main properties of them, that the eigenvalues are real, that they determine a discrete set bounded at the bottom, and that the eigenfunctions form an orthogonal set. Then, we'll prove that such eigenvalues exist and, next, we'll study the completeness of eigenfunctions in the space of square integrable functions, $\mathcal{L}^2(a,b)$. The latter will allow us to express any function as an infinite combination of autofunctions. Furthermore, both the existence and the relative positions of the zeros are of vital importance in the theory of boundary value problems, so we will dedicate a chapter to develop different comparison and oscillation theorems for second-order self-adjoint equations. We will talk about particular cases of boundary value problems, Sturm-Liouville regular and periodic problems. The Sturm-Liouville theory studies the existence and the asymptotic behaviour of eigenvalues, as well as the corresponding qualitative theory of eigenfunctions.

Resumen en español

En ocasiones, la solución de problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales lineales puede ser reducida a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias que contienen un parámetro y que están sujetos a determinadas condiciones de frontera. Concretamente, se van a estudiar, en un intervalo finito, los denominados problemas de autovalores autoadjuntos para ecuaciones diferenciales lineales. Trataremos los valores del parámetro (autovalores o valores propios) para los cuales las soluciones son no triviales (autofunciones o funciones propias). Es interesante notar que mucha información sobre los valores propios y las funciones propias puede obtenerse sin resolver realmente el problema. De hecho, demostraremos las principales propiedades de los mismos, que los valores propios son reales y determinan un conjunto discreto acotado inferiormente, y que las distintas autofunciones son ortogonales. Después, probaremos la existencia de tales autovalores y, seguidamente, estudiaremos la completitud de las autofunciones en el espacio de funciones de cuadrado integrable, $\mathcal{L}^2(a,b)$. Esto último nos permitirá expresar cualquier función como combinación infinita de autofunciones. Además, tanto la existencia como las posiciones relativas de los ceros son de vital importancia en la teoría de problemas de valores en la frontera, por lo que dedicaremos un capítulo a desarrollar diferentes teoremas de comparación y de oscilación para ecuaciones autoadjuntas de segundo orden. Hablaremos sobre casos particulares de problemas de contorno asociados a ese tipo de ecuaciones, los problemas regulares y periódicos de Sturm-Liouville. La teoría de Sturm-Liouville estudia la existencia y el comportamiento asintótico de los autovalores, así como la correspondiente teoría cualitativa de las autofunciones.

1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales constituyen un elemento esencial del análisis matemático y son una disciplina fundamental para la comprensión de fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos o de ingeniería, entre otros. Entendemos por ecuación diferencial cualquier ecuación en la que interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto a una o más variables independientes. Podemos dividirlas en dos grandes tipos: ecuaciones diferenciales ordinarias, aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente, y ecuaciones en derivadas parciales, aquellas que contienen derivadas respecto dos o más variables independientes. A lo largo del grado, comenzamos el aprendizaje de esta materia con la asignatura *Ecuaciones Diferenciales I*, en la que se estudian ecuaciones y sistemas diferenciales ordinarios de coeficientes reales, proporcionando los principales métodos de resolución de los mismos (en el caso lineal y algunos no lineales), como por ejemplo el *método de variación de las constantes*, así como las primeras nociones sobre la existencia y unicidad de solución, de problemas de valores iniciales. Después, en *Ecuaciones Diferenciales II*, comenzamos tratando el problema de existencia y unicidad, conocido como *problema de Cauchy*, asociado a un sistema casi-lineal de primer orden, donde la mayoría de resultados de existencia de solución que tratamos se basan en la construcción de una sucesión de funciones que converge uniformemente a la solución del problema. Buscamos condiciones que aseguren unicidad y, bajo estas, se estudian propiedades de continuidad o diferenciabilidad de las soluciones en su dependencia respecto de datos iniciales. Tras dar algunos métodos de resolución de diferentes tipos de sistemas y ecuaciones diferenciales, así como analizado el problema de existencia y unicidad de los mismos, se aborda entonces el estudio de la teoría cualitativa de sistemas lineales y no lineales. Al mismo tiempo, en *Métodos Numéricos II*, estudiamos métodos numéricos de un paso y multipaso lineales para la resolución de problemas de valores iniciales. También se introducen, sin profundizar, los problemas de contorno, en donde nos limitamos únicamente al estudio de un caso particular de estos de importancia relevante en numerosas aplicaciones. Sin embargo, después se pasa directamente en la asignatura de *Ecuaciones de la Física Matemática*, al estudio de ecuaciones en derivadas parciales sin apenas haber tratado los problemas de contorno asociados a ecuaciones lineales. En definitiva, hasta ahora habíamos tratado sólo detalladamente problemas de valores iniciales, en los que se busca la solución de una ecuación diferencial de un determinado orden que cumpla las condiciones en un solo valor de la variable independiente. Aquí nos enfrentaremos a una situación muy diferente, pues queremos satisfacer una condición en dos valores distintos (los extremos del intervalo) de tal variable independiente. Este tipo de problemas reciben el nombre de problemas de valores en la frontera o problemas de contorno. Esta fue la propuesta de mi tutor, completar la formación en este campo desde un punto de vista fundamental y a partir de un texto clásico como *Theory of Ordinary Differential Equations* de Earl A. Coddington y Norman Levinson [2]. Los objetivos que pretendemos alcanzar en este Trabajo Fin de Grado son los siguientes:

- Demostrar las principales propiedades de los problemas de autovalores autoadjuntos y la existencia de valores propios para los mismos.
- Probar la completitud de las autofunciones asociadas a un problema autoadjunto

en el espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$.

- Análisis del comportamiento de las soluciones de ecuaciones autoadjuntas de segundo orden. Estudio de los autovalores y de las soluciones en los problemas del tipo Sturm-Liouville con condiciones de frontera regulares y periódicas.

Vamos a tratar, en un intervalo finito, los denominados problemas de autovalores autoadjuntos. Estudiaremos las principales propiedades del conjunto que forman los valores del parámetro cuya solución al problema sea no trivial y veremos las características más importantes de las soluciones asociadas a tales valores. Pueden motivarse este tipo de situaciones con un ejemplo sencillo, buscando las soluciones de

$$-x'' = lx, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0, \tag{1.1}$$

donde l representa un parámetro escalar complejo y $x(t)$ una función escalar compleja.

Las soluciones de (1.1) se obtienen a partir de las raíces de la ecuación característica $\gamma^2 + l = 0$. Pueden estudiarse diferentes casos dependiendo del valor de l:

1. $l < 0$. En esta ocasión, $\gamma = \pm\sqrt{-l} \in \mathbb{R}$, luego la solución general vendrá dada por

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{-l}t} + C_2 \cdot e^{\sqrt{-l}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \ \ 0 \le t \le 1.$$

Aplicando las condiciones de contorno $x(0) = x(1) = 0$:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

$$x(1) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{-l}} + C_2 \cdot e^{\sqrt{-l}} = C_1(e^{-\sqrt{-l}} - e^{\sqrt{-l}}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

De esta forma, la solución es la trivial: $x(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$.

2. $l = 0$. Entonces, $\gamma = 0$ (raíz doble) y la solución general será

$$x(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \ \ 0 \le t \le 1.$$

Empleando las condiciones,

$$x(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$x(1) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Por tanto, de nuevo se obtiene la solución trivial: $x(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$.

3. $l > 0$. En tal caso, $\gamma = \pm\sqrt{-l} = \pm i\sqrt{l} \in \mathbb{C}$. La solución general viene dada de la siguiente forma:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\sqrt{l}t} + C_2 \cdot e^{-i\sqrt{l}t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \ \ 0 \le t \le 1.$$

Aplicando las condiciones impuestas previamente, se tiene:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2,$$

$$x(1) = C_1 \cdot e^{i\sqrt{l}} - C_1 e^{-i\sqrt{l}t} = C_1 \cdot (e^{i\sqrt{l}} - e^{-i\sqrt{l}}) = C_1 \cdot 2\,\mathrm{sen}(\sqrt{l}) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \mathrm{sen}(\sqrt{l}) = 0.$$

En este caso, pueden ocurrir dos situaciones diferentes:

a) $C_1 = 0$, lo que implicaría una vez más la solución trivial,

$$x(t) = 0, \;\; \forall t \in [0,1].$$

b) $\mathrm{sen}(\sqrt{l}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{l} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Esto es, $l = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}$.
Los valores de l para $k \in \mathbb{N}$ para los cuales la solución es no trivial son denominados **autovalores**, y las soluciones asociadas a ellos,

$$\chi_k(t) = C \cdot \mathrm{sen}(k\pi t), \quad C \in \mathbb{C}, \;\; k \in \mathbb{N}, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

son denominadas **autofunciones**.

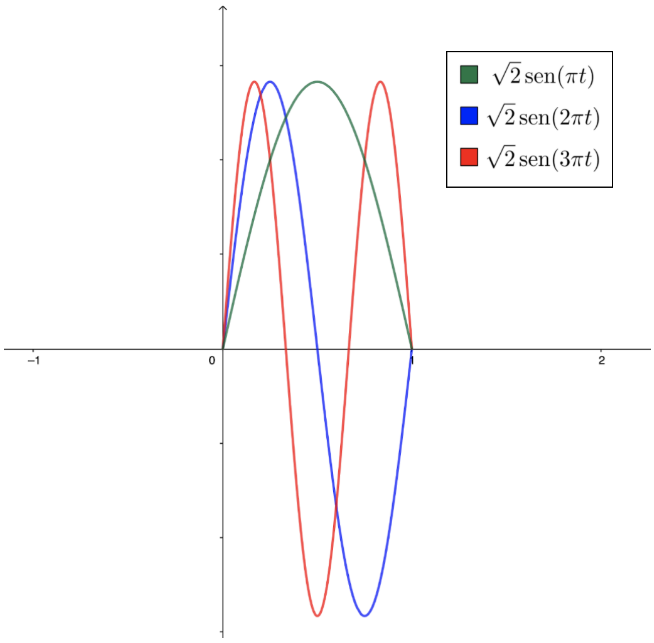

Figura 1.1: Ejemplos de ceros de distintas autofunciones reales.

En definitiva, el problema (1.1) tiene una sucesión infinita de autovalores reales $l = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}$, cuyas autofunciones son un múltiplo de la función real $\mathrm{sen}(k\pi t)$, de manera que forman un espacio vectorial de dimensión 1. La k–ésima autofunción real posee $k-1$ ceros en $(0,1)$ (ver *Figura* 1.1) y las distintas autofunciones son ortogonales en $[0,1]$. Es más, puede observarse que, tomando $C = \sqrt{2}$,

$$\int_0^1 \chi_j \chi_k dt = \delta_{jk}, \quad \text{con} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases},$$

que es la denominada *delta de Kronecker*.

La existencia de autovalores para problemas autoadjuntos se estudiará para operadores generales en el Capítulo 2, y la relación entre los ceros de las autofunciones en el Capítulo 4. Además, en el capítulo 3 veremos que, en el espacio de funciones $\mathcal{L}^2(0,1)$, dado por

$$\mathcal{L}^2(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ medible Lebesgue: } \int_0^1 |f|^2 < \infty \right\},$$

toda función puede escribirse como combinación infinita de autofunciones. Así, para el ejemplo previo comprobaremos que si $f \in \mathcal{L}^2(0,1)$, entonces

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(k\pi t), \quad \text{con} \quad c_k = \int_0^1 f(t) \operatorname{sen}(k\pi t) dt, \tag{1.2}$$

donde los c_k son denominados **coeficientes de Fourier de f**.

A continuación, consideremos un problema más general que el anterior, de nuevo en el espacio $\mathcal{L}^2(0,1)$,

$$Lx = ix' = lx, \quad x(1) = ax(0), \tag{1.3}$$

donde L un operador diferencial lineal y a es una constante. Sean λ_j los autovalores y χ_j sus autofunciones asociadas. Observemos que

$$(L\chi_j, \chi_k) = \int_0^1 (L\chi_j)\overline{\chi_k} dt = \int_0^1 \lambda_j \chi_j \overline{\chi_k} dt = \lambda_j \int_0^1 \chi_j \overline{\chi_k} dt = \lambda_j (\chi_j, \chi_k),$$

$$(\chi_j, L\chi_k) = \int_0^1 \chi_j (\overline{L\chi_k}) dt = \int_0^1 \chi_j \overline{\lambda_k \chi_k} dt = \overline{\lambda_k} \int_0^1 \chi_j \overline{\chi_k} = \overline{\lambda_k} (\chi_j, \chi_k).$$

Por otro lado, de acuerdo a (1.3),

$$(L\chi_j, \chi_k) - (\chi_j, L\chi_k) = (i\chi_j', \chi_k) - (\chi_j, i\chi_k') = \int_0^1 i\chi_j' \overline{\chi_k} dt - \int_0^1 \chi_j \overline{i\chi_k}' dt =$$

$$= i\int_0^1 \chi_j' \overline{\chi_k} dt \; + \; i\int_0^1 \chi_j \overline{\chi_k}' dt = i\int_0^1 \left(\chi_j' \overline{\chi_k} \; + \; \chi_j \overline{\chi_k}'\right) dt = \left[i\chi_j \overline{\chi_k}\right]_0^1 =$$

$$= i\left(\chi_j(1)\overline{\chi_k}(1) - \chi_j(0)\overline{\chi_k}(0)\right) = i\left(a\chi_j(0)\overline{a\chi_k}(0) - \chi_j(0)\overline{\chi_k}(0)\right) = i\cdot(a\overline{a} - 1)\chi_j(0)\overline{\chi_k}(0).$$

Luego,

$$(L\chi_j, \chi_k) - (\chi_j, L\chi_k) = \lambda_j(\chi_j, \chi_k) - \overline{\lambda_k}(\chi_j, \chi_k) = (\lambda_j - \overline{\lambda_k})(\chi_j, \chi_k) = i\cdot(a\overline{a} - 1)\chi_j(0)\overline{\chi_k}(0). \tag{1.4}$$

De esta forma, cuando $a\overline{a} = 1$, $(\lambda_j - \overline{\lambda_k})(\chi_j, \chi_k) = 0$. Entonces:

- Si $j = k$,

  $$(\lambda_j - \overline{\lambda_j})(\chi_j, \chi_j) = (\lambda_j - \overline{\lambda_j})\left\|\chi_j\right\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = \overline{\lambda_j}.$$

  Esto se debe a que $\left\|\chi_j\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow \chi_j = 0$, y se están considerando soluciones no triviales, por lo que se deduce que los autovalores son reales.

- Si $j \neq k$,

  $$(\lambda_j - \overline{\lambda_k})(\chi_j, \chi_k) = 0 \Rightarrow (\chi_j, \chi_k) = 0 \Rightarrow \chi_j \perp \chi_k.$$

Por tanto, si $a\overline{a} = 1$ o si en algún otro caso $i \cdot (a\overline{a} - 1)\chi_j(0)\overline{\chi_k}(0)$ se anula, los autovalores son reales y las autofunciones pueden ser consideradas como un conjunto ortonormal. En cambio, nótese que si $a\overline{a} \neq 1$, entonces no necesariamente los autovalores son reales y $(\chi_j, \chi_k) \neq 0$.

Comprobaremos que para operadores autoadjuntos, es decir, que cumplan la condición

$$(Lu, v) = (u, Lv), \quad u, v \in \mathcal{C}^n([a,b]),$$

es posible obtener una sucesión de autovalores reales y un conjunto ortonormal de funciones propias.

2 Problemas de autovalores autoadjuntos

En primer lugar, se presentarán algunas nociones previas sobre sistemas lineales homogéneos necesarias para desarrollos posteriores. Tras ello, definiremos formalmente el operador diferencial lineal L, así como otros conceptos esenciales con los que vamos a trabajar. Seguidamente, se mostrará uno de los teoremas principales del trabajo, que nos afirma que en el caso de los problemas de autovalores autoadjuntos, los valores propios son reales, forman un conjunto numerable, y que sus diferentes autofunciones asociadas son ortogonales. Posteriormente, se construirá convenientemente la solución para el problema no homogéneo mediante una función de Green. Expondremos un teorema que recoge las principales características de la misma, así como la justificación de la existencia de la solución previamente mencionada. La existencia de los autovalores será probada en la tercera sección de este capítulo.

2.1 Problemas homogéneos

Antes de nada, recordaremos algunos conceptos acerca de sistemas lineales homogéneos que serán requeridos más adelante. Se denomina **ecuación diferencial homogénea de orden** n a

$$x^{(n)} + \frac{p_1(t)}{p_0(t)}x^{(n-1)} + \ldots + \frac{p_n(t)}{p_0(t)}x = 0, \quad t \in I. \tag{2.1}$$

Sea L el operador lineal diferencial de orden n definido como

$$Lx = p_0(t)x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x, \tag{2.2}$$

siendo

- p_j funciones complejas de clase $\mathcal{C}^{n-j}$ en el intervalo $[a,b]$,
- $p_0(t) \neq 0$ para $t \in [a,b]$.

El sistema asociado a la ecuación (2.1) es

$$x' = A(t)x, \quad t \in I, \tag{2.3}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-p_n}{a_0} & \frac{-p_{n-1}}{a_0} & \frac{-p_{n-2}}{p_0} & \frac{-p_{n-3}}{p_0} & \cdots & \frac{-p_1}{p_0} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluciones de (2.1). Entonces se tiene la matriz solución de (2.3):

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Definición 2.1. *Se denomina* ***Wronskiano*** *de* $Lx = 0$ *con respecto de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *a*

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \det \Phi. \tag{2.6}$$

Además, para un sistema lineal se verifica la fórmula de Abel-Liouville-Jacobi:

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp \int_\tau^t trA(s)ds, \quad t \in I. \tag{2.7}$$

Entonces,

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t) = W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(\tau) \exp\left(\int_\tau^t -\frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds \right), \quad t \in I. \tag{2.8}$$

Asimismo, el Wronskiano nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que (2.1) tenga n soluciones linealmente independientes, y es que éste sea no nulo. En concreto, de (2.8) se sigue que esto será equivalente a que sea distinto de cero en un punto particular.

