

**SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE
TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA**



**UNIVERSIDAD
DE ALMERÍA**

Máster en Investigación y Evaluación Didáctica en el Aula para el Desarrollo
Profesional Docente

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad de Almería

Curso 2020/2021

Tutora: María del Mar López Martín

Trabajo Fin De Máster

ISABEL MARÍA HERNÁNDEZ JURADO

SEPTIEMBRE 2021

Reconocimiento

Investigación realizada en el marco del Grupo PAI, FQM-126 (Junta de Andalucía), el proyecto de investigación EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), el proyecto de investigación PID2019-105601GB-100/AEI/10.13039/501100011033.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a la tutora que ha sido mi guía en la realización de este Trabajo de Fin de Máster, María del Mar López Martín, sin la que no hubiera podido llevar a cabo este proyecto y de la cual he aprendido muchísimo en este año tan complicado de pandemia. Su ayuda, ánimos y apoyo han sido vitales para mí.

En segundo lugar, agradecer a mi familia por su apoyo y palabras de aliento, incluso en aquellos momentos en los que pensaba que no iba a poder más. Siempre han estado ahí en todos los momentos importantes de mi vida, entre los cuales se incluye este: el año de realización del Máster en Investigación y Evaluación Didáctica en el Aula para el Desarrollo Profesional Docente, en el curso 2020-2021, en su modalidad online por el estallido de la pandemia, compaginado con el trabajo de maestra que desempeñaba por la mañana.

Para finalizar, dar las gracias a mis amigas y amigos que de vez en cuando me preguntaban cómo estaba, tras etapas “desaparecida” por los estudios y el trabajo, aspecto que nunca me han reprochado; al contrario, siempre han estado ahí para darme ese empujón tan necesario como el aire que respiramos en momentos clave.

Ha sido un año muy duro en todos los sentidos y sin todas y cada una de las personas que he mencionado no hubiera sido lo mismo. Por todo ello, infinitas gracias.

RESUMEN

La probabilidad se ha incluido en el currículo escolar como promotora del aprendizaje para recoger, describir e interpretar datos, imprescindibles para aprender a discernir las diferentes posibilidades que ofrecen las situaciones arbitrarias de la vida cotidiana (Vásquez y Alsina, 2016). Para llevarla a cabo, en las aulas se hacen uso de los manuales de texto, los cuales siguen siendo hoy en día el recurso más utilizado por excelencia. Por este motivo, se ha realizado el presente estudio centrado en analizar los significados de la probabilidad presentes en los libros de texto desde 1° a 6° de Educación Primaria de la editorial Anaya desde un enfoque ontosemiótico (EOS).

Mediante este análisis de contenido se reflejan en los resultados una alta presencia del significado intuitivo relacionado con la identificación de los sucesos aleatorios y expresión del grado de ocurrencia, a través del cual se trabaja el significado institucional que tanto peso tiene en los manuales. Por otro lado, se halla un enorme desarrollo del significado clásico asociado a juegos de azar, familiares para el alumnado y escasamente útiles para desenvolverse en su vida cotidiana. Seguidamente, el significado frecuencial no se relaciona con la probabilidad y el significado subjetivo apenas tiene presencia en los textos analizados.

Finalmente, se concluye con la baja idoneidad didáctica de los manuales investigados, por lo que el presente estudio puede ayudar a ofrecer luz en una posible futura reconfiguración del enfoque y tratamiento de la probabilidad en base a lo analizado.

Palabras clave: Educación Primaria, Enfoque Ontosemiótico, probabilidad, significado, libro de texto

ABSTRACT

Probability as an educational discipline has been the last content to be included in the curricular guidelines. To carry it out, text manuals are used, which are still today the most widely used resource par excellence. For this reason, the present study has been carried out focused on analyzing the meanings of the probability present in the textbooks from 1st to 6th grade of Primary Education of the Anaya publishing house from an ontosemiotic approach (EOS).

Through this content analysis, a high presence of intuitive meaning related to the identification of random events and expression of the degree of occurrence is reflected in the results, through which the institutional meaning that appears to a large extent in the manual is

worked. On the other hand, there is an enormous development of the classical meaning associated with games of chance, familiar to students and hardly useful to function in their daily life. Next, the frequency meaning is not related to probability and the subjective meaning is hardly present in the texts analyzed.

Finally, it is concluded with the low didactic suitability of the investigated manuals, so that the present study can help to offer light in a possible future reconfiguration of the approach and treatment of probability based on what has been analyzed.

Keywords: Primary Education, Ontosemiotic Approach, probability, meaning, textbook.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1. LA PROBABILIDAD EN EL ÁREA EDUCATIVA	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	2
1.3 LA IMPORTANCIA DE LA PROBABILIDAD	3
1.4 MARCO TEÓRICO	4
1.4.1 Tipos de objetos matemáticos en el EOS	5
1.4.2. Significados matemáticos en el EOS	6
1.4.3. Significados de la probabilidad	7
1.4.4. Criterios de idoneidad didáctica	8
1.5 OBJETIVOS E HIPÓTESIS	10
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES	12
2.1. INTRODUCCIÓN	12
2.2. INVESTIGACIONES SOBRE LOS LIBROS DE TEXTO	12
2.2.1. Perspectivas de los libros de texto	13
2.2.2. Otras categorías de investigación en los libros de texto	14
2.3. ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO	15
CAPÍTULO 3. LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA	17
3.1. INTRODUCCIÓN	17
3.2. METODOLOGÍA	17
3.2.1. Muestra	17
3.2.2. Método	18
3.3. ANÁLISIS DE LAS VARIABLES	20
3.3.1. Lenguaje	20
3.3.1.1. <i>Expresiones cotidianas y formales</i>	20
3.3.1.2. <i>Lenguaje numérico</i>	22
3.3.1.3. <i>Lenguaje simbólico</i>	24
3.3.1.4. <i>Lenguaje tabular</i>	25
3.3.1.5. <i>Lenguaje gráfico</i>	28
3.3.2. Argumentos	31
3.3.3. Situaciones-problema	33
3.3.4. Conceptos	36

3.3.4.1. <i>Significado intuitivo</i>	37
3.3.4.2. <i>Significado clásico (o laplaciano)</i>	38
3.3.4.3. <i>Significado frecuencial</i>	40
3.3.4.4. <i>Significado subjetivo</i>	41
3.3.5. Propiedades	42
3.3.5.1. <i>Significado intuitivo</i>	42
3.3.5.2. <i>Significado clásico</i>	44
3.3.5.3. <i>Significado frecuencial</i>	45
3.3.5.4. <i>Significado subjetivo</i>	47
3.3.6. Procedimientos	49
3.3.6.2. <i>Significado clásico</i>	50
3.3.6.3. <i>Significado frecuencial</i>	51
3.3.6.4. <i>Significado subjetivo</i>	52
3.4. CONCLUSIONES RESULTADOS	53
CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES	55
4.1. INTRODUCCIÓN	55
4.2. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN	55
4.2.1. Conclusiones en base a objetivos e hipótesis	55
4.2.2. Conclusiones en base a la idoneidad didáctica	57
4.3. LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	61
REFERENCIAS	63

CAPÍTULO 1. LA PROBABILIDAD EN EL ÁREA EDUCATIVA

1.1. INTRODUCCIÓN

Se piensa que la analogía entre azar y ciencias religiosas ha podido influenciar en el hecho de que la probabilidad no termine de matematizarse del todo (Borovcnik y Kapadia, 2014). El término de probabilidad ha suscitado numerosos debates e interpretaciones que aún hoy en día perduran, estableciendo su analogía con el azar a lo largo de la historia (Batanero, 2015, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero et al., 2005; Borocvnik y Kapadia, 2014). Tal y como defienden Batanero et al. (2005) la literatura de la probabilidad se caracteriza por poseer cantidad de situaciones problemáticas “desafiantes”, mostrando que el azar e intuición a menudo nos confunden.

En el ámbito educativo, la probabilidad fue introducida hace escasas décadas (Batanero et al., 2011; Jones et al., 2007) con un determinado fin: que el alumnado construya el “conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia” (Gómez-Torres et al., 2015, p. 73) para convertirse en futuros/as ciudadanos/as capaces de resolver exitosamente cualquier situación que se presente.

La inclusión de la probabilidad al currículo tiene su origen en el *National Council of Teachers of Mathematics* (1989; 2000), que propuso el área de “Datos y Azar”, cuyos programas educativos desarrollarán capacidades de análisis en el alumnado a través de una formación probabilística, iniciando su formación desde preescolar. En el ámbito nacional se establece que la probabilidad debe ser trabajada desde una perspectiva experimental en el aula, proporcionando al alumnado situaciones estocásticas de la vida cotidiana.

En un primer inicio de esta investigación, en el primer capítulo se ha analizado el papel que ocupa la matemática en el currículo educativo español destacando el bloque que nos ocupa, la probabilidad. Posteriormente, en la Sección 1.3, se justifica la importancia de trabajar la probabilidad desde cualquier etapa educativa, contemplando las múltiples ventajas que se obtiene de ello, entre las cuales podemos destacar la superación de un pensamiento determinista y amparar la existencia de la arbitrariedad de las situaciones que nos rodean. Con objeto de

delimitar el marco teórico, en la Sección 1.4 se describen los elementos del Enfoque Ontosemiótico necesarios para abordar el objetivo del TFM (Godino, 2002; Godino, 2011; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007) y se concretan los diferentes significados que engloban a la probabilidad para finalizar los criterios de idoneidad didáctica. Para concluir se detallan los objetivos e hipótesis que, posteriormente, serán discutidas en el Capítulo 4.

1.2. LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero (MECD, 2014), establece el currículo básico de Educación Primaria, distinguiéndose cuatro categorías de asignaturas: troncales, específicas, libre configuración autonómica. En el bloque de asignaturas troncales se garantizan los conocimientos y competencias que permitan adquirir una formación sólida y continuar con aprovechamiento las etapas posteriores en aquellas asignaturas que deben ser comunes a todo el alumnado (MECD, 2014, p.3).

La asignatura de Matemáticas tiene carácter de troncal y debe ser cursada por los alumnos y las alumnas en cada uno de los cursos que componen la Etapa de Educación Primaria. Dicha asignatura, se organiza en torno a cinco bloques de contenido:

1. Procesos, métodos y actitudes matemáticas
2. Números
3. Medida
4. Geometría
5. Estadística y probabilidad

El Bloque 1 constituye el eje vertebrador del resto de bloques, que deberán ser trabajados de forma cíclica, volviendo a los contenidos trabajados con anterioridad y enlazando con los nuevos contenidos a asimilar. Los contenidos relacionados con el tema que se aborda en la presente memoria se recogen en el Bloque 5 destacando el “Carácter aleatorio de algunas experiencias. Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad” y donde se establece los criterios de evaluación:

4. Observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. 5. Identificar, resolver problemas de la vida cotidiana, adecuados a su nivel, estableciendo conexiones entre la realidad y las matemáticas y valorando la utilidad de los conocimientos matemáticos adecuados y reflexionando sobre el proceso aplicado para la resolución de problemas. (MECD, 2014, p.39)

Asimismo, señala como único estándar de aprendizaje

5.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. (MECD, 2014, p. 39).

Una pieza esencial para construir el aprendizaje de la probabilidad y la toma de decisiones contextos de incertidumbre es el lenguaje probabilístico. Autores como Gómez-Torres et al. (2013), resaltan la importancia de iniciar la enseñanza de la probabilidad a partir del lenguaje de la vida cotidiana para posteriormente pasar a un “mayor nivel de abstracción”. Así, a través de un lenguaje básico probabilístico, juegos, dinámicas, experimentación y observación de fenómenos naturales, se conseguirá que el alumnado “aprenda a reconocer la aleatoriedad” (Gómez-Torres et al., 2015, p. 73), para que al final de la Etapa de Educación Primaria sea competente en la comparación y estimación de ciertas probabilidades sencillas.

1.3 LA IMPORTANCIA DE LA PROBABILIDAD

Debido a la presencia que ha tenido y tiene en la cotidianeidad de las personas, tanto en el ámbito social, personal, profesional como político, la probabilidad adquiere mayor sentido cuando se enlaza con su historia (Bell, 1985), ya que ofrece contextos atractivos que presentan la oportunidad de meditar sobre el porqué de la aleatoriedad en nuestras vidas (León, 2009).

En diferentes países, como Australia o Nueva Zelanda, se considera la probabilidad como un contenido relevante a trabajar con el alumnado debido a la necesidad de alfabetización probabilística de todos los/as ciudadanos/as (Gal, 2005), por lo que su incorporación en el plan de estudios de cada centro se ha convertido en una realidad necesaria (ACARA, 2010; CCSSI, 2010; ME, 2007).

Igual que sucede con el resto de las ciencias, las matemáticas también son el resultado del “ingenio y construcción humana” con el objetivo de proporcionar respuestas a los problemas mundanos (Batanero, 2005, p. 249). En este sentido, probabilidad se ha incluido en el currículo escolar como promotora del aprendizaje de conceptos básicos para recoger, describir e interpretar datos, imprescindibles para aprender a discernir las diferentes posibilidades que ofrecen las situaciones arbitrarias de la vida cotidiana (Vásquez y Alsina, 2016).

La introducción de este tema en la educación refleja la necesidad de superar el pensamiento cerrado y determinista, aceptando la existencia del azar en la naturaleza humana

(Batanero et al., 2016). Asimismo, se hace necesario equipar a los ciudadanos y las ciudadanas con estrategias y formas de razonar que les ayude en la toma de decisiones en situaciones cotidianas en las que el azar está presente. Este hecho ha supuesto un cambio en el enfoque de la enseñanza de la probabilidad hacia la mirada frecuentista, basada en la simulación y experimentación del individuo con el objetivo de brindar a los niños y las niñas una experiencia estocástica desde la infancia (Estrada y Batanero, 2020).

Sin embargo, el impacto de las propuestas curriculares al alumnado dependerá en gran medida de la voluntad e interés del profesorado, contenido con el que los docentes pueden llegar a sentirse no del todo cómodos cuando lo enseña. Este hecho puede venir fundamentado por haber pasado por un proceso de aprendizaje memorístico y rutinario (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018). Esta cuestión es adquiere cierta importancia, pues si el profesorado tiene una actitud positiva podrá conseguir transmitir dicha actitud a sus estudiantes (Gal y Ginsburg, 1994), despertando la motivación necesaria para el estudio probabilístico (León, 2009).

1.4 MARCO TEÓRICO

El enfoque onto-semiótico (EOS) considera que la matemática y sus objetos nacen a partir de las prácticas de las personas al resolver situaciones problemáticas (Godino et al., 2012; 2007). Dichas prácticas están articuladas en todo momento por el lenguaje utilizado en ellas que, en este caso, es instrumento de representación (Gómez-Torres et al., 2013). En las situaciones comunicativas dadas en el aula también deben contemplarse las situaciones-problema y los modos de expresión y argumentación, de los que surgirán determinadas interpretaciones que deberán ser guiadas por el/la docente (Godino, 2003). Para llevar esto a cabo, según este autor, es necesario conocer los objetos que emergen de dichas situaciones. En este sentido, ha estudiado ontológica y semióticamente las relaciones y procesos implícitos en la interpretación de los diferentes “sistemas de signos matemáticos” (p. 25) que se ponen en práctica en las instituciones escolares.

En la presente memoria se tendrá en cuenta el enfoque onto-semiótico (EOS) de la matemática, realizando, en primer lugar, una aproximación teórica de los objetos y significados matemáticos utilizados en el EOS, finalizando con el marco teórico que abarca los significados conferidos a la probabilidad (tema en cuestión que se pretende investigar), así como determinados criterios de idoneidad que el profesorado debe tener en cuenta en didáctica de la matemática.

1.4.1 Tipos de objetos matemáticos en el EOS

Godino y Batanero (1998) y Godino (2002) proponen un modelo cuyo punto de partida es una situación problemática, amparando al objeto matemático como aquel que nace de las prácticas sociales asociadas a resolver *situaciones-problema* de ámbito matemático. En su significado intervienen operaciones y discursos problemáticos (en este campo, relativo a problemas matemáticos que resolver). En el campo de la probabilidad, se distinguen aquellas prácticas en las que se deben resolver problemas probabilísticos, concretamente estudiar, analizar y predecir “fenómenos aleatorios” (Batanero, 2005, p. 249).

Por otro lado, cabe destacar los *componentes* de significado, útiles para analizar: las soluciones dadas por los individuos a las tareas matemáticas y los procesos intervinientes en la tarea de enseñar y aprender (Batanero, 2005). Dichos componentes son:

1. *El campo de problemas.* En el terreno probabilístico se puede citar el mítico problema que propuso el Duque de la Toscana a Galileo, en el que se explica por qué, aunque las sumas de los números 9 y 12 pueden darse en el mismo número de veces que las sumas de 10 y 11, los/as jugadores/as apuestan por estas últimas.

2. *Elementos lingüísticos.* En el terreno de la probabilidad se utiliza una amplia gama de términos, en las que se incluyen tablas (valores), gráficos, símbolos, además de aquellos simulacros computerizados (Batanero, 2005).

3. *Procedimientos y algoritmos.* Al resolver situaciones problemáticas primitivas, nacen sistemas individuales de resolución de problemas en un ámbito determinado, llegando a ser objetos de estudio. Un ejemplo en probabilidad podría ser nombrar casos posibles y favorables de un suceso para hallar su número, así como el cálculo probabilístico mediante división.

4. *Definiciones y propiedades.* La definición de un concepto y sus propiedades son consideradas como “elementos de significado diferentes” (Godino, 2002). Las prácticas matemáticas incluyen fenómenos y términos previamente conocidos que servirán en la futura resolución de problemas. Sirvan de ejemplo, que la probabilidad es siempre positiva; así como los teoremas propios de la probabilidad y su analogía con términos de esperanza.

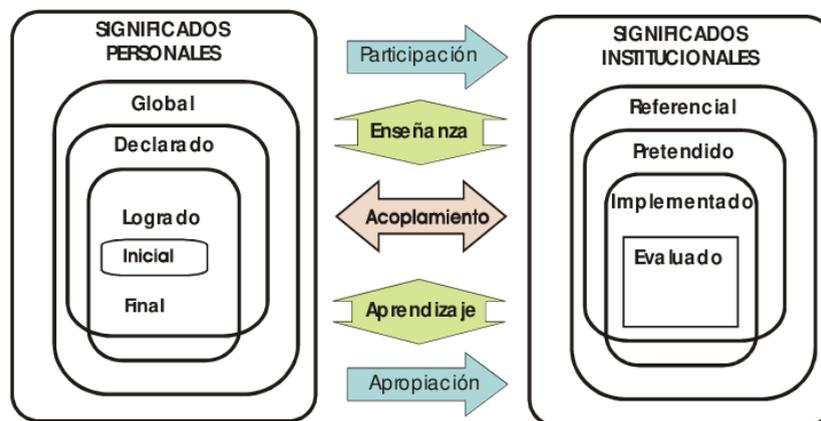
5. *Argumentos y demostraciones.* Un ejemplo práctico de argumento y demostración que se puede utilizar en probabilidad fue la solución que propuso Galileo al problema enunciado por el Duque de la Toscana a través de una serie de enumeraciones.

