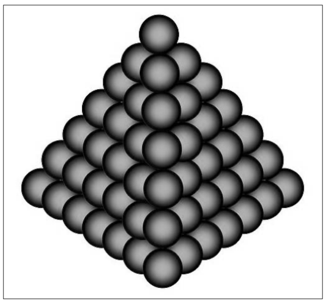
Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL

Volumen XIV. Número 3 — 29 de abril de 2021

«Empaquetando» a los estudiantes en las aulas



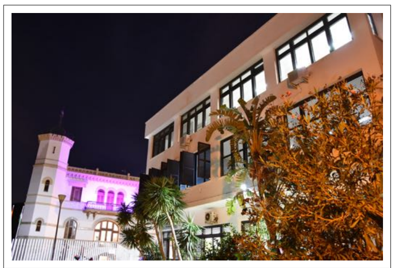
Empaquetamiento piramidal

La situación sanitaria que nos ha tocado vivir ha modificado radicalmente nuestra vida diaria, esencialmente en nuestra forma de relacionarnos. Extremar la higiene y mantener la «distancia social» son dos de las medidas fundamentales para detener la propagación del virus.

En este artículo, los profesores de la *Universidad de Sevilla* Renato Álvarez Nodarse y Niurka Rodríguez Quintero nos presentan un modelo matemático que permite ubicar de forma óptima a los estudiantes en las aulas, de forma que se pueda mantener la distancia de seguridad recomendada por las autoridades sanitarias.

(Artículo completo en la página 12)

Las matemáticas en la formación permanente



Instalaciones del IPEP en Almería

La enseñanza de las matemáticas, igual que nuestra sociedad, ha experimentado una gran evolución a lo largo de la historia. No se enseñan los conceptos matemáticos en la actualidad de la misma forma que se hacía hace 10 o 15 años.

La evolución ha sido, si cabe, más radical en situaciones como las que se presenta en este artículo. Se trata de la experiencia docente en matemáticas en el *Instituto Provincial de Educación Permanente* (IPEP) en Almería, en el que el alumnado tiene unas características muy específicas que requiere un esfuerzo especial por parte de los docentes para motivarles en la asignatura de Matemáticas.

(Artículo completo en la página 6)

Editorial: Cambiamos para que nada cambie

La cita «lampedusiana» con la que titulamos nuestro editorial es una de esas paradojas que a las personas que nos dedicamos a las matemáticas tanto nos gustan. A primera vista, esta afirmación parece una contradicción pero, en nuestro caso, no lo es tanto.

Con este número completamos los catorce volúmenes —catorce años, ni más ni menos—, lo que hace un total de 42 boletines. Después del año tan complicado que hemos pasado a todos los niveles, estamos muy orgullosos al haber conseguido seguir publicando el Boletín con aportaciones de excelente calidad, cosa que no hubiera sido posible si no hubiéramos contado con la colaboración de los responsables de las secciones, autores y estudiantes, así como del apoyo de nuestros lectores. A todos queremos expresar nuestro agradecimiento.

Por otra parte, parafraseando a los personajes del *Gatopardo*, cambiamos nuestra página web para modernizarla y hacerla más accesible a nuestros lectores con vistas a que en el futuro podamos incluir más mejoras.

Nos despedimos por este curso 2020/21 con la esperanza de que el siguiente se pueda desarrollar con «normalidad» porque las vacunas y la sensatez de la ciudadanía hayan surtido efecto.

Resumen

Correo electrónico:
bmatema@ual.es

ISSN 1988-5318
Depósito Legal: AL 522-2011

Actividades matemáticas

LVII Olimpiada Matemática Española

El pasado 20 de marzo la *Universidad de Almería* se convirtió en la sede de la *III Olimpiada de Matemáticas de Andalucía*, en la que participaron los tres mejores clasificados en las fases locales de cada una de las ocho provincias andaluzas, junto con otros estudiantes excelentes que participaron fuera de concurso.

En esta ocasión, sólo pudieron realizar la prueba de manera presencial en el campus de la Universidad de Almería los tres ganadores de la fase local de nuestra provincia: Pedro Daureo Bretones (*Colegio Compañía de María*), Paula Gallego Melero (*IES Sabinar*) y Juan Francisco Cuevas Rodríguez (*IES Campos de Níjar*).

De entre los 24 participantes, los 12 mejores clasificados participarán en la Fase Nacional de la Olimpiada, que debido a las restricciones sanitarias se celebrará también online. En representación de Almería, se clasificaron Pedro Daureo y Juan Francisco Cuevas, a los que le deseamos mucha suerte en la fase nacional.

La representación almeriense tuvo muy buenos resultados ya que fue la segunda con mayor número de representantes (2) empatada con Cádiz y después de Sevilla (3), el resto de provincias andaluzas obtuvieron 1 representante. Seguro que junto a los méritos de estos excelentes estudiantes influye la preparación dada para estas Olimpiadas en la *Universidad de Almería*.

Los estudiantes durante la prueba

Deseamos que hayan disfrutado de la experiencia y que alcancen una buena clasificación.

Día internacional de las matemáticas y entrega de premios del Boletín

Bajo el lema *«Matemáticas para un mundo mejor»*, el pasado 14 de marzo se conmemoraba el *Día Internacional de las Matemáticas*, proclamado por la UNESCO en noviembre de 2019.

La Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería* celebró este día con una conferencia online titulada *Los modelos matemáticos en nuestra vida*, impartida por Juan José Moreno Balcázar y dirigida a los estudiantes del *IES El Palmeral* de Vera.

Los estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer cómo los modelos matemáticos permiten comprender mejor la realidad y explicar de forma científica muchos procesos naturales, resaltándose la aplicación práctica en su vida cotidiana de los conceptos matemáticos que están estudiando.

Víctor Hasu García junto a su profesor y la directora del centro

Este acto coincidió con la entrega del premio a uno de los dos ganadores del Boletín, Víctor Hasu García.

El otro ganador del premio fue Ismael Vergara García, del *IES Las Marinas* de Roquetas de Mar. La entrega del premio se realizó de forma virtual y se hizo una actividad dentro del proyecto *Stat Wars: El imperio de los datos*, que consistió en una charla sobre la Estadística y unos juegos en los que los estudiantes pudieron ganar camisetas y bolsas.

Ismael Vergara García junto a su profesor

Viernes científicos de la UAL

Tras un año de obligado parón por la incidencia del coronavirus, la Facultad de Ciencias Experimentales de la *Universidad de Almería* ha retomado con fuerza la organización de los *Viernes Científicos*, alcanzando su nonagésima edición desde su nacimiento en 2009.

Matemáticas y Covid-19

ISSN 1988-5318

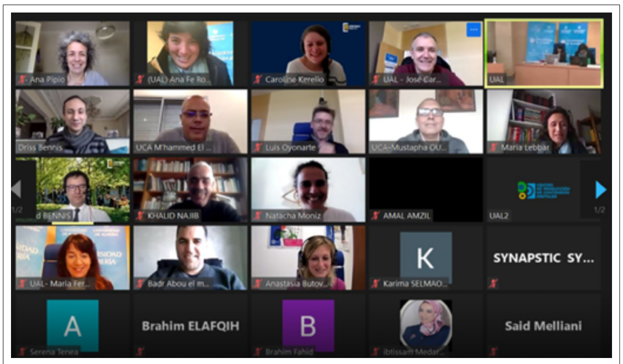
Con formato online, se recupera esta señera actividad de divulgación científica que albergará interesantes ponencias para todas las titulaciones de la facultad.

En relación con las matemáticas, el pasado 5 de marzo pudimos disfrutar de la conferencia *Matemáticas y Covid-19* de la mano de Renato Álvarez Nodarse, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Sevilla, en la que explicó cómo las matemáticas ayudan a entender distintos aspectos sobre la pandemia del Covid-19 y en la que enfatizó que un análisis correcto de los datos de contagios puede ayudar a tomar las decisiones más acertadas.

La charla completa se encuentra en el canal YouTube [1] de la Facultad de Ciencias Experimentales.

Proyecto MathICs

Tras ser presentado el pasado 10 de febrero, ya se ha puesto en marcha la coordinación del proyecto internacional *MathICs*. Se trata de un proyecto *Erasmus+KA2*, liderado por la *Universidad de Almería*, que tiene como finalidad el fortalecer el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas en Marruecos, modernizando así el sistema de enseñanza de esta materia en el país vecino y promoviendo un mayor interés de los estudiantes por esta disciplina.



Un momento de las sesiones celebradas

Su lanzamiento se ha llevado a cabo en dos sesiones de un intenso *kick off meeting* virtual desarrollado los días 8 y 9 de marzo, con la participación de más de 30 personas.

Este proyecto ha sido uno de los 164 seleccionados por la Comisión Europea de entre las 1005 solicitudes presentadas. Solo se han financiado 10 propuestas lideradas por universidades españolas. Para la *Universidad de Almería*, este viene a ser el primer proyecto de *Fortalecimiento de Capacidades de Erasmus+ (CBHE)* que lidera. Nuestra enhorabuena a su coordinador Luis Oyonarte Alcalá y a todos los integrantes de este proyecto.

Noche Europea de los Investigadores

La propuesta de Andalucía, coordinada por la *Fundación Descubre*, para celebrar *La Noche de los Investigadores* (European Researchers' Night) ha recibido nuevamente la aprobación por parte de la Comisión Europea para este año 2021.

La actividad se celebrará el próximo 24 de septiembre y la *Universidad de Almería* volverá a participar en este evento que viene liderando en las últimas ediciones tanto por número de actividades como de participantes.

Las actividades organizadas tendrán una doble dimensión, con parte de la programación presencial y parte en formato online, para facilitar una amplia oferta de actividades a todo tipo de públicos, al tiempo que se garantizan las medidas de seguridad.

I Feria de la Ciencia

La *Universidad de Almería* se ha incorporado este año a la *Red de Ferias de la Ciencia y la Innovación en Andalucía*, celebrando su *I Feria de la Ciencia*, que coordina la *Fundación Descubre*.

Se trata de una nueva actividad de divulgación científica dirigida especialmente a estudiantes de centros educativos de cualquier nivel y que tiene como objetivo el intercambio, la divulgación y la comunicación de conocimientos científicos, técnicos y de medio ambiente.

El evento se desarrolló en formato virtual durante los días 22 y 23 de abril. En la modalidad de *Proyectos educativos y experiencias de aula del alumnado de los centros educativos*, se desarrollaron los proyectos de matemáticas:

- Stat Wars: El imperio de los datos.
- Un acercamiento a las epidemias desde las matemáticas.

El primero de ellos, propuesto por Isabel M. Ortiz Rodríguez, fue desarrollado por alumnado del *IPEP de Almería* bajo la supervisión del profesor Francisco Ros; y el segundo, propuesto por Juan F. Mañas Mañas y Juan J. Moreno Balcázar, por alumnado del *IES Santa María del Águila* bajo la supervisión del profesor David Crespo Casteleiro. Para más detalles sobre esta actividad se puede consultar *almeria.feriasvirtualesdelaciencia.es/entrada*.

Cursos de Experto en Ciencia de Datos y Ciberseguridad

El *Centro de Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa* (CDTIME) ha organizado, a través del *Centro de Formación Continua* de la *Universidad de Almería* dos cursos de experto, uno en *Ciencia de Datos* y otro en *Ciberseguridad*, con el objeto de dotar de las competencias necesarias para ejercer unas de las profesiones con mayor demanda en la actualidad.

Ambos cursos constan de 25 créditos ECTS (187,5 horas) en un formato íntegramente online y con un enfoque eminentemente práctico. Esta actividad formativa arrancó

[1] *https://www.youtube.com/channel/UCt7Sni6-3LLCsrWt5PGF6kQ*.

ISSN 1988-5318

el pasado mes de marzo y se prolongará hasta el mes de diciembre.

XXII Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas

El próximo 26 de julio tendrá lugar la vigésimo segunda edición del *Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas* (ENEM). El evento, que este año tenía previsto celebrarse en Murcia, se realizará finalmente en formato online, estando aún pendiente por determinar la duración del mismo.