Por otro lado, consideremos las condiciones de frontera homogéneas $U_j x = 0$, con

$$U_j x = \sum_{k=1}^{n} \left(M_{jk} x^{(k-1)}(a) + N_{jk} x^{(k-1)}(b) \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.9}$$

donde M_{jk} y N_{jk} son constantes. Se denotarán estas relaciones por $Ux = 0$.

Definición 2.2. *Se denomina* ***problema de autovalores*** *a un problema homogéneo de la forma*

$$\pi : \quad Lx = lx, \quad Ux = 0. \tag{2.10}$$

Definición 2.3. *Se denominan* ***autovalores*** *o* ***valores propios*** *de* π *a los valores de* l *de manera que* π *tenga una solución no trivial.*

Definición 2.4. *Se denominan* ***autofunciones*** *o* ***funciones propias*** *a las soluciones no triviales de* π *asociadas a los autovalores.*

Vamos a trabajar en el espacio de funciones de cuadrado integrable,

$$\mathcal{L}^2(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ medible Lebesgue: } \int_a^b |f|^2 < \infty \right\}.$$

Definición 2.5. *El* ***producto interior*** *en* $\mathcal{L}^2(a,b)$ *se define como*

$$(f,g) = \int_a^b f\overline{g}dt, \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^2(a,b).$$

Como es habitual, si $(f,g) = 0$*, se dirá que* f *y* g *son ortogonales. La* ***norma*** *en el espacio* $\mathcal{L}^2(a,b)$ *viene dada por*

$$f = (f,f)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(a,b).$$

Definición 2.6. *Una sucesión* $\{\chi_k\}$, *con* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *se dice* ***ortonormal*** *si* $(\chi_j, \chi_k) = \delta_{jk}$, *siendo* δ_{jk} *la delta de Kronecker.*

Definición 2.7. *Un problema de autovalores se denomina* ***autoadjunto*** *si*

$$(Lu, v) = (u, Lv), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^n([a, b]), \tag{2.11}$$

satisfaciendo las condiciones de contorno $Uu = Uv = 0$.

A continuación se muestra un resultado de suma importancia. Nos proporciona las propiedades fundamentales de un problema de autovalores autoadjunto, que los autovalores son reales y forman un conjunto numerable, y que las distintas autofunciones asociadas a estos son ortogonales entre sí, aunque todavía no ofrece información sobre su existencia.

Teorema 2.1. *Sea* π *un problema autoadjunto. Entonces los autovalores son reales y constituyen a lo sumo un conjunto numerable sin puntos de acumulación. Las autofunciones que se corresponden con distintos autovalores son ortogonales.*

Demostración:

Consideremos $t \in [a, b]$. Sea $l = \lambda$ un autovalor de π y χ su autofunción asociada. Puesto que $Lx = \lambda x$, la relación (2.11) implica que

$$(L\chi, \chi) - (\chi, L\chi) = (\lambda\chi, \chi) - (\chi, \lambda\chi) = \int_a^b \lambda\chi\overline{\chi}dt - \int_a^b \chi\overline{\lambda\chi}dt =$$

$$= (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b \chi\overline{\chi}dt = (\lambda - \overline{\lambda})(\chi, \chi) = 0.$$

Como se están tomando soluciones no triviales y

$$(\chi, \chi) = \|\chi\|^2 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0,$$

se deduce que $(\chi, \chi) > 0$. Luego, necesariamente $\lambda = \overline{\lambda}$, por lo que el autovalor debe ser real.

Consideremos dos autovalores distintos, λ_1 y λ_2, y sus correspondientes autofunciones, χ_1 y χ_2. Entonces, razonando de forma análoga a la anterior, por (2.11) se tiene que:

$$(L\chi_1, \chi_2) - (\chi_1, L\chi_2) = (\lambda_1\chi_1, \chi_2) - (\chi_1, \lambda_2\chi_2) = \int_a^b \lambda_1\chi_1\overline{\chi_2}dt - \int_a^b \chi_1\overline{\lambda_2\chi_2}dt =$$

$$= (\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) \int_a^b \chi_1\overline{\chi_2}dt = (\lambda_1 - \overline{\lambda_2})(\chi_1, \chi_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\chi_1, \chi_2) = 0.$$

Por tanto, $(\chi_1, \chi_2) = 0$. De esta forma, las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

Por otra parte, sean $\varphi_j = \varphi_j(t, l)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ las soluciones de $Lx = lx$ que satisfacen las condiciones iniciales, para algún $c \in [a, b]$, dadas por:

$$\varphi_j^{(k-1)}(c, l) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, las funciones $\varphi_j^{(k-1)}$ son continuas en (t,l) para $t \in [a,b]$ y para todo l. Es más, para t fijo, son funciones enteras de l.

Puesto que las soluciones φ_j son linealmente independientes, formarán una base del conjunto de soluciones del sistema. Luego cualquier solución puede expresarse como

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j. \tag{2.13}$$

Entonces, π tendrá a l como autovalor si, y solo si, existen constantes c_j (no todas nulas) tal que (2.13) verifica $Ux = 0$. Esto es equivalente a que lo siguiente no tenga solución trivial (los problemas de autovalores se estudian únicamente en estos casos):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j U_k \varphi_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Así nos encontramos ante un sistema de n ecuaciones para los c_j (n incógnitas). Si es compatible determinado, la solución es única y como además el sistema es homogéneo, la trivial siempre es una solución del mismo. Por ello, para conseguir que la solución no sea la trivial, el sistema tiene que ser compatible indeterminado, por lo que es necesario y suficiente que el determinante de la matriz (denotado por Δ) formada por los $U_k \varphi_j$ en la k−ésima fila y j-ésima columna, sea cero.

Como se ha mencionado anteriormente, los $\varphi_j^{(k-1)}$ son funciones enteras de l para $t \in [a,b]$ fijo. En concreto, para $t = a$ y $t = b$, Δ será una función entera de l (pues está formado por dichas funciones). Puesto que π únicamente tiene autovalores reales, Δ solo puede tener ceros reales. Por tanto, Δ es una función entera que no es idénticamente nula, y los autovalores de π (ceros de Δ) forman un conjunto numerable sin puntos de acumulación (*Principio de Identidad*).

■

2.2 Problemas no homogéneos. Función de Green

Sea el problema no homogéneo

$$Lx = lx + f, \quad Ux = 0, \quad f \in C([a,b]). \tag{2.15}$$

Lo resolveremos haciendo uso de la *fórmula de variación de las constantes*. Consideremos de nuevo φ_j las soluciones de $Lx = lx$, las cuales satisfacen las condiciones iniciales (2.12) para algún $c \in [a,b]$, establecidas en la demostración del *Teorema* 2.1. La idea será, a partir de estas n soluciones, construir una solución $u = u(t,l)$ de la ecuación diferencial no homogénea (2.15). Vamos a ayudarnos de la función auxiliar K que se define a continuación.

Sea $K(t,\tau,l) = 0$ si $t < \tau$ y

$$K(t,\tau,l) = \frac{1}{p_0(t)W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)(\tau)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\tau,l) & \cdots & \varphi_n(\tau,l) \\ \varphi_1'(\tau,l) & \cdots & \varphi_n'(\tau,l) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau,l) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau,l) \\ \varphi_1(t,l) & \cdots & \varphi_n(t,l) \end{vmatrix} \quad \text{si} \quad \tau \le t, \tag{2.16}$$

donde $W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)$ denota el Wronskiano de $Lx = lx$ con respecto de $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$.

En primer lugar, veamos que la función K está bien definida, es decir, que para $\tau \le t$, su denominador no se anula. Para ello, bastará con comprobar que el Wronskiano es distinto de cero. Sabemos que para cualquier valor de t, éste puede escribirse como en (2.8). Luego para la expresión (2.16), teniendo en cuenta las condiciones (2.12),

$$W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)(\tau) = W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)(c)\cdot\exp\left(\int_c^\tau -\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds\right) = \exp\left(\int_c^\tau -\frac{p_1(s)}{p_0(s)}ds\right) \neq 0.$$

Seguidamente probaremos que K es continua y entera. Recordemos que $\varphi_j^{(k-1)}$, por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, son funciones continuas en (t,l) para $t \in [a,b]$ y para todo l. Además para t fijo son funciones enteras de l. Para empezar, podemos asegurar que K es continua en $\tau < t$ y $t < \tau$ por ser una función definida a trozos que es 0 en el primer caso y racional en el segundo. Faltaría estudiar qué sucede en $t = \tau$. Nótese que en tal situación, la última fila del determinante sería igual a la primera, lo que implicaría que éste fuera 0 y por ende también $K(\tau,\tau,l)$. En consecuencia, K es continua para cualquier valor de t y τ.

Veamos ahora que existen las derivadas parciales de K respecto de t y que también son continuas. Observemos que $(\partial^j K/\partial t^j)(t,\tau,l) = 0$ cuando $t < \tau$. Si $\tau < t$, por la forma de derivar un determinante la derivada de orden j de K respecto de t viene dada por

$$\frac{\partial^j K}{\partial t^j}(t,\tau,l) = \frac{1}{p_0(t)W(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n)(\tau)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\tau,l) & \cdots & \varphi_n(\tau,l) \\ \varphi_1'(\tau,l) & \cdots & \varphi_n'(\tau,l) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(j)}(\tau,l) & \cdots & \varphi_n^{(j)}(\tau,l) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau,l) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau,l) \\ \varphi_1^{(j)}(t,l) & \cdots & \varphi_n^{(j)}(t,l) \end{vmatrix},$$

puesto que los $j-1$ determinantes anteriores son cero ya que la fila que se deriva en cada caso depende de τ y de l. Es por esto que resta el único determinante donde la fila que se deriva depende de t, la última. Por tanto, cuando $j = 0,1,...,n-2$ (nótese que $n-2$ es el último orden de derivada que aparece en el determinante), la expresión de $\partial^j K/\partial t^j$ contendrá siempre un determinante cuyo orden de derivada de la fila $j+1$ va a coincidir con el de la última. Para $t < \tau$ y $\tau < t$ vuelve a ser continua por el mismo argumento previo. Evaluando en $t = \tau$ se tendrán dos filas iguales, lo que implica que este se anule. Así, $\partial^j K/\partial t^j$ será continua cuando $j = 0,1,...,n-2$ para cualquier valor de t y τ al coincidir los límites laterales. Por tanto, aplicando el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, podemos afirmar que $\partial^j K/\partial t^j$

es continua en (t,τ,l) para $t,\tau \in [a,b]$ y para todo l. De hecho, asegura que es una función entera de l para (t,τ) fijos. Veamos qué ocurre en los casos $j = n-1, n$. Si $t < \tau$ y $\tau < t$ ya tenemos asegurada la continuidad en (t,τ,l) para todo l y $a \leq \tau < t \leq b$ y $a \leq t < \tau \leq b$ por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, al igual que se ha visto previamente. En cambio, para $t = \tau$ no van a existir tales derivadas, pues

$$\frac{\partial^{n-1}K}{\partial t^{n-1}}(\tau+0,\tau,l) - \frac{\partial^{n-1}K}{\partial t^{n-1}}(\tau-0,\tau,l) = \frac{1}{p_0(\tau)},$$

donde a la derecha, como la dependencia en t solo está en el determinante, al derivar y evaluar en $t = \tau$ se obtiene el Wronskiano, el cual se simplifica con el que se encuentra en el denominador, resultando $\frac{1}{p_0(\tau)}$. Aquí se llega a una contradicción puesto que a la izquierda de la igualdad es 0. Esto implica que la derivada de orden $n-1$ no coincide a izquierda y derecha, por lo que no existe en tal punto. Como consecuencia, la derivada n–ésima no está definida en $t = \tau$, por lo que tampoco puede ser continua.

Por otro lado comprobemos que, como función de t, K satisface $LK = lK$ cuando $t \neq \tau$. Empleando el *método de Laplace o de los cofactores*, podemos desarrollar por adjuntos la última fila y así expresar K como $K(t,\tau,l) = 0$ si $t < \tau$ y

$$K(t,\tau,l) = \frac{1}{p_0(t)W(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)(\tau)} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t,l)A_{ni} \quad \text{si } \tau \leq t,$$

donde A_{ni} denota el adjunto del elemento que se encuentra en la n–ésima fila e i–ésima columna. De esta manera, se tiene a K expresado como una combinación lineal de $\varphi_1, \varphi_2 \dots, \varphi_n$, que es una base del conjunto de soluciones de $Lx = lx$ (establecida al principio). En cambio, si $t = \tau$, entonces los coeficientes de tal combinación dependen de t y ya no es necesariamente cierto que dicha combinación lineal sea solución.

Sea

$$u(t,l) = \int_a^b K(t,\tau,l)f(\tau)d\tau = \int_a^t K(t,\tau,l)f(\tau)d\tau. \tag{2.17}$$

Por el *Teorema de variación de las constantes*, podemos afirmar que u es solución del problema $Lu = lu + f$, y de ello se deduce que u es de clase C^n en t en su dependencia del parámetro l. Además, por linealidad y por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, se sigue que es una función entera de l. Sin embargo, u no tiene por qué cumplir la condición de frontera $Uu = 0$. Así pues, para que se satisfaga $Ux = 0$ en (2.15), definimos G. Consideremos

$$G(t,\tau,l) = K(t,\tau,l) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t,l), \tag{2.18}$$

que es conocida como **función de Green**. Los c_j se eligen para τ fijo en (a,b) de manera que G como función de t satisface $UG = 0$. Es decir, teniendo presente (2.9),

$$U_k G = U_k K + \sum_{j=1}^{n} c_j U_k \varphi_j = 0, \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{2.19}$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j U_k \varphi_j = -U_k K, \quad k = 1, 2, ..., n, \quad a \leq \tau \leq b. \tag{2.20}$$

Gracias a la forma de definir (2.9) y lo demostrado en los párrafos anteriores, el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros* garantiza que $-U_k K$ es continua para todo l y $a \leq \tau \leq b$. Además, para τ fijo es una función entera de l. También por la misma razón, el determinante Δ de la matriz formada por los $U_k \varphi_j$ en la k–ésima fila y j–ésima columna, es una función entera de l. Puesto que para todo valor propio se verifican las condiciones de frontera homogéneas, Δ se anulará en los autovalores del problema π (ya que φ_j son las autofunciones asociadas que dan solución al problema). Por tanto, en el caso de problemas autoadjuntos, se tiene $\Delta \equiv 0$. Si no se trata de un problema de esas características, Δ no es idénticamente cero y de la expresión (2.20) puede deducirse que los c_j como funciones de (t, τ) son continuas para τ y para todo l menos en los autovalores de π (que determinan un conjunto aislado de singularidades). Asimismo, si fijamos τ, sabemos que por el mismo teorema anterior, la función es derivable en un entorno de todo punto excepto en los valores propios, es decir, la función es holomorfa en el plano complejo salvo en un conjunto aislado de singularidades, por lo que es una función meromorfa de l. De esta manera, G está definida en todo punto menos en los valores propios de π. Como (2.17) es solución de $Lx = lx + f$, por la forma de definir G puede afirmarse que

$$u(t) = \int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau \tag{2.21}$$

es solución de (2.15) excepto en los autovalores de π. Por tanto, se ha probado la existencia de solución para el problema no homogéneo y se ha dado una forma de calcularla explícitamente. En el siguiente resultado expondremos las propiedades de G.

Teorema 2.2. *Si al menos para un valor de l el problema π no tiene solución excepto la trivial (la cual es siempre cierta para el caso autoadjunto), entonces existe una función única $G = G(t, \tau, l)$ definida para (t, τ) en el cuadrado $a \leq t,\ \tau \leq b$ y para todo l complejo excepto los autovalores de π, y teniendo las siguientes propiedades:*

1. *$\partial^k G/\partial t^k$ para $k = 0, 1, \cdots, n-2$ existen y son continuas en (t, τ, l) para (t, τ) en el cuadrado $a \leq t,\ \tau \leq b$ tal que l no es un autovalor de π. Además, $\partial^k G/\partial t^k$ con $k = n-1$ y $k = n$ son continuas en (t, τ, l) para (t, τ) en $a \leq t < \tau \leq b$ y $a \leq \tau < t \leq b$ de forma que l no es un autovalor de π. Para (t, τ) fijo, esas funciones son meromorfas de l.*

2. $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(\tau + 0, \tau, l) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(\tau - 0, \tau, l) = \frac{1}{p_0(\tau)}$.

3. *G como función de t satisface $Lx = lx$ si $t \neq \tau$.*

4. *G como función de t satisface las condiciones de contorno $Ux = 0$ para $a \leq \tau \leq b$.*

5. *La solución de (2.15) viene dada por la función u definida en (2.21).*

Nota: A continuación probaremos la existencia de la función de Green incluso en el caso no necesariamente autoadjunto.

Demostración:

En primer lugar, por la manera de definir G en (2.18), la existencia de esta ya ha sido asegurada ya que $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t,l)$ es de clase $\mathcal{C}^n$ y se ha visto que la función K está bien definida. Veamos las propiedades.

En el primer apartado, como $\partial^j K/\partial t^j$ es continua para $j = 0, 1, ..., n-2$ y $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t,l)$ es de clase $\mathcal{C}^n$, el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros* nos asegura que $\partial^j G/\partial t^j$ para $j = 0, 1, ..., n-2$ es continua en (t,τ,l) con $t,\tau \in [a,b]$, donde l no es un autovalor (pues G no está definida en tal situación). De hecho, garantiza que para (t,τ) fijos, la función es entera. Para $k = n-1, n$, como la derivada de K de dichos órdenes no existe en $t = \tau$, mientras l no sea autovalor, el mismo teorema anterior afirma la continuidad en $a \leq \tau < t \leq b$ y $a \leq t < \tau \leq b$, así como si se consideran (t,τ) fijos, la función es entera. Además, puesto que los autovalores de π determinan un conjunto aislado de singularidades y $\partial^j G/\partial t^j$ es entera para (t,τ) fijos, se tiene que la función es holomorfa salvo en dicho conjunto, es decir, es una función meromorfa de l.