1.4.2. Significados matemáticos en el EOS

En el marco del EOS se diferencian distintos *significados* de un objeto matemático: uno significado proveniente de la institución y otro, de la propia persona resolutora del objeto dado; pues la interpretación o el significado que le puede atribuir un alumno o alumna de nuevo ingreso a un determinado objeto matemático puede no ser el mismo que se ha acordado en una determinada institución educativa (Batanero, 2005). Hacer demasiado hincapié en la dimensión institucional de los objetos matemáticos puede dejar a un lado el terreno mental de los procesos cognitivos, los cuales hay que tener muy presentes en didáctica de la matemática.

De este modo, Godino y Batanero (1994) argumentan que los significados atribuidos a los objetos matemáticos deben ser producto de la interacción de las personas con dichos objetos. Por un lado, el *significado institucional* de los objetos matemáticos (véase Figura 1.1) hace alusión al conglomerado de prácticas llevadas a cabo en la escuela para resolver situaciones problemáticas, teniendo en cuenta los diferentes objetos matemáticos. Estos métodos didácticos corresponden a los significados que les otorgan las instituciones a los objetos matemáticos, constituyendo “el sistema de referencia de la enseñanza” (Ávila et al., 2010, p. 342).

Figura 1.1. Tipos de significados institucionales y personales



Así, en la escuela primaria el currículo establece una serie de definiciones y ejemplos prácticos, en los que se proponen ejercicios de cálculo, a veces manual y otras, con calculadora.

Por otro lado, se encuentra el *significado personal* de los objetos matemáticos, es decir, las habilidades y destrezas para resolver las situaciones problemáticas de la vida cotidiana, así como el lenguaje utilizado en ellas. Estas dependerán del propio individuo y del tiempo disponible, así como del resto de elementos aleatorios (Godino y Batanero, 1994). Cabe destacar el carácter parcialmente observable de dichos objetos, pues también están incluidas las prácticas

no observables que constituyen los procesos de asimilación.

1.4.3. Significados de la probabilidad

Si nos adentramos en el campo de la probabilidad en Educación Primaria, hemos de considerar que el alumnado de 6 años ya ha utilizado en su vida cotidiana expresiones y términos relativos a sucesos aleatorios, aunque no necesariamente hayan tenido el mismo significado que pretendemos enseñar (Gómez-Torres et al., 2013). Conviene destacar algunos de los significados que hoy en día el alumnado de Educación Primaria le confiere a la probabilidad:

- *Significado proveniente de la intuición.* Las ideas primitivas del campo probabilístico se recuperaron al asignar un valor numérico a las creencias para comparar la veracidad de los acontecimientos (Batanero, 2005). Las ideas intuitivas acerca del azar también aparecen en quienes no han recibido formación, utilizando expresiones cotidianas relativas a posibilidad y seguridad para referir acontecimientos no del todo certeros (Gómez-Torres et al., 2015). En dicho enfoque se utilizan expresiones comparativas tipo “más probable”, “muy probable”. En ocasiones se organizan de mayor a menor creencia y “se cuantifican en casos sencillos, sin formalismo matemático” (Gómez-Torres et al., 2015, p. 75).
- *Significado clásico o laplaciano.* Existieron matemáticos/as en el siglo XVII que resolvían situaciones problemáticas en las que intervenía el azar, pero no fue hasta el siglo XVIII cuando el término probabilidad se formalizó (Gómez-Torres et al., 2015). En dicha época, existía una inquietud extendida por prever los beneficios económicos, hecho que resulta en la definición de lo esperado en matemáticas, previo a la probabilidad (Heitele, 1975). Por otro lado, las cartas enviadas entre Fermat y Pascal son consideradas como los inicios del concepto de probabilidad; aunque entre ellos dicha teoría no se definía explícitamente (Batanero y Díaz, 2007). Así, De Moivre (1967) establece el primer significado oficial del concepto de probabilidad, rediseñado de forma posterior por Laplace (1985; 1814):

Si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de sucesos totales posibles y el denominador es el número de ocasiones posibles con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción sería una definición propia de la probabilidad de ocurrencia. (De Moivre, 1967, 1718, p. 1).

En 1914 Laplace dio origen a la denominada regla de Laplace para calcular “la probabilidad de un suceso que puede ocurrir en un número finito de modalidades” (Batanero, 2005, p. 254) para lo cual se emplea la siguiente fórmula: “fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles” (Laplace,

1985; 1814, p. 28). Dicha expresión no es aplicable a casos cuyos sucesos aleatorios puedan ser infinitos (por ejemplo, las variables continuas) o cuando no se da la probabilidad equitativa, limitando su uso en situaciones ajenas a juegos azarosos (Batanero et al., 2005).

- *Significado frecuencial.* La ley de los grandes números de Bernoulli (1713) demostraba la objetividad de la probabilidad al proponer la posibilidad de establecer probabilidades en acontecimientos aleatorios en función de su frecuencia relativa en una amplia serie de experimentos (Batanero, 2005). En 1928 se definió formalmente el carácter frecuencial de la probabilidad (von Mises, 1952; 1928) que apela a la inexactitud de los valores obtenidos en el cálculo de la probabilidad (aproximación, estimación) o la imposibilidad de encontrar valores idénticos en los experimentos (Godino et al., 1987). En el terreno educativo se convierte en nexo entre el campo estadístico y probabilístico (Gómez-Torres et al., 2015).
- *Significado subjetivo.* Bayes estableció una regla con su mismo nombre en la que se puede hallar previamente la probabilidad de un acontecimiento analizando las consecuencias posteriores (Batanero, 2005). En este significado la probabilidad forma parte de las creencias personales en función de los conocimientos y experiencias previas (De Finetti, 1974; 1937; Ramsey, 1931). Este significado adquiere un gran valor educativo al ofrecer una visión formal de las ideas intuitivas (Batanero, 2005).
- *Significado matemático (axiomático).* Cada suceso aleatorio debe guardar coherencia entre las operaciones lógicas que derivan de dichos sucesos. Kolmogorov (1933) estableció tres axiomas que decretan las reglas a cumplir en los distintos sucesos para hallar su probabilidad. Así, la probabilidad se define como un modelo a utilizar para “describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios” (Batanero, 2005). Todos estos significados han propiciado el desarrollo de la denominada *Teoría de la Probabilidad*, que propone “modelos para fenómenos donde la falta de certeza en los resultados es notable” (Batanero et al., 2005, p. 2). Dicha teoría defiende la modelización donde cada uno de los significados probabilísticos son interdependientes.

1.4.4. Criterios de idoneidad didáctica

Según Godino (2013) el primer paso es reconocer el significado referente de la probabilidad en la etapa educativa, en este caso, la Educación Primaria. Así, establece seis criterios de idoneidad didáctica (véase Figura 1.2) que se detallan a continuación:

- *Idoneidad epistémica*: capacidad de representación de los significados institucionales, partiendo de un significado referencial. Será vital proporcionar situaciones problemáticas, experiencias reales, representaciones, modelizaciones y simulaciones en las que entra en juego el azar, con una organización previa de las sesiones de aprendizaje en las que se deberá contar con tiempo y espacio suficientes, empleando un lenguaje adecuado al nivel cognitivo en el que se conectan los significados y objetos que intervienen en probabilidad (Castillo et al., 2021).

- *Idoneidad cognitiva*: capacidad en la que los significados que se pretenden son desarrollados potencialmente, así como la cercanía de los aprendizajes asimilados con aquellos que se pretenden conseguir.

- *Idoneidad interaccional*: el proceso de instrucción será más eficiente en el momento que permite detectar los conflictos cognitivos a nivel semiótico y promueve un espacio de resolución de los mismos.

- *Idoneidad mediacional*: nivel de adaptación de los recursos espaciales, materiales y temporales al proceso de enseñanza y aprendizaje.

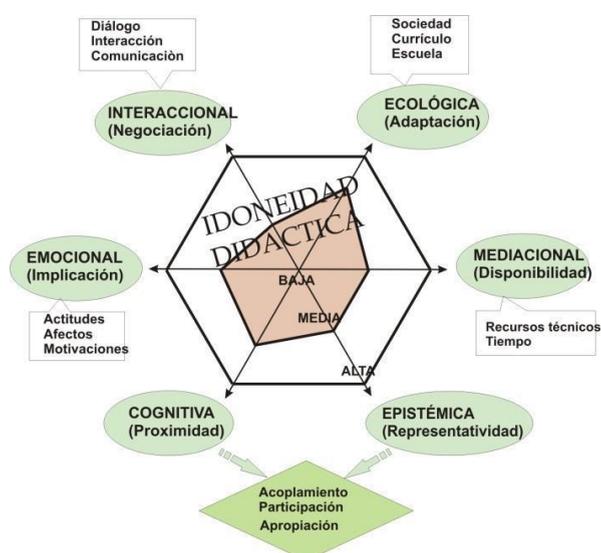
- *Idoneidad afectiva*: en ella intervienen la motivación, implicación e interés tanto del profesorado como del alumnado, así como todos aquellos componentes emocionales inmersos en el proceso de instrucción.

- *Idoneidad ecológica*: nivel en que el proceso de enseñanza consigue adaptarse a las condiciones del contexto socioeducativo (proyecto curricular de centro, colegio y sociedad).

De este modo, los manuales analizados en el presente estudio tienen carencias epistémicas, pues, aunque utilizan un lenguaje acorde al nivel educativo y proporcionan situaciones problemáticas, no se da la oportunidad al alumnado de trabajar con información previamente recogida (al manipular información dada por el libro de texto). Tampoco se ofrece al alumnado posibilidad de simulaciones.

A modo de conclusión, las lecciones de los manuales de texto pueden concebirse como fuente potencial de conocimiento y guía docente en la práctica didáctica (Castillo et al., 2021), pero no debe convertirse en el único mediador de enseñanza.

Figura 1.2. Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116)



1.5 OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El objetivo general del presente trabajo es *analizar la presencia de la probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria*. Dicho objetivo se divide en dos objetivos específicos:

- OE1. *Realizar una síntesis de las principales investigaciones centradas en analizar los libros de texto*. Para tener en cuenta del marco teórico de partida.
- OE2. *Analizar los objetos matemáticos primarios en base al enfoque del EOS relacionados con la probabilidad*. Para detectar qué objetos matemáticos probabilísticos se trabajan en los manuales analizados.

En segundo lugar, se establecen las hipótesis iniciales de dicho análisis, abordadas en el Capítulo 4. Para elaborarlas se ha tenido en cuenta la literatura consultada en el presente trabajo, como la aportada por Batanero y Serrano (2002). De esta manera, se destacan las siguientes:

H1. *Ausencia de la probabilidad en los primeros cursos de educación primaria*. Contrario a lo que establece la normativa, se piensa que la probabilidad no se aborda desde los primeros niveles.

H2. *Gran presencia de fenómenos de probabilidad asociadas a los juegos de azar*. Se prevé un trabajo de la probabilidad a través de juegos de azar conocidos por el alumnado, es decir, familiares, tal y como recomienda la normativa curricular.

H3. *Se presentan tablas, gráficos y representaciones icónicas generalmente centradas*

en trabajar más las estadísticas descriptivas que la probabilidad. Se cree que las representaciones tabulares, gráficas e icónicas no están lo suficientemente conectadas con la probabilidad.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

2.1. INTRODUCCIÓN

Cierta es la conveniencia actual de la formación en probabilidad de todo ser humano para desenvolverse con éxito en las situaciones arbitrarias de la vida en una sociedad caracterizada por la excesiva sobrecarga de información (León, 2009). Por tanto, en todo proceso de enseñanza-aprendizaje el conocimiento por parte de los/as docentes en torno a los diferentes conceptos que se trabajan es esencial para garantizar el éxito en el aprendizaje.

Los libros de texto se han caracterizado por la dependencia que tienen algunos profesionales del ámbito educativo (Negrin, 2013), siendo una herramienta fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de una gran variedad de materias. El papel que juegan los manuales en el aula ha provocado que surja una líneas de investigación centradas en el análisis de estos. Por tal motivo, y considerando el objetivo de la memoria, se realiza un recorrido por las perspectivas de los libros de texto y otras categorizaciones, para finalizar con un análisis del tratamiento de la probabilidad en los manuales escolares a partir de estudios realizados por diferentes investigadores e investigadoras.

2.2. INVESTIGACIONES SOBRE LOS LIBROS DE TEXTO

Los libros de texto han desatado numerosas controversias, convirtiéndose en objetos dignos de estudio que abarcan diversas disciplinas, abriendo el campo de investigación desde las diferentes áreas (Negrin, 2013). Bien es cierto, que los manuales se han convertido en una herramienta indispensable en las aulas a pesar de las grandes voces pedagógicas que discrepan sobre este asunto. Por otro lado, con la utilización sistemática de los libros de texto como objetos de organización del aprendizaje se corre el riesgo de “entregar la educación a las editoriales” (p. 188). El autor sostiene que el/la docente puede salirse de lo que reza el libro cuando lo estime oportuno.

En este sentido, el manual de texto destaca por ser elemento dinamizador del proceso de enseñanza (Molina y Alfaro, 2019; Área y González, 2015; Varela, 2008) que muestra lo que se está realizando en el aula (Castillo et al., 2021; Braga y Belver (2016), Font y Godino 2007).

Por ello, analizar su idoneidad debería ser un aspecto vital en la formación de profesores de matemáticas, aspecto no muy investigado aún hoy día.

Mención especial merece Área (1999), quien en su larga trayectoria de investigación ha estudiado, en primer lugar, el juicio propio del profesorado hacia las vías de enseñanza y, en segundo lugar, la utilización de los manuales para planificar y poner en práctica la enseñanza. De dichas investigaciones se extraen las siguientes conclusiones:

- ✓ Los/as docentes no emplean el tiempo suficiente para elaborar, seleccionar y organizar los recursos materiales.
- ✓ Los manuales y sus orientaciones metodológicas son el recurso material más utilizado en la planificación didáctica.

Por ello, conviene destacar las distintas perspectivas a través de las cuales se pueden concebir y analizar los libros de texto, entre las que destaca la *perspectiva histórica*, incluyendo otras categorías de análisis de los propios manuales.

2.2.1. Perspectivas de los libros de texto

En primer lugar, conviene mencionar la *perspectiva histórica* de los libros de texto, relacionada directamente con las *Tecnologías de la Información y Comunicación* (TIC, en adelante). En este sentido, Choppin (2004) destaca cuatro funciones de los libros escolares:

1. Función *referencial, curricular o programática*. El manual muestra lo que pide el currículo, representando el soporte educativo preferido por excelencia.
2. Función *instrumental*: propone actividades, estrategias y técnicas de estudio que ayudarán a la asimilación de información y de competencias, a la resolución de problemas, entre otras.
3. Función *ideológica y cultural*. Acogida desde el siglo XIX, con la instauración del libro de texto como material indispensable para formar al alumnado.
4. Función *documental*. El libro aporta numerosos textos e iconos a través de los cuales el alumnado podrá desarrollar su capacidad crítica.

Según Choppin (2004), dichas funciones han experimentado una notable evolución en occidente. Por otro lado, cabe destacar la función *ideológica y cultural*, sobre todo en libros de texto del siglo XIX, en cuya época la religión tenía una presencia importante en las escuelas. En segundo lugar, mencionar la función *instrumental* que surgió de la reflexión extendida acerca

de lo que se enseñaba en las escuelas y lo que contenían los manuales, a finales de dicho siglo, apelando a la necesidad de una moral pedagógica, más que religiosa. Finalmente, nace la función *documental*, revolucionando por completo el pensamiento sobre la organización de los manuales de las tres últimas décadas (Negrin, 2013).

2.2.2. Otras categorías de investigación en los libros de texto

Si antiguamente los manuales fueron diseñados para transmitir información y determinados valores, hoy en día se han convertido en una herramienta y recurso más en el aula. Cabe destacar que gran parte de los análisis de manuales se realizan por parte de investigadores con un interés en particular, un objetivo completamente distinto que el sugerir propuestas didácticas que puedan ser de utilidad al profesorado (Negrin, 2013).

Así, se han estudiado las ventajas e inconvenientes del libro de texto como material didáctico. Entre sus ventajas destacan ser herramientas flexibles y vertebradoras del proceso de enseñanza (Área y González, 2015; Molina y Alfaro, 2019; Varela, 2008). En un único formato quedan resumidos los contenidos, bien estructurados y en consonancia con los proyectos curriculares de centro. Entre sus inconvenientes destacan ser elementos complicados de manipulación por parte del profesorado, requiriendo grandes cantidades de tiempo y formación; no favorecer la comunicación con las familias; no incluir a todo el alumnado con necesidades educativas (Molina y Alfaro, 2019), constituyendo en sí mismo un obstáculo como objeto de transmisión de conceptos matemáticos (Fernández y Caballero, 2017).

Para solventar las demandas docentes se ofrecen diferentes formatos y tipos de libros, encontrándonos con un formato en línea asociado al libro troncal y elementos complementarios (San Martín y Peirats, 2018). Así, se hace uso de explicaciones complementarias que guían la utilización de los gráficos (Cárdenas, 2001) en los textos, acercándose al carácter de *hipertextos*. De esta forma, la información no se presenta de forma continua ni articulada, imposibilitando una lectura seguida. De acuerdo con Choppin (2004), los manuales de texto hacen *zapping*, convirtiéndose en materiales en los que leer y no para leer, como sucede en otro tipo de libros.

En la misma línea, el grupo docente de investigadores/as Eleuterio Quintanilla (2003) afirma que el contenido de los manuales proporciona datos incompletos, sesgados, en los cuales llama la atención la información omitida.

2.3. ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO

Si nos adentramos en el terreno de la probabilidad presente en los libros de texto, es interesante tener en cuenta que el análisis de esta en los manuales escolares, aún a día de hoy, es bastante escaso y, mucho más, en Educación Primaria; concentrándose las investigaciones realizadas, en mayor medida, en Educación Secundaria (Gómez-Torres et al., 2013).