El ENEM es una actividad organizada por la *Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas* (ANEM) y supone un punto de encuentro entre estudiantes de grado, máster y doctorado, que se reúnen para ampliar su formación matemática mediante conferencias y talleres, así como para forjar amistades con sus compañeros y compañeras de estudios, promoviendo el intercambio de ideas y proyectos entre ellos.

Su primera edición se celebró en Granada en el año 2000 y, desde entonces, se ha celebrado anualmente en diversas ciudades españolas, reuniendo a estudiantes, profesores y apasionados de las matemáticas de todo el país.

Más información en *enem.anem.es/2021*.

Actividades de la SAEM Thales

La *SAEM Thales* organiza las siguientes actividades:

- *XXXVI Olimpiada Matemática.* El pasado 20 de marzo tuvo lugar la fase provincial de la Olimpiada Matemática organizada por la *SAEM Thales* para alumnos de 2.º de ESO.

  Los cinco primeros clasificados de cada provincia pasarán a la fase regional, que se llevará a cabo de forma virtual entre el 15 y el 23 de mayo. A su vez, los seis primeros clasificados en la fase regional podrán participar en la Olimpiada Nacional, que organiza la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* y que se celebrará el 26 de junio.

- *Desafío Thales 2021* y *III Olimpiada Matemática regional para Primaria.* El 16 de abril se celebró en formato online la fase provincial del *Desafío Thales 2021* dirigida al alumnado de 5.º y 6.º de Educación Primaria. Los seis primeros clasificados de cada provincia participarán en la Olimpiada Matemática regional, que tendrá lugar el próximo 8 de mayo de forma virtual.

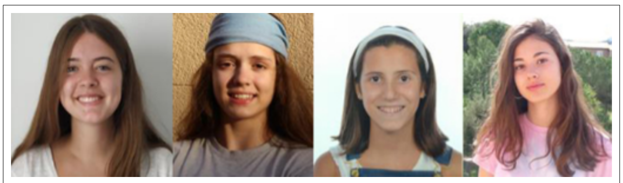
Más información en *thales.cica.es/almeria*.

Noticias matemáticas

Décima edición de la European Girls' Mathematical Olympiad

Del 9 al 15 de abril tuvo lugar la celebración de la décima edición de la *European Girls' Mathematical Olympiad* (EGMO).

Al igual que en la edición anterior, la situación sanitaria obligó a desarrollarla íntegramente en modalidad virtual, con lo que cada participante realizó las pruebas desde casa.



Paula, Jimena, Mencía y Raquel

La representación del equipo español corrió a cargo de Paula Esquerrà Giné (Barcelona), para la que era su segunda participación en una EGMO, Jimena Lorenzo Simón (Madrid), Mencía Díaz de Cerio Ruiz de Lobera (Logroño) y Raquel Trull Báguena (Girona), que fueron seleccionadas por su clasificación en las fases locales de la LVII Olimpiada Matemática Española RSME. No han obtenido medalla, pero deseamos que hayan disfrutado de la experiencia.

Más información en *egmo2021.atsu.edu.ge*.

Premio Abel 2021 para Lázlo Lovász y Avi Widgerson

La Academia Noruega de Ciencias y Letras ha otorgado el *Premio Abel* 2021 al matemático húngaro László Lovász (1948) y al israelí Avi Wigderson (1956) *«por sus contribuciones fundamentales a la ciencia computacional teórica y las matemáticas discretas, y su destacado papel para convertirlas en campos centrales de las matemáticas modernas»*.

Lászlo Lovász es miembro de la *Universidad Eötvös Loránd* (Hungría) y añade este galardón al *Premio Knuth*, al *Premio Wolf* en matemáticas y al *Premio Gödel*.

Lászlö Lovász (izquierda) y Avi Wigderson

Avi Wigderson es profesor del *Instituto de Estudios Avanzados de Princeton* (EE. UU.) y suma este reconocimiento al *Premio Nevanlinna*, al *Premio Gödel* y al

ISSN 1988-5318

Premio Knuth.

El *Premio Abel* fue creado el 1 de enero de 2002 para reconocer el trabajo de investigación sobresaliente en el campo de las matemáticas y conlleva una dotación económica de 7,5 millones de coronas noruegas (unos 750 000 euros). El premio será entregado el próximo 25 de mayo online debido a las restricciones por la pandemia.

Alicia Dickenstein, premio Internacional L'Oréal-UNESCO

Alicia Dickenstein (1955), Catedrática de Matemáticas de la *Universidad de Buenos Aires* ha sido premiada en los 23.º Premios Internacionales L'Oréal-UNESCO «La Mujer y la Ciencia» por su destacado trabajo en la vanguardia de la innovación matemática, explotando la geometría algebraica en el campo de la biología molecular. El premio está dotado con 100 000 euros.

Jezabel Curbelo, premio L'Oréal-UNESCO «For Women in Science»

Estos premios están destinados a proyectos desarrollados por investigadores menores de 40 años y dotados con 15 000 euros. Jezabel Curbelo (1987) trabaja en la Universitat Politècnica de Catalunya y en su proyecto analiza la evolución de los fluidos en la naturaleza a través de las ecuaciones que los modelan.

Marzo, mes de las Matemáticas

Este proyecto de divulgación de las Matemáticas se enmarca dentro de las actuaciones de la Red de Divulgación Matemáticas DiMa (*dima.icmat.es*), constituida en mayo de 2018.

Se han celebrado (y se siguen celebrando) una amplia variedad de conferencias online, que junto a otro material, están disponibles en la web *marzomates.webs.ull.es*.

Becas JAE Intro SOMdM

El próximo 15 de mayo se abrirá el plazo de la convocatoria *JAE Intro SOMdM* 2021, dirigida a estudiantes de grado o máster que tengan completados al menos el 50 % de los créditos.

El objetivo de la convocatoria *JAE Intro SOMdM* es que los alumnos se inicien en la actividad investigadora en alguno de los *Centros de Excelencia Severo Ochoa* o *Unidades de Excelencia María de Maeztu* del CSIC, en régimen de compatibilidad con sus estudios.

Estas ayudas están financiadas en su totalidad por el Programa Estatal de Fomento de la Investigación Científica y Técnica.

Más información en *jaeintro.csic.es/jae-somdm*.

Nos visitaron...

Habitualmente nos visitan investigadores de diferentes universidades nacionales e internacionales con las que los grupos de investigación de matemáticas de la UAL colaboran activamente en el desarrollo de sus actividades. Debido a la situación sanitaria que padecemos, las visitas presenciales se han restringido bastante.

Tuvimos el honor de tener entre nosotros a Michel Dubois-Violette, profesor investigador emérito de la *Universidad de Paris-Saclay* quien continuará su estancia con nosotros hasta la primera semana de mayo.

Preguntas frecuentes

Si deseo cursar el Grado en Matemáticas, ¿qué distingue esta titulación de la *Universidad de Almería* de titulaciones de Matemáticas en otras universidades?

El título de Grado en Matemáticas en la Universidad de Almería se estructura en ocho cuatrimestres de 30 créditos ECTS cada uno de ellos. Su plan de estudios (2019) se distribuye por tipo de materia en: 60 créditos ECTS básicos, 132 obligatorios, 30 optativos, 6 de prácticas externas y 12 correspondientes al trabajo fin de grado, conformando un total de 240 créditos ECTS.

La estructura del título se articula en 15 módulos (Matemáticas, Informática y teoría de la información, Física y astronomía, Análisis matemático, Estructuras algebraicas y matemática discreta, Geometría y topología, Ecuaciones diferenciales, Probabilidad y estadística, Métodos numéricos, Optimización y modelización, Ecuaciones en derivadas parciales y simulación numérica, Estadística aplicada, Prácticas externas, Trabajo de fin de grado, y Finanzas).

Es interesante destacar que uno de estos módulos (Finanzas) ofrece la oportunidad de cursar cinco asignaturas obligatorias del plan de estudios del Grado en Finanzas y Contabilidad de la UAL (dos de las asignaturas son de segundo curso, dos de tercer curso y una de cuarto curso). Estas asignaturas se cursarían junto con los estudiantes del citado grado.

Además, una distinción del Grado en Matemáticas en esta universidad respecto a otras titulaciones de Matemáticas de otras universidades es que se han establecido tres menciones en el Grado en Matemáticas de la UAL, según la optatividad escogida, de manera que orienten al estudiante según el itinerario profesional por el que desee continuar una vez termine sus estudios. Aun así, estas menciones no son obligatorias, es posible conseguir el grado sin obtener ninguna de ellas. A continuación, se indican las tres menciones que pueden alcanzarse en este grado y qué se requiere para su obtención:

1. **Ingeniería matemática**. Se debe haber aprobado o tener reconocidos los créditos correspondientes a las siguientes asignaturas: Álgebra aplicada en la teoría de la información, Astronomía, Simulación numérica y dos de las tres asignaturas del módulo de Estadística aplicada.
2. **Matemáticas fundamentales**. Se requiere haber aprobado o tener reconocidos los créditos correspondientes a las siguientes asignaturas: Álgebra y teoría de números, Fractales y caos, Geometría global de superficies, Matemática divulgativa y una asignatura de entre cinco posibles (Álgebra aplicada en la teoría de la información, Simulación numérica y las tres del módulo de Estadística aplicada).
3. **Matemáticas y finanzas**. Se debe haber aprobado o tener reconocidos los créditos correspondientes a cinco de las siete siguientes asignaturas: las cinco del módulo de Finanzas, Análisis de datos y Métodos estadísticos para big data.

No es necesario que la realización del trabajo fin de grado sea sobre un tema propio de la mención para la obtención de la misma, pero sí recomendable elegir un tema de trabajo (entre los ofertados) que afiance la mención que el estudiante ha escogido.

¿Por qué los graduados en Matemáticas están tan valorados en el mercado laboral?

Un matemático está entrenado en la resolución de problemas y posee una gran capacidad de adaptación y de aprender cosas nuevas, es capaz de modelizar fenómenos reales e intentar encontrar la mejor solución a diferentes problemas empresariales y de cualquier ámbito en nuestra sociedad.

Es por ello, que estos titulados tienen cabida además de en la docencia y en la investigación, en diferentes sectores como empresas financieras, informáticas, consultoras, administración pública, etc. Esto hace que los matemáticos estén muy valorados y su inserción en el mercado laboral sea rápida, como ha quedado reflejado en diferentes estudios a lo largo de los años.

ENSEÑANZA SECUNDARIA

Las matemáticas en el IPEP Almería

Un centro de educación permanente para adultos

Lola Rodríguez Martínez
IPEP de Almería (Almería)

En primer lugar y para que se pueda entender este artículo empezaré explicando lo que es la Educación de Adultos o Educación Permanente.

Instalaciones del IPEP (Almería)

El *IPEP de Almería* es un centro de segunda oportunidad para personas mayores de 18 años o de 16 que tengan un contrato de trabajo. Aquí pueden estudiar Secundaria de adultos (NI, NII) y Bachillerato en las modalidades de Ciencias, CCSS, Humanidades y Artes, también preparamos para la Prueba de Acceso a la Universidad para mayores de 25 años y la Prueba de acceso a Ciclos Formativos de Grado superior.

Entre nuestro alumnado hay 2 perfiles bien diferenciados, el adulto con más de 30 años con cargas familiares y trabajo que intenta mejorar sus condiciones laborales sacando el Título de Secundaria o Bachillerato y el joven de entre 19 y 25 años que viene de un fracaso en el sistema educativo ordinario y busca una segunda oportunidad.

Es de imaginar que entre todos ellos no hay grandes genios ni enamorados de las Matemáticas y sí personas que han sufrido problemas de adaptación y acoso que no les han permitido terminar sus estudios. Sobre todo nos encontramos con personas de muy baja autoestima, que necesitan un refuerzo positivo para creer en ellos mismos y poder alcanzar sus metas.

A diferencia de otros centros que tienen una matrícula segura, nosotros debemos ganarnos a nuestro alumnado día a día y encontrar las herramientas suficientes para animarlos a continuar ya que muchos de ellos se quedan en el camino. El principal problema que nos encontramos en los centros de adultos es el absentismo.