El segundo apartado del teorema, mediante una contradicción, afirma que no existe $\partial^{n-1} G/\partial t^{n-1}$ si $t = \tau$. Sin embargo, este hecho se sigue de que previamente se ha demostrado que la derivada de ese orden no existe para K, luego por definición de G, ésta tampoco existe. Podemos comprobarlo igualmente como sigue:

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,\tau,l) = \frac{1}{p_0(t) W(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)(\tau)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\tau,l) & \cdots & \varphi_n(\tau,l) \\ \varphi_1'(\tau,l) & \cdots & \varphi_n'(\tau,l) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau,l) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau,l) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t,l) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t,l) \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j^{(n-1)}.$$

Así, evaluando en $t = \tau$ llegamos a la contradicción:

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(\tau+0,\tau,l) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(\tau-0,\tau,l) = \frac{1}{p_0(\tau)}.$$

Prosigamos con el tercer apartado. Por lo visto previamente, se satisface $LK = lK$ para $t \neq \tau$ y por cómo se ha considerado la sumatoria, sabemos que ésta también verifica $Lx = lx$. Por tanto, para G también es cierto al ser combinación lineal de estas.

El cuarto punto se verifica por construcción, puesto que G se ha definido de manera que es justamente lo que se está buscando.

El quinto y último apartado también ha sido demostrado previamente, pues (2.17) cumplía $Lx = lx + f$ pero no las condiciones de frontera, por lo que se sigue como consecuencia del punto anterior.

Faltaría ver que G es única. Supongamos que para algún l (no autovalor) existen dos funciones de Green, G y $\tilde{G}$. De esta forma, la función $G - \tilde{G}$ es de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ y puesto que cada una satisface $Lx = lx$, entonces $G - \tilde{G}$ (combinación lineal de soluciones) también lo hace para $t \neq \tau$, luego necesariamente $G - \tilde{G}$ es de clase $\mathcal{C}^n$. Como l no es un autovalor de π, entonces éste únicamente tiene la solución trivial, es decir, $G - \tilde{G} = 0$, luego $G = \tilde{G}$, lo que prueba la unicidad.

■

En lo sucesivo, asumiremos que $l = 0$ no es un autovalor del problema autoadjunto π (lo cual conlleva que la única solución trivial es $u \equiv 0$). Esto no supone ningún problema pues al ser el conjunto de los autovalores de un problema discreto, en cualquier caso debe existir una constante $c \in \mathbb{R}$ que no es un autovalor. Por lo tanto, haciendo una traslación de la forma $L_1 x = Lx - cx$, L_1 ya no tiene a 0 como valor propio. De esta forma, el problema $\pi_1 : Lx = lx,\ Ux = 0$ es de nuevo autoadjunto (teniendo L_1 las mismas propiedades que L) ya que se verifica $(cu, v) = (u, cv)$ para $u, v \in \mathcal{C}^n([a,b])$:

$$(cu,v) = \int_a^b cu\overline{v}dt = c\int_a^b u\overline{v}dt = \overline{c}\int_a^b u\overline{v}dt = \int_a^b u\overline{cv}dt = (u,cv).$$

Además, si λ es un valor propio de π_1, entonces $\lambda + c$ lo sería de π por la traslación realizada. En cambio, las autofunciones de π y π_1 son las mismas, ya que si u es solución de π, entonces $Lu = lu$ y $L_1 u = lu - cu = (l-c)u$, luego las autofunciones de L asociadas a l coinciden con las de L_1 asociadas a $l - c$.

Como $l = 0$ no es autovalor, por lo probado anteriormente (G definida en todo punto excepto en los autovalores), existe $G(t, \tau, 0)$. A partir de aquí, consideraremos que π es un problema autoadjunto y que para $l = 0$ la función de Green se denota por $G = G(t, \tau)$.

A continuación, definiremos el operador lineal integral $\mathcal{G}$ con el que trabajaremos en lo que sigue. Éste poseerá un núcleo simétrico y continuo, la función de Green del problema.

Definición 2.8. *El operador lineal integral $\mathcal{G}$ correspondiente a la función de Green G se define como*

$$\mathcal{G}f(t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a,b]). \tag{2.22}$$

Si $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, utilizando (2.11) aplicado a $u = \mathcal{G}f$ y $v = \mathcal{G}g$, se obtiene

$$(f, \mathcal{G}g) = (\mathcal{G}f, g), \tag{2.23}$$

lo cual expresa el hecho de que $\mathcal{G}$ es un operador autoadjunto. También, de (2.23) se llega a que $(\mathcal{G}f, f)$ es real, pues

$$\int_a^b \mathcal{G}f\overline{f} = (\mathcal{G}f, f) = \overline{(f, \mathcal{G}f)} = \int_a^b f\overline{\mathcal{G}f} = \overline{\int_a^b \overline{f}\mathcal{G}f} = \overline{\int_a^b \mathcal{G}f\overline{f}} = \overline{(\mathcal{G}f, f)}.$$

Una consecuencia de que $(\mathcal{G}f, f)$ sea real, y por tanto de (2.23), nos proporciona una condición suficiente para que el problema π sea autoadjunto, que es

$$G(t,\tau) = \overline{G}(\tau, t). \tag{2.24}$$

Veámoslo:

$$(\mathcal{G}f, f) = \int_a^b \left(\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau\right)\overline{f}(t)dt.$$

Utilizando el *Teorema de Fubini* para cambiar el orden de integración,

$$(\mathcal{G}f, f) = \int_a^b \left(\int_a^b G(t,\tau)\overline{f}(t)dt\right)f(\tau)d\tau.$$

Como $(\mathcal{G}f, f)$ es real, es igual a su conjugado, por lo que

$$(\mathcal{G}f, f) = \int_a^b \left(\int_a^b \overline{G}(t,\tau) f(t) dt \right) \overline{f}(\tau) d\tau.$$

Intercambiando el nombre de las variables (es indiferente) se tiene

$$(\mathcal{G}f, f) = \int_a^b \left(\int_a^b \overline{G}(\tau,t) f(\tau) d\tau \right) \overline{f}(t) dt.$$

Comparando esta última expresión con la primera, se deduce (2.24). De hecho, se está utilizando que si $\int gf = \int gh$ para cada g de cuadrado integrable, entonces $f = h$.

Comprobemos que, en efecto, el problema π es autoadjunto por lo anterior. Sean $u, v \in \mathcal{C}^n([a,b])$ con $Ux = 0$. Sea $f = Lu$, como $L\mathcal{G}f = f$ y el dato inicial que satisfacen es 0, $L(u - \mathcal{G}f) = 0$, luego $u = \mathcal{G}f$. Razonando de forma análoga para v y $g = Lv$, se tiene $L(v - \mathcal{G}g) = 0$, por lo que $v = \mathcal{G}g$. Así,

$$(Lu, v) = (f, \mathcal{G}g) = (\mathcal{G}f, g) = (u, Lv).$$

Observación: El operador $\mathcal{G}$ es un operador inverso de L en el sentido de que para todo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ y todo $u \in \mathcal{C}^n$ tal que se satisface $Uu = 0$, se tiene que

$$L\mathcal{G}f = f, \quad \mathcal{G}Lu = u.$$

Esto se debe a que si u verifica tal condición, nos encontramos en la situación mostrada previamente, dado $f = Lu$, entonces $u = \mathcal{G}f$. Así:

- Aplicando el operador L a ambos lados de la igualdad,

$$u = \mathcal{G}f \Rightarrow Lu = L\mathcal{G}f \Rightarrow f = L\mathcal{G}f.$$

- Aplicando el operador $\mathcal{G}$,

$$Lu = f \Rightarrow \mathcal{G}Lu = \mathcal{G}f \Rightarrow \mathcal{G}Lu = u.$$

2.3 Existencia de autovalores

El objetivo será exponer que los autovalores siempre existen para un problema autoadjunto.

Definición 2.9. *Si existe una solución no trivial $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ y un número complejo μ tal que $\mathcal{G}\varphi = \mu\varphi$, entonces se dice que μ es un autovalor de $\mathcal{G}$ y φ es su autofunción asociada.*

Lema 2.1. *Sean G y $\mathcal{G}$ tales que*

$$\mathcal{G}f(t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Entonces, las autofunciones de $\mathcal{G}$ son idénticas a las de π y los autovalores de $\mathcal{G}$ son inversos de los de π.

Demostración:

Vamos a utilizar que los operadores $\mathcal{G}$ y L actúan como inversos. Si λ es un autovalor de π y φ la autofunción asociada, por definición de problema de autovalores $L\varphi = \lambda\varphi$. Aplicando el operador $\mathcal{G}$ a ambos lados de la igualdad y utilizando la linealidad del mismo, $\mathcal{G}L\varphi = \mathcal{G}\lambda\varphi = \lambda\mathcal{G}\varphi$. Por la observación del operador inverso, $\mathcal{G}L\varphi = \varphi$, luego se tiene la expresión

$$\varphi = \lambda\mathcal{G}\varphi. \tag{2.25}$$

Por otro lado, si $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$, entonces $\mathcal{G}\varphi \in \mathcal{C}^n([a,b])$ por ser solución del problema. De nuevo por la observación del operador inverso, $L\mathcal{G}\varphi = \varphi$. Utilizando (2.25), se tiene que $L\mathcal{G}\varphi = \varphi = \lambda\mathcal{G}\varphi$. Aplicando el operador L, $L\varphi = L\lambda\mathcal{G}\varphi = \lambda L\mathcal{G}\varphi = \lambda\varphi$. Además, como $UG = 0$, se tiene $U\varphi = 0$. Por otro lado, de forma análoga, si μ es un autovalor de $\mathcal{G}$, $\mu\varphi = \mathcal{G}\varphi$. Aplicando L, $L\mu\varphi = \mu L\varphi = L\mathcal{G}\varphi = \varphi$. Por tanto, las autofunciones de π y $\mathcal{G}$ son las mismas. Además, si μ es un valor propio de $\mathcal{G}$ y λ de π, por (2.25) se sigue que $\varphi = \lambda\mu\varphi$, de donde se deduce que los autovalores son unos los inversos de los otros.

■

Más adelante, probaremos que un operador autoadjunto debe poseer autovalores (*Teorema* 2.3), y en este sentido, el resultado se seguirá para el problema π como consecuencia del *Lema* 2.1. Antes, presentamos la definición de norma de $\mathcal{G}$, el *Lema* 2.2 y el *Lema* 2.3, que serán necesarios para la prueba de dicho teorema.

Definición 2.10. *La norma de $\mathcal{G}$ se define como*

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{G}u\|, \quad u \in \mathcal{L}^2(a,b). \tag{2.26}$$

A continuación, recordemos las siguientes **desigualdades**:

- *Desigualdad de Hölder*. Sean $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\left|\int_\Omega fg\right| \leq \left(\int_\Omega f^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^q\right)^{1/q}$$

- *Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz*. Es consecuencia de la desigualdad anterior para $p = q = \frac{1}{2}$.

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$$

- *Desigualdad triangular*.

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Lema 2.2. *El conjunto de todas las funciones* $\{\mathcal{G}u\}$*, donde* $u \in \mathcal{C}([a,b])$ *y* $\|u\| \leq 1$*, es un conjunto acotado de funciones equicontinuas.*

Demostración:

Estudiemos en primer lugar el caso $n \geq 2$. Por el apartado 1 del *Teorema* 2.2, tomando $k = 0$, puede afirmarse que G es continua en el cuadrado $a \leq t, \tau, \leq b$, que es compacto. Por el *Teorema de Heine-Cantor*, se tiene que G es uniformemente continua en éste. Entonces, por definición:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : t_1, t_2 \in [a,b], \;\; |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |G(t_1,\tau) - G(t_2,\tau)| < \varepsilon,$$

Si $u \in \mathcal{C}([a,b])$ y $|t_1 - t_2| < \delta$, teniendo en cuenta (2.22), se tiene que

$$|\mathcal{G}u(t_1) - \mathcal{G}u(t_2)| = \left| \int_a^b (G(t_1,\tau) - G(t_2,\tau))\, u(\tau) d\tau \right| < \varepsilon \left| \int_a^b u(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_a^b |u(\tau)| d\tau \leq \varepsilon (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\|, \tag{2.27}$$

donde en la última desigualdad se ha empleado la *Desigualdad de Hölder* con $p = q = 2$, $\Omega = (a,b)$ y $f \equiv 1$, $g \equiv |u|$, es decir,

$$\int_a^b 1 \cdot |u| d\tau \leq \left(\int_a^b 1^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b |u|^2 \right)^{1/2} = (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

Lo anterior demuestra la equicontinuidad del conjunto $\{\mathcal{G}u\}$ (de hecho, es uniformemente equicontinuo al acotarse por un valor que no depende del punto escogido). Además, si se verifica que $|G(t,\tau)| \leq \gamma$ para $a \leq t$, $\tau \leq b$, se prueba la acotación uniforme de dicho conjunto, pues de forma similar a lo anterior:

$$|\mathcal{G}u(t)| = \left| \int_a^b G(t,\tau) u(\tau) d\tau \right| \leq \int_a^b |G(t,\tau)||u(\tau)| d\tau \leq \gamma \int_a^b |u(\tau)| d\tau \leq \gamma (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\|. \tag{2.28}$$

Para el caso $n = 1$, G es discontinua en $t = \tau$ por el apartado 1 del *Teorema* 2.2 (ya que nos dice que es discontinua en la diagonal). Sea $t_1 < t_2$. Entonces,

$$\mathcal{G}u(t_2) - \mathcal{G}u(t_1) = \int_a^{t_1} (G(t_2,\tau) - G(t_1,\tau))\, u(\tau) d\tau + \int_{t_2}^b (G(t_2,\tau) - G(t_1,\tau))\, u(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (G(t_2,\tau) - G(t_1,\tau))\, u(\tau) d\tau \leq \varepsilon (b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\| + 2\gamma |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

La acotación de los dos primeros sumandos es clara por la misma razón del caso previo. La del último término viene dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} (G(t_2,\tau) - G(t_1,\tau))\, u(\tau) d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} |G(t_2,\tau) - G(t_1,\tau)||u(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} (|G(t_2,\tau)| + |G(t_1,\tau)|)\, |u(\tau)| d\tau \leq 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} |u(\tau)| d\tau \leq 2\gamma |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

De la expresión (2.28), se deduce

$$\|\mathcal{G}u\| = \left(\int_a^b |\mathcal{G}u(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leq \gamma(b-a)^{1/2}\|u\|\left(\int_a^b 1\, dt\right)^{1/2} = \gamma(b-a)\|u\|,$$

luego de acuerdo a la definición (2.26), existe supremo. Así, $\|\mathcal{G}\| < \infty$. Además, para $u \in \mathcal{C}([a,b])$, $\|\mathcal{G}u\| \leq \|\mathcal{G}\|\|u\|$. Como $L\mathcal{G}u = u$,

$$\|L\mathcal{G}u\| = \|u\| \Rightarrow \|L\mathcal{G}\| = 1 \Rightarrow 1 = \|L\mathcal{G}\| \leq \|L\|\|\mathcal{G}\| \Rightarrow \|\mathcal{G}\| \neq 0 \Rightarrow \|\mathcal{G}\| > 0.$$

■

Lema 2.3. *La norma de $\mathcal{G}$ satisface*

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}u,u)|, \quad u \in \mathcal{C}([a,b]). \tag{2.29}$$

Demostración:

Por (2.23), se probó que $(\mathcal{G}u,u)$ es real. Aplicando la *Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz*, $\|\mathcal{G}u\| \leq \|\mathcal{G}\|\|u\|$ y teniendo en cuenta que $\|u\| = 1$,

$$|(\mathcal{G}u,u)| \leq \|\mathcal{G}u\|\|u\| \leq \|\mathcal{G}\|\|u\|^2 = \|\mathcal{G}\|.$$

Tomando supremos en lo anterior, se obtiene que $\sup_{\|u\|=1}|(\mathcal{G}u,u)| \leq \|\mathcal{G}\|$.
Por otro lado, sea $\|\mathcal{G}\| = \eta$. Observemos que

$$|(\mathcal{G}(u+v),u+v)| \leq \|\mathcal{G}\|\|u+v\|^2 = \eta\|u+v\|^2 \Rightarrow -\eta\|u+v\|^2 \leq (\mathcal{G}(u+v),u+v) \leq \eta\|u+v\|^2,$$

$$|(\mathcal{G}(u-v),u-v)| \leq \|\mathcal{G}\|\|u-v\|^2 = \eta\|u-v\| \Rightarrow -\eta\|u-v\|^2 \leq (\mathcal{G}(u-v),u-v) \leq \eta\|u-v\|^2.$$

De esta forma, podemos establecer las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}(u+v),u+v) &= ((\mathcal{G}u+\mathcal{G}v),u+v) = (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}u,v)+(\mathcal{G}v,u)+(\mathcal{G}v,v) = \\ &= (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}v,v)+(\mathcal{G}u,v)+(v,\mathcal{G}u) = (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}v,v)+(\mathcal{G}u,v)+\overline{(\mathcal{G}u,v)} = \\ &= (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}v,v)+2\mathfrak{Re}(\mathcal{G}u,v) \leq \eta\|u+v\|^2,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la linealidad del operador $\mathcal{G}$, (2.23) y las propiedades del producto interno. Razonando de igual manera para $u-v$, se obtiene una acotación similar. Es decir,

$$(\mathcal{G}(u+v),u+v) = (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}v,v)+2\mathfrak{Re}(\mathcal{G}u,v) \leq \eta\|u+v\|^2, \tag{2.30}$$

$$(\mathcal{G}(u-v),u-v) = (\mathcal{G}u,u)+(\mathcal{G}v,v)-2\mathfrak{Re}(\mathcal{G}u,v) \geq -\eta\|u-v\|^2. \tag{2.31}$$

Restando (2.30) menos (2.31) (nótese que cambia la desigualdad de la segunda), se obtiene

$$4\mathfrak{Re}(\mathcal{G}u,v) \leq \eta(\|u+v\|^2+\|u-v\|^2) = 2\eta(\|u\|^2+\|v\|^2), \tag{2.32}$$

puesto que

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 &= (u+v,u+v)+(u-v,u-v) = (u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)+ \\ &+(u,u)+(u,-v)+(-v,u)+(v,v) = 2(u,u)+2(v,v) = 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right),\end{aligned}$$

lo cual es conocido como *Identidad del paralelogramo* (en todo espacio con producto interior, la norma inducida la satisface). Además, para $u \in \mathcal{C}([a,b])$, $\mathcal{G}u$ es nula solo si $u \equiv 0$. Esto se debe a que si $\mathcal{G}u$ fuera idénticamente cero, entonces $L\mathcal{G}u = u$ también lo sería. Tomando $v = \mathcal{G}u/\|\mathcal{G}u\|$ con $\|u\| = 1$ (por cómo se ha elegido v, también $\|v\| = 1$) y aplicándolo en (2.32),

$$4\mathfrak{Re}\left(\mathcal{G}u, \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|}\right) \leq 4\eta \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left(\mathcal{G}u, \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|}\right) \leq \eta \Leftrightarrow \frac{\|\mathcal{G}u\|^2}{\|\mathcal{G}u\|} \leq \eta \Leftrightarrow \|\mathcal{G}u\| \leq \eta.$$

Por tanto, se verifica (2.35).