En este sentido, del *Bloque 5. Estadística y Probabilidad*, cabe destacar el estudio mayoritario centrado en la estadística en la que apenas se trabaja la probabilidad, por ello resulta necesario seguir investigando en la temática, motivo por el que se realiza la presente investigación, pues no ha sido un ámbito investigado con la suficiente profundidad.

En cuanto al terreno probabilístico, Gómez-Torres et al. (2013) investigaron el lenguaje matemático en libros de texto de diferentes editoriales de la etapa primaria y, concretamente, en el campo de la probabilidad los libros muestran un vocabulario matemático técnico que en el uso cotidiano del alumnado no se utiliza de la misma forma. Asimismo, los experimentos y sucesos aleatorios comprendían una mayor riqueza en el lenguaje verbal, referenciaban un significado *clásico*, igualando en cierta manera el número de expresiones utilizadas en un lenguaje cotidiano (intuitivo). No obstante, existe escaso número de expresiones dedicadas a los significados frecuenciales, a sabiendas que es un contenido propuesto en el currículo. Por otro lado, son pocas las expresiones puramente matemáticas, incluyéndose en la totalidad de ciclos el lenguaje dedicado al *azar*.

Por otra parte, Vásquez y Alsina (2014) realizaron una investigación sobre cómo se trabajaba la probabilidad en libros de texto españoles y chilenos de Educación Primaria. En los manuales españoles se adquiere el lenguaje propio de la probabilidad, cuantificar y calcular probabilidades, fomentando el aprendizaje de la probabilidad de forma cercana, principalmente en los cursos iniciales de la etapa primaria. Sin embargo, en los manuales chilenos la probabilidad se propone explícitamente en segundo, cuarto y quinto; y en primer y sexto curso no se alude a la probabilidad, difiriendo con lo establecido en el currículo escolar.

Gómez-Torres et al. (2015) analizan el lenguaje probabilístico en dos editoriales de manuales escolares españoles de la etapa primaria. En sus resultados se observa el uso de una gran riqueza de términos y expresiones verbales; utilización de un lenguaje mayoritariamente coloquial, relacionados con los cuatro significados de la probabilidad. Por otro lado, se utiliza un lenguaje numérico desarrollado a través de los diferentes sistemas numéricos, así como un gran uso de lenguaje y representaciones gráficos y tabulares.

Asimismo, López-Mojica et al. (2018) investigan los libros pertenecientes a primer ciclo de Educación Primaria de la ciudad de México en los que no se encuentran contenidos explícitos que introduzcan la aleatoriedad, pudiendo destacar siete ejercicios en primer curso y dos en segundo, que, dándoles el sentido adecuado, podrían aprovecharse para introducir sistemática y paulatinamente el azar.

Por otro lado, Vásquez et al. (2019) mostraban en sus resultados una gran descompensación entre las tareas sobre estadística y las de probabilidad en Educación Primaria (69,8% frente a un 30,2%), destacando en estadística, de mayor a menor presencia, *procedimientos con conexión, sin conexión, memorización y construcción*, en discordancia con las directrices curriculares. Igualmente, Vásquez y Alsina (2016) mostraron un tratamiento mayoritario en probabilidad del *enfoque intuitivo*, seguido del *clásico* y, en menor medida, *frecuencial*, con escasos matices de *subjetivo*.

En síntesis, escasos son los estudios de análisis de libros de texto centrados en probabilidad, de ahí la importancia de este estudio, en el que se analiza la presencia de la probabilidad en los manuales de matemáticas de la etapa de educación primaria.

CAPÍTULO 3. LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

3.1. INTRODUCCIÓN

En base al marco teórico del Enfoque Ontosemiótico descrito previamente, el presente capítulo tiene como objetivo determinar los objetos matemáticos asociados a la probabilidad en los libros de texto de una editorial de la Etapa de Educación Primaria. Asimismo, se completa el estudio analizando los significados asociados a dicho contenido. Para tal fin, se ha seleccionado una editorial española con alto prestigio y con presencia en centros educativos de la comunidad andaluza. Concretamente, se han seleccionado los manuales de Educación Primaria de la editorial Anaya, ascendiendo la muestra objeto de estudio a seis manuales.

Con objeto de abordar los objetivos descritos, el presente capítulo se ha estructurado en torno a cuatro secciones. En la Sección 3.2 se detalla el procedimiento de investigación llevado a cabo. En base a las fases descritas en el apartado de Metodología, se presenta en la Sección 3.3 el análisis de los objetos matemáticos resumiendo la información en tablas de frecuencias, en función de los distintos significados asociados a la probabilidad, abordados en cada uno. Y, finalmente, en la Sección 3.4. se exponen las conclusiones de los resultados.

3.2. METODOLOGÍA

3.2.1. Muestra

Para llevar a cabo el presente estudio se ha escogido una de las editoriales ampliamente utilizada por los docentes de los centros escolares andaluces. Concretamente se ha seleccionado, tras un análisis previo, la Editorial Anaya, editorial que cuenta con un alto prestigio tanto en el ámbito nacional como internacional y que tiene como objetivo “generar espacios de calidad en la transmisión de conocimiento” en el ámbito educativo. Grupo Anaya (2021). *Grupoanaya.es* Anaya Educación | Nuestras editoriales (27 de julio de 2021). https://www.grupoanaya.es/editoriales/editorial_anaya Los manuales empleados se han desarrollado desde un enfoque competencial en el que los estudiantes empleen lo aprendido.

Puesto que el objetivo de la presente investigación es analizar la presencia de la probabilidad en toda la Etapa de Educación Primaria se han seleccionado seis manuales de texto del curso académico 2020/2021, uno por cada curso que forma dicha etapa educativa. Cada uno de los libros de texto está organizado en doce unidades, girando cada una de ellas en torno a alguno de los bloques de contenidos recogidos en las normativas curriculares. Así pues, el análisis que se lleva a cabo ha estado centrado en aquellas unidades en la que se abordan los contenidos del Bloque 5, Estadística y Probabilidad. Por consiguiente, y de forma general, se han analizado en mayor profundidad una o dos unidades de cada manual pues la mayoría de las unidades abordan los contenidos del Bloque 2, Números. Destacamos el hecho de no haber detectado unidades exclusivas de probabilidad, pues siempre se incorporan en la misma unidad en la que se tratan los contenidos de estadística descriptiva.

Con objeto de organizar de una forma adecuada el proceso de análisis, se ha codificado cada manual como [Ai] donde i corresponde al curso de la Etapa de Educación Primaria, es decir, [A3] corresponde al libro de texto del tercer curso. A continuación, se listan los seis manuales empleados:

[A1] Carvajal, A.I. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 1. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

[A2] Carvajal, A.I. y De La Rosa, L.I. (2018). *Matemáticas 2. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

[A3] Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y Quevedo, V.J. (2019). *Matemáticas 3. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

[A4] Carvajal, A.I., Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 4. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

[A5] Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y Quevedo, V.J. (2018). *Matemáticas 5. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

[A6] Carvajal, A.I., Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 6. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.

3.2.2. Método

Se ha llevado a cabo un análisis de contenido (Krippendorff, 2013) de manuales de texto del área de Matemáticas desde 1º a 6º de Educación Primaria de la editorial Anaya para detectar qué objetos matemáticos y significados de la probabilidad se trabajan en base al enfoque ontosemiótico (Godino et al, 2012; 2007). Para llevarlo a cabo, los textos dedicados al trabajo

de la probabilidad fueron analizados siguiendo la metodología de Cobo (2003), llevando a cabo los siguientes pasos:

- Preselección, lectura rápida y lecturas repetidas con detenimiento de las unidades de texto que trabajan la probabilidad.
- Establecimiento previo de las variables que se pretenden analizar. En base al enfoque ontosemiótico (Godino et al., 2012; 2007), se han definido las variables según los tipos de objetos matemáticos definidos en dicho marco, es decir:
 - V1. Lenguaje, es decir, aquellos términos, expresiones, notaciones o gráficos matemáticos utilizados, concretamente, en Probabilidad.
 - V2. Argumentos, relativos a validaciones y explicaciones de las proposiciones y procedimientos matemáticos probabilísticos.
 - V3. Situaciones problemáticas, es decir, dichas situaciones que promueven y contextualizan la actividad didáctica. Por ejemplo, problemas, aplicaciones de los conocimientos, ejercicios, entre otros.
 - V4. Conceptos, dados por sus descripciones o definiciones de los objetos matemáticos trabajados. Por ejemplo, concepto de número, de probabilidad, entre otros.
 - V5. Propiedades o atributos de los objetos matemáticos.
 - V6. Procedimientos, es decir, aquellas operaciones, algoritmos y técnicas utilizadas, en este caso, en el campo de la Probabilidad.
- Se definen unas categorías de análisis tras una posterior revisión de los textos de una forma cíclica e inductiva, basándonos en la literatura previa (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero et al. 2005; Ortiz, 2002).
- Previa selección de ejemplos de textos que resulten aclaratorios del presente análisis, así como para el establecimiento de conclusiones sobre los distintos objetos matemáticos presentes en los textos analizados.
- Elaboración y presentación de tablas que ayudan a organizar la información, relativa a los resultados hallados en el estudio.
- Selección y muestra de imágenes que sirven de apoyo en la presentación de resultados.

3.3. ANÁLISIS DE LAS VARIABLES

3.3.1. Lenguaje

En una primera fase del estudio se comenzó con el análisis de las expresiones según la categorización establecida por Shuard y Rothery (1984):

1. Palabras técnicas matemáticas que, por lo general, no se dan en el lenguaje cotidiano.
2. Palabras que existen tanto en el lenguaje cotidiano como en el matemático, aunque no siempre con la misma connotación en ambos escenarios.
3. Palabras cuyo significado es similar o bastante próximo en los dos contextos.

A continuación, se detallan las expresiones cotidianas y formales, así como el lenguaje numérico, simbólico, tabular y gráfico encontrados en los manuales de texto analizados, acompañados de tablas resumen que concentran los significados trabajados y/o los ciclos en los que se desarrollan.

3.3.1.1. *Expresiones cotidianas y formales*

Se han identificado aproximadamente 65 expresiones asociadas a la probabilidad en los textos investigados, que aluden a algún concepto probabilístico, propiedad o procedimiento asociado, incluyendo significados diversos de la probabilidad.

La Tabla 3.1 recoge las expresiones probabilísticas utilizadas en los libros de texto, clasificadas y agrupadas en función del concepto probabilístico al que refieren, indicando el significado probabilístico asociado. Para poder diferenciar las expresiones utilizadas cotidianamente de aquellas ubicadas en contextos formales, estas últimas se han resaltado en cursiva. Cabe destacar que la amplia variabilidad de términos empleados en probabilidad podría aumentar la dificultad en su aprendizaje, sobre todo en aquellos casos en los que se utiliza una acepción formal en un contexto familiar con un significado distinto. Sirva de ejemplo el empleo del término “seguro que ...” en la vida cotidiana del alumnado para designar una situación dudosa, significando (en el campo de la probabilidad) que es una situación segura de suceder.

Por otro lado, aquellos conceptos cuyo número es más amplio debido a su riqueza verbal son: la aleatoriedad, el experimento aleatorio, así como los sucesos (tipos). En gran parte, las expresiones referidas a la aleatoriedad y sus experimentos están constituidas por verbos (ligados a procedimientos) y aquellas asociadas a sucesos (y sus tipos) están formadas por adjetivos.

Tabla 3.1. *Expresiones analizadas en los libros de texto relativos a probabilidad*

Concepto	Expresión verbal	Significado asociado	
Aleatoriedad	<i>Aleatoria</i>	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	Sin mirar	Clásico, intuitivo	
	Azar	Intuitivo	
	Saber resultados posibles	Clásico	
	Acertar	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	Suerte	Clásico, intuitivo	
	Saber de antemano	Clásico	
	Saber qué saldrá	Clásico, intuitivo	
Espacio muestral	Todas las formas posibles/diferentes	Clásico	
	Gráfico de barras	Frecuencial	
	Cuántos/as	Clásico, frecuencial	
Esperanza matemática	<i>Tabla de doble entrada</i>	Clásico	
	Juego justo	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	<i>Fiable</i>	Frecuencial	
	<i>Predecir</i> (resultado, si bebé será niño o niña, que llueva un sábado)	Clásico, intuitivo, frecuencial	
Experimento aleatorio	<i>Estimar</i>	Frecuencial	
	Observa/Identifica	Frecuencial	
	Analiza	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	<i>Datos</i>	Frecuencial	
	Formas/casos posibles/diferentes: de devolver la vuelta (monedas y/o billetes); al lanzar dos monedas; vestir (prendas); organizar merienda (alimentos); combinaciones menús/asientos (nombres)	Clásico, intuitivo	
	<i>Experiencia</i>	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	Girar peonza/spinner/ruleta	Clásico	
	Lanzar dado(s)/moneda	Clásico	
	Sorteo (lotería)	Clásico	
	Juego de pares y nones	Intuitivo	
	Situación	Clásico, frecuencial, intuitivo	
	Sacar (extraer) carta	Clásico	
	Sacar (salir) resultado	Frecuencial	
	Elegir/escoger (bolsa, canicas)/	Clásico, intuitivo	
	Extraer, sacar (bolas, canicas)		
	Obtener número par (al lanzar dado)	Clásico	
	<i>Tabla (de datos)</i>	Frecuencial	
	Probabilidad	Tabla de datos (doble entrada)	Frecuencial
		Puede/Podría salir	Clásico, frecuencial, intuitivo
		<i>Cálculo de probabilidades</i>	Clásico
<i>Comparar probabilidad</i>		Clásico	
<i>Probabilidad</i>		Clásico, frecuencial	
<i>Posibilidad</i>		Clásico, frecuencial	
<i>Nº de posibilidades entre</i>		Clásico	
Suceso y tipos	<i>Suceso(s)</i>	Intuitivo	
	<i>Seguro/Posible (Probable)/Imposible</i>	Clásico, frecuencial	
	<i>Posibles resultados</i>	Intuitivo	
	<i>Espacio muestral</i>	Clásico	

	Más sencillo/fácil [de conseguir/encontrar/sacar (salir)]	Clásico, intuitivo
	Más/menos/igual de probable	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Ocurre siempre/a veces/nunca	Intuitivo
	Probablemente	Intuitivo
	Resultado	Intuitivo
	Casos favorables/posibles	Clásico
	Estadística(s)	Frecuencial
Variable aleatoria	Probabilidad estimada/Porcentaje estimado	Frecuencial

En su mayoría, el significado clásico aglutina el mayor número de expresiones, seguido de un número similar de expresiones asociadas al significado intuitivo. Conviene mencionar la escasez de expresiones frecuenciales, pese a su recomendación en las directrices curriculares. Al mismo tiempo que no se han detectado expresiones propias de un significado subjetivo, ya que las que podrían ubicarse bajo este significado se presentan a los/as escolares de forma que pueden ser relacionadas con un significado intuitivo o frecuencial.

La Tabla 3.2 muestra la distribución de expresiones en base a los distintos ciclos de Educación Primaria dejando entrever el escaso trabajo que se hace de la probabilidad en primer ciclo, casi nulo. Este hecho es de gran importancia pues no va en consonancia con las recomendaciones establecidas en las directrices curriculares, las cuales proponen el trabajo del azar en los tres ciclos de la etapa primaria. No obstante, en línea con los estudios de Gómez-Torres (2014) y Ortiz (2002) se aprecia una mayor diversidad verbal relativa a la aleatoriedad y sus experimentos, así como de sucesos (y tipos), si lo comparamos con el tratamiento dado a términos más técnicos.

Tabla 3.2. Frecuencia de expresiones según ciclo

	Primer ciclo	Segundo ciclo	Tercer ciclo
Expresiones cotidianas	2	17	22
Expresiones específicas de aleatoriedad y probabilidad		18	17
Expresiones específicas de los juegos de azar		8	11

3.3.1.2. Lenguaje numérico

En los manuales analizados se observa la presencia de un lenguaje numérico, sobre todo de números enteros, decimales (porcentajes) y fracciones. En este caso, los números enteros se introducen desde segundo ciclo (en los temas que se trabaja la representación de la información y el dinero) con una función numérica y nominal. Al contrario que en el estudio de Gómez-Torres (2014) en el cual los números enteros para trabajar la probabilidad se introducen desde primer ciclo.

Concretamente, en el tercer curso existe un ejercicio en el que, a través de una tabla de

recogida de datos, se puede observar el número de barras de pan que se venden en cada día de la semana y, a través de la siguiente pregunta inferencial, se trabaja la probabilidad de una forma implícita y frecuencial, partiendo del conteo: *Si tuviera que dejar de vender pan un día, ¿cuál elegiría? ¿Por qué?* ([A3], T.4, p. 61). A través de una recogida intencional de datos a lo largo de una semana, se puede deducir qué día se vende menos pan y, por tanto, sería menos probable que vengan clientes a comprar dicho producto y las pérdidas serían menores.

Asimismo, la función numérica del lenguaje se trabaja en tercero en dos ejercicios más a través del conteo de casos favorables y posibles, 1) preguntando las formas posibles de obtener en monedas unos determinados billetes o 2) formas posibles de devolver en monedas la vuelta de comprar un determinado producto con dos billetes de diferente valor.

En esta línea, la función nominal del lenguaje relativo a números enteros en términos de aleatoriedad se puede observar a partir de cuarto curso a través preguntas inferenciales sobre la posibilidad de *sacar un as* en la *experiencia de sacar una carta sin mirar* ([A4], T.4, p. 73) o un suceso en un determinado experimento, tipo: *Luis tiene en su cajón 4 calcetines verdes, 6 azules y 8 negros. Todavía es de noche y se ha ido la luz. Como mínimo, ¿cuántos calcetines tiene que coger para que sea seguro que lleva dos en el mismo color?* ([A4], T.4, p. 73), así como rellenar huecos de distintos sucesos con los términos “seguro”, “posible” e “imposible”, en función de su probabilidad de ocurrencia.

Por otro lado, las fracciones se introducen en tercer ciclo para hallar la probabilidad de un suceso, es decir, calcular el valor de la probabilidad, con un significado clásico o laplaciano de la probabilidad (en 5º curso y 6º), o con un objetivo frecuencial (en 6º), tipo *La probabilidad de acierto en el tiro es de 45/60* ([A6], T.12, p. 213). En ciertas ocasiones, se calcula la equivalencia de la probabilidad frecuencial en números decimales (de acuerdo con el currículo relativo a la introducción de la representación de la información con números decimales), tipo *La probabilidad estimada de que acierte el próximo tiro es de 0,75* ([A6], T. 12, p. 213). Asimismo, se muestran los pasos para pasar los números decimales a porcentajes, multiplicando por 100 el número decimal resultante, para calcular el porcentaje estimado de probabilidad de un suceso.