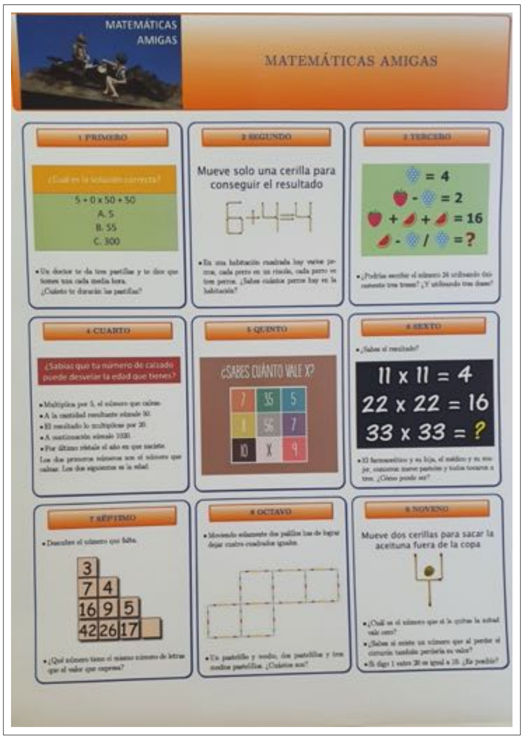
Por todo esto, desde el Departamento de Matemáticas hemos intentado no basar nuestra enseñanza estrictamente en contenidos, ya que tenemos claro que si no introducimos elementos motivadores las clases se nos quedan vacías. Por otro lado, el Departamento lucha porque el centro tenga entidad como tal y, aparte de lo meramente académico, queremos introducir otras actividades.

 ISSN 1988-5318

A modo ilustrativo, enumeraré algunas que se están realizando en el presente curso, a pesar de los problemas derivados de la COVID-19 :

- **Concurso de problemas de ingenio**: voy a explicar un poco los antecedentes que nos llevaron al Departamento a plantear este concurso que está teniendo mucha aceptación.

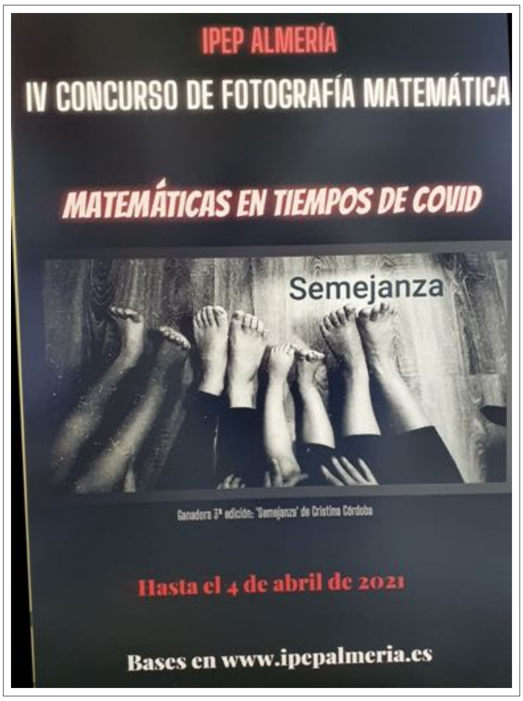
  Desde hace tres años participo, junto con otro compañero de Matemáticas que no pertenece al centro y dos compañeras de la *Universidad de Almería* (Departamento de Matemáticas), en la *Noche europea de los investigadores*.

  Realizamos un stand de problemas de ingenio para todas las edades que nos ha ayudado a acercar las Matemáticas de una manera lúdica a todos los ciudadanos almerienses. Esta participación me llevó a plantearle al Departamento que podíamos utilizar dichos problemas de ingenio que estaban divididos en 2 paneles para hacer un concurso en el centro.

  Después de una lluvia de ideas sobre la ejecución del concurso, decidimos exponer el primer panel para su realización durante el segundo trimestre y dejar el segundo panel para el tercer trimestre; la idea es que el participante resuelva todos los problemas de ingenio que sepa del panel y nos lo mande mediante correo electrónico o por la *plataforma Moodle* del Centro. Se abrió el concurso también al alumnado de otros centros, utilizando nuestra página web *www.ipepalmeria.es* y estableciendo dos modalidades con 3 premios en material escolar de 25, 50 y 75 euros en cada una de ellas.

- **Concurso de Fotografía matemática**: la idea de realizar este concurso nos la dio la *Sociedad Andaluza de Matemáticas Thales* que plantea un concurso similar para todos los centros de Secundaria y Bachillerato. Pensamos hacerlo para que las fotografías que ganen reciban un premio en material escolar y podamos presentarlas al concurso de la *SAEM Thales*.

Este año vamos a participar en la *I Feria de la Ciencia de Almería* colaborando en el proyecto *Stat Wars: El imperio de los datos*.

Además, el Departamento participa en las demás actividades que se realizan en el centro, y en este sentido, recientemente hemos celebrado el *Día de la Mujer* aportando un vídeo de mujeres matemáticas y actualmente estamos trabajando en la preparación de material para la 1.ª *Feria Aula de Almería* en la que colaboramos con un stand virtual en el que vamos a dar a conocer toda nuestra oferta educativa y nuestra singularidad como centro de adultos.

Con todas estas actividades pretendemos que nuestro alumnado quite a las matemáticas el sesgo de «super difíciles» y aburridas.

En la segunda parte de este artículo quiero contar mi experiencia personal como profesora de matemáticas en el *IPEP de Almería*, ya que en estos 5 años de trabajo que llevo con adultos he aprendido mucho y he cambiado en metodología y manera de afrontar la asignatura.

El alumnado con el que he trabajado mayoritariamente es de 2.º de Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Anteriormente yo había estado en el *IES Fuente Nueva* de El Ejido y llevaba muchos años dando clase en 2.º de Bachillerato de Ciencias Sociales, clases muy marcadas por la Selectividad, ahora PEvAU,

ISSN 1988-5318

en las que me centraba en dar todos los contenidos de la manera más clara posible para que mi alumnado consiguiera superar con éxito la prueba.

Al llegar al IPEP me encontré que en enseñanza semipresencial el número de horas de clase presencial era la mitad, así que mi primera preocupación fue: *«¿cómo voy a dar todo el temario con la mitad de horas de clase?»*, mi primera equivocación.

Me enfrenté también con una Plataforma Moodle que en principio usé como un libro de texto, para subir contenidos, segunda equivocación.

La secuencia fue la siguiente: primer día de clase, muchísimo alumnado, casi no caben en el aula, hago mi presentación y explico los contenidos que vamos a ver a lo largo del curso; les hablo de una prueba inicial que evaluaría sus conocimientos sobre la materia, de la necesidad de que trabajen mucho ya que tenemos pocas horas de clase presencial, y vuelvo a equivocarme. Estoy asustando a mi alumnado, un alumnado con cargas familiares, trabajo, que viene de un fracaso escolar y que no le gustan en absoluto las matemáticas.

La prueba inicial fue un fracaso, no sirvió para nada, bueno sí, para ponerme a reflexionar y empezar a cambiar mis ideas.

Paralelamente, empecé a recibir correos en los que me explicaban su situación personal y que las matemáticas para ellos era una asignatura muy difícil de superar.

Así que las siguientes clases fueron más de psicología y de reforzamiento de la autoestima que de matemáticas y dejó de preocuparme tanto el que tuviéramos muy pocas horas y no hubiera tiempo suficiente de ver todos los contenidos; posteriormente, fuimos trabajando esos contenidos, pero adaptados a su nivel y ellos/as veían cómo progresivamente eran capaces de salvar muchas barreras que creían inalcanzables, lo cual reforzaba su autoestima y permitía que pudiéramos seguir avanzando.

Tras mi experiencia docente, puedo afirmar que, a día de hoy, hay tres herramientas importantísimas para poder trabajar las matemáticas con adultos:

1. **Clases presenciales adaptadas al alumnado**, no basadas solo en contenidos sino en una metodología activa en la que se potencia su participación. Está claro que las clases magistrales no sirven, dejan las aulas vacías.

2. **Tutorías individualizadas** para ese alumnado especial al que le cuesta mucho trabajar en el grupo de clase o que por motivos laborales o familiares está un poco perdido y necesita un refuerzo en contenidos de la asignatura, pero sobre todo en su autoestima personal.

3. **Potenciación de la plataforma Moodle**, ya que hoy en día es una herramienta indispensable para propiciar el contacto continuo con el alumnado. A través de ella, pueden contarte sus problemas con la asignatura para intentar resolverlos juntos, además de encontrar también por este medio todo el material necesario para facilitarles el aprendizaje.

El trabajo es difícil y es cierto que muchos se quedan por el camino a pesar de su esfuerzo y el nuestro, pero otros consiguen sus metas agradeciéndote tu trabajo y ayuda y esto compensa todos los esfuerzos. Al final, el balance siempre es positivo. ■

ENSEÑANZA BILINGÜE EN MATEMÁTICAS

A motivating experience in a compensatory bilingual school

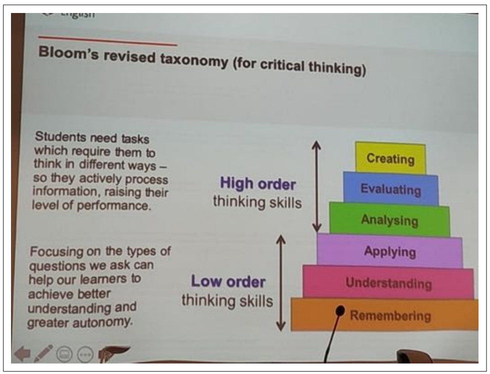
Josefa de la Luz Martínez Moreno
IES Celia Viñas (Almería)

Last year I started teaching as a bilingual Maths teacher at *IES Algazul* (Roquetas de Mar). There, students take four bilingual subjects: PE, Geography and History, Music and Mathematics. We had meetings every week to coordinate the teaching and learning of these content subjects through English. Furthermore, we set in motion a cross-curricular common project during the first term called "Healthy life". The idea was to carry out different tasks in the different content subjects and, at the end of the term, explain the tasks in a bilingual gala. In that context, being a newcomer, I adapted an activity I had made before for a non-bilingual Maths lesson, which consisted in creating a webpage of a restaurant for healthy food.

This task involved cognitive thinking skills which challenged learners, as CLIL promotes. These skills include reasoning, creative thinking and evaluating. *Good CLIL practice is driven by cognition* (Mehisto, Marsh, Frigols, 2008, p. 30). We started working with useful, necessary vocabulary about proportionality and percentages, working with cards (e.g. *Who has. . . ?*, word searches and fill-in-the-gaps exercises). At the same time, in the English class, students were learning food vocabulary. The English language assistant talked with them about healthy diet and supported the class all through the process.

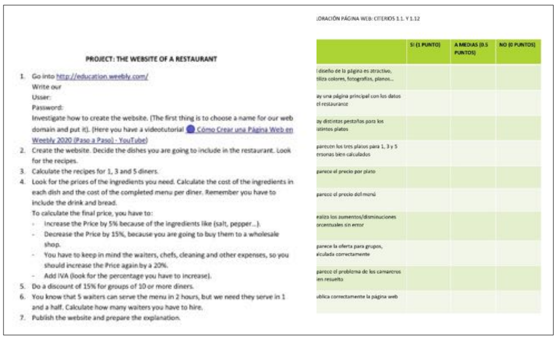
Following Bloom's taxonomy, I tried to go across the different levels of thinking, from *low order (LOTS) to high order thinking skills (HOTS)*, by putting forward different types of exercises about proportionality and percentages and giving the students the support they needed to make the task more achievable (that is, *scaffolding*).

 ISSN 1988-5318



Bloom's taxonomy

When they were ready, I divided the students into groups of three. They used Weebly to create the website (it is free). On *http://education.weebly.com*, the teacher can log in and create the username and password for each group. In groups, they can develop their social skills by being involved in the task, respecting the different ideas and opinions and coming to an agreement.