■

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema clave de la sección, que afirma la existencia de autovalores para un problema autoadjunto:

Teorema 2.3. *$\|\mathcal{G}\|$ o $-\|\mathcal{G}\|$ es un autovalor para $\mathcal{G}$.*

Demostración:

Consideremos la norma de $\mathcal{G}$ definida como en (2.29). Entonces,

$$\exists \{u_m\} \subset \mathcal{C}([a,b]), \|u_m\| = 1 : \begin{cases} \text{o bien } (\mathcal{G}u_m, u_m) \to \|\mathcal{G}\|, \\ \text{o bien } (\mathcal{G}u_m, u_m) \to -\|\mathcal{G}\|. \end{cases}$$

Supongamos, en primer lugar, que $(\mathcal{G}u_m, u_m) \to \|\mathcal{G}\| = \mu_0 \in \mathbb{R}^+$. En ese caso, veremos que μ_0 es autovalor. Por el *Lema* 2.2 podemos afirmar que $\{\mathcal{G}u_m\}$ es una sucesión uniformemente acotada de funciones equicontinuas. En estas condiciones, el *Teorema de Ascoli-Arcelà* afirma la existencia de una parcial $\{\mathcal{G}u_m\}$ que es uniformemente convergente en $[a,b]$ a una función continua φ_0.

El espacio $\mathcal{C}([a,b])$ es completo para la norma del máximo. Consideremos esta. Entonces:

$$\max_{a\leq t\leq b} |\mathcal{G}u_m - \varphi_0| \to 0 \ \text{ para } \ m \to \infty \ \Rightarrow \ \|\mathcal{G}u_m - \varphi_0\| \to 0 \ \text{ para } \ m \to \infty. \tag{2.33}$$

Lo anterior también es equivalente a $\|\mathcal{G}u_m\| \to \|\varphi_0\|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\right\|^2 &= (\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m, \mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m) = (\mathcal{G}u_m, \mathcal{G}u_m) + (\mathcal{G}u_m, -\mu_0 u_m) + \\ &+ (-\mu_0 u_m, \mathcal{G}u_m) + (-\mu_0 u_m, -\mu_0 u_m) = \|\mathcal{G}u_m\|^2 + \mu_0^2 \|u_m\|^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}u_m, u_m). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si $m \to \infty$,

$$\|\mathcal{G}u_m\|^2 + \mu_0^2 \|u_m\|^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}u_m, u_m) \to \|\varphi_0\|^2 + \mu_0^2 - 2\mu_0^2 = \|\varphi_0\|^2 - \mu_0^2 \geq 0.$$

De aquí se deduce que $\|\varphi_0\|^2 \geq \mu_0^2 > 0$, por lo que φ_0 no es idénticamente nula en $[a,b]$. Notemos que de la definición de μ_0 se sigue que

$$\|\mathcal{G}u_m\| \leq \|\mathcal{G}\| \|u_m\| = \|\mathcal{G}\| = \mu_0 \Rightarrow \|\mathcal{G}u_m\|^2 \leq \mu_0^2.$$

Así, por (2.34) y lo anterior, se tiene:

$$0 \leq \left\|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\right\|^2 = \|\mathcal{G}u_m\|^2 + \mu_0^2 \|u_m\|^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}u_m, u_m) \leq 2\mu_0^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}u_m, u_m),$$

donde si $m \to \infty$, entonces $2\mu_0^2 - 2\mu_0(\mathcal{G}u_m, u_m) \to 2\mu_0^2 - 2\mu_0^2 = 0$. Por tanto,

$$\left\|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\right\| \to 0. \tag{2.35}$$

Además,

$$0 \leq \left\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\right\| = \left\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0 + \mathcal{G}(\mathcal{G}u_m) - \mathcal{G}(\mathcal{G}u_m) + \mu_0\mathcal{G}u_m - \mu_0\mathcal{G}u_m\right\| \leq$$

$$\leq \|\mathcal{G}\varphi_0 - \mathcal{G}(\mathcal{G}u_m)\| + \left\|\mathcal{G}(\mathcal{G}u_m) - \mu_0\mathcal{G}u_m\right\| + \left\|\mu_0\mathcal{G}u_m - \mu_0\varphi_0\right\|.$$

Utilizando (2.33), (2.35) y $\|\mathcal{G}u\| \leq \|\mathcal{G}\|\|u\|$, se tiene que para $m \to \infty$:

- $\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mathcal{G}(\mathcal{G}u_m)\| = \|\mathcal{G}(\varphi_0 - \mathcal{G}u_m)\| \leq \|\mathcal{G}\|\|\varphi_0 - \mathcal{G}u_m\| \to 0$,
- $\left\|\mathcal{G}(\mathcal{G}u_m) - \mu_0\mathcal{G}u_m\right\| = \left\|\mathcal{G}(\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m)\right\| \leq \|\mathcal{G}\|\left\|\mathcal{G}u_m - \mu_0 u_m\right\| \to 0$,
- $\left\|\mu_0\mathcal{G}u_m - \mu_0\varphi_0\right\| = \left\|\mu_0\right\|\|\mathcal{G}u_m - \varphi_0\| \to 0$.

Por tanto,

$$0 \leq \left\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\right\| \leq 0 \Leftrightarrow \left\|\mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\right\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{G}\varphi_0 - \mu_0\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{G}\varphi_0 = \mu_0\varphi_0.$$

Así, μ_0 es un autovalor de $\mathcal{G}$ cuya autofunción asociada es φ_0.

Si $(\mathcal{G}u_m, u_m) \to -\|\mathcal{G}\|$, un razonamiento análogo permite concluir que $-\|\mathcal{G}\|$ es autovalor.

■

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos el resultado que sigue:

Corolario 2.3.1. *El operador integral $\mathcal{G}$ tiene una sucesión infinita de autofunciones $\{\chi_k\}$ ortonormales en $\mathcal{L}^2(a,b)$.*

Demostración:

Sea $\chi_0 = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$. Se va a utilizar el *proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt* para la construcción de los χ_k. Consideremos

$$G_1(t,\tau) = G(t,\tau) - \mu_0\chi_0(t)\overline{\chi}_0(\tau). \tag{2.36}$$

Se define el operador $\mathcal{G}_1$ como:

$$\mathcal{G}_1 u(t) = \int_a^b G_1(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad u \in \mathcal{C}([a,b]). \tag{2.37}$$

Éste tiene las mismas propiedades que $\mathcal{G}$ mostradas en el *Lema* 2.2. En concreto, si

$$\|\mathcal{G}_1\| \neq 0, \quad \sup_{\|u\|=1} |(\mathcal{G}_1 u, u)| = \left|\tilde{\mu}_1\right|, \tilde{\mu}_1 \in \mathbb{R},$$

entonces, o bien $\tilde{\mu}_1$, o bien $-\tilde{\mu}_1$, es un autovalor para $\mathcal{G}_1$. Consideremos μ_1 dicho autovalor. De esta manera, existe una autofunción no trivial $\varphi_1 \in \mathcal{C}([a,b])$ verificando $\mathcal{G}_1\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$. Tomemos $\chi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$. Como para todo $u \in \mathcal{C}([a,b])$, se cumple que $(\mathcal{G}_1 u, \chi_0) = 0$, ya que

$$(\mathcal{G}_1 u, \chi_0) = (\mathcal{G}u, \chi_0) - \mu_0(u,\chi_0)(\chi_0,\chi_0) = (u, \mathcal{G}\chi_0) = (u, \mu_0\chi_0) - \mu_0(u,\chi_0) = 0,$$

entonces χ_1 es ortogonal a χ_0. De esta forma, por definición de $\mathcal{G}_1$ y G_1,

$$\mathcal{G}_1\chi_1(t) = \int_a^b G(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau - \mu_0\chi_0(t)\int_a^b \chi_1(\tau)\overline{\chi_0}(\tau)d\tau = \int_a^b G(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau - 0 = \mathcal{G}\chi_1.$$

Luego se sigue que $\mathcal{G}\chi_1 = \mathcal{G}_1\chi_1 = \mu_1\chi_1$, lo que prueba que χ_1 es una autofunción de $\mathcal{G}$. Además, por la propiedad en los extremos, μ_1 se encuentra entre el ínfimo y el supremo, por lo que $|\mu_1| \leq |\mu_0|$. A continuación, consideremos

$$G_2(t,\tau) = G_1(t,\tau) - \mu_1\chi_1(t)\overline{\chi}_1(\tau). \tag{2.38}$$

Realizando el mismo procedimiento anterior, se deduce la existencia de χ_2, cuyo autovalor asociado es μ_2, de forma que $|\mu_2| \leq |\mu_1|$ y χ_2 es ortogonal a χ_1 y χ_0. Razonando de la misma manera de forma sistemática, se obtiene una sucesión $\{\chi_k\}$ ortonormal con $k = 0, 1, 2, \ldots$

El proceso previo terminará únicamente si existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathcal{G}_m\| = 0$. Intuitivamente, si en algún momento fuese 0, no tendría sentido, por cómo se define el supremo, la construcción que se realiza anteriormente, pues desde m en adelante todos los autovalores serían 0. De hecho, lo que se hace es obtener autovalores mientras el supremo no sea 0, de manera que se prueba que éste es siempre positivo y por ello habrá una sucesión infinita de autovalores. Veámoslo. En primer lugar, nótese que para cualquier $f \in \mathcal{C}([a,b])$,

$$\mathcal{G}_m f = \mathcal{G}f - \sum_{j=0}^{m-1}\mu_j\chi_j(f,\chi_j).$$

Aplicando el operador lineal L,

$$L\mathcal{G}_m f = L\mathcal{G}f - \sum_{j=0}^{m-1}\mu_j L\chi_j(f,\chi_j) = f - \sum_{j=0}^{m-1}\mu_j L\chi_j(f,\chi_j). \tag{2.39}$$

Si $\|\mathcal{G}_m\| = 0$ ($\Leftrightarrow \mathcal{G}_m = 0$), entonces:

$$L0f = 0 = f - \sum_{j=0}^{m-1}(f,\chi_j)\mu_j L\chi_j = f - \sum_{j=0}^{m-1}(f,\chi_j)L\mu_j\chi_j = f - \sum_{j=0}^{m-1}(f,\chi_j)L\mathcal{G}\chi_j.$$

Así, teniendo en cuenta que L y $\mathcal{G}$ son inversos,

$$f = \sum_{j=0}^{m-1}(f,\chi_j)\chi_j. \tag{2.40}$$

Por el hecho de que los χ_j son de clase $\mathcal{C}^1$ y f puede tomarse como $|t - \frac{1}{2}(a+b)|$, que es continua pero no es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces (2.40) no puede darse. Luego necesariamente $\|\mathcal{G}_m\| > 0$, para todo m. De esto se deduce que existen un número infinito de autovalores y autofunciones.

■

3 Descomposición espectral del espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$

En este capítulo se mostrarán los *Teoremas de Expansión y Completitud*. El objetivo será probar la completitud de las autofunciones $\{\chi_k\}$ asociadas a un problema autoadjunto π en el espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$, lo cual nos permitirá expresar cualquier función como combinación infinita de autofunciones. Para ello, tendremos que probar la denominada *Igualdad o Identidad de Parseval*. En primer lugar, comenzaremos justificando la expansión de una función $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}(f,\chi_k)\chi_k,$$

de manera que se satisfacen las condiciones de contorno $Ux = 0$. Tras ello, gracias a la densidad de este tipo de funciones en el espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$, podremos extender la igualdad a este último. Antes de nada, demostramos la *Desigualdad de Bessel*:

Lema 3.1. *Si $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$ y $\{\chi_k\}$ es una sucesión ortonormal de funciones propias asociadas a un problema autoadjunto π, entonces la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(f,\chi_k)|^2$$

es convergente y se verifica

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(f,\chi_k)|^2 \le \|f\|^2 \qquad \textit{(Desigualdad de Bessel)} \tag{3.1}$$

Demostración:

Sea $m \ge 0$ finito. En primer lugar, veamos que

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right\|^2 = \sum_{k=0}^{m}|(f,\chi_k)|^2. \tag{3.2}$$

Por definición de norma y por las propiedades del producto interno,

$$\left\|\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k, \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right) =$$

$$= ((f,\chi_0)\chi_0,(f,\chi_0)\chi_0) + \dots + (f,\chi_m)\chi_m,(f,\chi_m)\chi_m).$$

De nuevo, por una de las propiedades del producto interno y por ortonormalidad, se tiene que para cada $i = 0,1,\dots,m$,

$$((f,\chi_i)\chi_i,(f,\chi_i)\chi_i) = (f,\chi_i)\overline{(f,\chi_i)}(\chi_i,\chi_i) = |(f,\chi_i)|^2\,\|\chi_i\|^2 = |(f,\chi_i)|^2.$$

Luego de lo anterior se sigue (3.2).

Por otro lado, sea $z = f - \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k$. Comprobemos que $z \perp \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k$:

$$\left(f - \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k, \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right) = \left(f, \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k, \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\overline{(f,\chi_k)} - \sum_{k=0}^{m}|(f,\chi_k)|^2 = 0,$$

donde

$$\left(f, \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right) = (f,(f,\chi_0)\chi_0) + \dots + (f,(f,\chi_m)\chi_m) =$$

$$= (f,\chi_0)\overline{(f,\chi_0)} + \dots + (f,\chi_m)\overline{(f,\chi_m)} = \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\overline{(f,\chi_k)}.$$

La ortogonalidad probada nos permite emplear el *Teorema de Pitágoras*:

$$\|f\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right\|^2 + \|z\|^2.$$

Luego,

$$0 \le \|z\|^2 = \left\|f - \sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\right\|^2 = \|f\|^2 - \left\|\sum_{k=0}^{m}(f,\chi_k)\chi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{m}|(f,\chi_k)|^2.$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$ en lo anterior,

$$0 \le \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty}|(f,\chi_k)|^2,$$

lo que prueba la convergencia de la serie y (3.1).

■

Definición 3.1. *Se denomina k–ésimo* ***coeficiente de Fourier de*** f *con respecto del conjunto ortonormal* $\{\chi_k\}$*, al número* (f,χ_k).

A continuación, demostraremos, en el espacio $\mathcal{C}^n([a,b])$, el resultado de expansión y la relación de completitud de las autofunciones en un problema de autovalores. Éste servirá de precedente para el resultado principal que extiende tal resultado al espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$.

Teorema 3.1. *Sea* $\{\chi_k\}$ *una sucesión ortonormal de funciones propias asociadas a un problema autoadjunto* π*, y sea* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ *tal que satisface las condiciones de contorno* $Uf = 0$*. Entonces en* $[a,b]$*,*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}(f,\chi_k)\chi_k, \tag{3.3}$$

donde la serie converge uniformemente en $[a,b]$. De hecho, multiplicando (3.3) por $\overline{f}$ e integrando, se obtiene

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f,\chi_k)|^2 \qquad \textit{(Igualdad de Parseval)} \tag{3.4}$$

La relación dada por (3.4) también es denominada ***relación de completitud****.*

Demostración:

Sea $g(\tau) = \overline{G}(t,\tau) = G(\tau,t)$ (sabemos que es cierta la igualdad pues basta aplicar el conjugado a la expresión probada en (2.24)). Como μ_k es autovalor y χ_k es su autofunción asociada, $\mathcal{G}\chi_k = \mu_k\chi_k$. Aplicando el conjugado a esa igualdad y utilizando las propiedades del mismo para integrales, se sigue:

$$\overline{\mathcal{G}\chi_k} = \overline{\mu_k\chi_k} = \mu_k\overline{\chi}_k \Rightarrow \overline{\int_a^b G(t,\tau)\chi_k(\tau)d\tau} = \int_a^b \overline{G}(t,\tau)\overline{\chi}_k(\tau)d\tau = \mu_k\overline{\chi}_k(t) = (g,\chi_k).$$

De aquí se deduce que para t fijo, el k−ésimo coeficiente de Fourier de g es $\mu_k\overline{\chi}_k(t)$. Por la *Desigualdad de Bessel*, se tiene

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k^2|\chi_k(t)|^2 \leq \|G(\tau,t)\|^2 = \int_a^b G(\tau,t)\overline{G}(\tau,t)d\tau = \int_a^b |G(\tau,t)|^2 d\tau, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Sea $\gamma = \sup|G(\tau,t)|$ para $a \leq t,\tau \leq b$. Entonces,

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k^2|\chi_k(t)|^2 \leq \int_a^b \gamma^2 d\tau = \gamma^2(b-a), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Integrando lo anterior ahora respecto de t (teniendo en cuenta la ortonormalidad en la parte de la izquierda de la desigualdad) y tomando $m \to \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^2 \leq \gamma^2(b-a)^2.$$

En particular, si $k \to \infty$, entonces $|\mu_k| \to 0$, ya que el término general de una serie convergente tiende a 0.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$G_m(t,\tau) = G(t,\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k\chi_k(t)\overline{\chi}_k(\tau).$$