Cabe destacar la discordancia de dicho análisis con el realizado por Gómez-Torres (2014), pues se señala que las fracciones para trabajar la probabilidad se introducen desde segundo ciclo, mientras que en el presente análisis se retrasa la introducción de las fracciones con dicho objetivo hasta finalizar el tercer ciclo.

En este sentido, para poder ofrecer una información más visual del lenguaje numérico hallado en este estudio, la Tabla 3.3 resume su utilización en los tres ciclos:

Tabla 3.3. *Distribución del lenguaje numérico por ciclo*

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Números enteros	X	X	X
Números decimales			X
Fracción representa probabilidad			X
Fracción representa frecuencia relativa			X

3.3.1.3. Lenguaje simbólico

Cabe destacar que la mayoría del lenguaje simbólico se trabaja de forma transversal con otros bloques de contenido. Sirva de ejemplo: el símbolo de la suma (+) se introduce desde el segundo ciclo para obtener los valores posibles en un experimento o hallar el número de casos posibles de un determinado suceso. El símbolo de igual (=) también se introduce desde segundo ciclo, por ejemplo, para trabajar la igualdad entre dos fracciones o entre fracción y número decimal. Por otro lado, la desigualdad fue encontrada en cuatro ejercicios de sexto curso para comparar quiénes de los dos sujetos tenía más probabilidad de: 1) marcar gol (tras calcular el porcentaje); 2) de acertar al lanzar dos dados, tras decir al azar un número posible de resultado (para el cual se debe calcular el número decimal correspondiente, después de hallar la probabilidad de ganar de ambos individuos: $0,375 > 0,125$. *Álvaro tiene más posibilidades de ganar.* ([A6], T.12, p. 214), así como de 3) ganar al lanzar dos monedas al aire o de 4) acertar al sacar una baraja del mazo al azar (tras buscar casos posibles y plasmarlos en una tabla).

En cuanto al lenguaje simbólico específico del azar no es muy variado y su utilización solo se da en el último curso del tercer ciclo (6º curso). Se ha observado un empleo conjunto de símbolos y explicaciones verbales en el último curso y tema de la etapa de primaria. Sirvan de ejemplo el símbolo P (probabilidad) y la flecha (\rightarrow), utilizadas en la fórmula del cálculo de la probabilidad, seguida de una igualdad (regla de Laplace), tal y como se observa en la Figura 3.1.

Figura 3.1. Regla de Laplace para calcular la probabilidad de un suceso ([A6], T.12, p. 212).

$$P = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} \rightarrow P = \frac{1}{6} = 0,166$$

Conviene destacar que el hecho de que no haya tanta variedad de lenguaje simbólico en dicha etapa hace que el aprendizaje de la probabilidad sea más sencillo para los/as escolares. En síntesis, se observa un uso considerablemente más extendido de expresiones cotidianas en

Asimismo, se trabajan las tablas de doble entrada a partir de segundo ciclo, en principio, para su lectura, interpretación y proposición de completarlas, para finalmente sugerir su elaboración desde 4º curso de forma implícita en solo un ejercicio (véase Figura 3.4). En tercer ciclo, la propuesta de elaboración de las tablas de doble entrada se hace de forma explícita. Sirva de ejemplo la imagen posterior de una actividad de cuarto curso en la cual se propone la elaboración de una tabla, en la que “compañeras” y “compañeros” podría diferenciarse en “niños” y “niñas”, dando lugar a una tabla de doble entrada, en lugar de realizar solo una tabla de recuento:

Figura 3.4. Actividad de 4º curso en la que, de forma implícita, se propone elaborar una *Tabla de doble entrada*. ([A4], T.4, p. 65).

3 Rodrigo ha recogido en su cuaderno el color de pelo de sus compañeros y sus compañeras de clase.

moreno	rubio	castaño	rubio
castaño	moreno	moreno	castaño
moreno	rubio	castaño	moreno
castaño	moreno	moreno	pelirrojo
moreno	rubio	castaño	castaño
castaño	castaño	castaño	rubio

Organiza los datos en una tabla y responde.

- ¿Cuál es el color de pelo que más se repite?
- ¿Cuántos tienen el pelo rubio?
- ¿Cuántos son en total en la clase?

Este tipo de lenguaje está indicado para resumir información estadística. Sin embargo, en los últimos cursos de Educación Primaria las tablas de doble entrada son empleadas para trabajar el cálculo de probabilidades desde un punto de vista frecuencial. Por otra parte, las tablas de frecuencia relativa podrían estar relacionadas con la probabilidad implícitamente, pues no van más allá del cálculo de la frecuencia relativa a partir de la absoluta, dando un paso adelante en el escenario de preguntar si la frecuencia absoluta y relativa “coinciden” (es decir, si están relacionadas: sí lo están, pues cuanto más frecuencia absoluta, mayor frecuencia relativa). Estas son introducidas al término de tercer ciclo.

En síntesis, se observa un aumento de complejidad de las tablas conforme se avanza en el nivel educativo, apreciándose riqueza verbal de lenguaje tabular a partir de segundo ciclo. Dicho lenguaje está directamente relacionado con la estadística, no estando relacionado explícitamente con la probabilidad hasta finalizar tercer ciclo. Su relación puede realizarse de forma implícita cuando se afirma que la suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1 (véase Figura 3.5); igual que la probabilidad de un suceso se encuentra entre 0 y 1, y cuanto más próximo a 1 esté el suceso, mayor será su probabilidad de ocurrencia.

Figura 3.5. Significado de la frecuencia relativa de un dato ([A6], T.12., p. 206).

La frecuencia relativa (F_R) de un dato es el cociente entre su F_A y el número total de datos. La suma de todas es 1.

La Tabla 3.4 sintetiza los resultados del análisis de las distintas categorías definidas con relación al lenguaje tabular que aparecen en los libros de texto analizados según el ciclo de la etapa de Educación Primaria. Así, puede observarse la elaboración de estas, desde un listado de datos, y las tablas de recuento desde el primer ciclo hasta el segundo. Trabajando solo en este ciclo las tablas de frecuencias sin agrupar, constituyéndose como inicio de las tablas de frecuencias con datos agrupados en el mismo ciclo hasta tercer ciclo, incluyendo las tablas de doble entrada en ambos ciclos. Para terminar, en tercer ciclo se utilizan las tablas de frecuencias relativas y se relacionan las tablas de frecuencias (y los datos que en ellas se sintetizan) con la probabilidad.

Tabla 3.4. Distribución del lenguaje tabular según ciclo

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Lista de datos	X	X	
Tabla de recuento	X	X	
Tabla de frecuencias sin agrupar		X	
Tabla de frecuencias con datos agrupados		X	X
Tabla de doble entrada		X	X
Tabla de frecuencias relativas			X
Tabla de frecuencias en probabilidad			X

Finalmente, y en contraposición con los hallazgos de Gómez-Torres (2014), cabe destacar la analogía realizada a nivel frecuencial que se realiza entre la estadística y la probabilidad al finalizar la etapa primaria, bajo el título *La probabilidad y los datos* ([A6], T.12, p. 213), en la que explícita y formalmente se afirma que a partir de unos datos previamente recogidos se puede estimar la probabilidad de un suceso; tal y como se puede apreciar en la Figura 3.6, a partir de la lectura e interpretación de una tabla de doble entrada.

En resumen, se puede afirmar la existencia de una gran riqueza de lenguaje relativo a las tablas, en consonancia con la investigación realizada por Gómez-Torres (2014). No obstante, la complejidad del lenguaje aumenta en la etapa de secundaria, en línea con lo hallado por Ortiz (2002). Ambos autores demuestran en sus resultados las desigualdades entre editoriales de educación primaria y de secundaria, respectivamente, no encontrando relación alguna entre contenidos de estadística y probabilidad en ninguna de las investigaciones de dichos autores; al contrario que los hallazgos de la presente investigación como se ha señalado anteriormente.

Figura 3.6. Relación explícita entre probabilidad y estadística en manual de texto de 6° de primaria ([A6], T.12, p. 213).



La probabilidad y los datos

En ciertas situaciones se pueden estimar la probabilidad a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores. Observa la estadística de tiros de tres puntos encestandos por Yaiza en los primeros cinco partidos jugados:

Partidos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	Total
Tiros lanzados	13	10	15	10	12	60
Canastas	10	8	11	8	8	45

Con estos datos podemos hacer una estimación de la probabilidad que tiene de acertar su próximo lanzamiento de tres puntos:

$$\text{Probabilidad estimada} = \frac{\text{N.º de canastas}}{\text{N.º de tiros lanzados}} = \frac{45}{60} = 0,75$$

La probabilidad estimada de que acierte el próximo tiro es de 0,75.
 La probabilidad estimada es más fiable cuantos más datos contabilicemos.



3.3.1.5. Lenguaje gráfico

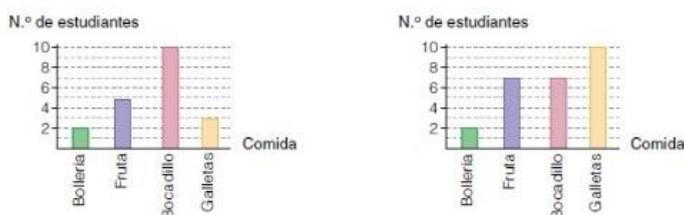
Bien es cierto que los histogramas, diagramas o gráficos de barras, gráficos de sectores, así como los pictogramas son elementos utilizados en estudio estadístico. En este sentido, también deben tenerse en cuenta a la hora de sentar las bases para comprender la probabilidad. De forma general el análisis realizado muestra el hallazgo de histogramas, gráficos de barras, de sectores, pictogramas y polígono de frecuencias.

En primer lugar, cabe destacar que el diagrama de barras en primaria sirve como preparación para la comprensión de probabilidades de las variables aleatorias discretas que son abordadas con mayor profundidad en la etapa secundaria, función que se formaliza en sexto curso. Así, se realizan ejercicios de lectura, interpretación y de elaboración desde primer ciclo (relacionado con el significado frecuencial probabilístico), además de servir de apoyo en el enunciado de una actividad o situación-problema (véase Figura 3.7). Por otro lado, se utilizan en primer y segundo ciclo los pictogramas como forma de representación de las frecuencias absolutas de las variables cualitativas o discretas que tengan escasos valores. Desde el inicio de segundo ciclo uno de los objetivos didácticos está dirigido a la lectura, interpretación y elaboración de pictogramas de forma escrita en formato papel y digital (véase Figura 3.8).

Sin embargo, la utilización de los pictogramas como base para comprender situaciones probabilísticas no se destaca explícitamente en los manuales de texto analizados, al contrario que sucede con los diagramas de barras al finalizar la etapa primaria.

Figura 3.7. Uso del gráfico de barras en una situación-problema de Probabilidad en 4º curso ([A4], T.4, p. 68).

2 Los siguientes gráficos representan lo que toman en el recreo dos clases distintas.



a) Lee con atención cada una de las siguientes oraciones. ¿Cuál representa cada gráfico?

- I. La mitad del alumnado toma bocadillo y una décima parte, bollería.
 II. El mismo número de alumnos y alumnas toman fruta y bocadillo.

b) Escribe una oración que aporte alguna información de cada uno de los anteriores gráficos.

Figura 3.8. Situación-problema de lectura, interpretación y elaboración de un pictograma en tercer curso ([A.3], T.4, p. 64).

1 Este pictograma representa los goles marcados por el equipo del colegio entre enero y junio. Completa los datos en tu cuaderno y responde:

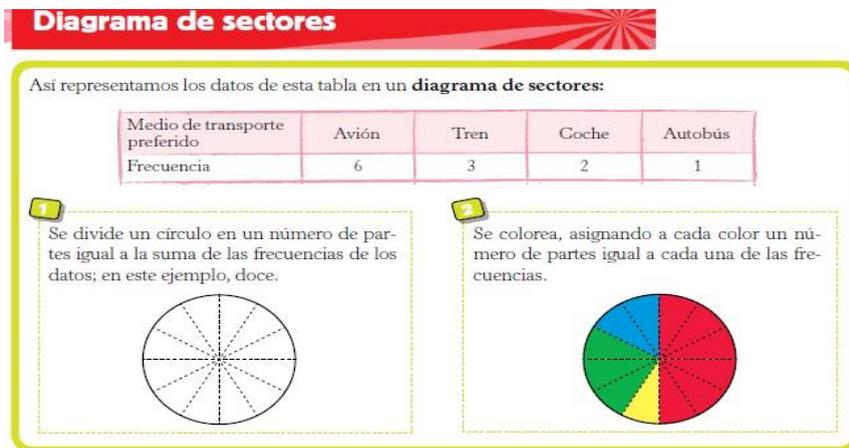
Meses	Recuento	Total
Enero	⚽⚽⚽⚽⚽⚽	
Febrero	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	16
Marzo	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	
Abril	⚽⚽⚽⚽	
Mayo	⚽⚽⚽⚽⚽	10
Junio	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	

- ¿Cuántos goles representa cada balón?
- ¿Cuántos goles marcaron en junio?
- ¿En qué mes marcaron menos goles? ¿Y más?
- ¿Cuántos goles marcaron en marzo?
- ¿Cuántos goles marcó el equipo entre enero y junio?

Por otra parte, el gráfico de sectores es introducido en tercer ciclo a partir de datos recogidos en una tabla; para su lectura, interpretación y elaboración. Sin embargo, esta herramienta no se enlaza formalmente con el contexto de probabilidad, aunque se podría relacionar de forma implícita. Por ejemplo, en la Figura 3.9 se observa que el último apartado está enfocado en detectar el medio de transporte con mayor y menor aceptación se puede trabajar la probabilidad de uso, en este caso, a través de su significado frecuencial, teniendo en cuenta la frecuencia con la que cada medio de transporte es utilizado:

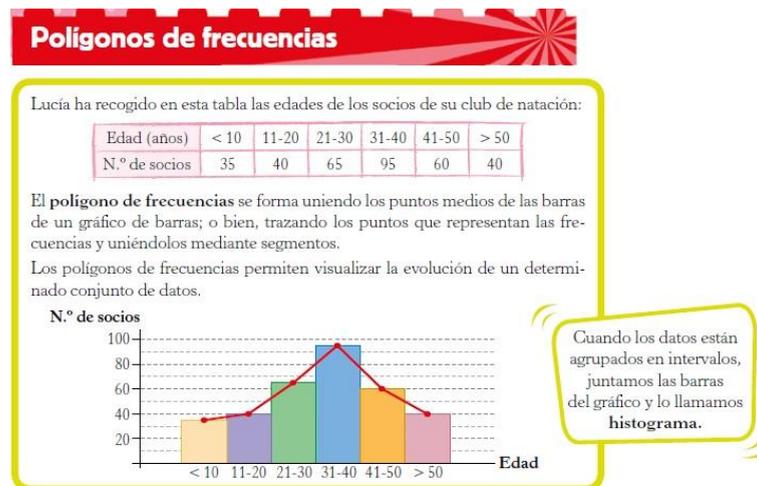
En esta línea, también se introduce en tercer ciclo (concretamente, en sexto curso) el uso de histogramas como forma de trabajar el polígono de frecuencias (introducido en quinto a partir de datos recogidos en una tabla y trabajado también en sexto). Cabe destacar que la utilización de histogramas es escasa, pues solo ha aparecido en una ocasión como apoyo en la explicación del polígono de frecuencias y en su propia definición (véase Figura 3.10), en sexto curso.

Figura 3.9. Diagrama de sectores y su posible relación con la probabilidad ([A5], T.4, p. 61)



- 1** Observa el gráfico anterior y contesta.
- ¿Cuántos medios de transporte han recibido algún voto? ¿Cuántos votos en total recoge la tabla?
 - ¿Qué color representa cada medio de transporte?
 - ¿Cuál es el medio de transporte que cuenta con mayor aceptación? ¿Y con menor aceptación?

Figura 3.10. Definición de histograma y de polígono de frecuencias ([A6], T.12, p. 209)



En síntesis, conviene destacar la complejidad de utilización en el uso de gráficos (véase Tabla 3.5) que avanza paulatinamente al mismo tiempo que aumenta el nivel educativo, con una utilización cada vez mayor del significado frecuencial. Finalmente, conviene destacar la utilización del diagrama de barras desde primer ciclo, igual que los pictogramas, con diferencia de que los segundos no se trabajan en tercer ciclo. Podría ser porque los diagramas de barras parecen la continuación “formal” de los pictogramas. Asimismo, el polígono de frecuencias se trabaja desde el segundo ciclo y el gráfico de sectores e histogramas solo se trabajan en tercer ciclo, dada la complejidad de la información que representan. No obstante, no se ha encontrado el uso de diagramas de árbol, al contrario que los resultados del análisis de Gómez-Torres (2014).

Tabla 3.5. Tipos de gráficos según ciclo

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Gráfico de barras	X	X	X
Gráfico de sectores			X
Polígono de frecuencias		X	X
Pictograma	X	X	
Histograma			X
Diagrama en árbol			

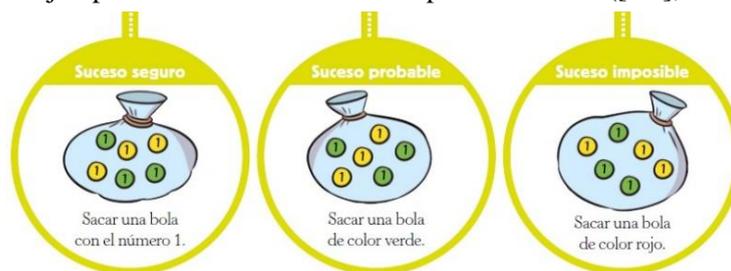
3.3.2. Argumentos

En cuanto a los argumentos utilizados en los manuales de texto analizados se han hecho uso de los que a continuación se describen, ya sea para tratar varios temas del campo probabilístico o tan solo uno de ellos:

3.3.2.1. Uso de ejemplos y contraejemplos

Su uso está bastante extendido en los manuales analizados, donde se dan los cuatro significados de la probabilidad. Más limitado en el tercer ciclo. Siendo más común en el segundo ciclo, cuando aún el alumnado no dispone de los procesos cognitivos necesarios para manipular y asimilar conceptos formales de la probabilidad. La Figura 3.11 representa la forma en la que se utilizan los ejemplos como forma implícita de explicar la definición de los tipos de sucesos, en este caso: “seguro”, “probable” e “imposible”.