PROJECT: THE WEBSITE OF A RESTAURANT

1. Go into http://education.weebly.com/
   Write our
   Usser:
   Password:
   Investigate how to create the website. (The first thing is to choose a name for our web domain and put it). (Here you have a videotutorial Cómo Crear una Página Web en Weebly 2020 (Paso a Paso) - YouTube)
2. Create the website. Decide the dishes you are going to include in the restaurant. Look for the recipes.
3. Calculate the recipes for 1, 3 and 5 diners.
4. Look for the prices of the ingredients you need. Calculate the cost of the ingredients in each dish and the cost of the completed menu per diner. Remember you have to include the drink and bread.
   To calculate the final price, you have to:
   - Increase the Price by 5% because of the ingredients like (salt, pepper...).
   - Decrease the Price by 15%, because you are going to buy them to a wholesale shop.
   - You have to keep in mind the waiters, chefs, cleaning and other expenses, so you should increase the Price again by a 20%.
   - Add IVA (look for the percentage you have to increase).
5. Do a discount of 15% for groups of 10 or more diners.
6. You know that 5 waiters can serve the menu in 2 hours, but we need they serve in 1 and a half. Calculate how many waiters you have to hire.
7. Publish the website and prepare the explanation.

LORACIÓN PÁGINA WEB: CITERIOS 1.1. Y 1.12

	SI (1 PUNTO)	A MEDIAS (0.5 PUNTOS)	NO (0 PUNTOS)
l diseño de la página es atractivo, tiliza colores, fotografías, planos...			
ay una página principal con los datos el restaurante			
ay distintas pestañas para los istintos platos			
parecen los tres platos para 1, 3 y 5 ersonas bien calculados			
parece el precio por plato			
parece el precio del menú			
ealiza los aumentos/disminuciones orcentuales sin error			
parece la oferta para grupos, alculada correctamente			
parece el problema de los camareros ien resuelto			
ublica correctamente la página web			

The instructions I gave them were gathered in a document that can be downloaded [2].

Finally, they showed their websites (wearing costumes for the occasion) and evaluated the final product using the green table above. The whole class decided which website was going to be presented in the gala - and that was it!

The gala was a success. The students claimed that the experience had been fantastic and they had no doubt enjoyed what they had learnt.

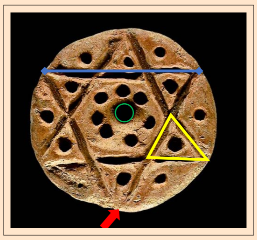
These are some of the websites created by the participant students:

- *malasanaristorante.weebly.com*.
- *delicatessesperu.weebly.com*.
- *englishplace.weebly.com*.
- *sphaguettidimama.weebly.com*.

■

Concurso de problemas

Problema propuesto



En el Conjunto Monumental de la Alcazaba de Almería se encuentra este sello cerámico.

Ana quiere dibujar un sello parecido, con figuras geométricas regulares y 6 ejes de simetría.

Para ello situará en el origen de coordenadas el vértice señalado con la flecha roja, el segmento azul lo hará de 12 cm, la circunferencia central verde de 1 cm de radio y sólo dibujará 6 círculos pequeños de 0,5 cm de radio centrados en los baricentros de los 6 triángulos del tipo el marcado en amarillo.

Calcula las coordenadas de todos los puntos necesarios (vértices de los triángulos y centros de los círculos) para que Ana dibuje el sello. Envía también el dibujo resultante.

Si nos envías tu solución a este problema ***puedes obtener*** un estupendo ***reloj inteligente (smartwatch)*** y un regalo relacionado con las matemáticas.

¡La solución más elegante u original tiene premio!

Para participar, solo tienes que mandar tu solución a la dirección de correo electrónico bmatema@ual.es ***hasta el 15 de octubre***.

Puedes escanear el papel en el que la hayas elaborado y enviarla a dicha dirección de correo electrónico.

Las bases de este concurso pueden consultarse en la página web del Boletín.

Envía tu solución a bmatema@ual.es

[2] *https://drive.google.com/file/d/1cur6ePWobPMQZ8aAXDwoJYhBRL1AzzuJ/view?usp=sharing*.

 ISSN 1988-5318

Resultado del concurso del número anterior

En este número del Boletín, el jurado ha decido dejar el premio desierto ya que ninguna de las soluciones recibidas ha sido del todo correcta.

Sin embargo, queremos hacer una mención especial a la solución elaborada por Paula Gómez Ortiz, alumna de 1.º de Bachillerato del *IES Fuente Nueva* de El Ejido, pues ha estado muy cerca de la solución del problema.

Problema propuesto en el número anterior

Las últimas clases de don Andrés

A punto ya de jubilarse, conservaba su pasión por la docencia y había desarrollado aun más su característico tono paternal:

«Como podéis observar, mis queridos estudiantes, la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ representa una esfera de radio 1 centrada en el origen. De hecho, las soluciones de tal ecuación son los puntos del espacio euclídeo tridimensional que se encuentran a distancia 1 del punto $(0,0,0)$. De forma análoga, la ecuación $z=0$ puede identificarse con el plano XY, pues las soluciones de esta última ecuación son los puntos de la forma $(t,s,0)$, siendo t y s números reales cualesquiera. Puesto que las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

son los puntos que pertenecen, simultáneamente, a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y al plano $z=0$, cabe decir que el sistema mencionado representa la intersección de ambas superficies. Se trata, en este caso, de una circunferencia situada en el plano XY, de radio 1, centrada en el origen.
Os propongo un ejercicio que admite una respuesta que os dejará plenamente satisfechos. Os animo a resolver el sistema

$$\begin{cases} y^2-x^2-2yz+z^2=0 \\ y^2-x^2-2xz=0 \end{cases}$$

En términos geométricos, acabo de invitaros a descubrir la intersección de la superficie $y^2-x^2-2yz+z^2=0$ con la superficie $y^2-x^2-2xz=0$»

Os rogamos que aceptéis, en esta ocasión, la propuesta que hizo don Andrés a sus estudiantes en la clase que hemos rememorado.

<u>*Solución:*</u>

Las ecuaciones planteadas en el problema son las siguientes:

$$\begin{aligned} y^2-x^2-2yz+z^2&=0 \\ y^2-x^2-2xz&=0 \end{aligned}$$

La primera ecuación puede expresarse como

$$\begin{aligned} x^2&=y^2-2yz+z^2 \\ &=(y-z)^2 \end{aligned}$$

con lo cual,

$$x=y-z \quad \text{y} \quad x=z-y$$

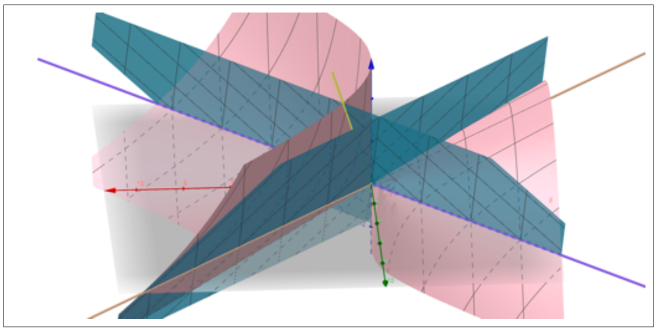
- Para $x=y-z$, la segunda ecuación da lugar a $z=0$ por lo que $x=y$.
- Para $x=z-y$, la segunda ecuación da lugar a

  $$-3z^2+4yz=0 \iff z(-3z+4y)=0$$

  con lo que tenemos:

  - $z=0 \Rightarrow x=-y$.
  - $y=\frac{3}{4}z \quad \text{y} \quad x=\frac{1}{4}z$.

Por tanto, las soluciones del sistema son las tres rectas $(x,x,0)$, $(x,-x,0)$ y $(x,3x,4x)$ que podemos ver gráficamente en colores marrón, morado y amarillo, respectivamente, en la siguiente figura:

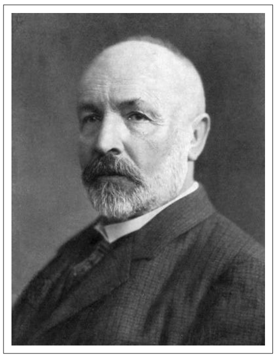


ISSN 1988-5318

HISTORIA Y SUS PERSONAJES

El continuo, alef y beth

Antonio Rosales Góngora
IES Bahía de Almería (Almería)

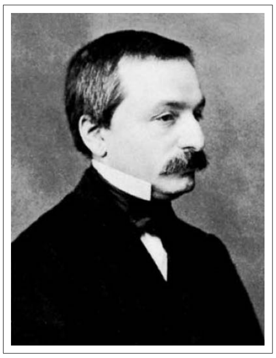


G. Cantor (1845–1918)

El matemático ruso nacionalizado alemán Georg Cantor, desarrollador de la teoría de conjuntos infinitos, fue el primero en demostrar que no todos los conjuntos infinitos son iguales.

Sabemos que si hay una biyección entre dos conjuntos finitos entonces tienen el mismo número de elementos. Cantor extendió esta equivalencia a conjuntos infinitos. Puede ocurrir que exista una biyección entre dos conjuntos pero que estos no tengan, en sentido coloquial, el mismo tamaño como ya demostró Galileo estableciendo una biyección entre los números naturales y sus cuadrados ($n \to n^2$). Por este motivo se introdujo el término equipotente para indicar que hay una biyección entre dos conjuntos; en el caso anterior, $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{N}^2)$.

Hasta Cantor predominaba la idea del infinito de Aristóteles que afirmaba *«el número no puede ser infinito, ya que este, así como todo lo que tiene número, puede contarse y, si puede contarse, no es infinito»*.



L. Kronecker (1823–1891)

Lo que Cantor proponía era una revolución que obtuvo réplicas violentas como la de Kronecker, su director de tesis, que lo calificó de *«charlatán, renegado y corruptor de la juventud»*, incluso Wittgenstein lamentó que las matemáticas estuvieran dirigidas por *«el pernicioso idioma de la teoría de conjuntos»*. Poincaré afirmó que *«Pienso, y no soy el único que lo hace, que es importante no introducir jamás ningún concepto que no pueda ser definido completamente con un número finito de palabras. Sea cual sea el remedio que se adopte, podemos asegurarnos la alegría del médico que es llamado para atender un bello caso patológico»*. El caso patológico eran los números transfinitos, enfermedad de la que las matemáticas serían algún día curadas, según él.

Cantor demostró que existe una jerarquía infinita de infinitos. Para ello introduce el concepto de potencia de un conjunto, $\mathcal{P}(A)$, conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto A.

Demostró que no hay biyección entre A y $\mathcal{P}(A)$, de modo que $\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A))$. Esta relación $<$, llamada de minuspotencia, es una aplicación inyectiva entre A y $\mathcal{P}(A)$ de modo que cada elemento de A se puede emparejar con otro de $\mathcal{P}(A)$ pero no recíprocamente. Continuando el proceso indefinidamente obtenemos:

$$\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A)) < \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) < \dots$$

Una jerarquía ilimitada de infinitos números cardinales. Cantor usó el símbolo $\aleph_0$ (alef sub cero) para denotar la cardinalidad de los números naturales ($\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo). También mostró que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de potencias de $\mathbb{N}$ son equipotentes: $\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$.

¿Existe el menor número cardinal mayor que $\aleph_0$? Cantor demostró que el conjunto de cardinales de los subconjuntos de un conjunto está bien ordenado según el orden natural, por tanto, cada conjunto de cardinales tiene un mínimo.

Se denota por $\aleph_1$, el cardinal más pequeño mayor que $\aleph_0$. Continuando el proceso se obtiene:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots \tag{1}$$

Cantor usó la letra $\beth$, beth, la segunda letra del alfabeto hebreo, para definir otra secuencia de cardinales $\beth_0 = \text{card}(\mathbb{N}), \beth_1 = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \beth_2 = \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, todos los $\beth$ son distintos. Vemos que $\beth_1 = 2^{\aleph_0} = \text{card}(\mathbb{R}) = c$ (la potencia del continuo).

Podemos ver que hay una sucesión ilimitada

$$\beth_0 < \beth_1 < \beth_2 < \dots \tag{2}$$

¿Qué relación hay entre $\aleph_n$ y $\beth_n$?, sería bonito mostrar que $\aleph_n = \beth_n$; Cantor lo intentó pero no tuvo éxito.

La *hipótesis del continuo* postula que no existe un número cardinal entre $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$ y $\beth_1 = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, lo cual implica que $\beth_1 = \aleph_1$.

La prueba de la *hipótesis del continuo* fue el primer problema en la famosa lista de 23 problemas de David Hilbert, presentada en el congreso de 1900.