Por la propiedad en los extremos de $\mathcal{G}_m$, sabemos que μ_m es un supremo o un ínfimo, en este caso $\mu_m = \|\mathcal{G}_m\|$ o $\mu_m = -\|\mathcal{G}_m\|$. Podemos considerar $\|\mathcal{G}_m\| = |\mu_m|$. Así,

$$0 \leq \|\mathcal{G}_m u\| = \left\|\mathcal{G}u - \sum_{k=0}^{m-1}(u,\chi_k)\chi_k\right\| \leq \|\mathcal{G}_m\|\|u\| = |\mu_m|\|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{C}([a,b]),$$

donde la primera igualdad se sigue de la propia definición de $\mathcal{G}_m$,

$$\mathcal{G}_m u = \int_a^b G_m(t,\tau)u(\tau)d\tau = \int_a^b \left[G(t,\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \chi_k(t)\overline{\chi}_k(\tau) \right] u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_a^b G(t,\tau)u(\tau)d\tau - \int_a^b \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \chi_k(t)\overline{\chi}_k(\tau)d\tau = \mathcal{G}u - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \chi_k(t) \int_a^b \overline{\chi}_k(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= \mathcal{G}u - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k.$$

Como para $m \to \infty$, $|\mu_m| \to 0$, tomando el límite en la desigualdad anterior se obtiene

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \mathcal{G}u - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k \right\| = 0. \tag{3.5}$$

Consideremos $q > p$. Por la linealidad del operador $\mathcal{G}$ y por $\mathcal{G}\chi_k = \mu_k \chi_k$ para todo k,

$$\sum_{k=p}^{q} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k = \mathcal{G}\left(\sum_{k=p}^{q} (u,\chi_k)\chi_k \right).$$

En concreto, se tiene que $|\mathcal{G}u| \leq \gamma(b-a)^{\frac{1}{2}} \|u\|$ (visto en la demostración del *Lema* 2.2), por lo que de lo anterior se sigue que:

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k \right| = \left| \mathcal{G}\left(\sum_{k=p}^{q} (u,\chi_k)\chi_k \right) \right| \leq \gamma(b-a)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{k=p}^{q} (u,\chi_k)\chi_k \right\| = \gamma(b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=p}^{q} |(u,\chi_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el *Lema* 3.1 (*Desigualdad de Bessel*), la serie $\sum_{k=p}^{q} |(u,\chi_k)|^2$ es convergente cuando $p,q \to \infty$. Luego en particular es de Cauchy. Así, por definición,

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : q \geq p \geq n_0,\ \sum_{k=p}^{q} |(u,\chi_k)|^2 < \varepsilon_1.$$

De esta forma, dado $\varepsilon > 0$,

$$\left| \sum_{k=p}^{q} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k \right| < \gamma(b-a)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k$ es uniformemente convergente en $[a,b]$ y representa una función continua. Por la continuidad de $\mathcal{G}u$ y (3.5), se tiene finalmente que

$$\mathcal{G}u = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (u,\chi_k)\chi_k. \tag{3.6}$$

Por otra parte, para cualquier $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ con $Ux = 0$, entonces Lf es continua, y tomando $u = Lf$ se tiene que $\mathcal{G}u$ está definido y $\mathcal{G}u = \mathcal{G}Lf = f$. Como

$$\mu_k(u,\chi_k) = (u,\mu_k\chi_k) = (u,\mathcal{G}\chi_k) = (\mathcal{G}u,\chi_k) = (f,\chi_k),$$

de (3.6), el resultado de expansión (3.3) se sigue.

■

Para finalizar el capítulo exponemos el teorema clave de este, el cual extiende el resultado de expansión y la relación de completitud al espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$.

Teorema 3.2. *Sea $\{\chi_k\}$ una sucesión ortonormal de funciones propias asociadas a un problema autoadjunto π. Si $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$, entonces*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f,\chi_k)\chi_k,$$

donde la igualdad viene dada en sentido

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} (f,\chi_k)\chi_k \right\| = 0. \tag{3.7}$$

Además, la Igualdad de Parseval se verifica

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{m} |(f,\chi_k)|^2. \tag{3.8}$$

Demostración:

La prueba se apoya en que el conjunto de funciones de clase $\mathcal{C}^n$ en $[a,b]$ es denso en el espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n([a,b])$ tal que

$$\left\| f - \tilde{f} \right\| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Por otro lado,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m} (f,\chi_k)\chi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=0}^{m} (f,\chi_k)\chi_k + \tilde{f} - \tilde{f} + \sum_{k=0}^{m} \left(\tilde{f},\chi_k\right)\chi_k - \sum_{k=0}^{m} \left(\tilde{f},\chi_k\right)\chi_k \right\| \leq$$

$$\leq \left\| f - \tilde{f} \right\| + \left\| \tilde{f} - \sum_{k=0}^{m} \left(\tilde{f},\chi_k\right)\chi_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{m} \left((\tilde{f} - f),\chi_k\right)\chi_k \right\|. \tag{3.10}$$

Además,

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \left((\tilde{f} - f),\chi_k\right)\chi_k \right\| = \left(\sum_{k=0}^{m} \left((\tilde{f} - f),\chi_k)\right), \sum_{k=0}^{m} \left((\tilde{f} - f),\chi_k)\right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[(((f - \tilde{f}),\chi_0)\chi_0, ((f - \tilde{f}),\chi_0)\chi_0) + \ldots + (((f - \tilde{f}),\chi_m)\chi_m, ((f - \tilde{f}),\chi_m)\chi_m) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} \left| \left((\tilde{f} - f), \chi_k \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se ha utilizado una de las propiedades del producto interno y la ortonormalidad, puesto que se tiene que para cada $i = 0, 1, \ldots, m$,

$$(((f-\tilde{f}),\chi_i)\chi_i, ((f-\tilde{f}),\chi_i)\chi_i) = ((f-\tilde{f}),\chi_i)\overline{((f-\tilde{f}),\chi_i)}(\chi_i,\chi_i) =$$
$$= |((f-\tilde{f}),\chi_i)|^2 \, \|\chi_i\|^2 = |((f-\tilde{f}),\chi_i)|^2.$$

Por la *Desigualdad de Bessel* se tiene que

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \left((\tilde{f} - f), \chi_k \right) \chi_k \right\| = \left(\sum_{k=0}^{m} \left| \left((\tilde{f} - f), \chi_k \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left\| f - \tilde{f} \right\| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Aplicando el *Teorema* 3.1 para $\tilde{f}$, la serie correspondiente converge uniformemente y por tanto existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $m > M$,

$$\left\| \tilde{f} - \sum_{k=0}^{m} \left(\tilde{f}, \chi_k \right) \chi_k \right\| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Utilizando las expresiones (3.9), (3.11), (3.12) en (3.10), se tiene

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m} (f, \chi_k) \chi_k \right\| < 3\varepsilon, \tag{3.13}$$

lo cual prueba el resultado de expansión, (3.7).

La *Igualdad de Parseval* se obtiene procediendo de forma similar a la demostración del *Lema* 3.1. En dicha prueba se mostró que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m} (f, \chi_k) \right\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{k=0}^{m} (f, \chi_k) \chi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{m} |(f, \chi_k)|^2.$$

Luego tomando límite cuando $m \to \infty$ en lo anterior, utilizando (3.7) se obtiene

$$0 = \lim_{m \to \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{m} (f, \chi_k) \chi_k \right\| = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty} |(f, \chi_k)|^2,$$

lo que prueba (3.8).

■

4 Teoremas de comparación y de oscilación para ecuaciones lineales de segundo orden

La existencia y ubicación de los ceros de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias son de vital importancia en la teoría de los problemas de valores en la frontera para tales ecuaciones. En consecuencia, a lo largo del siglo pasado surgió una inmensa literatura sobre este tema. El primer gran resultado fue el célebre *Teorema de comparación de Sturm*, que trata de las ecuaciones autoadjuntas de segundo orden.

4.1 Teoremas de comparación

En esta sección, presentaremos los teoremas que tratarán la localización de ceros de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales tendrán la forma **autoadjunta**

$$Lx = (p(t)x')' + g(t)x = 0, \qquad a < t < b. \tag{4.1}$$

Observemos que las ecuaciones del tipo $x'' + f(t)x' + h(t)x = 0$ pueden expresarse como en (4.1) multiplicando esta por el factor integrante $\exp\left\{\int_c^t f(s)ds\right\}$. De aquí en adelante se asumirá

- $p(t) > 0$,
- p, p' y g son continuas en (a, b), aunque en muchos casos basta que g sea integrable y p absolutamente continua.

Nota: Cualquier cero de una solución no trivial de (4.1) es aislado. Sea φ una solución que se anula en $t_0 \in (a, b)$, entonces $\varphi'(t_0) \neq 0$, pues en caso contrario $\varphi(t) \equiv 0$. Así, t_0 es un cero aislado de la ecuación.

El resultado que se muestra a continuación, que recibe el nombre de *Teorema de comparación de Sturm* o *Teorema Fundamental de Sturm*, tiene como propósito comparar los ceros de funciones solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuando una mayora a la otra.

Teorema 4.1 (Sturm). *Sea φ una solución real en (a, b) de*

$$(px')' + g_1 x = 0 \tag{4.2}$$

y ψ una solución real de

$$(px')' + g_2 x = 0 \tag{4.3}$$

Supóngase que tiene lugar alguna de las siguientes situaciones:

a) $g_1 \geq g_2$ *y* $g_1 \not\equiv g_2$, $t \in (a, b)$.

b) $g_1 \equiv g_2$, $t \in (a, b)$, *y* φ, ψ *son independientes.*

Entonces, si t_1 y t_2 son ceros consecutivos de φ en el intervalo (a, b), ψ debe anularse en algún punto de (t_1, t_2).

Demostración:

Se razonará por reducción al absurdo. Supongamos que ψ no se anula en ningún punto de (t_1,t_2). Puede asumirse que $\psi(t)>0$ y $\varphi(t)>0$ en (t_1,t_2).

a) Como φ es solución de (4.2), $(p\varphi')'+g_1\varphi=0$. De la misma forma, por ser ψ solución de (4.3), $(p\psi')'+g_2\psi=0$. Multiplicando la primera por ψ, la segunda por φ, y restándolas, se obtiene la expresión

$$(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi-(g_2-g_1)\varphi\psi=0.$$

Por hipótesis, $g_2(t)\gneq g_1(t)$ y $\varphi(t),\psi(t)>0$, $t\in(t_1,t_2)$, luego $(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi=(g_2-g_1)\varphi\psi\gneq 0$, $t\in(t_1,t_2)$. Es decir,

$$[(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi](t)\gneq 0,\quad t\in(t_1,t_2).$$

Integrando lo anterior en el intervalo (t_1,t_2), por las propiedades de la integral definida:

$$\int_{t_1}^{t_2}[(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi]dt>0.$$

Puede advertirse que el integrando de la integral anterior se corresponde con la derivada de $p(\varphi'\psi-\varphi\psi')$. Evaluando en los límites de integración,

$$[p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)-p(t_2)\varphi(t_2)\psi'(t_2)]-[p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1)-p(t_1)\varphi(t_1)\psi'(t_2)]>0.$$

Puesto que por hipótesis φ se anula en t_1 y t_2, obtenemos

$$p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)-p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1)>0. \tag{4.4}$$

Por otro lado, por monotonía, como $\varphi(t_2)=0$ y $\varphi(t)>0$, $t\in(t_1,t_2)$, entonces $\varphi'(t_2)<0$. De forma análoga, como $\varphi(t_1)=0$ y $\varphi(t)>0$, $t\in(t_1,t_2)$, se deduce que $\varphi'(t_1)>0$. Así,

$$p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)\le 0\quad \text{y}\quad -p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1)\le 0,$$

ya que al inicio se ha asumido $p(t),\psi(t)>0$, $t\in(t_1,t_2)$. Luego (4.4) no puede darse. Contradicción. Por tanto, ψ se anula en algún punto de (t_1,t_2). De hecho,

$$\int_{t_1}^{t_2}(g_2-g_1)\varphi\psi\le 0,$$

es decir, ψ tiene que cambiar de signo.

b) En el caso $g_1\equiv g_2$ en (a,b), φ y ψ son soluciones independientes de la misma ecuación. Entonces,

$$(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi-(g_2-g_1)\varphi\psi=(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi=0.$$

Integrando de nuevo en (t_1,t_2), se llega a la expresión (4.4) pero igualada a 0 por ser nulo el integrando,

$$p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)-p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1)=0.$$

Por el hecho de ser φ y ψ independientes, el Wronskiano es no nulo:

$$\det\begin{pmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{pmatrix} \neq 0, \forall t \in (a,b) \Rightarrow \varphi(t)\psi'(t) \neq \psi(t)\varphi'(t), \forall t \in (a,b).$$

Como t_1 y t_2 son ceros de φ, por lo anterior

- $\varphi(t_1) = 0 \Rightarrow \psi(t_1) \neq 0,$
- $\varphi(t_2) = 0 \Rightarrow \psi(t_2) \neq 0.$

Por tanto,

$$p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1) \neq 0,$$

llegando a una contradicción. Luego ψ se anula en algún punto de (t_1, t_2), esto es, ψ tiene un cero entre ceros consecutivos de φ. Puesto que los papeles de φ y ψ son intercambiables, también se prueba que φ tiene un cero entre ceros sucesivos de ψ.

■

Observación: Como consecuencia del teorema anterior, se concluye que los ceros de dos soluciones reales linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden están separados unos de otros.

Una forma más sencilla de ver lo anterior puede ser la que sigue. Consideremos el cambio $p(t)x' = y$. Entonces, el problema (4.1) puede expresarse como

$$x' = \frac{y}{p(t)}, \quad y' = -g(t)x. \tag{4.5}$$

Sean

$$x = r\operatorname{sen}\theta, \quad y = r\cos\theta. \tag{4.6}$$

Derivando (4.6) respecto de t, se obtiene

$$x' = r'\operatorname{sen}\theta + r\theta'\cos\theta, \tag{4.7}$$

$$y' = r'\cos\theta - r\theta'\operatorname{sen}\theta. \tag{4.8}$$

Multiplicando $x = r\operatorname{sen}\theta$ por (4.7) e $y = r\cos\theta$ por (4.8),

$$xx' = rr'\operatorname{sen}^2\theta + r^2\theta'\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad yy' = rr'\cos^2\theta - r^2\theta'\cos\theta\operatorname{sen}\theta.$$

Sumando las expresiones,

$$xx' + yy' = rr'(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = rr',$$

y sustituyendo (4.5) y (4.6),

$$rr' = x\frac{y}{p(t)} - xyg(t) = xy\left(\frac{1}{p(t)} - g(t)\right) = r\operatorname{sen}\theta\, r\cos\theta\left(\frac{1}{p(t)} - g(t)\right).$$

Luego,

$$r' = \left(\frac{1}{p} - g\right) r \operatorname{sen}\theta \cos\theta. \tag{4.9}$$

Por otro lado, se multiplica $y = r\cos\theta$ por (4.7) y $x = r\operatorname{sen}\theta$ por (4.8),

$$yx' = rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^2\theta'\cos^2\theta, \quad xy' = rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\theta'\operatorname{sen}^2\theta.$$

Restando lo anterior,

$$yx' - xy' = r^2\theta'(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2\theta',$$

y sustituyendo de nuevo (4.5) y (4.6),

$$r^2\theta' = y\frac{y}{p(t)} - x(-g(t)x) = y^2\frac{1}{p(t)} + x^2 g(t) =$$

$$= r^2\cos^2\theta\frac{1}{p(t)} + r^2\operatorname{sen}^2\theta g(t) = r^2\left(\frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + g(t)\operatorname{sen}^2\theta\right).$$

Por tanto,

$$\theta' = \frac{1}{p}\cos^2\theta + g\operatorname{sen}^2\theta. \tag{4.10}$$

Por otra parte, nótese que en un cambio de variable de la forma (4.6), se tiene lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = (r\operatorname{sen}\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2, \qquad \frac{x}{y} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta.$$

Luego,

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Sea φ una solución del problema (4.1). Si

$$\begin{cases} r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \\ x = \varphi, \quad p\varphi' = px' = y, \end{cases}$$

entonces se alcanzan las expresiones:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (p\varphi')^2 + \varphi^2, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\varphi}{p\varphi'}\right).$$

Además, $r^2(t) > 0$ debido a que φ y φ' no se anulan simultáneamente, por lo que $r(t) > 0$. Como consecuencia, $\varphi(t) = r(t)\operatorname{sen}\theta(t)$ sólo puede anularse en el caso de que $\theta(t) = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Puesto que $\frac{1}{p}\cos^2\theta + g\operatorname{sen}^2\theta$ es diferenciable en θ, la ecuación (4.10) puede verse como $\theta' = f(t,\theta)$, $t \in (a,b)$, con f de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, puede afirmarse que el *problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \theta' = f(t,\theta), \quad t \in (a,b), \\ \theta(t_0) = \theta_0, \end{cases}$$

tiene solución única.

Por otro lado, de las expresiones (4.5) y (4.6) se sigue que

$$0 = r \operatorname{sen}\theta \cos\theta - r\cos\theta \operatorname{sen}\theta = x(t)\cos\theta - p(t)x'(t)\operatorname{sen}\theta. \tag{4.11}$$

A diferencia de los problemas de valores iniciales, los problemas de contorno suelen establecer una relación entre una combinación de x y x' en los extremos del intervalo, y suelen ser del tipo:

$$x(a)\cos\alpha - p(a)x'(a)\operatorname{sen}\alpha = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

$$x(b)\cos\beta - p(b)x'(b)\operatorname{sen}\beta = 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Además, como

$$x(a)\cos\theta(a) - p(a)x'(a)\operatorname{sen}\theta(a) = 0,$$

$$x(a)\cos\alpha - p(a)x'(a)\operatorname{sen}\alpha = 0,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

el sistema

$$\begin{pmatrix} \cos\theta(a) & \operatorname{sen}\theta(a) \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(a) \\ -p(a)x'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $(x(a), -p(a)x'(a))^T \neq (0,0)^T$, tiene solución no trivial. Luego,

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta(a) & \operatorname{sen}\theta(a) \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \cos\theta(a)\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta(a)\cos\alpha = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\cos\theta(a)\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\theta(a)\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta(a) = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \theta(a) = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que si $x = \varphi(t)$ es solución de (4.1) tal que se verifica la condición (4.12), ésta no es válida para dos valores diferentes de α a no ser que se de alguna de las dos siguientes posibilidades:

- $x(a) = 0 = p(a)x'(a) \Rightarrow 0 = x^2(a) + (p(a)x'(a))^2 = r^2(a)$.
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x(a)}{p(a)x'(a)} = \operatorname{tg}\theta(a) \Rightarrow \alpha = \theta(a) + k\pi$.