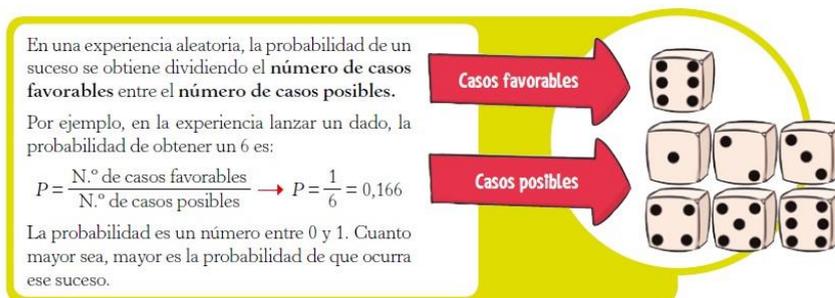
Figura 3.11. Ejemplos en las definiciones de tipos de sucesos ([A6], T.12, p. 210)



3.3.2.2. Generalización

Dicho argumento se da también en los cuatro significados de la probabilidad. Consistente en que, a partir de una experiencia aleatoria cotidiana que provoca sucesos familiares para el alumnado, este es capaz de extrapolar y generalizar dicho conocimiento a situaciones de su vida diaria, apoyada por una definición general que le otorga validez. Sirva de ejemplo el hecho de que, para introducir la regla de Laplace al alumnado, posteriormente se muestra un ejemplo, el cual no menciona las condiciones idóneas para su aplicación (Figura 3.12).

Figura 3.12. Ejemplo de generalización en la explicación de la regla de Laplace ([A6], T.12, p. 212)



Conviene señalar que la equiprobabilidad presente en los sucesos elementales, propuestos a los/as estudiantes, puede conllevar la asimilación de que todos los sucesos son equiprobables, a la vez que podría provocar un fuerte conflicto cognitivo a la hora de comenzar a trabajar otras formas de sucesos no equiprobables.

3.3.2.3. Apoyo gráfico para comprobar propiedades

Cabe destacar el uso del lenguaje gráfico en todos los ciclos (véase Tabla 3.5): comenzando por los diagramas (o gráficos) de barras y pictogramas (en primer ciclo); gráficos de barras y de líneas, pictogramas y tablas de registro de datos (segundo ciclo); se añaden en tercer ciclo los diagramas de sectores, las tablas de frecuencias (absolutas y relativas) y el polígono de frecuencias.

Asimismo, se ha percatado el uso de los gráficos de barras para trabajar en el alumnado el *significado frecuencial*, esto puede deberse a que el aprendizaje visual es vital, sobre todo desde edades tempranas. Pueden observarse variados ejemplos en la Sección 3.1.3.

3.3.2.4. Razonamiento inductivo a partir de datos

Desde el inicio del segundo ciclo el alumnado consigue interpretar tablas de registro de datos, aumentando su complejidad conforme se avanza en el nivel educativo. En la Figura 3.13 se observa un listado de datos que el alumnado debe organizar en una tabla, en la que, posteriormente, deberá observar la frecuencia de cada uno y responder a unas preguntas. Su lectura e interpretación ayuda al alumnado a la asimilación de contenidos de carácter *frecuencial*, tal y como se comenta en la Sección 3.1.2. En la última pregunta se puede apreciar el trabajo implícito de la probabilidad cuando se pregunta al alumnado qué es *más sencillo* de encontrar (es decir: qué es *más probable*).

Figura 3.13. Actividad de 4º curso: elaboración de una tabla de datos propuestos con preguntas inferenciales respecto a su frecuencia. Probabilidad implícita. ([A.4), T.4, p. 76)

- 2 Haz una tabla de recuento de datos con las respuestas de los 28 alumnos y alumnas de la clase de Teresa a la pregunta: ¿cuántas mesas hay en tu casa?
- 3-1-1-2-5-4-3-5-1-4-3-5-2-3
4-1-2-1-5-3-5-4-6-4-2-2-1-6
- Con estos datos construye un gráfico de barras y contesta.
- ¿Cuántos tienen dos o más mesas?
 - ¿Cuántos tienen solo una?
 - ¿Es más sencillo encontrar a alguien que tenga 3 mesas o que tenga 5?

La Tabla 3.6 muestra una síntesis del uso de los distintos argumentos en los manuales de texto, notando una alta predilección por la utilización de *ejemplos y contraejemplos* y un bajo uso del lenguaje gráfico como parte de argumentación. En general, se aprecia la ausencia de argumentos relativos al azar en primer ciclo, al contrario de lo que marcan las directrices curriculares.

Tabla 3.6. Tipos de argumentos según ciclo

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Ejemplos y contraejemplos		X	X
Gráficos para comprobar propiedades		X	X
Razonamiento inductivo		X	X
Generalización		X	X

Se han encontrado diferencias y similitudes en comparación con el estudio realizado por Gómez-Torres (2014) en el que la utilización de ejemplos y contraejemplos en manuales de primaria también era bastante socorrida, igual que ocurre en Ortiz (2002), en manuales de secundaria; aunque (en el caso de la primera autora) su uso se extendía desde el primer ciclo, así como el razonamiento inductivo para el trabajo de la probabilidad, al contrario de lo hallado en la presente investigación, que comienza en segundo ciclo. Al mismo tiempo que también se encontró un bajo uso del *lenguaje gráfico* como parte importante de argumentación de probabilidades en ambos estudios.

3.3.3. Situaciones-problema

Tal y como se ha podido apreciar en la editorial analizada, la actividad matemática nace de las situaciones problemáticas. Los libros de texto, objetos de análisis, comprenden una serie de actividades que parten de juegos de azar conocidos por el alumnado, además de experiencias cotidianas, que pueden clasificarse de la siguiente manera:

3.3.3.1. Expresar el nivel de creencia de ocurrencia de un suceso

En primer ciclo no existen actividades explícitas relativas a probabilidad o aleatoriedad. Estos suceden desde segundo ciclo (tercer curso) de forma implícita, frecuencial e intuitiva a través de dos ejercicios; en uno de ellos, a partir de observar las ventas de pan a lo largo de una semana, se pregunta qué día sería más idóneo dejar de vender pan ([A3], T.4, p. 61). Es decir, qué día sería menos probable vender pan. O en cuarto curso, se pregunta si es “más sencillo” encontrar a sujetos con determinado número de mesas en su casa ([A4], T.4, p. 76). Es decir, qué número de mesas es “más probable”, “menos probable” o “igual de probable”. Esto dependerá de la voluntad docente de encauzar la actividad al campo de la probabilidad y de su formación al respecto. Así, en tercer ciclo se inician sencillos experimentos cotidianos en la vida de los/as estudiantes, en los que el nivel de creencia se presenta cualitativamente, correspondiente también al *significado intuitivo* (Figura 3.14).

Figura 3.14. Expresar grado de creencia de un suceso ([A5], T.4, p. 63)

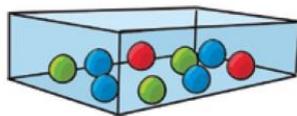
- 7** Escribe si estos sucesos son seguros, posibles o imposibles:
- Lanzo un balón y meto gol.
 - Mañana, el día durará 24 horas.
 - El próximo año lloverá.
 - Esta noche saldrá el sol.
 - Lanzo una moneda y caerá al suelo.
 - Saco un tres al lanzar un dado.
 - Saco un rey de una baraja.

3.3.3.2. Valorar la probabilidad en juegos de azar

A partir de segundo ciclo, concretamente, desde tercer curso, se proponen actividades relativas a sencillos juegos de azar, a partir de las cuales el alumnado asimila y afianza los conceptos probabilísticos que se trabajan en ellas, como el lanzamiento de una moneda o un dado, extraer sin mirar una determinada bola de un color (véase Figura 3.14) o hallar una determinada carta del mazo. Desde tercer curso, el alumnado trabaja conceptos cualitativos, pertenecientes al *significado intuitivo* (“probable”, “seguro” e “imposible”), más presentes a partir de 4º curso (en tercero aparecen escasas actividades de este tipo). En tercer ciclo, concretamente, en 5º curso, el alumnado se inicia en el cálculo de la probabilidad a través de la regla de Laplace (*significado laplaciano*) y, finalmente, en sexto curso existen escasas actividades de asignación numérica de probabilidad, tras calcular laplacianamente la probabilidad de un suceso (véase Figura 3.15).

Figura 3.15. Ejercicio de cálculo de probabilidad ([A5], T.4, p. 64)

3 ¿Cuál es la probabilidad de sacar, sin mirar, una bola verde de esta urna?



3.3.3.3. Prever tendencias en experiencias aleatorias partiendo de datos observados

En general, pocas son las ocasiones en las que se aprecia la recolección de datos por parte del alumnado (tres actividades en cuarto, quinto y sexto curso), ya que, en mayor medida, el alumnado manipula información previamente dada, generalmente en lenguaje tabular. En el campo de la probabilidad, en segundo ciclo existen dos actividades relativas a experiencias aleatorias en las que, a partir de datos preestablecidos, el alumnado es capaz de prever tendencias atendiendo al *significado frecuencial* de los datos. En tercer ciclo, este tipo de actividades se convierte en una constante. Sirva de ejemplo la Figura 3.16.

Figura 3.16. Prever tendencias partiendo de datos propuestos por el libro de texto ([A6], T.12, p. 209)

4 El dueño de una tienda desea saber qué días de la semana vende más barras de pan. Para ello, prepara una tabla y obtiene los datos siguientes:

Día	Recuento	Total
Lunes		
Martes		
Miércoles		
Jueves		
Viernes		
Sábado		

Copia y completa la tabla y contesta a estas preguntas:

- ¿Cuántas barras de pan vende cada día? ¿Y en toda la semana?
- ¿Qué día de la semana vende más pan? ¿Y cuál vende menos?
- ¿Cuál es el día de descanso en este comercio?
- Si tuviera que dejar de vender pan un día, ¿qué día elegiría? ¿Por qué?

3.3.3.4. Estudiar sucesos en los que la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible

Los enunciados de actividades analizados presentan situaciones-problema en las que el conocimiento previo del alumnado puede intervenir en el aprendizaje de la probabilidad. En mayor medida, hace alusión al *significado subjetivo*, tratando la información de forma sencilla, amoldándose a la edad del estudiantado, quien valorará la probabilidad de cada situación en función de su experiencia previa, en la que la *intuición* juega un papel fundamental, pues es la que determinará un tipo de respuesta u otra. Sirva de ejemplo la Figura 3.17.

Figura 3.17. Probabilidad cambiante según la experiencia previa de los sujetos ([A6], T.12, p. 214)



La Tabla 3.7 muestra las situaciones-problema halladas en la presente investigación, dadas a partir de segundo ciclo. Con ellas, se inicia al alumnado en el *significado intuitivo* y en el *frecuencial*, finalizando en el tercer ciclo con el desarrollo del *significado laplaciano* y *subjetivo* de la probabilidad. Destacamos que la no presencia de situación-problema en el primer ciclo implica que no se atiende a lo establecido en las directrices curriculares.

Tabla 3.7. Tipos de situaciones-problema por ciclo

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
Expresar nivel de creencia de ocurrencia de un suceso		X	X
Valorar la probabilidad en juegos de azar		X	X
Prever tendencias en experiencias aleatorias partiendo de datos observados		X	X
Estudiar sucesos en los que la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible		X	X

No obstante, las situaciones-problema analizadas propician un acercamiento a la habilidad de contextualización del pensamiento y lenguaje de la probabilidad en diversos contextos, tanto en escenarios privados y públicos, relativo a uno de los elementos de la cognición en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005).

Dicha investigación difiere del estudio de Gómez-Torres (2014), pues en esta última sí se daban en primer ciclo situaciones en las que requerían expresar el nivel de creencia de ocurrencia de un suceso. Por otro lado, se encuentran paralelismos entre ambos estudios al darle importancia al *significado clásico*, *frecuencial* e *intuitivo* y, en escasas ocasiones, *subjetivo*. Dichos resultados difieren con Ortiz (2002), quien solo halló en su investigación en manuales de secundaria situaciones-problema propias del *significado clásico* y *frecuencial*.

3.3.4. Conceptos

Un componente esencial a la hora de construir el conocimiento matemático son precisamente los conceptos, además de las propiedades implicados a la hora de resolver problemas. Aunque

ambas están relacionadas e interconectadas, se puede afirmar que los conceptos son más flexibles y susceptibles de generalización, pues no están asociados a una determinada tipología de problema. Del mismo modo, en ellos está inmersa la comprensión de aquellos principios de un determinado dominio, así como sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001).

Como bien afirma Orton (1990) la asimilación de los conceptos se va desarrollando paulatinamente con el paso del tiempo, por lo que su implementación debe hacerse desde temprana edad, adecuando el lenguaje y el modo de presentación de conceptos a la edad del alumnado. Skemp (1980) recomienda su introducción a través de ejemplos y actividades bien secuenciadas, en lugar de solo definiciones.

Cabe destacar que, en la etapa de Educación Primaria, los conceptos relacionados con la probabilidad se introducen mediante definiciones parciales en las que no se tienen en cuenta un lenguaje formal o definiciones propias. No obstante, dichos conceptos engloban gran parte de nociones estocásticas básicas, según Heitele (1975), quien opina que tales nociones deben construir el eje conductor del currículo probabilístico desde la enseñanza primaria hasta la universitaria.

De este modo, se presentan los conceptos identificados en el presente estudio, organizados según el significado probabilístico correspondiente.

3.3.4.1. Significado intuitivo

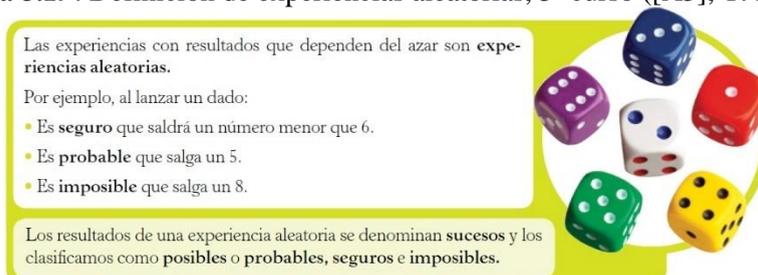
En relación con el presente significado, en los textos analizados se proporcionan, en los tres ciclos, situaciones de aprendizaje en las que el alumnado trabaja el azar y la variabilidad; los sucesos (“seguros”, “posibles” e “imposibles”), así como el grado de creencia (posibilidad) de determinadas experiencias aleatorias, preestablecidas en los manuales de texto.

1. Azar y variabilidad. Aparecen de forma implícita a la hora de definir la *experiencia de azar*, incluyendo de manera intuitiva ejemplos cotidianos. Se presenta como una realidad con más de un resultado, asociada a la no certeza de obtener un determinado resultado a la hora de realizar un experimento (Batanero, 2005). Sin embargo, no se menciona que los experimentos deben reproducirse en similares condiciones (imprescindible desde el enfoque matemático), por lo que su interpretación es implícita, acorde al nivel educativo (véase Figuras 3.18 y 3.19).

Figura 3.18. Definición de experiencias aleatorias, 4º curso ([A4], T.4, p. 72)



Figura 3.19. Definición de experiencias aleatorias, 5º curso ([A5], T.4, p. 62)



2. *Suceso; suceso seguro, posible e imposible.* Dichos conceptos se trabajan en segundo y tercer ciclo, definidos en 4º, 5º y 6º curso. Ejemplos de su definición puede observarse en las Figuras 3.18 y 3.19, en los que están incluidos sus tipos (“seguro”; “posible” o “probable” e “imposible”), valorando la probabilidad de ocurrencia. Asimismo, la noción de suceso y su tipología se realiza intuitivamente.
3. *Posibilidad, grado de creencia.* Presentes en segundo y tercer ciclo, a partir de 4º curso. Explícitamente no está definida, pero sí se muestra a la hora de agrupar los diferentes sucesos, como se podrá apreciar en la *sección 3.5.1.*

3.3.4.2. Significado clásico (o laplaciano)

Cabe destacar que los conceptos probabilísticos que se dan en los manuales de la presente editorial aparecen explícitamente en segundo y tercer ciclo, sin llegar a darse definiciones formales. De este modo, podemos resaltar los juegos de azar, casos favorables y casos posibles, la probabilidad, el juego equitativo y los experimentos compuestos.

1. *Juegos de azar.* En segundo y tercer ciclo, en gran medida las experiencias relativas al azar encontradas en los manuales de texto están relacionadas con juegos equiprobables de azar (lanzar dados, extraer bolas/canicas, determinada carta del mazo), en las que no existen definiciones formales de los mismos debido a la familiaridad de estos para con el alumnado.

2. *Casos favorables; casos posibles.* Su definición, en tercer ciclo, se realiza implícitamente a través del trabajo de la *regla de Laplace*. Entendiendo por “casos favorables” los “sucesos elementales” y por “casos posibles” al “espacio muestral” (definido en 6º curso como “El conjunto de todos los casos posibles de una experiencia” ([A6], T.12, p. 212). La introducción de estos términos se realiza a través de ejemplos (véase Figura 3.20).

Figura 3.20. Definición implícita de “suceso”, mediante la regla de Laplace ([A5], T.4, p. 64)

Para hallar la probabilidad de un suceso, se divide el número de casos favorables entre el número de casos posibles.

¿Cuál es la probabilidad de que Ainhoa saque bola roja?

- Casos favorables: 3
- Casos posibles: 7

La probabilidad es: $\frac{3}{7}$

Probabilidad de un suceso: $P = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$



3. *Probabilidad.* Introducida en tercer ciclo a través de la regla de Laplace en 5º curso (Figura 3.20). En 6º curso se completa con la siguiente afirmación: “La probabilidad es un número entre 0 y 1. Cuanto mayor sea, mayor será la probabilidad de que ocurra ese suceso”. ([A6], T.12, p. 212).
4. *Juego equitativo.* Dicho concepto no aparece mencionado ni definido como tal en los manuales analizados, aunque su idea se puede identificar en situaciones-problema similares a la siguiente:

Figura 3.21. Juego equitativo en probabilidad, 4º curso. ([A4], T.4, p. 73)

Problema

- 4 Luana necesita un 4 para llegar a la meta. Si saca menos de eso, avanza las casillas que diga el dado y, si saca más, se queda en la casilla que está. Completa las siguientes oraciones con seguro, posible e imposible.
- a) Si saca un 4 Luana gana ...?
 - b) Es ...? que al lanzar el dado Luana obtenga un 3, pero ...? que saque un 7.
 - c) Si consigue un 2, es ...? que gane en la siguiente jugada.