En el *Congreso Internacional de Matemáticas* (ICM) de 1904 el matemático ruso Julius König impartió, con Hilbert y Cantor presentes, una conferencia en la que demostró que la hipótesis del continuo era falsa. El propio Cantor, en el debate posterior, agradeció a Dios haberle permitido vivir para ver la refutación de su error pero, unas semanas más tarde, Zermelo descubrió un error en la demostración. Por lo que la hipótesis del continuo (HC) continúa sin demostración.

En 1938 Kurt Gödel demostró que la *hipótesis del continuo* es consistente con los axiomas habituales de la teoría de conjuntos. Veinticinco años después Paul Cohen demostró que la negación de la HC también es coherente con estos axiomas.

Por tanto, HC es independiente de los otros axiomas: somos libres de asumir que es verdadero o falso.

ISSN 1988-5318

La *hipótesis generalizada del continuo* (HGC) establece que, para cada número ordinal ν, $\aleph_\nu = \beth_\nu$, lo cual implica que las sucesiones (1) y (2) son iguales. Podríamos decir, abreviadamente,

$$[\aleph = \beth] = \text{HGC}$$

La elección de aceptar o rechazar HC (o HGC) recuerda la libertad de aceptar o rechazar el postulado de las paralelas de Euclides. Esta elección nos lleva a la riqueza de la geometría elíptica e hiperbólica. Podemos ver la libertad de tomar o dejar HC bajo una luz igualmente positiva.

Referencias

[1] Boyer, C.B. (1999) *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

[2] Bourbaki, N. (1969) *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

[3] Collete, J. L. (1985) *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.

[4] Kline, M. (1994) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

[5] Beth (Wikipedia) [3].

[6] Ivorra, C. *Teoría de conjuntos* [4].

■

MATEMÁTICAS Y OTRAS CIENCIAS

«Empaquetando» a los estudiantes en las aulas

Renato Álvarez Nodarse
Niurka Rodríguez Quintero
Universidad de Sevilla

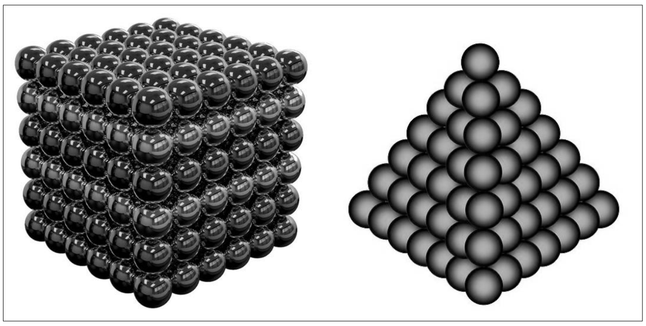
Desde principios de marzo de 2020 vivimos inmersos en una pandemia internacional (COVID-19) que según la *Universidad Johns Hopkins* (EE. UU.) a día 24 de marzo ha contagiado a casi 125 millones de personas de las que han fallecido más de 2,7 millones, y que está dejando tras de sí una crisis económica de consecuencias aún desconocidas pero que se prevén catastróficas. No es de extrañar por tanto que desde el inicio de la pandemia la comunidad científica se haya volcado en la investigación de dicha enfermedad y como no podía ser menos, las matemáticas han aportado su granito de arena.

En este breve artículo vamos a responder a la siguiente pregunta: ¿cuántos estudiantes podemos distribuir en un aula de forma que entre ellos se mantenga la distancia mínima de seguridad de 1,5 metros? Dicha cuestión es lo que se conoce en matemáticas como el *problema del empaquetamiento* (packing problem).

Algo de historia

El problema de empaquetar objetos es muy antiguo y su historia se remonta a la antigüedad (ver por ejemplo la magnífica monografía [3]).

Uno de los problemas más famosos de empaquetamiento es el conocido *problema de Kepler* que consiste en colocar bolas iguales de forma que haya la menor cantidad de espacio libre entre ellas. Este problema se lo propuso a Kepler el ayudante de Sir Walter Raleigh, Thomas Harriot a principios del siglo XVII. Concretamente Harriot quería saber si era posible probar que la mejor manera de apilar balas de cañón era precisamente la que se usaba desde tiempos inmemoriales: una estructura piramidal de bolas (también conocida como empaquetamiento cúbico centrado en las caras) como la que se muestra en la siguiente figura:



Empaquetamiento cúbico simple (izq.) y piramidal

Kepler intentó resolver la cuestión propuesta por Harriot, pero no consiguió encontrar ninguna prueba aunque sí menciona el problema en su libro *El copo de nieve de seis esquinas* publicado en 1611 y considerado hoy día el libro fundacional de la cristalografía y además sugiere que la mejor manera de apilar bolas era justo la forma piramidal antes mencionada.

La primera demostración rigurosa del problema de Kepler se debe a Gauss quien en 1831 probó que no existía ninguna manera mejor de colocar bolas sobre una red (es decir bolas colocadas de forma «ordenada») que la sugerida por Kepler. Pero ¿y si no tenemos que colocarlas de forma ordenada? Esta situación era mucho más complicada y constituyó uno de los famosos problemas de Hilbert que pasó a conocerse como la conjetura de Kepler y es,

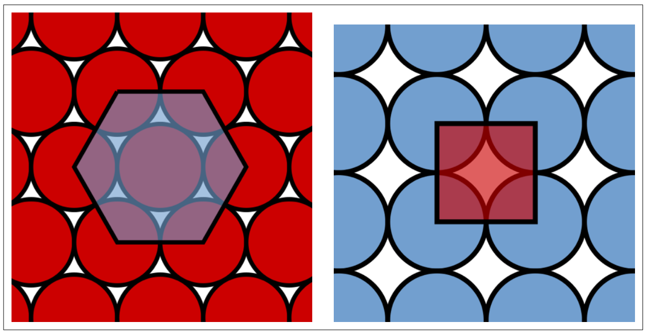
[3] *fr.wikipedia.org/wiki/Beth_(nombre)*.
[4] *www.uv.es/ivorra/libros/TC.pdf*.

 ISSN 1988-5318

desde el punto de vista matemático, un problema de optimización con un número infinito de variables.

El primer paso relevante para la resolución de la conjetura de Kepler lo dio el matemático húngaro László Fejes Tóth quien en 1953 redujo el problema a uno con un número finito de variables y además sugirió que seguramente con la ayuda de los ordenadores podría resolverse. Y fue así como, en 1998, Thomas Hales con ayuda de los ordenadores y de uno de sus estudiantes de doctorado, Samuel Ferguson, probó la famosa conjetura (no sin cierta polémica pues a los matemáticos no les gusta una prueba hecha por una máquina). Para más información consultar, por ejemplo, [1, 2].

A nosotros nos interesa, sin embargo, otro problema: el de empaquetar de forma óptima círculos en el plano. En este caso la solución cuando los círculos están sobre una red se debe a Lagrange quien en 1773 probó que la mejor forma de empaquetar círculos en el plano es el empaquetamiento hexagonal (como en los panales de abeja) que podemos ver en la siguiente figura:



Empaquetamientos hexagonal y cuadrático en el plano

Para determinar cuál es la mejor forma de empaquetar las bolas se precisa del concepto de *densidad de un empaquetamiento* que no es más que la fracción del espacio contenido por las esferas. Para el caso del plano un sencillo cálculo muestra que las densidades de los empaquetamientos hexagonal y cuadrático son de $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}9069$ y $\pi/\sqrt{4} \approx 0{,}7854$, respectivamente. Pero ¿podrían existir empaquetamientos irregulares con mayor densidad? La respuesta es que no y la primera prueba se debe al matemático noruego Axel Thue en 1890 que fue generalizada en 1940 por el mismo matemático húngaro que mencionamos antes Fejes Tóth.

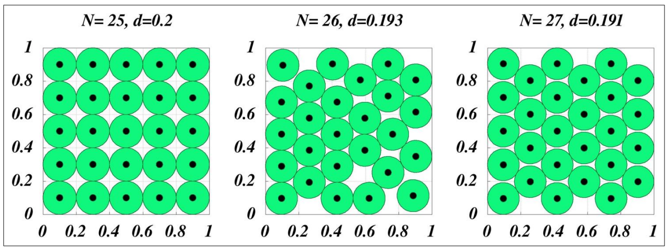
«Empaquetando» a los estudiantes en las aulas

¿Y si cambiamos el problema por otro más sencillo de enunciar? por ejemplo, ¿cuál es la mejor manera de empaquetar N círculos iguales en un cuadrado o en un rectángulo de dimensiones dadas sin que se superpongan, de forma que el radio de los mismos sea lo más grande posible? Este problema es equivalente al problema de saber cuantos círculos podemos empaquetar en el cuadrado (rectángulo) de forma que la distancia entre sus centros sea mayor o igual que una distancia fijada de antemano.

Este problema de optimización (geométrica) es de gran interés por sus aplicaciones tecnológicas (por ejemplo nos dice cómo distribuir las antenas repetidoras de telefonía móvil) y en nuestro caso, porque nos ayuda a descubrir la manera de distribuir de forma óptima a los estudiantes en una clase para que todos estén a una distancia mayor o igual que cierta distancia fijada de antemano.

Aunque este problema está todavía lejos de ser resuelto de forma general, existen algoritmos numéricos tremendamente eficaces que nos permiten encontrar las distribuciones «óptimas» para valores de N *no muy grandes*. Un ejemplo es el algoritmo desarrollado por E. Specht que se puede descargar desde la web del autor *www.packomania.com*.

Como ejemplo mostremos la distribución de 25, 26 y 27 círculos en un cuadrado (de forma similar se puede resolver el caso de un rectángulo) de lado $l = 1$ (el valor de l lo tomaremos según nos convenga como luego veremos). Los resultados se muestran en la siguiente figura:



Empaquetando 25, 26 y 27 círculos en un cuadrado

Encima de cada configuración vemos la distancia mínima d entre los centros. Nótese que no hay casi diferencia entre las distancias mínimas de las tres distribuciones (apenas un 4,5 % entre la de 25 y 27 círculos), pero sí hay una enorme diferencia en la forma de la distribución, siendo la de 26 círculos bastante más complicada de implementar en la práctica (si pensamos en un aula real habría que inmovilizar los pupitres). Nótese además que en el caso de 25 círculos tenemos la distribución del empaquetamiento cuadrático mientras que el caso de 27 se asemeja mucho al empaquetamiento hexagonal.

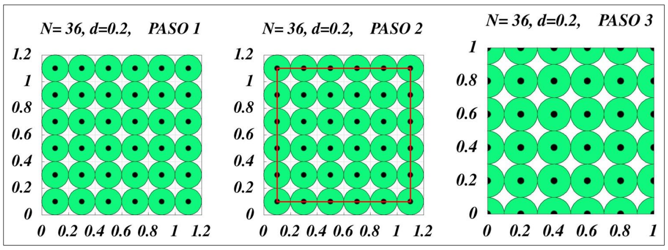
Como lo que queremos es distribuir los centros de los círculos ya que estamos pensando en estudiantes y aulas, el problema cambia pues estos pueden estar colocados en los lados del cuadrado.

Para resolver este caso podemos simplemente agrandar el lado de nuestro cuadrado en la distancia d requerida y luego desplazar convenientemente la distribución obtenida. Como ejemplo veamos el caso de 25 círculos.

Imaginemos que queremos que los centros de nuestros círculos se mantengan a una distancia $d = 0{,}2$ como en el caso anterior. Entonces, si agrandamos el lado del cuadrado en la distancia $d = 0{,}2$, el resultado ahora es que podemos colocar 36 círculos (antes eran 25 círculos).