En el siguiente resultado se presentará una manera alternativa de comparar el comportamiento de las soluciones de dos ecuaciones de la forma (4.1),

$$L_i x = (p_i x')' + g_i x = 0, \quad i = 1, 2 \tag{4.13}$$

donde se hará uso del cambio de variable hecho previamente.

Teorema 4.2. *Sean p_i' y g_i funciones continuas a trozos en $[a,b]$, tal que se verifica*

$$0 < p_2(t) \leq p_1(t), \quad g_2(t) \geq g_1(t), \quad t \in [a,b].$$

Sean $L_1\varphi_1 = 0$, $L_2\varphi_2 = 0$ y sean θ_1, θ_2 soluciones de

$$\theta_i' = \frac{1}{p_i}\cos^2\theta_i + g_i \operatorname{sen}^2\theta_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.14}$$

Supóngase que $\theta_2(a) \geq \theta_1(a)$. Entonces,

$$\theta_2(t) \geq \theta_1(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{4.15}$$

Si además se cumple que $g_2 > g_1$ en (a,b), entonces

$$\theta_2(t) > \theta_1(t), \quad a < t \leq b. \tag{4.16}$$

Demostración:

Como se ha visto en el desarrollo anterior, existe solución $\theta = \theta(t)$ de (4.10). Consideremos estas soluciones asociadas a las ecuaciones (4.13), es decir, (4.14).

Para obtener una expresión conveniente de $(\theta_2 - \theta_1)'$, se suman y restan los términos $g_1 \operatorname{sen}^2 \theta_2$ y $\frac{1}{p_1} \operatorname{sen}^2 \theta_1$ para así llegar a

$$(\theta_2 - \theta_1)' = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(\operatorname{sen}^2 \theta_2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1\right) + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\cos^2 \theta_2 + (g_2 - g_1)\operatorname{sen}^2 \theta_2. \tag{4.17}$$

Denotamos por h al término

$$h = \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\cos^2 \theta_2 + (g_2 - g_1)\operatorname{sen}^2 \theta_2 \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \theta_2 - \theta_1$, (4.17) puede reformularse como

$$u' = fu + h, \tag{4.18}$$

siendo

$$f = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right),$$

puesto que

$$\left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(\operatorname{sen}^2 \theta_2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1\right) = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) \cdot \frac{1}{u} \cdot u =$$

$$= \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right)u = fu. \tag{4.19}$$

Como g_1 y p_1 son continuas a trozos y la función seno es continua, f es continua a trozos. Además, f es uniformemente acotada. Puesto que $h \geq 0$, de $u' = fu + h$ se deduce que $u' - fu \geq 0$.

Sea $F(t) = \int_t^b f(s)ds = -\int_b^t f(s)ds$. Por el *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*, $F' = -f$. Si se multiplica $u' - fu \geq 0$ por e^F, se sigue que

$$e^F u' - f e^F u = e^F u' + F' e^F u \geq 0.$$

Integrando lo último sobre (a,t) (nótese que es la derivada del producto de $e^F u$),

$$e^{F(t)} u(t) \geq e^{F(a)} u(a) \geq 0. \tag{4.20}$$

Entonces, como $u(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$,

$$e^{F(t)}(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \geq e^{F(a)}(\theta_2(a) - \theta_1(a)) \geq 0 \;\Rightarrow\; \theta_2(t) \geq \theta_1(t), \;\; a \leq t \leq b. \tag{4.21}$$

A continuación se demuestra (4.16). Puesto que se verifica (4.15), pueden darse dos situaciones:

a) O bien existe $t_j \to a$ con $\theta_2(t_j) > \theta_1(t_j)$,

b) o bien existe $c \in (a,b)$ con $\theta_2(t) = \theta_1(t)$, $\forall t \in [a,c]$.

En el caso a), tomando $a = t_j$ en (4.20), se tiene que $\theta_2(t_j) > \theta_1(t_j)$, $\forall t > t_j$, $\forall j$. Si se elige t_j arbitrariamente cercano a a, se prueba (4.16). En el caso b), la expresión (4.17) ocurre para $g_2 > g_1$ si, y solo si, sobre (a,c) se tiene que

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \ (mod \pi) \quad \text{y} \quad p_1 \equiv p_2.$$

En cambio, en (a,c), la situación $\theta_1 = \theta_2 = 0 \ (mod \pi)$ no es compatible con (4.14), debido a que $p_i > 0, i = 1,2$, por lo que se verifica (4.16) para $g_2 > g_1$.

■

4.2 Existencia de autovalores

El propósito de esta sección será probar la existencia de exactamente una sucesión infinita monótona creciente de autovalores para una ecuación del tipo Sturm-Liouville. También se mostrará el determinado número de ceros u oscilaciones de cada una de sus autofunciones asociadas en el intervalo (a,b).

Consideremos la ecuación

$$(px')' + (\lambda w - q)x = 0, \tag{4.22}$$

donde

- λ es un parámetro real,
- p', q, w son funciones reales y continuas (o continuas a trozos) sobre $[a,b]$,
- $p, w > 0$ en $[a,b]$.

La expresión (4.22) es denominada **ecuación de Sturm-Liouville**.

Definición 4.1. *Se llama **autovalor** a cada valor de λ para el cual (4.22) tiene solución no trivial y verificando las condiciones de frontera*

$$x(a)\cos\alpha - p(a)x'(a)\operatorname{sen}\alpha = 0, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

$$x(b)\cos\beta - p(b)x'(b)\operatorname{sen}\beta = 0, \ \beta \in \mathbb{R} \tag{4.24}$$

*Se llama **autofunción** asociada a un autovalor a cada solución de (4.22), (4.23) y (4.24) para dicho autovalor λ. Se dice que es un **autovalor simple** si le corresponde una única autofunción. Los problemas de autovalores definidos por la ecuación (4.22) y con las condiciones de contorno (4.23) y (4.24), son denominados **sistemas de Sturm-Liouville regulares**.*

Teorema 4.3. *Existe un número infinito de autovalores $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ formando una sucesión monótona creciente con $\lambda_n \to \infty$. Además, la autofunción correspondiente a λ_n tiene exactamente n ceros en (a,b).*

Demostración:

Sean $\alpha \in [0,\pi)$ y $\beta \in (0,\pi]$. Sea $\varphi = \varphi(t,\lambda)$ la solución de la ecuación (4.22),

$$(p\varphi')' + (\lambda w - q)\varphi = 0,$$

tal que

$$\varphi(a,\lambda) = \operatorname{sen}\alpha, \quad p(a)\varphi'(a,\lambda) = \cos\alpha.$$

Nótese que se verifica la ecuación (4.23),

$$\varphi(a,\lambda)\cos\alpha - p(a)\varphi'(a,\lambda)\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Por tanto, los valores de λ para los cuales se satisface también la condición (4.24), son los autovalores. Luego existe una solución de (4.10) con $g = \lambda w - q$, $\theta = \theta(t,\lambda)$, satisfaciendo $\theta(a,\lambda) = \alpha$ (pues $\theta(a) = \alpha\ (mod \pi)$).

Fijando t, $a < t \leq b$, se tendrá que θ es una función monótona creciente de λ. Para probarlo, consideremos φ_1, φ_2 soluciones de (4.22). Para valores λ_1, λ_2 con $\lambda_1 < \lambda_2$, tomemos

$$p_1(t) = p_2(t) = p, \quad g_1(t) = \lambda_1 w - q, \quad g_2(t) = \lambda_2 w - q.$$

Como $p > 0$ y $g_1(t) \leq g_2(t)$, se verifican las hipótesis del *Teorema* 4.2, por lo que puede afirmarse que $\theta(t,\lambda_2) \geq \theta(t,\lambda_1)$.

Además, φ tiene un cero donde $\theta = 0\ (mod \pi)$ (recordemos que $\varphi(t) = r(t)\operatorname{sen}\theta(t)$). De la expresión (4.10), se tiene

$$\theta' = \frac{1}{p}\cos^2\theta + g\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{p}\cos^2\theta + (\lambda w - q)\operatorname{sen}^2\theta. \tag{4.25}$$

De esta forma, dada $\theta = \theta(t,\lambda)$, cuando $\theta = 0\ (mod \pi)$, $\theta' > 0$ (pues sería $\theta' = \frac{1}{p}, p > 0$). Por tanto, θ es una función monótona creciente de t cuando $\theta = 0\ (mod \pi)$. Por ello, si existe $t_k \in (a,b)$ tal que $\theta(t_k,\lambda) = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

- $\theta(t,\lambda) > k\pi$ para $t > t_k$,
- $\theta(t,\lambda) < k\pi$ para $t < t_k$.

Asimismo, sea $t_k = t_k(\lambda)$ la función que determina el k–ésimo cero de φ en (a,b). Como θ es una función continua de t y de λ, y $\theta' > 0$ cuando $\theta = 0\ (mod \pi)$, se tiene que $t_k = t_k(\lambda)$ (*Teorema de la función implícita*) es una función continua y monótona decreciente de λ. Esto último puede verse como sigue. Los ceros de φ se corresponden con los puntos en los cuales $\theta(t_k(\lambda),\lambda) = k\pi$. Derivando esta expresión respecto de λ,

$$\theta'(t_k(\lambda),\lambda)\cdot\frac{\mathrm{d}t_k(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(t_k(\lambda),\lambda)\cdot 1 = 0.$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}t_k(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(t_k(\lambda),\lambda)}{\theta'(t_k(\lambda),\lambda)} < 0,$$

puesto que numerador y denominador son estrictamente positivos ya que θ es creciente en t y en λ.

Consideremos $t = c \in (a,b]$ fijo. Se verá que:

$$\theta(c,\lambda) \to \infty \ \text{ si } \ \lambda \to \infty, \tag{4.26}$$

$$\theta(c,\lambda) \to 0 \ \text{ si } \ \lambda \to -\infty. \tag{4.27}$$

1. $\theta(c,\lambda) \to \infty$ si $\lambda \to \infty$.

   Como se ha visto, cuando $\theta = 0\ (mod \pi)$, $\theta' > 0$, y como en $t = a$, $\theta(a,\lambda) = \alpha \geq 0$, se sigue $\theta(t,\lambda) \geq 0$. Por el hecho de ser θ monótona en λ, existe $\lim_{\lambda\to\infty} \theta(c,\lambda)$, que puede ser un escalar o infinito. Sea $t_0 \in (a,c)$ y supongamos que

   $$\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \to \infty \quad \textbf{si} \quad \theta(c,\lambda) \to k \in \mathbb{R}.$$

   Puesto que $\theta(t_0,\lambda) \geq 0$ y por la convergencia $\theta(c,\lambda) \leq k$, la anterior expresión puede acotarse como sigue

   $$\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \leq \theta(c,\lambda) \leq k,$$

   lo que implica que $\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda)$ sea acotada superiormente. Contradicción con que $\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \to \infty$. Por tanto, $\theta(c,\lambda) \to \infty$. De esta forma, puede deducirse que para demostrar este apartado, bastará con comprobar que

   $$\exists t_0 \in (a,c) : \theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \to \infty \text{ si } \lambda \to \infty.$$

   Sea $t_0 = \frac{a+c}{2}$ y sean las constantes P, Q, W, $t \in (t_0, c)$, verificando

   $$p(t) \leq P, \qquad w(t) > W > 0, \qquad q(t) \leq Q.$$

   Consideremos la ecuación

   $$Px'' + (\lambda W - Q)x = 0 \tag{4.28}$$

   con solución $\tilde{\varphi}$ tal que se cumple

   $$\tilde{\varphi}(t_0,\lambda) = \varphi(t_0,\lambda), \quad P\tilde{\varphi}'(t_0,\lambda) = p(t_0)\varphi'(t_0,\lambda) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}(t_0,\lambda) = \theta(t_0,\lambda).$$

   Nótese que se verifican las hipótesis del *Teorema* 4.2, con

   $$p_1(t) = P \geq p_2(t) = p(t), \quad g_1(t) = \lambda W - Q \leq \lambda w - q = g_2(t), \quad \tilde{\theta}(t_0,\lambda) = \theta(t_0,\lambda),$$

   luego por dicho teorema, $\theta(c,\lambda) \geq \tilde{\theta}(c,\lambda)$. Esto es equivalente a

   $$\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \geq \tilde{\theta}(c,\lambda) - \tilde{\theta}(t_0,\lambda). \tag{4.29}$$

   De hecho, los ceros de $\tilde{\varphi}$ se distancian en $\pi\,[P/(\lambda W - Q)]^{1/2}$, lo cual puede verse directamente resolviendo la ecuación (4.28), y puesto que es de segundo orden y homogénea de coeficientes constantes, puede utilizarse el *método de la ecuación característica*. De esta forma, si $\lambda \to \infty$, entonces $\pi\,[P/(\lambda W - Q)]^{1/2} \to 0$. Así, $\tilde{\theta} \equiv 0\ (mod \pi)$. Esto se debe a que $\lambda \to \infty$ implica que la distancia entre los ceros es cada vez más pequeña y se tendrán tantos ceros como se quiera para λ suficientemente grande, en particular, como $\tilde{\theta}' > 0$, entonces $\tilde{\theta} \to \infty$. De este modo,

   $$\tilde{\theta}(c,\lambda) - \tilde{\theta}(t_0,\lambda) \to \infty \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty.$$

   Luego, de acuerdo a (4.29),

   $$\theta(c,\lambda) - \theta(t_0,\lambda) \to \infty \quad \text{si} \quad \lambda \to \infty.$$

2. $\theta(c,\lambda) \to 0$ si $\lambda \to -\infty$.

   Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\alpha < \pi - \delta$. Consideremos

$$\delta \le \theta \le \pi - \delta, \quad \lambda < 0, \quad 0 < P \le p, \quad 0 < W \le w, \quad Q \ge |q|.$$

   A partir de (4.25), puede obtenerse la siguiente cota:

$$\theta' = \frac{1}{p}\cos^2\theta + (\lambda w - q)\operatorname{sen}^2\theta \le \frac{1}{P}(1-\operatorname{sen}^2\theta) + (\lambda w - q)\operatorname{sen}^2\theta <$$
$$< \frac{1}{P} + \lambda w \operatorname{sen}^2\theta - q\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{P} - |\lambda| w \operatorname{sen}^2\theta - q\operatorname{sen}^2\theta \le$$
$$\le \frac{1}{P} - |\lambda| W \operatorname{sen}^2\delta + |q|\operatorname{sen}^2\theta \le \frac{1}{P} - |\lambda| W \operatorname{sen}^2\delta + Q.$$

   Así,

$$\theta' < \frac{1}{P} - |\lambda| W \operatorname{sen}^2\delta + Q.$$

   Por tanto, $\theta' < 0$ para $\theta = \delta$ si $-\lambda$ es suficientemente grande. Asimismo, sea

$$\theta' < \frac{-10}{c-a}.$$

   Integrando en el intervalo $[a,c]$, se obtiene

$$\theta(c,\lambda) - \theta(a,\lambda) < -10.$$

   Luego, $\theta(c,\lambda) < -10 + \theta(a,\lambda) < 0$. De ahí, se llega a una contradicción con que $\delta \le \theta \le \pi - \delta$. Por consiguiente, $\theta(c,\lambda) \le \delta$ para $-\lambda$ es suficientemente grande. Como δ era arbitrario, se prueba (4.27).

Por otra parte se toma $c = b$. Por (4.27), $\theta(b,\lambda) \to 0$ si $\lambda \to -\infty$. Por (4.26), $\theta(b,\lambda) \to \infty$ si $\lambda \to \infty$. Puesto que $\theta(b,\lambda)$ es una función continua de λ y $\beta > 0$, por el *Teorema de los valores intermedios,*

$$\exists! \lambda_0 : \theta(b,\lambda_0) = \beta.$$

Como al inicio se han fijado los valores $0 \le \alpha < \pi$ y $0 < \beta \le \pi$, y $\theta(t,\lambda_0)$ es monótona creciente en (a,b), se deduce que

$$0 < \theta(t,\lambda_0) < \theta(b,\lambda_0) \le \pi, \quad t \in (a,b).$$

Luego se verifica la condición (4.24) para $\varphi(t,\lambda_0)$ y no se anula en (a,b), ya que de (4.11),

$$\varphi(b,\lambda_i)\cos\theta(b,\lambda_i) - p(b)\varphi'(b,\lambda_i)\operatorname{sen}\theta(b,\lambda_i) = 0.$$

Incrementando el valor de λ por encima de λ_0, por el mismo argumento anterior,

$$\exists! \lambda_1 : \theta(b,\lambda_1) = \beta + \pi.$$

Entonces, $\varphi(t,\lambda_1)$ satisface (4.24) y además tiene un único cero en (a,b) por ser un múltiplo entero de π. Razonando n veces, se concluye que el n–ésimo autovalor viene dado por $\theta(b,\lambda_n) = \beta + n\pi$ y $\varphi(t,\lambda_n)$ tiene exactamente n ceros en (a,b).

■

4.3 Condiciones de contorno periódicas

Otra clase importante de condiciones en la frontera es la de condiciones periódicas. La teoría de problemas periódicos de Sturm-Liouville está muy relacionada con la de problemas regulares de Sturm-Liouville con valores en la frontera. Es más, esta última podrá ser extendida para incluir problemas de autovalores con condiciones periódicas. En particular, expondremos dos tipos de condiciones periódicas. El teorema central de esta sección mostrará de nuevo que los autovalores conforman una sucesión monótona creciente, estableciendo una relación entre los que están asociados a las distintas condiciones de frontera presentadas. Además, este resultado precisará en qué situaciones las autofunciones son únicas y la cifra de ceros que cada una posee. Para ello, previamente demostraremos un lema cuya consecuencia será clave para la prueba de dicho teorema.