5. *Experimentos compuestos, dependencia, independencia.* En gran medida, los experimentos compuestos suelen ser de dos etapas sucesivas, introducidas como casos de “experiencia de azar”. No obstante, estos no se definen. Por otro lado, de qué está compuesto cada experimento es perceptible, al observarse (o ser explicados) los dispositivos y herramientas aleatorias utilizadas en ellos, tal y como se observa en la Figura 3.17.

En esta línea, conviene mencionar que, aunque estos tres elementos no sean específicos del significado laplaciano de la probabilidad se han incluido aquí ya que en ellos se incluyen procedimientos del significado clásico. Es por ello por lo que, aunque no estén definidos como

tales, los conceptos de independencia o dependencia se han tenido en cuenta en los textos analizados, pues deben utilizarse en los ejercicios propuestos.

3.3.4.3. Significado frecuencial

Los conceptos encontrados en los textos que se pueden enmarcar dentro de este significado son más propios del contexto estadístico que el de probabilidad. Asimismo, en 6º curso (en el último tema, unidad 12) aumenta considerablemente el significado frecuencial de la probabilidad al volverse a trabajar la frecuencia absoluta y relativa, así como la moda y el polígono de frecuencias, incluyendo el inicio en el cálculo de la media aritmética, el rango y el cálculo laplaciano de la probabilidad (explicitando que *cuanto más se acerque a 1, mayor probabilidad habrá* ([A6], T.12, p. 212). En este sentido, en la práctica puede apreciarse el enfoque frecuencial de la probabilidad por los motivos que a continuación se describen.

1. *Colectivo (población); Atributos.* Dichos conceptos no se introducen ni definen explícitamente. Sin embargo, se incluyen en todos los escenarios de las actividades del terreno estadístico, asumiendo el contexto de una determinada población (individuos con unas características comunes; atributos), cuyos atributos son los que distinguen a unos sujetos de otros y constituyen los “valores de una variable estadística” (Gómez-Torres, 2014, p. 70).
2. *Ensayo; Ensayos repetidos.* Dicho concepto tampoco se trata explícitamente, aunque también está incluido en aquellas situaciones estadísticas y probabilísticas en las cuales se tienen en cuenta el *significado frecuencial*. En la Figura 3.22 se recogen las estadísticas de 100 ensayos repetidos, el lanzamiento de tiros libres en baloncesto realizados por diferentes jugadoras:

Figura 3.22. Ensayos repetidos, 6º curso. ([A6], T.12, p. 213)

1 En la tabla se recogen las estadísticas de los últimos 100 tiros libres lanzados de las cinco jugadoras del equipo de Yaiza.

Jugadora	Canastas
Yaiza	17
Claudia	21
Lorena	19
Olga	20
Leire	23

- a) ¿Qué porcentaje estimado de acierto en el tiro tiene cada una?
- b) Si tuvieras que elegir una jugadora para lanzar el próximo tiro libre, ¿a quién elegirías?

3. *Frecuencia absoluta; Frecuencia relativa.* Dichos conceptos aparecen de forma implícita en situaciones de probabilidad. Están definidos y asociados con el terreno estadístico:

La frecuencia absoluta de un dato es el número de veces que se repite. La suma de todas es el

número total de datos. La frecuencia relativa de un dato es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos. La suma de todas es 1. ([A6], T.12, p. 216).

4. *Valor estimado de la probabilidad.* En los textos analizados, en tercer ciclo se aprecia de forma implícita la relación entre estadística y probabilidad, así como su estimación empleando un lenguaje informal. Sirva de ejemplo la explicación siguiente: *En ciertas situaciones se puede estimar la probabilidad a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores.* ([A6], T.12, p. 213).

3.3.4.4. Significado subjetivo

En educación primaria, a partir de 4º curso en adelante, este significado se trabaja a partir de:

1. La concepción de la probabilidad como *sucesos* que se dan de forma *incierto*, aleatoria, que dependen del azar o de la suerte. Esto puede ser relacionado con el concepto de “suceso posible” asociado al *significado intuitivo*. Los componentes distintivos de una situación incierta y determinista están inmersos al contexto en el que se da la situación. Sin embargo, dichas diferencias no se explicitan en ningún ciclo. En la Figura 3.23 aparece un suceso que podríamos calificar como incierto, que bien podría asociarse con el *significado subjetivo*, pues la interpretación de su probabilidad dependerá de la experiencia previa del sujeto:

Figura 3.23. Suceso incierto con significado subjetivo ([A4], T.4, p. 72)

b) Ganar a pares o nones.



2. A partir de 6º curso, finalizando la etapa primaria, se trabaja el *grado de creencia de la probabilidad* al calcular la probabilidad estimada de un suceso, pues para hallarla será necesario la recolección previa de unos datos determinados en una situación concreta. De este modo, el alumnado puede llegar a comprender que la probabilidad de un suceso no es exacta y que dependerá del contexto que se pretenda analizar. Cabe destacar que se ofrecen pocas situaciones al alumnado asociadas al *significado subjetivo*, en las que el grado de creencia se expresa de modo *intuitivo*, sin asociarse un valor numérico en los primeros cursos.

Por tanto, se puede afirmar que, en la editorial analizada, se trabajan los cuatro significados de la probabilidad, aunque no en todos los cursos ni con la misma intensidad: comenzando a partir de segundo ciclo. En este ciclo, se aprecia en mayor medida una clara existencia del

significado intuitivo y clásico, y de forma más leve, el *subjetivo* (probabilidad como suceso incierto que depende del azar), y en el tercer ciclo, se suman los significados *frecuencial* y *subjetivo*, más acentuados.

Como cabe esperar a esta edad, el alumnado no maneja los conceptos formales de la probabilidad, presentados generalmente en un modo *intuitivo*, sobre todo los relacionados con el significado *subjetivo*.

En esta línea, se observa que las directrices curriculares se cumplen de forma parcial. Cabe destacar la inexistencia del concepto de *simulación* y la existencia del *juego equitativo*, aunque su presencia se aprecia de forma implícita al no haber mención ni definición de dicho concepto. No obstante, no consta como contenido curricular, por lo que su existencia se resalta a modo de curiosidad. Los conceptos restantes son sugeridos por el Real Decreto (MEC, 2006; 2014) y por la Junta de Andalucía (Consejería de Educación, 2007).

3.3.5. Propiedades

Como sucede con los conceptos, se puede extraer la idea de que, en la editorial analizada, se trabajan las propiedades de los cuatro significados probabilísticos, aunque no en todos los ciclos. En segundo ciclo, a partir de cuarto curso, se observa la presencia del *significado intuitivo*, relativo a la imposibilidad de predecir un suceso, así como sus tipos. Del mismo modo, se aprecia una presentación paulatina de los *significados clásico y frecuencial*, resaltando en mayor medida el *significado laplaciano*, destacando la escasa atención a experimentar situaciones en la persona del/la estudiante y al uso de las tecnologías para simulaciones.

De este modo, a partir del segundo ciclo se desarrollan las propiedades relacionadas con los significados que a continuación se describen.

3.3.5.1. Significado intuitivo

Relacionadas con este significado, en los manuales analizados se encuentran las propiedades destacadas posteriormente:

1. *El resultado no se puede predecir con seguridad.* La propiedad principal de cualquier experimento relativo a la aleatoriedad es la *impredicibilidad*. Sirva de ejemplo la siguiente experiencia aleatoria: *¿Qué número saldrá?* ([A4], T.4, p. 73). En los ciclos posteriores el

alumnado reflexionará sobre la posibilidad de predicción de resultados con el fin de deducir si una experiencia es o no aleatoria.

2. *Suceso posible (cualquier resultado de un experimento); suceso imposible (no se verifica nunca); suceso seguro (siempre sucede).* Se define “suceso” como *resultado de una experiencia aleatoria* ([A5], T.4, p. 62). Las propiedades características de esta tipología de sucesos se muestran sucesivamente a partir de ejemplos, aunque no son definidas como tales a partir de segundo ciclo, concretamente desde 4º curso (Figuras 3.17 y 3.18).

A su vez, se proponen actividades en las que el alumnado debe identificar (Figura 3.24) o inventar (Figura 3.25) sucesos de diferentes tipologías, promoviendo diferenciar y ser capaz de ordenar los distintos sucesos en función de su probabilidad de ocurrencia.

Figura 3.24. Identificación de tipos de sucesos ([A4], T.4, p. 73)

2 En la experiencia que consiste en sacar cartas sin mirar, indica cómo son los siguientes sucesos.



- a) Sacar un as.
- b) Sacar el caballo de oros.
- c) Sacar dos sotas seguidas.
- d) Sacar un rey.

Figura 3.25. Inventar cuatro sucesos seguros, posibles o imposibles ([A5], T.4, p. 63)

10 Escribe en tu cuaderno cuatro sucesos que sean seguros, posibles o imposibles. Dáselos a tu compañero o compañera para que identifique cada uno. Haz tú lo mismo con los suyos.

Del mismo modo, se proponen actividades con tres experimentos aleatorios diversos entre sí con el mismo suceso de interés como eje vertebrador (véase Figura 3.11). Dicha forma de presentar los sucesos hace uso del *significado axiomático*, no tan evidente para el alumnado que puede provocar confusión de la propiedad definitoria del suceso con un componente característico del dispositivo aleatorio.

3. *La posibilidad de ocurrencia se puede comparar.* Distinguir sucesos en función del grado de creencia es una correcta introducción al concepto de probabilidad, esa necesidad intrínseca del ser humano de medir la probabilidad asignándole un número. Comprender la probabilidad respetando un orden de ocurrencia de los sucesos ayudará al estudiantado a la asimilación del *significado subjetivo* (Ortiz, 2002). En los textos analizados no se compara explícitamente la posibilidad de ocurrencia, aunque sí se propone una actividad en tercer ciclo (5º curso) en la que el alumnado pone en juego esa comparación empleando los términos “más probable”, “menos probable” o “igual de probable” (Figura 3.26).

Figura 3.26. Actividad de comparación de posibilidades ([A5], T.4, p. 63)

9 Copia las oraciones siguientes en tu cuaderno y complétalas con «más probable», «menos probable» o «igual de probable»:

- a) Es ? que la ruleta quede en el color amarillo que en el azul.
- b) Es ? que la ruleta quede en el color amarillo que en el verde.
- c) Es ? que la ruleta quede en el color verde que en el rojo.



4. *La posibilidad, como grado de creencia, se puede aproximar analizando el fenómeno.* Esta propiedad relaciona el *significado intuitivo* con el resto de los significados (véase Figura 3.21). Concretamente, ofrece la posibilidad de determinar en qué momento es más conveniente usar uno u otro modo de asignación de la probabilidad (Batanero, 2005).
5. *La posibilidad, como grado de creencia, se puede revisar con la experiencia.* Dicha propiedad promueve la asociación entre el *significado intuitivo* con el *frecuencial y subjetivo*. Se diferencia de la anterior propiedad en el sentido de que necesita de experiencia personal previa para analizar los fenómenos de las situaciones aleatorias (véanse Figuras 3.17 y 3.23).

3.3.5.2. *Significado clásico*

Las propiedades encontradas en los manuales de texto relacionadas con el presente significado son las que a continuación se especifican.

1. *Número de resultados finito y numerable.* Dicha propiedad es primordial para la asignación de probabilidades (Ortiz, 2002), asumida en la mayoría de las actividades propuestas en los manuales. Los números cardinales de los casos posibles (espacio muestral) aparecen en aquellos procedimientos relativos al cálculo, después de realizar el acto de contar o por familiaridad con respecto al dispositivo aleatorio (véase Figura 3.17).
2. *Equiprobabilidad de sucesos elementales.* Asumida en gran parte de las actividades propuestas en los libros analizados, basados en la simetría aparente de las herramientas aleatorias utilizadas en las diversas experiencias de azar. Sirvan de ejemplo las ruletas compuestas de sectores con área similar (véanse Figuras 3.23 y 3.26).
3. *Casos favorables (resultados que favorecen), casos posibles (todos los resultados).* Ambos son los conjuntos de los cuales el alumnado puede guiarse para comenzar el cálculo de probabilidades, propias del *significado clásico*. Los primeros son relativos a cierta parte del espacio muestral (su cardinal es el numerador) y los segundos, a todo el conjunto (cardinal en el denominador). Dicha propiedad es utilizada en cualquier situación de cálculo o de comparar probabilidades (Figuras 3.20 y 3.26, sucesivamente). No obstante, no existe definición alguna de la presente propiedad.
4. *Probabilidad: Valor objetivo, calculable.* Dicha propiedad es observable en escenarios de juegos de azar, en los que la probabilidad va a depender del número cardinal de resultados y del propio juego. Es una de las diferencias entre el *significado clásico* y los demás significados (Batanero, 2005). Sirvan de ejemplo las Figuras 3.17 y 3.22.

Esta es una propiedad bastante compleja para el alumnado porque requiere de ciertas combinaciones para definir el espacio muestral y aceptar la falta de equiprobabilidad en el resultado (pese a las situaciones equiprobables de las que han aprendido el concepto de probabilidad).

5. *Regla de Laplace.* Es uno de los ejes vertebradores del *significado clásico* y aparece sin ser nombrada como tal (véase Figura 3.20). Esta propiedad es válida ya que cumple con las propiedades anteriores; sin embargo, este hecho no se explicita en los manuales analizados, pudiendo sesgar la información, por ejemplo, en la falsa creencia de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

6. *La posibilidad de ocurrencia de un suceso es cuantificable.* Dicha propiedad constituye una de las bases para la asimilación del concepto de probabilidad, relacionando los *significados intuitivo y clásico*. Es utilizada en la totalidad de situaciones probabilísticas relacionadas con cálculo.

3.3.5.3. Significado frecuencial

Casi todas las propiedades asociadas a este significado están más relacionadas con el campo de la estadística que de la probabilidad. Por otro lado, no aparece en ningún manual propiedad alguna relativa a *simulación*.

1. *Colectivo. Semejantes que difieren en atributos observables.* Característica de situaciones en las que es aplicable el *significado frecuencial*, en las que se hace patente su relación con la estadística. En la Figura 3.22 se contextualiza el *colectivo* en un determinado tiempo y espacio, resaltando el atributo observable, los tiros libres encestandos.

2. *Los atributos en un colectivo pueden o no ser equiprobables.* La totalidad de actividades propuestas que trabajan el *significado frecuencial* amparan resultados no equiprobables en sus experimentos aleatorios, en gran parte, en situaciones en las que es fácil reconocer esta no equiprobabilidad (Figura 3.28).

Figura 3.28. Atributos no equiprobables en un colectivo ([A6], T.12, p. 213)

2 Observa los goles conseguidos por Celia en 10 partidos jugados.

Partidos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º
Tiros realizados	5	6	4	6	7	3	7	6	8	8
Goles conseguidos	2	1	0	3	1	1	0	2	1	1

- ¿Cuál es la probabilidad de que meta gol en su próximo disparo?
- El porcentaje de goles conseguidos por Luis es del 35% de los tiros que realiza. ¿Quién de los dos tiene mejor porcentaje de acierto de cara al gol?

3. *Probabilidad: Valor objetivo, hipotético, desconocido.* La probabilidad tiene un carácter objetivo, característica del *significado frecuencial*, que no se explicita en los manuales analizados, por lo tanto, es un dato desconocido para el alumnado. Asimismo, se propone recogida de datos de ensayos repetidos de experiencias aleatorias y, posteriormente, se pide un ejercicio de estimación, como *probabilidad estimada*, en la que no se aclara que este dato es *hipotético* (véase Figura 3.6): *En ciertas situaciones se puede estimar la probabilidad a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores.* ([A6], T.12, p. 213).
4. *Aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de la muestra.* Dicha propiedad conforma la base de para comprender la ley de los números grandes, además de asimilación de las ideas de *precisión* y *variabilidad*. La idea de *límite* no es conocida por el alumnado a esta edad, por lo que la aproximación se hará intuitivamente. Para ello sería muy productivo acudir a ejercicios de *simulación* y tecnológicos. En este sentido, esta idea no es aplicada en las actividades de los manuales analizados al trabajar con muestras pequeñas, promoviendo el sesgo de *representatividad*. Sirva de ejemplo: *La probabilidad estimada es más fiable cuantos más datos contabilicemos.* ([A6], T.12, p. 213).
5. *La frecuencia relativa de un atributo tiende a estabilizarse.* Para apreciar dicha estabilidad conviene apuntar los datos de ensayos repetidos, variando el tamaño de la muestra; hecho que no se aprecia en los textos analizados y la actividad de la Figura 3.29, por ejemplo, hubiera sido una buena oportunidad para introducir la noción de esta propiedad.

Figura 3.29. Elaboración de tabla de frecuencias (absolutas y relativas) ([A6], T.12, p. 206)

2 Un profesor ha anotado en su libreta las notas obtenidas por los 25 alumnos de su clase:

5, 3, 4, 1, 2, 8, 9, 8, 10, 5, 3, 6, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 1, 2, 4, 5, 9, 6, 6

- a) Construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas de las notas obtenidas.
- b) Representa en un gráfico de barras las frecuencias absolutas.

Esta propiedad se propone en el tema de estadística aludiendo a *frecuencias absolutas* (Figura 3.30), en las que se puede apreciar cómo se establece una relación implícita con las frecuencias relativas, de forma que el alumnado comprenderá que “a menor frecuencia relativa, menor frecuencia absoluta”:

Figura 3.30. Relación entre frecuencia absoluta y relativa ([A6], T. 12, p. 206)

1 Observa la tabla de frecuencias y el gráfico de barras de las excursiones de los socios del club y responde.

- a) ¿Cuál es la excursión más popular? ¿Por qué?
- b) ¿Qué dato tiene menor frecuencia relativa? ¿Coincide que es también el que tiene menor frecuencia absoluta?
- c) ¿Qué relación hay entre las barras del gráfico de barras y la columna de frecuencias absolutas?

6. *Las frecuencias relativas (y las distribuciones de frecuencias) varían en cada serie de N ensayos.* Este tipo de propiedad promueve la asimilación de la idea de aproximación de dicha noción de la probabilidad, así como desarrollar la capacidad inferencial. Esto es producto de reflexionar sobre las diferencias que se observan, semejanzas en patrones y capacidad de calcular la probabilidad.

En los textos analizados no se hace alusión a repetir algún ensayo repetido de los que se proponen en las distintas actividades para observar semejanzas y diferencias en resultados y patrones, por ejemplo.