El procedimiento es el siguiente: comenzamos con la distribución óptima de 36 círculos, a continuación desplazamos la distribución a la izquierda una distancia $d/2$ y hacia abajo una distancia $d/2$ lo que nos lleva a la distribución final de los centros. Lo anterior se muestra en la siguiente figura:

ISSN 1988-5318



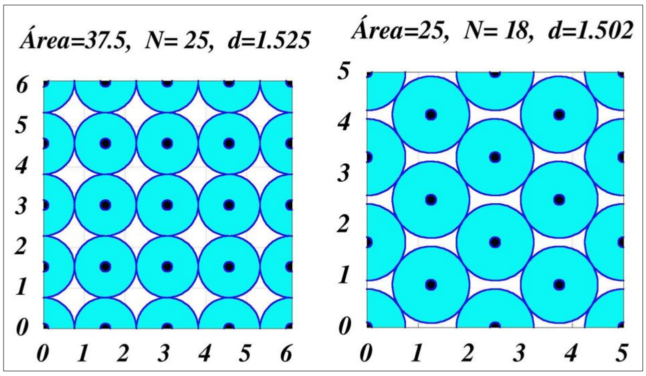
Procedimiento para colocar los centros

Ejemplo

Usemos el procedimiento anterior para mostrar cómo deben distribuirse los estudiantes en un aula de forma que estén sentados a una distancia mayor o igual a 1,5 metros (distancia recomendada por las autoridades sanitarias). La idea es encontrar la distribución óptima de los estudiantes de forma que se pueda aprovechar al máximo el **área útil** de la clase, i.e., que entren en ella el mayor número posible de estudiantes.

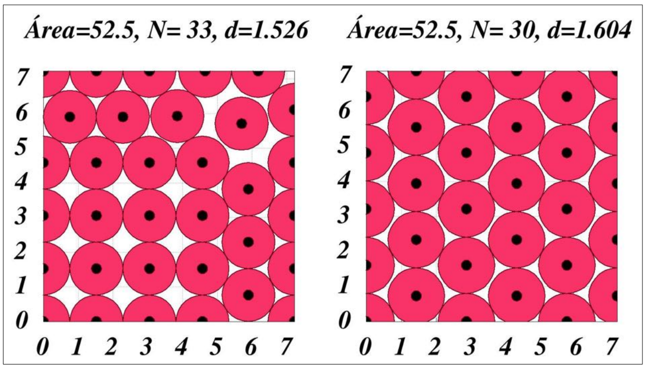
Según la legislación vigente (RD 132/2010, de 12 de febrero, por el que se establecen los *«requisitos mínimos de los centros que impartan las enseñanzas del segundo ciclo de la educación infantil, la educación primaria y la educación secundaria»*), un aula primaria, secundaria y bachillerato ha de disponer de 1,5 metros cuadrados (m^2) por estudiante y un máximo de 25 estudiantes (primaria), 30 (secundaria) y 35 bachillerato, por tanto el área mínima A en cada caso es de 37,5, 45 y 52,5 m^2, respectivamente.

Como ejemplo tomemos un aula *ideal* de primaria con 37,5 m^2. En ese caso los cálculos nos dicen que podemos colocar 25 estudiantes y la distancia d entre ellos será de 1,52 metros. Ahora bien, muchas de las aulas tienen en realidad 25 m^2 útiles, en ese caso para mantener las distancias debe bajarse la ratio hasta 18 estudiaantes, ya que 25 estarían a 1,3 metros de distancia. Ambas distribuciones se muestran en la siguiente figura:



Distribución de N *estudiantes en aulas de* 37,5 *y* 25 m^2

Finalmente, pensemos en un aula de bachillerato que debería ser de 52,5 m^2. En este caso se pueden colocar 33 estudiantes ($d = 1{,}53$ metros), pero es una distribución muy complicada de implementar como se ve en la siguiente figura.



Distribución de 33 y 30 estudiantes en un aula de 52,5 m^2

por lo que hay que usar una distribución de 30 estudiantes ($d = 1{,}6$ metros, que mostramos en la figura anterior derecha) o una de 36 ($d = 1{,}46$ metros, que correspondería al empaquetamiento cuadrático).

Sin embargo, la realidad es algo peor, pues muchas aulas de bachillerato son de 37,5 m^2 y han de colocarse 35 estudiantes. En este caso la distancia entre ellos es de $d = 1{,}29$ metros pero es bastante complicada de implementar siendo más factible una de 36 estudiantes (que volvería a ser la del empaquetamiento cuadrático) en cuyo caso la distancia d sería de 1,26 metros.

A modo de conclusión

Como se ve las matemáticas pueden ayudar a colocar de la forma más eficiente posible a los estudiantes en las aulas. En cualquier caso, para ser realistas hay que tener en cuenta que los estudiantes no son puntos (por lo que hay que sumar un extra al paso 1 que mencionamos antes) y que el área es el **área útil**, no el **área total** del aula ya que en las mismas suelen haber armarios, puertas y la tarima del profesor.

Nota: El programa de MAXIMA CAS utilizado para encontrar las distribuciones óptimas puede descargarse desde la web de los autores *ryn-fismat.es*.

Referencias

[1] T.C. Hales, Historical Overview of the Kepler Conjecture, *Discrete and Computational Geometry*, 36 (2006) 5-20.

[2] P.J. Miana y N. Romero, La historia de la conjetura de Kepler. *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja (2010) 367–374.

[3] P. G. Szabo, M. Cs. Markót, T. Csendes, E. Specht, L. G. Casado e I. García. *New approaches to circle packing in a square (with program codes).* Springer, (2007).

■

ISSN 1988-5318

MUJERES Y MATEMÁTICAS

Ulrike Tillmann

Una matemática en un alto puesto

Marina Gil García
Estudiante del Máster en Matemáticas
Graduada en Matemáticas por la UAL

Descubrí a Ulrike Tillmann gracias a que me propusieron escribir sobre ella. Puede que para vosotros sea un nombre desconocido hasta este momento, como lo era para mi hace unos días, pero ahora puedo decir, como matemática, que ha sido un placer leer sobre esta mujer.

Ulrike Tillmann

Nacida en Alemania en 1962, Ulrike Tillmann asumirá en breve la dirección del *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences*. Este instituto, que lleva el nombre de una de las figuras más ilustres de la universidad, el matemático y filósofo Isaac Newton, es el instituto internacional de investigación en matemáticas y sus múltiples aplicaciones en la *Universidad de Cambridge*.

Este es un curioso instituto cuyo propósito consiste en reunir a los mayores genios intelectuales del mundo durante unas cuantas semanas para celebrar seminarios sobre un tema de investigación elegido por ellos.

Situado en los alrededores de la universidad, lejos de estudiantes y distracciones, el edificio está especialmente diseñado para estimular la colaboración entre los académicos a fin de que surjan ideas geniales. Carece de pasillos donde ocultarse y cada despacho da a un foro central. Se pretende que los matemáticos pasen un cierto tiempo en esta zona común y se los anima a mantener la puerta del despacho abierta. Dirigir el *Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences* es toda una responsabilidad, encomendada en Ulrike Tillmann.

Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences

Ulrike Tillmann asistió a la escuela primaria de su localidad. Con la ayuda de una beca internacional del programa WISP de la *Universidad de Brandeis* (EE. UU.) pudo estudiar en esta universidad y luego recibió su doctorado en la *Universidad de Stanford* (EE. UU.). A esto le siguieron colaboraciones en Cambridge antes de ocupar su puesto actual en Oxford (Reino Unido), donde es profesora y codirectora del *Centre for Topological Data Analysis*.

Su investigación se centra en topología algebraica, con importantes contribuciones al estudio de los *espacios moduli* de curvas algebraicas. La topología algebraica es una herramienta muy eficaz para estudiar las propiedades globales de los objetos geométricos. Por ejemplo, si tomamos la superficie de una bola y la dividimos en triángulos, contamos el número de caras, le sumamos el número de vértices y restamos el número de aristas, no importa cómo elijamos los triángulos, el resultado siempre será 2. Podemos hacer lo mismo con la superficie de una rosquilla y el resultado será 0. Estos números ya los conocía Euler y son presagios de la homología desarrollada en el siglo XX.

Su trabajo ha estado motivado por cuestiones de física cuántica y teoría de cuerdas. En particular, ha contribuido a la comprensión del *«espacio de superficies»*.

Pero su carrera no solo se basa en la investigación, Ulrike Tillmann enseña una gran variedad de temas que cubren la mayoría de las opciones de matemáticas puras del programa de estudios de pregrado. A nivel avanzado y de posgrado ha impartido conferencias sobre topología algebraica, variedades, categorías y espacios de bucle infinito o grupos cuánticos, entre otros.

Tillmann ha recibido varios premios y galardones a lo largo de su vida:

- El *premio Whitehead* de la *London Mathematical Society* (LMS) en 2004, el cual se otorga anualmente por la Sociedad Matemática de Londres a un matemático que trabaja en el Reino Unido y que se encuentra en una etapa temprana de su carrera.

- El prestigioso premio de investigación *Bessel-Humboldt Forschungs Preis* en 2008, que se concede por la *Fundación Alexander von Humboldt* a investigadores de renombre internacional residentes fuera de Alemania, en reconocimiento a sus logros sobresalientes en investigación.

Además, fue elegida miembro inaugural de la *American Mathematical Society* en 2012 y miembro de la academia nacional de las ciencias Leopoldina en 2017.

Tillmann es también miembro del instituto nacional de ciencia de datos y de inteligencia artificial del Reino Unido, *Alan Turing Institute*, desde sus inicios y de juntas científicas de varias instituciones internacionales, incluido el *Oberwolfach Research Institute for Mathematics* (Alemania) y la *Austrian Science Fund*.

Actualmente es miembro del consejo de una de las sociedades científicas más antigua del Reino Unido y una de

 ISSN 1988-5318

las más antiguas de Europa, la *The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge*, donde también se desempeñó como vicepresidenta interina en 2018.

Después de conocer todo su trabajo, no nos sorprende que la profesora Ulrike Tillmann haya sido nombrada en febrero de 2021 próxima directora del *Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences*, cargo que asumirá a partir de octubre. Este puesto supone para ella un mérito a toda su trayectoria.

«Este es un momento emocionante para las matemáticas del Reino Unido y para el Instituto en particular. Espero seguir construyendo sobre su reputación mundial por sus excelentes programas en las ciencias matemáticas» –ha declarado Ulrike Tilmann.

Pero cuando una persona llega tan lejos y ocupa un puesto tan importante como el que ocupará Ulrike Tillmann, es importante saber que tienes el apoyo de tus seres queridos. El también profesor del *Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences*, David Abrahams, ha querido tener unas palabras para su compañera:

«Me complace felicitar a Ulrike Tillmann por su nombramiento como directora. Ulrike es una matemática de renombre internacional con amplia experiencia en roles de liderazgo en matemáticas, y fue una candidata sobresaliente incluso en un campo tan competitivo. Los estrechos vínculos de Ulrike con el Isaac Newton Institute for the Mathematical Sciences se remontan a muchos años atrás y espero trabajar en estrecha colaboración con ella durante los próximos meses para asegurar que nuestros emocionantes planes de expansión se desarrollen y realicen de manera fluida.»

Seguramente Tillmann no iba buscando el puesto directivo que pronto ocupará, pero cuando hay esfuerzo, trabajo y dedicación todo acaba llegando. Escuchar, o en este caso leer, acerca de una mujer tan trabajadora debe de servirnos al resto de mujeres científicas para superarnos y saber que podemos conseguir todo lo que nos propongamos.

Sólo nos queda concluir que Ulrike Tillmann es una matemática que ha superado una barrera que ojalá superen muchas otras mujeres, una mujer en un alto puesto.

Referencias

[1] Página oficial del INI: La profesora Ulrike Tillmann nombrada próxima directora del Instituto Isaac Newton [5].

[2] Ulrike Tillmannm, Wikipedia [6].

[3] Ulrike Tillmannm, The Royal Society [7].

[4] Merton College Oxford, Profesora Ulrike Tillmann [8].

■

CULTURA Y MATEMÁTICAS

¿Y si no existieran las Matemáticas?

Pedro J. Martínez
Hacedor de sueños matemáticos

¡Qué barbaridad!, ¿a quién se le ocurre semejante pregunta? Ja, ja, ja... Pero, en fin, vamos a intentar responder, brevemente, eso sí, a esa pregunta. Y a ver qué pasa...