Definición 4.2. *La ecuación de Sturm-Liouville (4.22) verificando $p(a) = p(b)$ junto con las condiciones de frontera periódicas*

$$x(a) = x(b),\ x'(a) = x'(b) \quad o \quad x(a) = -x(b),\ x'(a) = -x'(b),$$

es denominado ***sistema periódico de Sturm-Liouville****.*

En concreto, se asumirá $a = 0$ y $b = 1$ tal que se cumple $p(0) = p(1) = 1$. Consideraremos una de las siguientes condiciones de contorno

$$x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1) \tag{4.30}$$

$$x(0) = -x(1), \quad x'(0) = -x'(1) \tag{4.31}$$

De forma anticipada al enunciado del teorema principal de esta parte, se presentará un lema que será de gran utilidad en su demostración. Consideremos los autovalores μ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ de la ecuación (4.22) verificando la condición

$$x(0) = x(1) = 0, \tag{4.32}$$

denominada de **tipo Dirichlet**.

Por otro lado, sean φ y ψ soluciones de (4.22) tal que se satisfacen las condiciones

$$\varphi(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 0, \tag{4.33}$$

para cualquier valor de λ. En estas circunstancias, ya puede enunciarse el lema que se había adelantado.

Lema 4.1. *Sean μ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ los autovalores de (4.22) que verifican la condición (4.32). Considérese*

$$f(\lambda) = \varphi(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda), \tag{4.34}$$

donde φ y ψ son soluciones de (4.22) tal que se cumplen las condiciones (4.33). Entonces existe un ν_0 tal que

$$\nu_0 < \mu_0 < \mu_1 < \ldots$$

y se verifican

$$f(\nu_0) \geq 2, \quad f(\mu_{2i}) \leq -2, \quad f(\mu_{2i+1}) \geq 2, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.35}$$

1. *Si $f(\hat{\lambda}) = 2$ o $f(\hat{\lambda}) = -2$ para algún $\hat{\lambda} \neq \mu_i$, entonces $\hat{\lambda}$ es un autovalor simple para las condiciones* (4.30) *o* (4.31) *(respectivamente) y para el cual se cumplen*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}(\hat{\lambda}) < 0, \quad si \quad \hat{\lambda} < \mu_0; \qquad (-1)^i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}(\hat{\lambda}) < 0, \quad si \quad \mu_i < \hat{\lambda} < \mu_{i+1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.36}$$

2. *Si $f(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} \neq 0$ en $\lambda = \mu_{2i+1}$, entonces μ_{2i+1} es un autovalor simple para* (4.30).

3. *Si $f(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ en $\lambda = \mu_{2i+1}$, entonces en μ_{2i+1} hay dos autofunciones independientes para* (4.30). *Asimismo, en este caso,*

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2}(\mu_{2i+1}) < 0. \tag{4.37}$$

4. *Si $f(\mu_{2i}) = -2$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} \neq 0$ en $\lambda = \mu_{2i}$, entonces μ_{2i} es un autovalor simple para* (4.31).

5. *Si $f(\mu_{2i}) = -2$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ en $\lambda = \mu_{2i}$, entonces en μ_{2i} hay dos autofunciones independientes para* (4.31). *Asimismo, en este caso,*

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2}(\mu_{2i+1}) > 0. \tag{4.38}$$

Demostración:

Sean μ_i los autovalores de la ecuación (4.22) verificando la condición (4.32). Considérense $\psi(t, \mu_i)$ las soluciones (autofunciones asociadas). Esto es, ψ solución de (4.22) y verificando $\psi(1, \mu_i) = 0 = \psi(0, \mu_i)$. Por el *Teorema* 4.3, $\psi(t, \mu_i)$ tiene i ceros en $(0, 1)$. Además, puede observarse en la gráfica de la *Figura* 4.1 cómo se comportaría la función ψ cuando se anula una y dos veces.

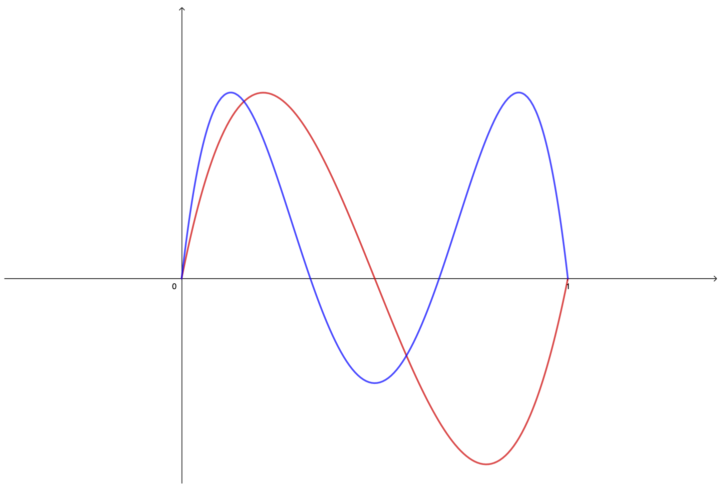

Figura 4.1: Ejemplos de ceros de la función ψ.

Como ψ es una autofunción para μ_i, entonces $-\psi$ también lo es, por lo que se puede suponer sin pérdida de generalidad que es positiva hasta el primer cero. Razonando de igual forma en el resto de casos, se deduce que $\psi'(1, \mu_i) > 0$ para i impar y $\psi'(1, \mu_i) < 0$ para i par.

Por el hecho de que φ y ψ sean soluciones de (4.22), se tiene

$$(p\varphi')' + (\lambda w - q)\varphi = 0, \qquad (p\psi')' + (\lambda w - q)\psi = 0.$$

Multiplicando ψ por la primera y φ por la segunda, y restando lo obtenido en la segunda menos lo obtenido en la primera,

$$\varphi(p\psi')' + \varphi(\lambda w - q)\psi - \psi(p\varphi') - \psi(\lambda w - q)\varphi' = 0 \Leftrightarrow \varphi(p\psi')' - \psi(p\varphi') = 0.$$

Integrando la anterior expresión entre 0 y t,

$$\int_0^t [\varphi(p\psi')' - \psi(p\varphi')']d\tau = 0 \Leftrightarrow \int_0^t \varphi(p\psi')'d\tau = \int_0^t \psi(p\varphi')d\tau.$$

Utilizando el *método de integración por partes*:

- $\int_0^t \varphi(p\psi')'d\tau = [\varphi p\psi']_0^t - \int_0^t p\psi'\varphi' d\tau = p(t)\psi'(t)\varphi(t) - p(0)\psi'(0)\varphi(0) - \int_0^t p\psi'\varphi' d\tau.$

$$u = \varphi, \quad du = \varphi'(\tau)d\tau, \quad dv = (p\psi')'d\tau, \quad v = p\psi'.$$

- $\int_0^t \psi(p\varphi')'d\tau = [\psi p\varphi']_0^t - \int_0^t p\varphi'\psi' d\tau = p(t)\varphi'(t)\psi(t) - p(0)\varphi'(0)\psi(0) - \int_0^t p\varphi'\psi' d\tau.$

$$u = \psi, \quad du = \psi'(\tau)d\tau, \quad dv = (p\varphi')'d\tau, \quad v = p\varphi'.$$

Luego,

$$p(t)\varphi'(t)\psi(t) - p(0)\varphi'(0)\psi(0) = p(t)\varphi'(t)\psi(t) - p(0)\varphi'(0)\psi(0).$$

Teniendo en cuenta que $p(0) = 1$, las condiciones iniciales y agrupando los términos comunes, se obtiene

$$p(t)[\varphi(t,\lambda)\psi'(t,\lambda) - \varphi'(t,\lambda)\psi(t,\lambda)] = 1. \tag{4.39}$$

En este caso, utilizando la expresión (4.39) con $t = 1$ para los autovalores $\lambda = \mu_i$, se llega a

$$p(1)[\varphi(1,\mu_i)\psi'(1,\mu_i) - \varphi'(t,\mu_i)\psi(1,\mu_i)] = 1 \Rightarrow \varphi(1,\mu_i)\psi'(1,\mu_i) = 1,$$

ya que $p(1) = 1$ y $\psi(1,\mu_i) = 0$. Despejando, $\varphi(1,\mu_i) = \frac{1}{\psi'(1,\mu_i)}$. Sustituyendo en (4.34),

$$f(\mu_i) = \psi'(1,\mu_i) + \frac{1}{\psi'(1,\mu_i)}.$$

Además,

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > 0, \;\; x + \frac{1}{x} \geq 2, \tag{4.40}$$

lo que prueba $|f(\mu_i)| \geq 2$ para cualquier i. Nótese que si cambiamos el sentido de la desigualdad en (4.40), se sigue que para $x < 0$, $x + 1/x \leq -2$, y razonando como en el caso previo se deduce que $|f(\mu_i)| \leq -2$ para cualquier i.

Sea ν_0 el menor autovalor de (4.22) verificando la condición $x'(0) = x'(1) = 0$. Entonces, su autofunción asociada, $\varphi(t,\nu_0)$, no tiene ningún cero en $[0,1]$ por el *Teorema* 4.3. Si $\nu_0 \geq \mu_0$, como $\psi(t,\mu_0)$ se anula en 0 y en 1, por el *Teorema* 4.1, $\varphi(t,\nu_0)$ debe anularse en $(0,1)$. Contradicción. Por tanto, $\nu_0 < \mu_0$ y $\varphi(1,\nu_0) > 0$. De nuevo por (4.39),

$$p(1)[\varphi(1,\nu_0)\psi'(1,\nu_0) - \varphi'(t,\nu_0)\psi(1,\nu_0)] = 1 \Rightarrow \varphi(1,\nu_0)\psi'(1,\nu_0) = 1$$

Despejando, $\psi'(1,\nu_0)=\frac{1}{\varphi(1,\nu_0)}$. Así, de (4.34) se tiene

$$f(\nu_0)=\varphi(1,\nu_0)+\frac{1}{\varphi(1,\nu_0)},$$

y por (4.40), $f(\nu_0)\geq 2$.

Asimismo, en relación a la función f, por el *Teorema de diferenciabilidad de las soluciones respecto de los datos iniciales y parámetros*, puede afirmarse que f es una función entera de λ.

Consideremos $u=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$. Derivando respecto de λ la expresión (4.33), se sigue que u verifica la condición $u(0)=u'(0)=0$. Puesto que $\varphi(t,\lambda)$ es solución de la ecuación (4.22), entonces

$$(p(t)\varphi'(t,\lambda))'+(\lambda w-q)\varphi(t,\lambda)=0.$$

Derivando respecto de λ y utilizando que $\frac{\partial\varphi}{\partial t\partial\lambda}=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda\partial t}$ (*Teorema de Schwarz*),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t,\lambda)\right)\right)+w\varphi(t,\lambda)+(\lambda w-q)\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(t,\lambda)=0$$

es decir,

$$(pu')'+(\lambda w-q)u=-w\varphi.$$

De esto, se deduce que u es solución de la ecuación completa anterior. Además, $\{\varphi(t,\lambda),\psi(t,\lambda)\}$ es una base para el conjunto de soluciones de la homogénea. Utilizando el *método de variación de las constantes,*

$$u(t,\lambda)=C_1(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)+C_2(t,\lambda)\psi(t,\lambda),$$

donde

$$\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{-w\varphi}{p(t)}\end{pmatrix}.$$

Puesto que $\varphi\psi'-\psi\varphi'=\frac{1}{p(t)}$ por (4.39), entonces

$$\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{pmatrix}^{-1}=p(t)\begin{pmatrix}\psi' & -\psi\\ -\varphi' & \varphi'\end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix}C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=p(t)\begin{pmatrix}\psi' & -\psi\\ -\varphi' & \varphi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{-w\varphi}{p(t)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi w\varphi\\ -w\varphi^2\end{pmatrix}.$$

Imponiendo las condiciones $u(0,\lambda)=u'(0,\lambda)=0$, se obtiene:

$$C_1(0,\lambda)=0,\quad C_1'(0,\lambda)+C_2(0,\lambda)=\psi(0,\lambda)\varphi(0,\lambda)+C_2(0,\lambda)=C_2(0,\lambda)=0.$$

De esta manera,

$$C_1(t)=\int_{t_0}^{t}\psi(\tau,\lambda)w(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau,\quad C_2(t)=\int_{t_0}^{t}-w(\tau)\varphi^2(\tau,\lambda)d\tau.$$

Por tanto, sustituyendo en la expresión de u, se llega a

$$u(t,\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t,\lambda) = \int_0^t [\varphi(t,\lambda)\psi(t,\lambda) - \varphi(\tau,\lambda)\psi(t,\lambda)]\, w(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau.$$

Evaluando en $t = 1$,

$$u(1,\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(1,\lambda) = \int_0^1 [\varphi(1,\lambda)\psi(1,\lambda) - \varphi(\tau,\lambda)\psi(1,\lambda)]\, w(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau. \tag{4.41}$$

De forma similar, como ψ es solución de (4.22),

$$(p\psi')' + (\lambda w - q)\psi = 0,$$

entonces

$$v(t,\lambda) = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t,\lambda) \quad \text{satisface} \quad (pv')' + (\lambda w - q)v = -w\psi.$$

Razonando como anteriormente,

$$v(t,\lambda) = C_1(t,\lambda)\varphi(t,\lambda) + C_2(t,\lambda)\psi(t,\lambda).$$

$$v'(t,\lambda) = C_1(t,\lambda)\varphi'(t,\lambda) + C_2(t,\lambda)\psi'(t,\lambda) + C_1'(t,\lambda)\varphi(t,\lambda) + C_2'(t,\lambda)\psi(t,\lambda),$$

y como $C_1' = w\psi^2$, $C_2 = -w\varphi\psi$, entonces

$$C_1'(t,\lambda)\varphi(t,\lambda) + C_2'(t,\lambda)\psi(t,\lambda) = 0,$$

por lo que

$$v'(t,\lambda) = C_1(t,\lambda)\varphi'(t,\lambda) + C_2(t,\lambda)\psi'(t,\lambda)$$

Sustituyendo en la expresión para v,

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}(1,\lambda) = \int_0^1 [\varphi'(1,\lambda)\psi(1,\lambda) - \varphi(\tau,\lambda)\psi'(1,\lambda)]\, w(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau.$$

Puesto que por la definición (4.34), $f(\lambda) = \varphi(1,\lambda) + \psi'(1,\lambda)$, derivando respecto de λ:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(1,\lambda) + \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}(1,\lambda). \tag{4.42}$$

Agrupando los términos de ambas integrales (sin indicar λ de forma explícita),

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = \int_0^1 \left[\psi^2(\tau)\varphi'(1) + \psi(\tau)\varphi(\tau)(\varphi(1) - \psi'(1)) - \varphi^2(\tau)\psi(1)\right] w(\tau)d\tau. \tag{4.43}$$

La expresión (4.43) puede verse como

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = \int_0^1 \left[ax^2 + bx + cy^2\right] w(\tau)d\tau,$$

donde

$$a = \varphi'(1), \quad b = (\varphi(1) - \psi'(1)), \quad c = -\psi(1), \quad x = \psi(\tau), \quad y = \varphi(\tau).$$

Como $ax^2+bx+cy^2$ es una forma cuadrática, será definida positiva o definida negativa si se verifica que $b^2-4ac \leq 0$, es decir:

$$(\varphi(1)-\psi'(1))^2-4\varphi'(1)(-\psi(1)) = \varphi(1)^2+\psi'(1)^2-2\varphi(1)+4\varphi'(1)\psi(1) \leq 0.$$

Sumando y restando términos convenientemente,

$$\varphi(1)^2+\psi'(1)^2-2\varphi(1)+4\varphi'(1)\psi(1)+4\varphi(1)\psi'(1)-4\varphi(1)\psi'(1) \leq 0$$

$$(\varphi(1)+\psi'(1))^2 \leq 4(\varphi(1)\psi'(1)-\varphi'(1)\psi(1)).$$

Como se ha visto al inicio de la demostración, por las condiciones iniciales, $\psi(1)=0$, y como consecuencia de (4.39), $\varphi(1)\psi'(1)=1$. Luego,

$$[\varphi(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)]^2 = [f(\lambda)]^2 \leq 4.$$

De esta forma, para que el corchete en (4.43) tenga signo fijo, tiene que suceder que $-2 \leq f(\lambda) \leq 2$. En el caso de que se de alguna de las igualdades, $f(\lambda)=-2$ o $f(\lambda)=2$, entonces dicho corchete es un cuadrado perfecto (a excepción de un posible factor -1), y, al no cambiar de signo, implica que $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ no se anula a no ser que en (4.43),

$$\psi^2(\tau)\varphi'(1)+\psi(\tau)\varphi(\tau)(\varphi(1)-\psi'(1))-\varphi^2\psi(1)=0, \forall \tau \in [0,1], \tag{4.44}$$

que solo ocurre si todos los coeficientes se anulan (ya que $\psi(\tau)$ y $\varphi(\tau)$ son independientes), lo cual junto con la condición (4.39), implica:

a) $\varphi(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)=1,\ \ \psi(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=0$ si $f(\lambda)=2$.

b) $\varphi(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)=-1,\ \ \psi(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=0$ si $f(\lambda)=-2$.

Esto puede verse como sigue:

a) Para que (4.22) cumpla las condiciones de contorno (4.30) es necesario y suficiente que existan constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, no ambas nulas, tal que la solución $x=C_1\varphi+C_2\psi$ (es solución por ser combinación lineal de soluciones) satisfaga (4.30). En tal caso:

- $x(0)=x(1)$.

  $$C_1\varphi(0,\lambda)+C_2\psi(0,\lambda)=C_1\varphi(1,\lambda)+C_2\psi(1,\lambda) \Rightarrow C_1[\varphi(1,\lambda)-1]+C_2\psi(1,\lambda)=0.$$

- $x'(0)=x'(1)$.