3.3.5.4. Significado subjetivo

Las propiedades relativas a este significado se han encontrado implícitas en los libros de texto analizados. A continuación, se describen.

1. *Suceso incierto. Se tiene cierta información, pero no se puede predecir totalmente.* En el presente significado se afirma que el grado de ocurrencia de un suceso depende en parte a una o diversas causas que no son deterministas. La modificación de la posibilidad de ocurrencia a causa de conocer datos adicionales no se alude en ningún ciclo. Ejemplo: *Saber las personas que subirán hoy a un autobús.* ([A6], T.12, p. 210). En este ejemplo, el conocimiento del tiempo (si llueve o hace sol); el día de la semana (entre semana o fines de semana); acontecimiento socialmente concurrido (campeonato de deportes, charla de alguien famoso, fiestas patronales) o, incluso, que haya sucedido un accidente de tráfico próximo a la parada del autobús y que corte la calle, sería de gran ayuda a la hora de estimar la probabilidad del número de personas que subirán al autobús. No obstante, su conocimiento tampoco provocaría saber el número exacto, pues sigue siendo un hecho que depende totalmente del azar.
2. *Probabilidad como grado de creencia personal: condicionada por un sistema de conocimientos.* El conocimiento previo influenciará a la hora de asignar mejor la probabilidad de un suceso. Se ha encontrado esta propiedad de forma implícita en contextos cotidianos y familiares para el alumnado (véanse Figuras 3.17, 3.23 y 3.31).

Figura 3.31. Probabilidad como grado de creencia personal ([A6], T.12, p. 214)

2 Con una baraja española de 40 cartas, Marta y Paloma juegan a ver quién acierta al sacar una carta al azar. Paloma apuesta porque la carta sea una figura (sota, caballo o rey), en tanto que Marta apuesta porque la carta sea de copas. ¿Cuál de las dos tiene mayor probabilidad de acertar?



3. *La probabilidad a priori es la probabilidad en ausencia de información.* Dicha propiedad se trabaja implícitamente. Que se dé un resultado, en parte, dependerá de causas no deterministas, cuyas probabilidades se irán retroajustando a causa de las experiencias vividas (Figuras 3.22 y 3.28) y a priori cuando lo desconocido son las causas y consecuencias. Se han encontrado ejemplos de situaciones un tanto ambiguas que pueden causar confusión en el alumnado, por ejemplo, la siguiente: *¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado?* ([A5], T.4, p. 68). En dicho problema no especifica el número de caras del dado, pues bien podría tratarse de un dado con más de seis caras, lo que puede llevar a error en el alumnado.

En síntesis, en los textos analizados están incluidas propiedades características de los cuatro significados de la probabilidad (véase Tabla 3.8), tal y como establece el currículo. Así, desde el segundo ciclo se contempla la existencia del *significado intuitivo*, relativo a la incapacidad de predecir los sucesos y sus tipos. Del mismo modo, se suceden de forma gradual las propiedades básicas de los *significados clásico y frecuencial*, adquiriendo mayor protagonismo el primero en los manuales analizados, en los que apenas se propone la experimentación y no se menciona la *simulación*, al contrario de las directrices curriculares. No obstante, las propiedades básicas del *significado subjetivo* sí son amparadas en segundo y tercer ciclo.

Tabla 3.8. *Propiedades encontradas según ciclo y significados*

Propiedad según significado	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
INTUITIVO			
-Impredecibilidad del resultado		X	X
-Posible: cualquier resultado de un experimento		X	X
-Imposible: nunca se verifica		X	X
-Seguro: siempre sucede		X	X
-Calificable comparando		X	X
CLÁSICO			
-Número de resultados finito y numerable		X	X
-Equiprobabilidad de sucesos elementales		X	X
-Casos favorables. Casos posibles		X	X
-Valor objetivo. Valor calculable			X
-Regla de Laplace			X
FRECUENCIAL			
-Colectivo: semejantes con distintos atributos observables	X	X	X
-Atributos equiprobables o no		X	X
-Probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable			X
SUBJETIVO			
-Suceso incierto: impredecible, con información adicional		X	X
-Probabilidad condicionada por un sistema de			X

3.3.6. Procedimientos

Los procedimientos que se han encontrado en los presentes libros de texto obedecen a una exposición de tipo informal cuya definición se realiza de forma parcial. A continuación, se presentan los procedimientos analizados en función del significado probabilístico correspondiente.

A continuación, se presenta la Tabla 3.8, inspirada en Gómez-Torres (2014), en la que a modo de resumen se recogen los significados de cada una de las propiedades que se trabajan en cada ciclo de la etapa primaria de los manuales analizados. Tal y como se puede observar en la tabla, las directrices curriculares no se cumplen en su totalidad al no trabajar la concepción del azar desde el primer ciclo de la etapa primaria, al contrario que en la investigación de Gómez-Torres (2014).

3.3.6.1. Significado intuitivo

1. *Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas.* Se encuentran situaciones cotidianas y familiares para el alumnado promoviendo reflexionar acerca del azar en ellas. Ello fomenta la asimilación de la noción de la *aleatoriedad* y *experimento aleatorio* (Figura 3.32).

Figura 3.32. Distinguir fenómenos aleatorios de los deterministas ([A6], T.12, p. 210)

2 Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

Experiencia	Depende del azar	
	Sí	No
Sacar un 4 al tirar un dado.		
Caer al suelo una moneda al lanzarla al aire.		
Meter gol al lanzar un penalti.		
Sacar una carta de espadas de la baraja.		
Saber las personas que subirán hoy a un autobús.		
Sacar menos de 8 al lanzar un dado.		

2. *Reconocer la impredecibilidad del resultado.* Los manuales fomentan reflexionar sobre el resultado que se obtendrá previamente al experimento. Por ejemplo, en 4º de primaria se propone al alumnado distinguir aquellas experiencias aleatorias de una lista de 6 situaciones, similar a la Figura 3.32.

3. *Reconocer tipos de sucesos.* Planteado de dos formas: 1) identificar varios sucesos en experimento distintos (Figura 3.24); 2) identificar varios sucesos en un solo experimento (Figura 3.33).

Figura 3.33. Varios sucesos en un mismo experimento ([A6], T.12, p. 211)

7 De qué color hay que pintar la bola blanca en cada caso para que, al sacar una, se cumpla que:

a) Es seguro que sale de color violeta.



c) Es probable que salga de color azul.



b) Es probable que salga de color verde.



d) Es imposible que salga de color negro.



4. *Valorar y comparar cualitativamente posibilidades.* Los textos proponen sucesos distintos para que el alumnado consiga distinguir sus posibilidades de ocurrencia, así como la comparación entre los mismos mediante expresiones tipo “más probable”, “menos probable”, “igual de probable” (Figura 3.26).

3.3.6.2. Significado clásico

1. *Analizar diferentes juegos de azar.* Como la oca, lanzamiento de dados, ruleta, sorteos (todos ellos familiares para el alumnado) en los que se sugiere el cálculo o comparación de probabilidades de sucesos relacionados con los mismos, sin dar lugar a la reflexión. En secciones previas se pueden apreciar diversos ejemplos.
2. *Enumerar o contar casos favorables y posibles.* Acerca de experimentos simples (por ejemplo, enumerar resultados posibles) y complejos (o compuestos). Este último potencia el pensamiento combinatorio (Figura 3.34).

Figura 3.34. Casos posibles, 5º curso ([A5], T.4, p. 66)

1 Cristina se ha comprado dos faldas (una azul y otra negra) y tres camisetas (roja, azul y negra). ¿De cuántas formas diferentes se puede vestir con esa ropa?



Construye una tabla y analiza las posibilidades.

3. *Diferenciar casos favorables y no favorables.* Se realiza en experimentos simples y compuestos. Reconocer casos no favorables se encuentra de forma implícita a la hora de diferenciar dichos casos (Figura 3.17).
4. *Distinguir sucesos elementales equiprobables.* En gran medida, desde segundo ciclo, se asume implícitamente la equiprobabilidad en las situaciones probabilísticas que se proponen

(Figuras 3.21, 3.23, 3.24). Por lo que sería labor docente hacer esta distinción para evitar en el alumnado el sesgo de *equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992).

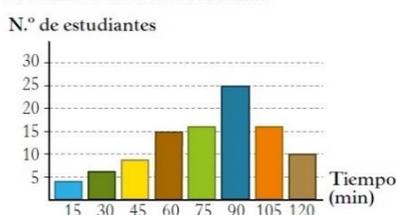
5. *Comparar probabilidades con razonamiento proporcional*. Este tipo de ejercicios se aprecia en menor medida, en los que se tiene en cuenta el número total de casos posibles y diferenciar los casos favorables (Figura 3.26).
6. *Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples*. Se introduce a partir de tercer ciclo (Figura 3.14) mediante asignación numérica de probabilidades, dando por sentada la equiprobabilidad de sucesos, sin distinción explícita entre supuesto elemental o complejo.

3.3.6.3. Significado frecuencial

1. *Enumerar o discriminar atributos en un colectivo*. Dicho significado se desarrolla a partir de una lista de datos preestablecida (Figuras 3.7, 3.8 y 3.13, por ejemplo). Por otro lado, no se propone la recolección de datos y, apenas, reconocer atributos.
2. *Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones de datos*. En tercer ciclo se propone el cálculo de la frecuencia relativa de la información aportada por tablas, gráficos o listado de datos, sin propuesta de cálculo a partir de la recolección propia de los datos (Figura 3.29).
3. *Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica*. Este tipo de ejercicios se realiza a raíz de datos propuestos en los manuales analizados (Figura 3.35).

Figura 3.35. Representar en una tabla la presente distribución ([A6], T.12, p. 216)

2 A partir de los datos del gráfico construye en tu cuaderno la tabla de frecuencias.



- a) ¿Cuántos chicos y chicas dedican al estudio una hora o más tiempo?
- b) ¿Qué dato tiene menor frecuencia relativa?
- c) ¿Cuál es el dato de mayor frecuencia absoluta?

Conviene señalar que desde primer ciclo se leen, interpretan y elaboran tablas de frecuencias absolutas, pero sin la utilización del lenguaje formal. En este sentido, el tipo de gráficos utilizados se han descrito en la Sección 3.1.3. Esta forma de representación es más sencilla de comprender para el alumnado en comparación con el lenguaje tabular frecuencial (absoluto y relativo), pues el cambio de número entero a decimal (o fracción), y su combinación

para el cálculo, aumenta la dificultad de manipulación.

4. *Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos).* Este tipo de tablas se propone a partir de segundo ciclo (implícitamente en un ejercicio), para su lectura, interpretación y elaboración, de forma explícita en tercer ciclo. En la Sección 3.1.2. se describe detenidamente el lenguaje tabular empleado en este tipo de tablas.
5. *Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos.* Este tipo de ejercicio se observa escasas veces y su planteamiento no se describe de forma explícita (Figura 3.22). Incluido en aquellas situaciones estadísticas y probabilísticas en las cuales se tienen en cuenta el *significado frecuencial*.
6. *Reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad.* En los textos analizados no se menciona explícitamente entre valor probabilístico y su estimación. Por lo que queda en manos del/la docente realizar esta distinción. Igual sucede con enseñar la diferencia entre el cálculo de la probabilidad, *significado clásico*, y su estimación, *significado frecuencial*.

3.3.6.4. Significado subjetivo

Se ha identificado solo un procedimiento relacionado con este significado implícitamente.

1. *Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal.* Se han observado algunos experimentos relacionados con juegos de destreza o fenómenos naturales que pueden ser analizados con el presente significado en función del conocimiento previo de cada sujeto o de qué tan disponible tenga la información. Por ejemplo, *¿cuál es la probabilidad de que meta gol en su próximo disparo?* ([A6], T.12, p. 213).

A modo de resumen, se presenta la tabla de los procedimientos encontrados en los manuales de texto relacionados con cada uno de los significados de la probabilidad. Las directrices curriculares se cumplen parcialmente al desarrollar al menos un procedimiento de cada uno de los significados. En primer ciclo no se desarrollan la mayoría de los significados, contrario a lo que establece la normativa educativa. De este modo, se aprecia el desarrollo de un significado intuitivo, clásico y subjetivo en el desarrollo procedimental de la probabilidad desde segundo ciclo, apreciándose escasos procedimientos de significado frecuencial en primer ciclo.

Tabla 3.9. Procedimientos encontrados según ciclo y significados

	Primer Ciclo	Segundo Ciclo	Tercer Ciclo
INTUITIVO			
-Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas		X	X
-Reconocer la impredecibilidad de un resultado		X	X
-Reconocer tipos de sucesos		X	X
-Valorar y comparar cualitativamente posibilidades			X
CLÁSICO			
-Analizar juegos de azar		X	X
-Enumerar o contar casos favorables y posibles		X	X
-Diferenciar casos favorables y no favorables			
-Distinguir sucesos elementales equiprobables		X	X
-Comparar con razonamiento proporcional			X
-Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples			X
FRECUENCIAL			
-Enumerar o discriminar atributos	X	X	X
-Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos			X
-Representar distribución de frecuencias en forma gráfica o tabular	X	X	X
-Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)			X
-Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			X
-Reconocer el carácter aproximado de la estimación			X
SUBJETIVO			
-Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal		X	X

3.4. CONCLUSIONES RESULTADOS

En base a los resultados, se observa un escaso empleo de expresiones probabilísticas en primer ciclo, casi nulo (véase Tabla 3.2), en discordancia con las directrices curriculares, que proponen el trabajo del azar en los tres ciclos de primaria. No obstante, en línea con los estudios de Gómez-Torres (2014) y Ortiz (2002) se aprecia una mayor diversidad verbal relativa a la aleatoriedad y sus experimentos, así como de sucesos (y tipos), si lo comparamos con el tratamiento dado a términos más técnicos. Cabe destacar la discordancia de dicho análisis con el realizado por Gómez-Torres (2014), en el cual se trabajan las fracciones en probabilidad desde segundo ciclo, mientras que en el presente análisis se retrasa la introducción de las fracciones con dicho objetivo hasta finalizar el tercer ciclo.

Así, se aprecia gran riqueza de lenguaje tabular, en consonancia con Gómez-Torres (2014). No obstante, la complejidad de dicho lenguaje aumenta en la etapa secundaria, en línea

con lo hallado por Ortiz (2002). Respecto al uso de gráficos, conviene destacar la complejidad en su utilización (véase Tabla 3.5) que avanza paulatinamente al nivel educativo, con una utilización cada vez mayor del significado frecuencial. No obstante, no se ha encontrado el uso de diagramas de árbol, al contrario que los resultados del análisis de Gómez-Torres (2014).

En general, existe ausencia de argumentos relativos al azar en primer ciclo, al contrario de las directrices curriculares. En Gómez-Torres (2014) se hacían uso de ejemplos y contraejemplos, así como el razonamiento inductivo igual que en Ortiz (2002), en secundaria; aunque su uso se extendía desde el primer ciclo, al contrario de lo hallado en la presente investigación, que comienza en segundo ciclo.

Las situaciones problema comienzan a partir de segundo ciclo desde un significado intuitivo, contrario a la normativa, introduciendo a final de tercer ciclo los significados clásico y subjetivo. Destacando desde segundo ciclo un aumento creciente del significado frecuencial, utilizando en mayor medida conceptos propios del contexto estadístico que el de probabilidad.

En el campo conceptual se analizan los cuatro significados de la probabilidad. Se proporcionan situaciones de aprendizaje en las que el alumnado trabaja el azar y la variabilidad; los sucesos y el grado de creencia de determinadas experiencias aleatorias, preestablecidas en los manuales de texto. Caso similar sucede con las propiedades, las cuales se trabajan desde los cuatro significados probabilísticos, aunque no en todos los ciclos.

Relativo al significado laplaciano los conceptos probabilísticos aparecen explícitamente en segundo y tercer ciclo, sin llegar a darse definiciones formales. De este modo, podemos resaltar los juegos de azar, casos favorables y casos posibles, la probabilidad, el juego equitativo y los experimentos compuestos.

A partir de segundo ciclo se observa la presencia del significado intuitivo, relativo a la imposibilidad de predecir un suceso, así como sus tipos. Del mismo modo, se aprecia una presentación paulatina de los significados clásico y frecuencial, resaltando en mayor medida el significado laplaciano, destacando la escasa atención a experimentar situaciones en la persona del/la estudiante y al uso de la tecnología para simulaciones. Respecto a los procedimientos, se deduce que las directrices curriculares se cumplen parcialmente al desarrollar al menos un procedimiento de cada uno de los significados. No obstante, en primer ciclo no se desarrolla la mayoría de los significados de la probabilidad, contrario a lo que establece la normativa educativa.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se exponen las conclusiones halladas, relativas a la consecución de objetivos e hipótesis, así como la idoneidad didáctica de los propios textos analizados. Cabe destacar, que los objetivos han sido desarrollados y la mayoría de las hipótesis han sido confirmadas. No obstante, su confirmación se torna en ocasiones subjetiva, por lo que se propone una lectura minuciosa de las mismas. A la hora de determinar la idoneidad didáctica de los textos analizados se ha tenido en cuenta el esquema de Godino (2013) (véase Figura 1.2) en el que se muestran los requisitos que debe cumplir un manual para ser considerado idóneo didácticamente y en el que se describen cada uno de ellos en base a los resultados hallados.

Del mismo modo y para finalizar, se presentan las limitaciones del estudio y posibles líneas futuras de investigación en el terreno de la probabilidad. Cabe destacar que la probabilidad es un campo reciente de investigación por lo que una de las limitaciones a las que se ha enfrentado el presente estudio ha sido precisamente los pocos estudios relativos a probabilidad, lo que conlleva tener un escaso margen de comparación y marco teórico en el que apoyarse.

4.2. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

4.2.1. Conclusiones en base a objetivos e hipótesis

Tal cual se estableció anteriormente, el presente estudio tiene el objetivo de *O1. Analizar la presencia de la probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria.*

El objetivo principal se ha conseguido, ya que en el Capítulo 3 se detallan exactamente los objetos matemáticos (lenguaje, argumentos, situaciones-problema, conceptos, propiedades, procedimientos) trabajados en base a cada uno de los significados. Concluyendo con una aparición en mayor medida del *significado intuitivo*, seguido del *laplaciano y frecuencial*, y un escaso *significado subjetivo*. Conviene destacar la casi nula aparición en primer ciclo de la probabilidad, contrario a lo establecido en la normativa educativa.