Si algo nos distingue a los seres humanos del resto de los seres vivos en el *multiverso* es precisamente la inteligencia, es decir, la capacidad de discernir, razonar, pensar o comportarse de una determinada manera ante una situación nueva; y la inteligencia se nutre fundamentalmente de la curiosidad. Desde siempre, el ser humano se ha preguntado por todo cuanto le rodea y las Matemáticas surgen necesariamente en el instante en que los homininos empezamos a pensar y a curiosear hace muchos miles de años, tal vez decenas de miles de años. ¡Qué guay!, dirían aquellas personas (minoría, supongo) que no las tragan porque no las entienden y mira tú que no es tan difícil entenderlas. Hasta yo, que no soy ningún portento, las entiendo. ¡Qué maravillosa sería la vida sin ellas...!, dirán. Y qué aburrida, apostillo yo.

No habría números y, por lo tanto, a ver cómo iban, verbigracia, a tomar medidas los egipcios para construir sus pirámides para que no les salieran como esta *Pirámide acodada* de la foto (Fig. 1), o *Pirámide Romboidal*, ubicada en Dashur (a 40 km al sur de El Cairo) desde hace algunos miles de años, si no hubieran conocido la unidad de medida denominada *codo* (distancia que hay desde el codo hasta la punta de los dedos con la mano extendida más la anchura de la palma de una mano. Pregúntenle a *Google* por el documental de la BBC *La historia del 1*).

Figura 1: pirámide acodada

Con lo lindas que son las Pirámides de la meseta de Guiza: *Keops*, *Kefrén* y *Micerino*. Y es que no se pueden crear cosas bellas sin medirlas con precisión y para ello hace falta una *Unidad*.

En La Biblia, Génesis, 6, 14–16, aparecen las medidas recomendadas a Noé para la construcción de la famosa Ar-

[5] *www.newton.ac.uk/news/ulrike-tillmann-named-ini-director-february-2021*.
[6] *es.wikipedia.org/wiki/Ulrike_Tillmann*.
[7] *royalsociety.org/people/ulrike-tillmann-12419*.
[8] *www.merton.ox.ac.uk/people/professor-ulrike-tillmann*.

ISSN 1988-5318

ca: longitud 300 codos, latitud 50 codos y altura 30 codos.

¿Qué sería de los deportes sin las Matemáticas? Snooker, Curling (deporte por «antonomasia» en Almería :-)), Baloncesto, Fútbol, Rugby, etc... Marcadores, estadísticas, bolas, balones elipsoidales, superficies y campos de juego, áreas, triples... No veríamos cómo 22 personas se amillonan pateando un balón «esférico» en pantalón corto.

No existirían los bancos y no nos devanaríamos los sesos intentando entender, entre otras muchas cosas, eso tan «raro» de los tipos de interés negativo.

¿Y el cero? ¿Y qué me dicen del uno? ¿Qué sería de la Informática, de las TIC, de la Internet, de Facebook, de Twitter, de WhatsApp y demás RRSS, sin el orondo 0 y el gallardo 1? Y lo que viene: cúbit o bit cuántico, Big Data, 5G, IoT (Internet of things). Apasionante, sí, pero con sus riesgos también.

No quiero ni pensar que no existieran las Olimpíadas Matemáticas. ¿Qué sería de la *SAEM Thales*?

Tampoco podríamos hablar de los números Primos, ni de los Amigos como el 220 y el 284, o de los números Perfectos como el 6, o el 28, o el 496. Ni de los pares, o impares. Claro, si no existen...

Ni Análisis, ni Álgebra, ni Geometría, ni Topología, ni Azar, ni Estadística. Pero tampoco Teoría del Caos, ni Teoría de las Catástrofes, ni Lógica difusa (o borrosa, *fuzzy logic*), ni Teoría de Juegos, ni Control de Calidad... ¿Dónde se iban a aplicar las Matemáticas si no existieran?

¿Qué sabríamos sobre la incidencia del pérfido SARS COV2, la COVID-19, sin la campana de Gauss, bajando su colita, o sin los indicadores de contagios y otros muchos más?

Figura 2: Romanesco

En la Naturaleza no encontraríamos joyas fractales como el Romanesco. La belleza que emana de cada poro de la piel de su esencia nos sublima y nos eleva a otra dimensión. (Fig. 2)

Las disciplinadas abejas no podrían «utilizar» el problema isoperimétrico en la construcción de sus celdas hexagonales.

¿Habríamos sido capaces los homininos de enviar naves espaciales, algunas de ellas tripuladas, a la Luna, a Marte, a Júpiter o, incluso, más allá de nuestro Sistema Solar sin las Matemáticas? Me callo la respuesta.

Y la cocina sin las Matemáticas..., mal asunto. Sobre todo en la repostería, con sus proporciones exactas de ingredientes. ¡Menudo pastel se montaría!

También afectaría al Teatro, al Cine (formato 16:9...), a la Música (octava, quinta...), Pintura, Escultura, Arte abstracto...

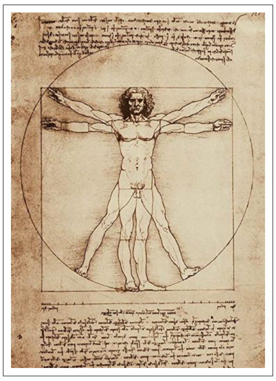


Figura 3: El hombre de Vitruvio

Leonardo da Vinci no habría creado a su *hombre de Vitruvio* en 1490, ni Luca Paccioli escrito su *Divina Proportione* en 1509, el *Número de oro*. El pobre Fibonacci se habría quedado sin su famosa sucesión (Fig. 3).

Al no disponer de medidas del tiempo, dejaríamos para después las cosas que debemos hacer ya e imperaría una procrastinación inusitada.

La magia y las Matemáticas. Aritmética modular, combinatoria... ¿A qué se habría dedicado el ínclito Juan Tamariz? ¿Cómo iba yo a hacerles truquitos de magia con cartas a mis nietos y amistades?

No hablaríamos del infinito, de los diversos infinitos; y Jorge Luis Borges no habría escrito en 1949 su libro *El Aleph*. Tampoco tendría sentido esta frase, matemáticamente hablando: *«en un Universo infinito, todo lo posible sucede en alguna parte»*.

Sin caminos ni carreteras, andaríamos zigzagueando; claro que así tardaríamos más tiempo en llegar al sitio al que vamos y podríamos pensar mejor lo que vamos a decir cuando lleguemos :-).

¿Dónde no hay Matemáticas? Si alguien no las ve, sepan que existen unas *Gafas de ver Matemáticas* que, estoy seguro de ello, se pueden encontrar a precios asequibles (coste cero) en la *Internet de la vida*.

Y lo más importante, ¿de qué habría vivido yo? Ja, ja, ja...

Podría hablarles de un gúgolplex de cosas más, como mínimo, pero no hay espacio. Creo, casi mejor diría que sé, que estoy en condiciones de afirmar que las Matemáticas son inherentes a la vida. Qué insulsa, ciertamente, sería ésta sin ellas. ¿O no?

Desde las piedrecitas (*calculus*, en Latín) que usaban nuestros ancestros para contar, pasando por el ábaco, hasta los superpotentes ordenadores actuales ha llovido mucho y las Matemáticas han ido evolucionando para satisfacer nuestra curiosidad innata. Las Matemáticas existen desde que existe el ser humano y forman parte (diría que esencial) del Conocimiento, constituyen una herramienta imprescindible para desarrollar nuestra capacidad de pensar y para ayudarnos a explicar mejor, aunque a veces no se entienda fácilmente :-), la realidad que nos rodea... Incluyendo a las propias Matemáticas. ■

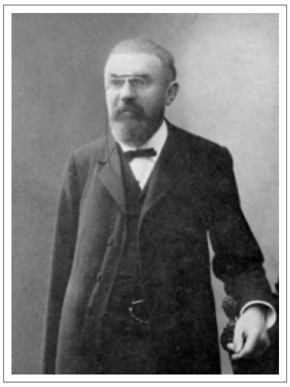
ISSN 1988-5318

Citas Matemáticas

«Si me dan una fórmula e ignoro su significado, no me enseña nada; pero si ya la conozco, ¿qué me enseña la fórmula?».

San Agustín (354–430), escritor, teólogo y filósofo argelino.

«El científico digno de este nombre, sobre todo el geómetra, siente frente a su obra la misma impresión que el artista: su goce es igual de grande y de la misma naturaleza».



Henri Poincaré (1854–1912), matemático, físico, y filósofo de la ciencia francés.

Acertijos

Cuadrado mágico

Un cuadrado mágico de orden n es una matriz cuadrada de n filas y n columnas en cuyas entradas aparecen los naturales $1, 2, \ldots, n^2$, ordenados de tal modo que la suma de los situados en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales principales coincida con un valor fijo C denominado constante mágica del cuadrado. A continuación, se muestra un cuadrado de orden 3 y constante mágica 15:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Dejamos aquí un cuadrado de orden 4, aún incompleto, que pretende ser mágico. Su destino está en tus manos. No permitas que sus entradas permanezcan vacías:

1		14	4
	6		9
8	10		
			16

(En el próximo número aparecerá la solución.)

Solución al acertijo del número anterior

La producción de aceite de Mateo Arrami, correspondiente a la campaña de 1563/1564, había ascendido a 54 arrobas.

Las habían envasado en un total de 14 tinajas (completas) que podían ser de 3 o 5 arrobas de capacidad. Debemos averiguar el número de tinajas de cada clase:

Sean n y m los números de tinajas de 3 y 5 arrobas, respectivamente, que contienen el aceite de Mateo. Entonces, $n + m = 14$ y $3n + 5m = 54$. Luego $m = 14 - n$ y, efectuando esta sustitución en la segunda ecuación, $3n + 5(14 - n) = 54$.

Por tanto, $-2n+70 = 54$ o, equivalentemente, $2n = 16$. De ello se deduce que $n = 8$ y, en consecuencia, $m = 6$.

Concluimos, de este modo, que Mateo retiró 8 tinajas de 3 arrobas y 6 tinajas de 5 arrobas.

ISSN 1988-5318

Lecturas recomendadas sobre divulgación matemática

Las matemáticas vigilan tu salud.

Modelos sobre epidemias y vacunas

Clara Grima y Enrique F. Borja.

Ficha Técnica
Editorial: Next Door Pub.
188 páginas.
ISBN: 978-84-946669-6-4.
Año: 2017.

Claro, claro, mira tú qué oportunistas estos, van y sacan un libro sobre vacunas justo cuando más se habla del tema. Desde luego, cómo son los de las editoriales. . .

Reconozco que más o menos ese fue mi pensamiento cuando supe de la existencia de este libro hace como un par de meses. Así que cuál no sería mi sorpresa al ver que la fecha de la primera edición databa de. . . ¡noviembre de 2017!, cuando nadie sabía ni en qué continente situar a Wuhan. Es decir, que el carácter visionario de los autores queda fuera de toda duda, porque los contenidos de este libro, si bien siempre serán útiles, desde luego han encontrado un contexto perfecto, por desgracia, más de dos años después.

De dos científicos de profesión (Enrique, físico, y Clara, matemática) y divulgadores de vocación sólo podía salir una obra que combinara rigor y claridad a cuatro manos. En este caso lo que tratan de exponer es el conjunto de razonamientos matemáticos —y por lo tanto definitivos, dejémonos de zarandajas— que sustentan el argumentario a favor de las vacunas como medio más eficaz para impedir la propagación de una enfermedad, todo ello a través de herramientas matemáticas que, si bien pueden estar a un nivel algo elevado para el lector genérico, están bien visualizadas con unos gráficos de lectura muy intuitiva.

El libro comienza con cuatro capítulos donde recuerda (o presenta, según quien lo lea) los rudimentos de los grafos, las redes, la teoría de juegos y las funciones, con vistas a que la segunda mitad del libro sea más comprensible. Es en esta parte donde ya se meten directamente en harina y despliegan los modelos matemáticos para la expansión de las epidemias (SI, SIR, SIS, SIRS y SIR-ν) con los que, apoyados en un lenguaje sencillo la mayoría de las veces, ameno siempre y no pocas veces divertido, van extrayendo conclusiones irrefutables que terminan empujando a los partidarios del movimiento anti-vacunas a la misma caverna de los terraplanistas.

«¿Qué tiempos son estos en los que hay que defender lo obvio?», escribió Bertolt Brecht hace 80 años. Y así seguimos.