  Teniendo en cuenta $(C_1\varphi+C_2\psi)'=C_1\varphi'+C_2\psi'$,

  $$C_1\varphi'(0,\lambda)+C_2\psi'(0,\lambda)=C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2\psi'(1,\lambda) \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2[\psi'(1,\lambda)-1]=0.$$

Es decir, deben cumplirse:

$$C_1[\varphi(1,\lambda)-1]+C_2\psi(1,\lambda)=0, \quad C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2[\psi'(1,\lambda)-1]=0. \tag{4.45}$$

Por lo que para que se verifique que dos soluciones independientes, φ y ψ, satisfagan (4.30) (sin que ambas constantes sean nulas), es necesario y suficiente que:

$$\varphi(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)=1, \quad \psi(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=0. \tag{4.46}$$

Para que (4.45) no tenga solo solución trivial (y por tanto se determinen los autovalores), una condición necesaria y suficiente es que el determinante de los coeficientes se anule,

$$\varphi(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)-\varphi(1,\lambda)-\psi'(1,\lambda)+1-\varphi'(1,\lambda)\psi(1,\lambda)=0,$$

esto es, teniendo en cuenta las condiciones (4.39) y la definición (4.34),

$$f(\lambda)=\varphi(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)=2. \tag{4.47}$$

Los valores de λ para los cuales se verifica que $f(\lambda)=2$ son los autovalores para (4.30). Nótese que si no se cumple (4.46), entonces no existen dos autofunciones independientes asociadas a (4.30), por lo que la función propia correspondiente a λ es única y el valor propio es simple.

b) De forma análoga se trabaja con la condición (4.31). Para que se cumplan las condiciones de contorno (4.31) es necesario y suficiente que existan constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, no ambas nulas, tal que la solución $x=C_1\varphi+C_2\psi$ satisfaga (4.31).

- $x(0)=-x(1)$.

$$C_1\varphi(0,\lambda)+C_2\psi(0,\lambda)=-[C_1\varphi(1,\lambda)+C_2\psi(1,\lambda)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1[\varphi(1,\lambda)+1]+C_2\psi(1,\lambda)=0.$$

- $x'(0)=-x'(1)$.

$$C_1\varphi'(0,\lambda)+C_2\psi'(0,\lambda)=-[C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2\psi'(1,\lambda)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2[\psi'(1,\lambda)+1]=0.$$

Es decir, deben verificarse

$$C_1[\varphi(1,\lambda)+1]+C_2\psi(1,\lambda)=0, \quad C_1\varphi'(1,\lambda)+C_2[\psi'(1,\lambda)+1]=0. \tag{4.48}$$

Por lo que para que se cumpla que dos soluciones independientes de (4.31), φ y ψ, es necesario y suficiente que

$$\varphi(1,\lambda)=\psi'(1,\lambda)=-1, \quad \psi(1,\lambda)=\varphi'(1,\lambda)=0. \tag{4.49}$$

Para que (4.48) no tenga solución trivial, es necesario y suficiente que el determinante de los coeficientes se anule,

$$(\varphi(1,\lambda)(\psi'(1,\lambda)+1)-\psi(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)=\varphi(1,\lambda)\psi'(1,\lambda)+\varphi(1,\lambda)+$$
$$+\psi'(1,\lambda)+1-\psi(1,\lambda)\varphi'(1,\lambda)=\varphi(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)+2=0,$$

esto es, de acuerdo a (4.39) y (4.34),

$$f(\lambda)=\varphi(1,\lambda)+\psi'(1,\lambda)=-2. \tag{4.50}$$

Los valores de λ para los cuales verifica que $f(\lambda)=-2$ son los autovalores para (4.31). Si no se satisface (4.49), el autovalor λ es simple.

Además, puesto que la autofunción correspondiente es única para (4.30) o (4.31) respectivamente, se deduce que cuando $f = 2$ o $f = -2$, entonces $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda = 0$ si, y solo si, el autovalor no es simple (ya que admite dos soluciones independientes).

Si $\lambda < \mu_0$ o $\mu_i < \lambda < \mu_{i+1}$, entonces $\psi(1,\lambda) \neq 0$ (puesto que ψ es solución de (4.22) y sólo se anula en 1 en sus autovalores, μ_i). De esta forma, no puede ocurrir que se verifique la condición (4.46) o (4.49) y así, λ es simple. Por tanto, en tales casos, cuando $f = 2$ o $f = -2$, (4.44) es de signo constante (el mismo que el de $-\psi(1,\lambda)$) y no trivial. Así, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda \neq 0$ y tiene el mismo signo que $-\psi(1,\lambda)$. Por tanto, se prueba (4.36), ya que por lo visto del signo, sabemos que $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ va oscilando con i.

En relación al segundo y al cuarto apartado del teorema, se deducen de lo desarrollado anteriormente. Si $f(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda \neq 0$, entonces no se satisface (4.46) y el autovalor μ_{2i+1} es simple al tener una única autofunción asociada. De manera similar, si $f(\mu_{2i}) = -2$ y $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda \neq 0$, no se cumple (4.49) y μ_{2i} es simple.

Prosigamos con el siguiente apartado del teorema. Supongamos que $f(\mu_{2i+1}) = 2$ y $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda = 0$. Entonces, se satisface (4.46):

$$\varphi(1,\mu_{2i+1}) = \psi'(1,\mu_{2i+1}) = 1, \qquad \varphi'(1,\mu_{2i+1}) = \psi(1,\mu_{2i+1}) = 0. \tag{4.51}$$

Denotemos

$$\varphi_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(1,\lambda), \qquad \psi_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(1,\lambda), \qquad \varphi'_\lambda = \frac{\partial\varphi'}{\partial\lambda}(1,\lambda), \qquad \psi'_\lambda = \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda}(1,\lambda).$$

Derivando $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$ respecto de λ se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2} = \varphi_{\lambda\lambda} + \psi'_{\lambda\lambda}. \tag{4.52}$$

De la expresión (4.39), con $t = 1$, se tiene $\varphi(1,\lambda)\psi'(1,\lambda) - \varphi'(1,\lambda)\psi(1,\lambda) = 1$. Derivando respecto de λ, como hay regularidad suficiente, puede utilizarse que $\frac{\partial}{\partial\lambda\partial t} = \frac{\partial}{\partial t\partial\lambda}$, luego

$$\psi_\lambda\varphi' + \psi\varphi'_\lambda - \psi'_\lambda\varphi - \psi'\varphi_\lambda = 0. \tag{4.53}$$

Aplicando a (4.53) las condiciones impuestas de (4.51),

$$\psi'(1,\mu_{2i+1}) = -\varphi_\lambda(1,\mu_{2i+1}). \tag{4.54}$$

Derivando de nuevo respecto de λ la expresión (4.53),

$$\psi_{\lambda\lambda}\varphi' + \psi_\lambda\varphi'_\lambda + \psi_\lambda\varphi'_\lambda + \psi\varphi'_{\lambda\lambda} - \psi'_{\lambda\lambda}\varphi - \psi'_\lambda\varphi_\lambda - \psi'_\lambda\varphi_\lambda - \psi'\varphi_{\lambda\lambda} = 0.$$

Usando (4.51),

$$2\psi_\lambda\varphi'_\lambda - \psi'_{\lambda\lambda} - 2\psi'_\lambda\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda\lambda} = 0,$$

y por (4.54), se obtiene

$$2\psi_\lambda\varphi'_\lambda + 2\varphi_\lambda^2 - \psi'_{\lambda\lambda} - \varphi_{\lambda\lambda} = 0 \qquad \text{para} \qquad \lambda = \mu_{2i+1}.$$

Despejando de lo anterior y sustituyendo en (4.52),

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2} = 2\left[\varphi_\lambda^2(1,\mu_{2i+1}) + \psi_\lambda(1,\mu_{2i+1})\varphi'_\lambda(1,\mu_{2i+1})\right]. \tag{4.55}$$

Aplicando las condiciones (4.51) a (4.41), se obtiene

$$\varphi_\lambda(1,\mu_{2i+1}) = \int_0^1 \psi(\tau,\mu_{2i+1})\varphi(\tau,\mu_{2i+1})w(\tau)d\tau. \tag{4.56}$$

Siguiendo un razonamiento similar, pueden obtenerse las expresiones siguientes:

$$\psi_\lambda(1,\mu_{2i+1}) = \int_0^1 \psi^2(s,\mu_{2i+1})w(s)ds, \quad \varphi'_\lambda(1,\mu_{2i+1}) = -\int_0^1 \varphi^2(s,\mu_{2i+1})w(s)ds.$$

Por el hecho de ser φ y ψ soluciones independientes, aplicando la *Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz* para integrales con pesos en (4.56), se tiene

$$\left(\int_0^1 \psi(s,\mu_{2i+1})\varphi(s,\mu_{2i+1})w(s)ds\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \psi^2(s,\mu_{2i+1})w(s)ds\right)\cdot\left(\int_0^1 \varphi^2(s,\mu_{2i+1})w(s)ds\right),$$

lo cual es equivalente a

$$\varphi_\lambda^2 \leq \psi_\lambda(-\varphi'_\lambda) \Leftrightarrow \varphi_\lambda^2 - \psi_\lambda(-\varphi'_\lambda) \leq 0 \Leftrightarrow \varphi_\lambda^2 + \psi_\lambda\varphi'_\lambda \leq 0 \quad \text{para} \quad \lambda = \mu_{2i+1}.$$

Es decir, en (4.55) se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\lambda^2} = 2\left[\varphi_\lambda^2(1,\mu_{2i+1}) + \psi_\lambda(1,\mu_{2i+1})\varphi'_\lambda(1,\mu_{2i+1})\right] < 0,$$

que prueba (4.37). De forma análoga se razona para $f(\mu_{2i}) = -2$ y para obtener (4.38).

■

En estas condiciones, podemos enunciar y demostrar el teorema fundamental de la sección:

Teorema 4.4. *Los autovalores para (4.22) con la condición (4.30), λ_i, $i \geq 0$, y para (4.22) con la condición (4.31), $\tilde{\lambda}_i$, $i \geq 1$, forman sucesiones verificando*

$$-\infty < \lambda_0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \tilde{\lambda}_3 \leq \tilde{\lambda}_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots \tag{4.57}$$

de manera que:

1. *Para $\lambda = \lambda_0$ existe una única autofunción φ_0.*

2. *Si $\lambda_{2i+1} < \lambda_{2i+2}$ para algún $i \geq 0$, entonces existe una única autofunción φ_{2i+1} en $\lambda = \lambda_{2i+1}$ y una única autofunción φ_{2i+2} en $\lambda = \lambda_{2i+2}$. Si $\lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$, entonces hay 2 autofunciones independientes $\varphi_{2i+1}, \varphi_{2i+2}$ en $\lambda = \lambda_{2i+1} = \lambda_{2i+2}$*

3. *Si $\tilde{\lambda}_{2i+1} < \tilde{\lambda}_{2i+2}$ para algún $i \geq 0$, entonces existe una única autofunción $\tilde{\varphi}_{2i+1}$ en $\lambda = \lambda_{2i+1}$ y una única autofunción $\tilde{\varphi}_{2i+2}$ en $\lambda = \tilde{\lambda}_{2i+2}$. Si $\tilde{\lambda}_{2i+1} = \tilde{\lambda}_{2i+2}$, entonces hay 2 autofunciones independientes $\tilde{\varphi}_{2i+1}, \tilde{\varphi}_{2i+2}$ en $\lambda = \tilde{\lambda}_{2i+1} = \tilde{\lambda}_{2i+2}$*

4. *φ_0 no tiene ceros en $[0,1]$.*

5. *φ_{2i+1} y φ_{2i+2}, $i \geq 0$ tienen exactamente $2i+2$ ceros en $[0,1)$.*

6. *$\tilde{\varphi}_{2i+1}$ y $\tilde{\varphi}_{2i+2}$, $i \geq 1$ tienen exactamente $2i+1$ ceros en $[0,1)$.*

Demostración:

Sean φ y ψ soluciones de (4.22) tal que se satisfacen las condiciones (4.33). Que se cumplan las condiciones de contorno de (4.30), según lo desarrollado en la prueba del *Lema* 4.1 es equivalente a que $f(\lambda)=2$. De forma análoga se justifica para (4.31), que es equivalente a que $f(\lambda)=-2$. Una consecuencia inmediata del *Lema* 4.1 es la existencia de sucesiones $\{\lambda_i\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ que satisfacen la expresión (4.57), y la de sus autofunciones asociadas. Además, de (4.36) se deduce que, de hecho, se verifica la siguiente relación:

$$\lambda_0<\tilde{\lambda}_1\leq\mu_0\leq\tilde{\lambda}_2<\lambda_1\leq\mu_1\leq\lambda_2<\tilde{\lambda}_3\leq\mu_2\leq\tilde{\lambda}_4<\lambda_3\leq\cdots \tag{4.58}$$

Los tres primeros apartados del teorema se siguen también a causa de (4.57). Cuando la desigualdad es estricta, los autovalores son simples y la autofunción asociada es única. En cambio, si se da la igualdad, el autovalor es doble y existen dos autofunciones independientes asociadas a éste. Faltaría probar que las autofunciones tienen un número específico de ceros. Se va a hacer uso del *Lema* 4.1, del *Teorema* 4.1 y del *Teorema* 4.3.

En la condición (4.30), de $x(0)=x(1)$ se sigue que las autofunciones φ_i tienen un número par de ceros en $[0,1)$, pues en otro caso cambiaría de signo en los extremos, que es lo que ocurre en (4.31) para determinadas autofunciones $\tilde{\varphi}_i$, $x(0)=-x(1)$. Puede observarse un ejemplo en la *Figura* 4.1.

Dadas $\psi(t,\mu_i)$ las autofunciones correspondientes a la condición (4.32), por el *Teorema* 4.3, puede afirmarse que estas tienen i ceros en $(0,1)$. Entonces:

- Como $\lambda_0<\mu_0$, φ_0 no puede tener 2 ceros en $[0,1)$, y puesto que φ_i tiene un número par de ceros, se sigue que dicho número debe ser cero. Asimismo, para $i\geq 0$, $\mu_{2i}<\lambda_{2i+1}\leq\lambda_{2i+2}<\mu_{2i+2}$, y por el hecho de que sus autofunciones tienen un número par de ceros, se deduce que φ_{2i+1} y φ_{2i+2} deben tener en $[0,1)$ más de $2i+1$ ceros y menos de $2i+4$. Por tanto, tienen justamente $2i+2$ ceros.

- Puesto que $\tilde{\lambda}_1\leq\tilde{\lambda}_2<\mu_1$, las autofunciones correspondientes a $\tilde{\lambda}_1$ y $\tilde{\lambda}_2$ en $[0,1)$, $\tilde{\varphi}_1$ y $\tilde{\varphi}_2$, tienen menos de 3 ceros. Por la condición (4.31) se deduce que tiene como mínimo un cero. Al ser el número de ceros impar, tienen exactamente un cero. Si se consideran $\tilde{\varphi}_{2i+1}$, $\tilde{\varphi}_{2i+2}$ para $i\geq 1$, como $\mu_{2i-1}<\tilde{\lambda}_{2i+1}\leq\tilde{\lambda}_{2i+2}<\mu_{2i+1}$, entonces las autofunciones tienen que tener más de $2i$ ceros y menos de $2i+3$. Ya que el número de ceros es impar, exactamente poseen $2i+1$ ceros en $[0,1)$.

■

5 Conclusiones

En este Trabajo Fin de Grado hemos estudiado desde un enfoque teórico y fundamental los problemas de valores en la frontera. Podemos resumir los resultados probados a lo largo del mismo, lo que además refleja que han sido cumplidos los objetivos propuestos en el inicio, en los siguientes puntos:

- Los autovalores siempre existen para problemas autoadjuntos.
- Los autovalores son reales y forman un conjunto numerable acotado inferiormente, pero no superiormente. Las diferentes funciones propias asociadas a cada valor propio son ortogonales.
- Existencia de una expresión explícita de la solución de los problemas autoadjuntos no homogéneos mediante una función de Green.
- Las autofunciones asociadas a un problema autoadjunto forman un conjunto completo en el espacio $\mathcal{L}^2(a,b)$.
- Los ceros de dos soluciones reales linealmente independientes de una ecuación autoadjunta de segundo orden están separados unos de otros.
- Existe una sucesión infinita monótona creciente de autovalores para una ecuación del tipo Sturm-Liouville, $\{\lambda_k\}$, que verifica las condiciones de contorno regulares. Además, la autofunción asociada al autovalor λ_k es única y posee k ceros en (a,b).
- Existe una sucesión infinita monótona creciente de autovalores para una ecuación del tipo Sturm-Liouville, $\{\lambda_k\}$, que verifica las condiciones de contorno periódicas. Las autofunciones son únicas cuando los autovalores son distintos. Si los valores propios coinciden, existen dos funciones propias independientes. El número de ceros de las autofunciones de dos autovalores consecutivos coinciden, y éste puede ser $2k+1$ o $2k+2$.

Por otro lado, a modo de observación personal, comentar que al comienzo tuve dificultades para la comprensión de algunos aspectos manejados en la fuente principal utilizada [2], al no estar acostumbrada a la terminología, nomenclatura y rigurosidad empleada en el mismo, ya que se trata de un escrito en inglés muy formal y específico. En relación a las demostraciones tratadas, este texto me ha dado un punto de vista diferente al que habituaba tratar en el grado, más directo y concreto. Sin embargo, poco a poco me he ido ajustando a la línea que se sigue en él, y con ayuda de mi tutor, considero que he sido capaz de adaptarlas con claridad para lectores con conocimientos básicos en el campo, dándole un toque personal y sin detrimento de rigor matemático. En concreto, realizar este trabajo me ha permitido poner en práctica una gran cantidad de conocimientos adquiridos dentro de la rama de *Análisis Matemático* en el transcurso del grado, así como desarrollar muchos otros nuevos e interesantes. Además, estimo que a lo largo de este camino he alcanzado una mayor madurez matemática. Creo que una buena forma de concluir este Trabajo Fin de Grado y por tanto a mi aventura como estudiante del Grado de Matemáticas, es con la siguiente cita:

"Nunca olvidamos lo que aprendemos con placer." - Alfred Mercier

Bibliografía

[1] C.A. Swanson, *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Academic Press, 1968.

[2] Earl A. Coddington, Norman Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw Hill Education, 1955.

[3] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, 1989.

[4] G.F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, Mc Graw Hill, 1993.

[5] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2000.