- OE1. *Realizar una síntesis de las principales investigaciones centradas en analizar los libros de texto.*

La revisión bibliográfica del Capítulo 2 demuestra que el libro es un recurso de gran importancia, una herramienta flexible y vertebradora del proceso de enseñanza (Área y González, 2015; Molina y Alfaro, 2019; Varela, 2008). Por contrapartida, algunos autores resaltan como inconvenientes su complicada manipulación por parte del profesorado, requiriendo grandes cantidades de tiempo y formación; no favorecer la comunicación con las familias; no incluir a todo el alumnado con necesidades educativas (Molina y Alfaro, 2019), constituyendo en sí mismo un obstáculo como objeto de transmisión de conceptos matemáticos (Fernández y Caballero, 2017).

- OE2. *Analizar los objetos matemáticos primarios en base al enfoque del EOS relacionados con la probabilidad.*

Este objetivo se ha cumplido, pues en el capítulo 3 se establece un análisis detallado de los objetos matemáticos relacionados con la probabilidad existentes en los manuales investigados en base al enfoque ontosemiótico, de entre los cuales destacan el lenguaje, argumentos, situaciones-problema, conceptos, propiedades y procedimientos.

De este modo, en un principio, se establecieron las siguientes hipótesis iniciales:

H1. *Ausencia de la probabilidad en los primeros cursos de educación primaria.* El análisis llevado a cabo demuestra que los distintos tipos de significado no se ven en primer ciclo. El estudio sobre los conceptos pone de manifiesto que los significados de la probabilidad se trabajan en segundo y tercer ciclo. Observando una gran tendencia en utilizar un significado intuitivo y clásico de la probabilidad.

Con relación al significado intuitivo en los textos analizados de los tres ciclos se proporcionan situaciones de aprendizaje en las que el alumnado trabaja el azar y la variabilidad; los sucesos (“seguros”, “posibles” e “imposibles”), así como el grado de creencia (posibilidad) de determinadas experiencias aleatorias, preestablecidas en los manuales de texto.

Referente al significado clásico los conceptos probabilísticos aparecen explícitamente en segundo y tercer ciclo, sin llegar a ser definidos formalmente, destacando los juegos de azar, casos favorables y casos posibles, la probabilidad, el juego equitativo y los experimentos compuestos.

Dentro del significado frecuencial de la probabilidad, cabe destacar los conceptos

enmarcados dentro de este significado, pues son más propios del contexto estadístico que el de probabilidad. Asimismo, en 6º curso aumenta considerablemente el significado frecuencial de la probabilidad al volver a trabajar la frecuencia absoluta y relativa, incluyendo el inicio en el cálculo de la media aritmética y el cálculo laplaciano de la probabilidad (explicitando que *cuanto más se acerque a 1, mayor probabilidad habrá* ([A6], T.12, p. 212).

Cabe destacar que se ofrecen pocas situaciones asociadas al significado subjetivo, en las que el grado de creencia se expresa de modo intuitivo, sin asociarse un valor numérico en los primeros cursos.

H2. *Gran presencia de fenómenos de probabilidad asociadas a los juegos de azar.* Se observa la asimilación de la noción de Probabilidad a través de juegos de azar conocidos por el alumnado. Sin embargo, los fenómenos de la probabilidad se presentan de manera aislada, sin aparente funcionalidad.

H3. *Se presentan tablas, gráficos y representaciones icónicas generalmente centradas en trabajar más las estadísticas descriptivas que la probabilidad.* Se observa desde primer ciclo un tratamiento tabular enfocado en la estadística sin llegar a conectarlo con la probabilidad, con una única excepción: al finalizar sexto curso en el último tema bajo el título “La probabilidad y los datos” ([A6], T.12, p. 213) la probabilidad es conectada con la estadística.

4.2.2. Conclusiones en base a la idoneidad didáctica

En la Figura 1.2. se aprecia el esquema de, según Godino (2013), los requisitos que deben cumplir los manuales de texto para decidir si son idóneos didácticamente o no. Siguiendo el citado esquema se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre la idoneidad didáctica de los manuales analizados.

En primer lugar, se han podido analizar cinco de seis componentes de idoneidad (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica). Ya que el carácter de nuestro análisis impedía entrar en el aula para analizar la idoneidad interaccional, esta ha quedado fuera del análisis. En cuanto a la idoneidad mediacional, no han podido ser analizados los indicadores relativos a la ratio de alumnos/as, horario lectivo y características de la clase.

Acto seguido, se han elaborado las tablas recogidas en las que se han evaluado los indicadores de idoneidad de la editorial elegida mediante A (Avanzado), M (Medio) y B (Bajo). A continuación, se observa la Tabla 4.1. en la que no se aprecia idoneidad epistémica en primer

ciclo al no trabajarse la probabilidad. Al contrario, ocurre en segundo y tercer ciclo con una idoneidad epistémica media-alta pues, aunque se utiliza un lenguaje rico y variado, se presentan escasas situaciones en las que el alumnado genera sus propias definiciones, argumentos y no todos los objetos matemáticos son relacionados entre sí.

Tabla 4.1. *Tabla sobre componentes e indicadores de idoneidad epistémica (Godino, 2013, p. 119)*

		Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
		A	M	B	A	M	B	A	M	B
Situaciones- problema	*Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación			X	X			X		
	*Se proponen situaciones de generación de problemas			X	X			X		
Lenguajes	*Uso de diferentes formas de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica), traducciones y conversiones entre ellas		X	X				X		
	*Nivel de lenguaje adecuado a los/as niños/as que se dirige		X	X				X		
Reglas	*Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación		X	X				X		
	*Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, adaptados al nivel educativo al que van dirigidos		X	X				X		
	*Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado		X		X			X		
	*Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos		X		X			X		
Argumentos	*Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen		X	X				X		
	*Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar		X		X			X		
Relaciones	*Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, ...) se relacionan y conectan entre sí		X		X			X		
	*Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas			X						

En la Tabla 4.2 se analiza la idoneidad cognitiva, hallando una idoneidad cognitiva ausente en primer ciclo, en cambio en segundo y tercer ciclo es media-alta, existiendo ejercicios de refuerzo y ampliación, con contenidos asequibles para el alumnado, en la que se promueve retroalimentación de la comprensión del alumnado, por ejemplo, a través de dianas o escalas, teniendo en cuenta dicho aprendizaje para tomar decisiones.

Tabla 4.2. Tabla sobre componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Godino, 2013, p. 119)

		Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
		A	M	B	A	M	B	A	M	B
Conocimientos previos	*Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema			X			X			X
	*Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversos componentes			X	X			X		
	*Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo			X	X			X		
Adaptaciones	*Se promueve el acceso y logro de todos los estudiantes			X			X			X
	*Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos			X			X			X
Aprendizaje	*Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva			X			X			X
	*La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia			X			X			X
	*Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.			X			X			X

La Tabla 4.3. estudia la idoneidad afectiva, concluyendo que en primer ciclo no se desarrolla; y en segundo y tercer ciclo se desarrolla una idoneidad afectiva media, pues las tareas propuestas son de interés para el alumnado haciendo uso de juegos de azar familiares, aunque su uso no es del todo funcional, por lo que el significado subjetivo no se aplica. Por otro lado, se promueve el autoestima y acercamiento a las matemáticas, por ejemplo, mediante dianas de autoevaluación al final de la lección.

Tabla 4.3. Tabla sobre componentes e indicadores de idoneidad afectiva (Godino, 2013, p. 122)

		Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
		A	M	B	A	M	B	A	M	B
Intereses y necesidades	*Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional			X			X			X
	*Las tareas tienen interés para los alumnos			X	X			X		
Actitudes	*Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.			X			X			X
	*Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quien lo dice			X			X			X
Emociones	*Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas			X			X			X
	*Se resaltan las cualidades de estética y precisión en las matemáticas			X	X			X		

La Tabla 4.4. muestra la nula idoneidad mediacional en primer ciclo; mientras que en segundo y tercer ciclo se observa una media-baja idoneidad mediacional, pues se propone utilizar materiales informáticos en ejercicios al margen del tema y el tiempo dedicado no es del todo suficiente para alcanzar los objetivos didácticos, pues las unidades que trabajan la probabilidad también trabajan la estadística, haciendo más hincapié en esta última.

Tabla 4.4. *Tabla sobre componentes e indicadores de idoneidad mediacional (Godino, 2013, p. 125)*

		Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
		A	M	B	A	M	B	A	M	B
Recursos materiales	*Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido			X			X			X
	*Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones			X			X			X
Tiempo	*El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida			X			X			X
	*Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema			X			X			X
	*Se dedica suficiente tiempo a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión			X			X			X

Finalmente, la Tabla 4.5. muestra el análisis de la idoneidad ecológica, útil para deducir si el método utilizado es el oportuno, pues muestran si los significados trabajados son acordes a los del currículo y a los que demanda la sociedad. De este modo, la idoneidad ecológica analizada es baja, pues los contenidos trabajados difieren con lo propuesto en la normativa, las tecnologías utilizadas no contribuyen a la innovación en probabilidad ni a la formación integral del alumnado, existiendo poca conexión con otros contenidos (matemáticos o de otras áreas) y fomentando escasamente los valores democráticos, por ejemplo, el juego justo.

Según dichos resultados, se llega a la conclusión de que los manuales analizados de la editorial Anaya no son idóneos didácticamente para trabajar la probabilidad, en consonancia con Torres (2021), requiriendo una reconfiguración del enfoque y tratamiento dado a la misma en base a lo expuesto.

Por otro lado, dichos hallazgos difieren con los resultados de Gómez-Torres (2014) de la misma editorial hallando el trabajo de la aleatoriedad desde primer ciclo. Lamentablemente, con el paso de los años los manuales de esta editorial no evolucionan al compás de las necesidades detectadas en la sociedad.

Tabla 4.5. Tabla sobre componentes e indicadores de idoneidad ecológica (Godino, 2013, p. 126)

		Primer Ciclo			Segundo Ciclo			Tercer Ciclo		
		A	M	B	A	M	B	A	M	B
Adaptación al currículo	*Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares			X			X			X
Apertura hacia la innovación	*Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC) en el proyecto educativo			X			X			X
	*Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva			X			X			X
Adaptación socio-profesional y cultural	*Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes			X			X			X
Educación en valores	*Se contempla la formación en valores democráticos			X			X			X
Conexiones intra e interdisciplinares	*Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares			X			X			X

4.3. LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En cuanto a las limitaciones del estudio, la primera está precisamente ligada a que la Probabilidad es un campo relativamente reciente de investigación, por lo que no existen muchos estudios de dicho terreno, siendo aun un tanto desconocido, por lo que toda investigación que se realice de probabilidad será bienvenida.

Otra limitación del estudio es la escasa muestra analizada. Por esta razón, los resultados hallados no pueden ser generalizados, y a la hora de interpretarlos debemos ser cautelosos, pues no son concluyentes.

Por todas las razones anteriormente comentadas, sería crucial para futuras investigaciones tratar esta temática de un modo más íntegro, aumentando, por ejemplo, el número de editoriales de investigación, así como ahondar en un determinado ciclo. En la presente investigación sería de vital importancia ahondar en el por qué no se trata la aleatoriedad desde primer ciclo.

Del mismo modo, sería interesante realizar un estudio longitudinal en el tiempo, por ejemplo, desde hace diez años hasta la etapa actual, del que se pueda extraer la evolución de la propia editorial para poder hallar en qué se ha evolucionado y en qué se puede mejorar.

Finalmente, podría resultar beneficioso aumentar el poder estadístico para hallar los efectos de la interacción entre variables como la etapa escolar y el contexto demográfico para futuras investigaciones.

REFERENCIAS

- Ávila, R., Ibarra, S.E. y Grijalva, A. (2010). El contexto y significado de los objetos matemáticos. *Relime*, 13(4-II), 337-354.
- Área, M. (1999). *Los medios, los profesores y el currículo*. Barcelona: Sendai Ediciones.
- Área, M. y González, C. (2015). De la enseñanza con los libros de texto al aprendizaje en espacios online gamificados. *Educatio Siglo XXI*, 23(3), 25-38. <http://dx.doi.org/10.6018/j/240791>
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). (2010). Australian Curriculum: Mathematics. Sidney: NSW. <http://www.australiancurriculum.edu.au/Mathematics/Rationale>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2015, febrero). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Conferencia presentada en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, Praga.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understaining of Mathematics. The case of probability. En J.P. van Bendegen y K. François (Eds.). *Philosophical dimensions in mathematics education*. (pp. 107-127). New York: Springer.
- Batanero, C. y Serrano, L. (Eds.) (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Granada, España: Grupo de Educación Estadística. Universidad de Granada.
- Batanero, C., Burril, G. y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York, Estados Unidos: Springer.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. ICME-13. Topical Survey series. New York, Estados Unidos:

Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>

- Bell, E. (1985). *Historia de la Matemática*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Bernoulli, J. (1987). *Ars conjectandi-4ème partie* (N. Meunier, Trans.) Rouen: IREM [Trabajo original publicado en 1713].
- Borocvnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E.J. Chernoff y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de los libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199-218.
- Cárdenas, V. (2001). Lingüística y escritura: la zona visuográfica. En R. Dorra (Ed.), *La dimension plástica de la escritura* (pp. 41-93). México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Carvajal, A.I. y De La Rosa, L.I. (2018). *Matemáticas 2. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Carvajal, A.I. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 1. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Carvajal, A.I., Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 4. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Carvajal, A.I., Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y De La Rosa, L.I. (2019). *Matemáticas 6. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Castillo, M.J., Burgos, M. y Godino, J.D. (2021). Elaboración de una guía de análisis de los libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 47, 1-25.
- Choppin, A. (2004). *La rencontre du numérique et du manuel* [El encuentro entre lo digital y el manual]. Ponencia presentada en el Seminario *Numérique et manuels scolaires et universitaires*, Fontevraud, Francia. <http://www.educnet.education.fr/dossier/manuel/default.htm>.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf>
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core Standards for*

- Mathematics*. Washington, DC. National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org/Math/>
- Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía*.
- De Moivre, A. (1967). *The doctrine of chances: a method of calculating the probabilities of events in play*. Londres: Routledge.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), 1-14. <https://doi.org/10.29333/iejme/5941>
- Fernández, M.P. y Caballero, P.A. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación para el Profesorado*, 20(1), 201-217.
- Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y Quevedo, V.J. (2018). *Matemáticas 5. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Ferrero, L., Gómez-Quesada, J.M., Martín-Martín, P. y Quevedo, V.J. (2019). *Matemáticas 3. Pieza a Pieza*. Madrid: Anaya.
- Finetti, B. de (1974). *Theory of probability*. Londres: John Wiley [Trabajo original publicado en 1937].
- Font, V. y Godino, J.D. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. En J. Godino y V. Font (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp. 376-381). México: CLAME.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Buildings blocks and instructional dilemmas. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Boston, M.A.: Springer. doi:10.1007/0-387-24530-8_3
- Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2(2). www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>.
- Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Conferencia llevada a cabo por CIAEM-IACME, Recife, Brasil.
- Godino, J. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.
- Godino, J. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dodrecht, Netherlands: Kluwer.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZMD, Mathematics Education*, (39), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2012). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento ea instrução matemática. *Acta Scientiae*, *10*(2), 7-37.
- Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Gómez-Torres, E., Ortiz de Haro, J.J., Batanero, C. y Contreras, J.M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (35), 75-91.
- Gómez-Torres, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández-Verdú, M. Molina

- y N. Planas (Eds.) (2015). *Investigación en Educación Matemática XIX*. (pp. 73-87). Alicante: SEIEM.
- Groth, R. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on statistics teacher's cognitive and affective characteristics. In D. Ben-Zvion (Ed.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 327-355). Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-66195-7_10
- Grupo Anaya (27 de julio de 2021). *Grupoanaya.es* Anaya Educación | Nuestras editoriales. https://www.grupoanaya.es/editoriales/editorial_anaya
- Grupo Eleuterio Quintanilla. (2003). A fabricación do consentimento: Libros de texto e diversidade cultural. En X. Rodríguez Rodríguez (Coord.), *Materiais curriculares e diversidade sociocultural* (pp. 59-75). Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Jones, G., Langrall, C. y Money, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.
- Kolmogorov, A. (1993). Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Toro. (Izvestija). Acad. Sei. URSS*, 363-372.
- Krippendorff, K. (2013). *Content análisis: an introduction to its methodology*. London: Sage.
- Laplace, P.S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid, España: Alianza Editorial [Trabajo original publicado en 1814].
- Lecoutre, M.P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *International Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- León, N. (2009). La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad. El problema de la apuesta interrumpida. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, (1), 69-88.
- López-Mojica, J.M., Ojeda, A.M. y Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 9(17), 87-102.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las*

- enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 293.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 3.
- Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum*. Wellington, New Zealand: Learning Media.
- Molina, S. y Alfaro, Á. (2019). Ventajas e inconvenientes del uso del libro de texto en las aulas de Educación Primaria. Percepciones y experiencias de docentes de la region de Murcia. *Revista electrónica interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 22(2), 179-197.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for Shool Mathematics*. Reston, Virginia, Estados Unidos: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia, Estados Unidos: NCTM.
- Negrin, M. (2013). Los manuales escolares como objeto de investigación. *Educación, Lenguaje y Sociedad*, 6(6), 187-208.
- Ortiz, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Morata.
- Ramsey, F. (1931). Truth and probability. En R.B. Braithwaite (Ed.), *The foundations of mathematics and other logical essays* (pp. 156-198). Londres: Kegan Paul.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S. y Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual uderstanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 343-362.
- San Martín, Á. y Peirats, J. (2018). Controversias en la transición del libro de texto en papel y electrónico a los contenidos digitales. *RED, Revista de Educación a Distancia*, 56, 1-17.
- Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children Reading mathematics*. Londres: Murray.
- Torres, V. (2021). *Análisis del significado de la probabilidad presente en los libros de texto del tercer ciclo de educación primaria de Andalucía desde un enfoque ontosemiótico*. [Trabajo de Fin de Máster no publicado]. Universidad de Almería.
- Varela, J. (2008). *El libro de texto ante la incorporación de las TIC a la enseñanza*. Santiago de Compostela: CEDRO-USC.

- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números*, 85, 5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2016). La probabilidad en educación primaria: De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (71), 46-52.
- Vásquez, C., Pincheira, N., Piñeiro, J.L. y Díaz-Levicoy, D. (2019). ¿Cómo se promueve el aprendizaje de la estadística y la probabilidad? Un análisis desde los libros de texto para la Educación Primaria. *Bolema*, 33(65), 1133-1154.
- Von Mises, R. (1952). *Probability, statistics and truth*. Londres: William Hodge [Trabajo original publicado en 1928].