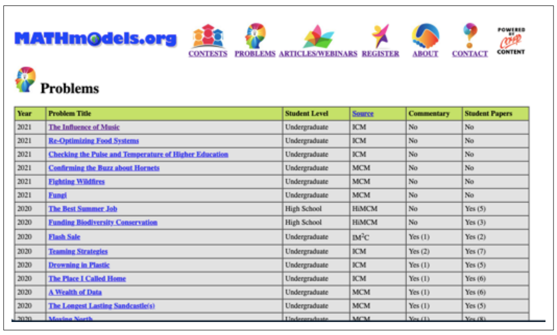
José Ramón Sánchez García
IES Los Ángeles (Almería)

Páginas web y redes sociales

Consorcio para las matemáticas y sus aplicaciones (COMAP)

Se trata de una organización sin ánimo de lucro dedicada a la mejora de la educación matemática desde el punto de vista de la modelización. Para ello desarrolla con rigurosidad materiales multidisciplinarios con los que explorar la realidad usando herramientas matemáticas.

Algunos de esos materiales se distribuyen libremente desde la web, entre las novedades cabe destacar la guía completa de directrices básicas para la enseñanza y evaluación en la educación en modelización matemática.



Year	Problem Title	Student Level	Source	Commentary	Student Papers
2021	The Influence of Music	Undergraduate	ICM	No	No
2021	Re-Optimizing Food Systems	Undergraduate	ICM	No	No
2021	Checking the Pulse and Temperature of Higher Education	Undergraduate	ICM	No	No
2021	Confirming the Buzz about Hornets	Undergraduate	MCM	No	No
2021	Fighting Wildfires	Undergraduate	MCM	No	No
2021	Fungi	Undergraduate	MCM	No	No
2020	The Best Summer Job	High School	HiMCM	No	Yes (5)
2020	Funding Biodiversity Conservation	High School	HiMCM	No	Yes (3)
2020	Flash Sale	Undergraduate	IM^2C	Yes (1)	Yes (2)
2020	Teaming Strategies	Undergraduate	ICM	Yes (2)	Yes (7)
2020	Drowning in Plastic	Undergraduate	ICM	Yes (1)	Yes (5)
2020	The Place I Called Home	Undergraduate	ICM	Yes (1)	Yes (6)
2020	A Wealth of Data	Undergraduate	MCM	Yes (1)	Yes (6)
2020	The Longest Lasting Sandcastle(s)	Undergraduate	MCM	Yes (1)	Yes (5)

En la página web del consorcio se puede encontrar además la información pormenorizada de las diferentes competiciones internacionales que organizan y en las que se proponen retos a diferentes grupos de estudiantes para resolver problemas del mundo real. Hay cuatro grupos de competiciones:

 ISSN 1988-5318

1. MCM, Concurso matemático de modelización, última edición febrero 2021.
2. ICM, Concurso interdisciplinario de modelización, última edición febrero 2021.
3. HiMCM, Concurso matemático de modelización para secundaria, la edición 2020 se realizará en noviembre de 2021.
4. IM2C, Desafío internacional de modelización matemática, desarrollándose hasta el 21 de mayo de 2021.

Puede verse toda la información en las direcciones web *www.comap.com* y *www.mathmodels.org*.

Reseña de José Carmona Tapia y José Escoriza López
Universidad de Almería

TERRITORIO ESTUDIANTE

El triángulo de Pascal y sus curiosidades

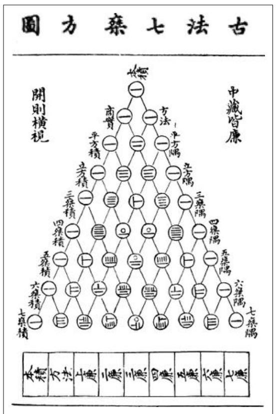
Celia Barbero Navarro
Alberto Díaz López
Delia Sola Molina
Estudiantes del Grado en Matemáticas de la UAL

Todos alguna vez hemos escuchado hablar del *triángulo de Pascal*, pero ¿conocemos todos los secretos que se esconden tras él?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Sabemos que debe su nombre al filósofo y matemático francés Blaise Pascal (1623–1662) ya que desarrolló muchas de sus aplicaciones y fue el primero en organizar la información de manera conjunta. Además, dicho triángulo también es conocido con distintos nombres en algunos lugares del mundo.

En Italia se conoce como *triángulo de Tartaglia* en honor al algebrista italiano Niccolò Fontana (1500–1577), aunque él no aportó conocimientos nuevos sobre el tema, sí escribió un libro sobre datos ya conocidos de este triángulo.



Triángulo de Yang Hui

Por otro lado, en China se le llama *triángulo de Yang Hui* (1238—1298) por su semejanza al triángulo aritmético chino.

También es llamado como *triángulo Khayyam-Pascal* o simplemente *triángulo Khayyam* en Irán por la implicación en sus propiedades de los matemáticos persas Al-Karaji (953—1029) y Omar Khayyám (1048—1131).

Sin embargo, para conocer sus inicios debemos remontarnos al 200 a. C. cuando tuvo lugar la primera representación explícita de un triángulo de coeficientes binomiales.

Para construir este triángulo comenzaremos por la cúspide poniendo un 1 y seguiremos hacia abajo. Cada fila depende de la anterior y empieza y termina por 1. Este «árbol» tiene nodos, que son cada número que compone el triángulo. Si sumamos dos nodos nos dará de resultado el nodo situado debajo de estos dos, y así sucesivamente.

El triángulo de Pascal es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico, pero esto sólo son algunas de sus propiedades, a continuación, conoceremos muchas más.

Binomio de Newton

Además, del triángulo de Pascal también podemos obtener los coeficientes de la expansión de un binomio. Si comenzamos desarrollándolos veremos que todas las cifras escritas en cada fila del triángulo corresponden a los coeficientes del desarrollo de las potencias del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\ (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\ &\dots\end{aligned}$$

Podemos comprobar por inducción que

$$(a+b)^n = z_1a^n + z_2a^{n-1}b + z_3a^{n-2}b^2 + \cdots + z_nb^n$$

siendo z_i con $i = 1, \dots, n$ números naturales que coinciden con los coeficientes que se encuentran en la fila $n+1$ del triángulo de Pascal.

Combinatoria

Dado que la fórmula del binomio de Newton viene dada por:

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

donde r es un entero positivo, se deduce que los elementos de una determinada fila $r+1$ vendrán dados por:

$$\binom{r}{0} \quad \binom{r}{1} \quad \dots \quad \binom{r}{r-1} \quad \binom{r}{r}$$

Potencias de base 2 (2^n)

Una peculiaridad de este triángulo es que llamando *fila 0* a la primera fila, *fila 1* a la segunda, y así sucesivamente, si sumamos los números de la fila n, el resultado es exactamente 2^n.

 ISSN 1988-5318

1	1
1 1	2
1 2 1	4
1 3 3 1	8
1 4 6 4 1	16
1 5 10 10 5 1	32
1 6 15 20 15 6 1	64
1 7 21 35 35 21 7 1	128
1 8 28 56 70 56 28 8 1	256

La suma de los números de la fila 0 es 1, que es 2^0, los de la *fila 1* suman 2, que es 2^1, los de la *fila 2* suman 4, que es 2^2, etc. Es la conocida fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

que se puede probar por inducción.

Números primos

Existe una propiedad sobre el triángulo de Pascal que muestra que si el primer elemento de una fila (sin contar los 1) es un número primo, todos los demás de la fila son divisibles por él.
Ejemplos:

- *Fila 5*: $1-5-10-10-5-1$. El 10 es divisible por 5.
- *Fila 11* : $1-11-55-165-330-462-462-330-165-55-11-1$. El 55, 165, 330 y 462 son divisibles por 11.

Sucesión de Fibonacci

En caso de expresar los elementos del triángulo como una matriz triangular superior, situando los unos en la diagonal principal obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

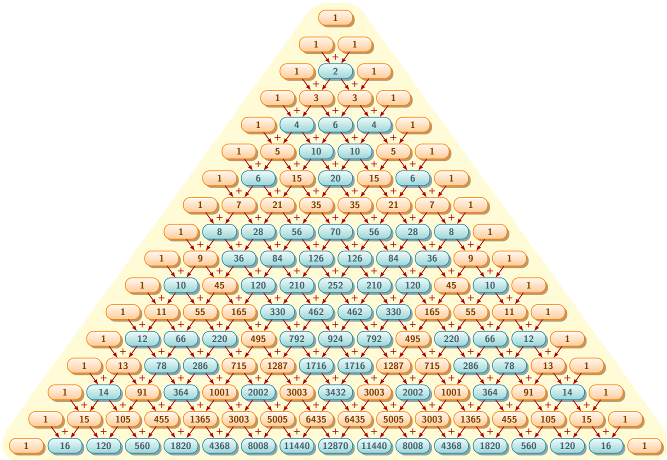
Si denotamos por a_{ij} al coeficiente de la matriz que se encuentra en la fila i, y en la columna j, definiendo:

$$s_j = \sum_{i \geq 0} a_{ij}$$

es decir, si sumamos todos los coeficientes de una determinada columna j, entonces obtendremos el elemento j-ésimo de la *sucesión de Fibonacci*.

Sucesión de Sierpinski

Si en el triángulo de Pascal resaltamos los números impares, aparece el fractal conocido bajo el nombre de *triángulo de Sierpinski*.



Potencias de 11

Y una última curiosidad relacionada directamente con las filas consiste en que si tomamos cada fila como un número, tenemos las potencias de 11.

1	$1 = 11^0$
1 1	$11 = 11^1$
1 2 1	$121 = 11^2$
1 3 3 1	$1331 = 11^3$
1 4 6 4 1	$14641 = 11^4$
1 5 10 10 5 1	$161051 = 11^5$
1 6 15 20 15 6 1	$1771561 = 11^6$

Es decir, la *fila 0*, equivaldría al 1, que es 11^0, la *fila 1*, equivaldría al 11, que es 11^1, la *fila 2*, equivaldría al 121, es 11^2, y así sucesivamente hasta llegar a la *fila 5*. Porque si nos fijamos en las filas en las que hay elementos de más de una cifra (de la 5 en adelante), se debe hacer un paso previo.

En estos casos realizamos la siguiente operación: sumar las cifras de la fila de dos en dos (consecutivamente) a partir del elemento de la izquierda del primer elemento que tiene más de 1 cifra hasta sumar la última cifra del último elemento de la fila con más de una cifra con el siguiente elemento de su derecha.

Para la *fila 5* formada por $1-5-10-10-5-1$ sería:

$$1\ (5+1)\ (0+1)\ 0\ 5\ 1 = 161051 = 11^5$$

Se puede comprobar que con el resto de filas ocurre lo mismo. Veamos para la *fila 6*, $1-6-15-20-15-6-1$. El número equivalente a esta fila será

$$1\ (6+1)\ (5+2)\ (0+1)\ 5\ 6\ 1 = 1771561 = 11^6.$$

Como hemos visto el triángulo de Pascal alberga muchas curiosidades relacionadas con diferentes ramas de las matemáticas, no obstante estas no son las únicas, ya que por ejemplo se podría hablar de la obtención del número π y el número e a partir de dicho triángulo.

Gracias a aquellas personas que se dedicaron (o que se siguen dedicando) a su estudio, hemos conseguido tener conocimiento de estas peculiaridades, que quizás en un futuro sean de gran interés para lograr nuevos avances.

ISSN 1988-5318

¿Quién sabe qué enigmas seguirá encerrando? ¿Serás uno de los siguientes en descubrir algo nuevo de esta misteriosa figura?

Referencias

[1] Miguel Ángel Morales (2016). *Los tesoros matemáticos que esconde el triángulo de Pascal.* El País [9].

[2] Justo Fernández (2015). *Triángulo de Pascal: Cómo se construye y sus propiedades* [10].

[3] Rod Pierce (2020). *El triángulo de Pascal Disfruta Las Matemáticas. Math Is Fun* [11].

■

Responsables de las secciones

[9] *elpais.com/elpais/2016/11/02/el_aleph/1478041877_274987.html*.
[10] *soymatematicas.com/triangulo-de-pascal*.
[11] *www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html*.

 ISSN 1988-5318