CENTRO DE POSTGRADO Y
FORMACIÓN CONTINUA

MÁSTER DE PROFESORADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

INFLUENCIA DEL USO DE GEOGEBRA Y DE LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS EN CONTEXTO REAL SOBRE EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN ALUMNADO DE SECUNDARIA

INFLUENCE OF THE USE OF GEOGEBRA AND THE REALIZATION OF MATHEMATICAL ACTIVITIES IN REAL CONTEXT ON MATHEMATICAL LEARNING IN SECONDARY SCHOOL STUDENTS

ESTUDIANTE	Barranco Ontiveros, María Lourdes
ESPECIALIDAD	Matemáticas

TUTORA Prof. Dña. María del Mar García López

Convocatoria de: junio de 2021

AGRADECIMIENTOS

A mi tutora en la Universidad de Almería, Dña. María del Mar García López, por compartir conmigo su pasión por GeoGebra y por su implicación continua y valiosas aportaciones en la elaboración de este TFM.

A mi tutor profesional de prácticas externas en el IES Santa María del Águila, D. David Crespo Casteleiro, por mostrarme el mundo de la docencia en su contexto real y brindarme la oportunidad de llevar al aula la presente propuesta didáctica.

Índice de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

En este Trabajo Fin de Máster se analiza la influencia del uso de GeoGebra y de la contextualización matemática sobre el aprendizaje matemático en alumnado de Educación Secundaria.

Para ello se presenta una propuesta didáctica utilizando estas dos metodologías en la enseñanza del tema Resolución de triángulos oblicuángulos en alumnado de 4º de ESO y se analiza la influencia de la misma en su aprendizaje matemático.

En la intervención didáctica se incluyen, por un lado, muchos recursos GeoGebra que el alumnado puede manipular fácilmente desde casa y que promueven el trabajo autónomo. Por otro lado, se lleva a cabo un ejercicio de topografía en situación real, fuera del instituto, con el objetivo de aplicar los contenidos previamente trabajados en clase. Durante esta actividad el alumnado trabaja en grupos, de forma colaborativa, para intentar realizar las mejores medidas de ángulos y distancias necesarias para los cálculos y después entregan un trabajo común que se evalúa con una rúbrica grupal.

Con lo que respecta a la investigación, se tienen en cuenta factores como la motivación matemática, la comprensión matemática y el rendimiento matemático en este alumnado. Se analiza su evolución entre la fase previa a la intervención didáctica y la final. Para ello se evalúan las tareas realizadas por el alumnado y se utilizan herramientas de corte cualitativo, como un diario de clase, alimentado por la docente durante las clases y una entrevista grupal realizada al final de la propuesta.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que dichas metodologías mejoran la visualización y comprensión de los contenidos, al mismo tiempo que motivan al alumnado. Todo ello proporciona al alumnado un aprendizaje matemático significativo y duradero.

Palabras clave: GeoGebra, contexto real, motivación, aprendizaje, matemáticas, innovación.

Abstract

In this Master's Thesis, the influence of the use of GeoGebra and mathematical contextualization on mathematical learning in Secondary Education students is analyzed.

In addition, a didactic proposal is presented using these two methodologies in the teaching of the topic Resolution of oblique triangles in 4th year Secondary Education students. The influence of the didactic proposal on students' mathematical learning is analyzed.

On the one hand, the didactic intervention includes many GeoGebra resources that the students can easily manipulate from home and that promote autonomous work. On the other hand, a topography exercise is carried out in a real context, outside the institute, with the aim of applying the contents previously worked in class. During this activity, the students work collaboratively in groups to try to make the best angles and distances measurements necessary for the calculations. Then they deliver a common work that will be evaluated with a group rubric.

With regard to research, factors such as mathematical motivation, mathematical understanding and mathematical performance in these students are taken into account. Its evolution between the phase prior to the didactic intervention and the final phase is analyzed. For this, the tasks performed by the students are evaluated and qualitative tools are used, such as a class diary fed by the teacher during classes and a group interview conducted at the end of the didactic unit.

The results obtained allow us to affirm that these methodologies improve the visualization and understanding of the contents at the same time that they motivate the students. All of this provides students with meaningful and lasting mathematical learning.

Keywords: GeoGebra, real context, motivation, learning, mathematics, innovation.

1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo versa sobre la utilización de GeoGebra y la contextualización de las matemáticas en la educación secundaria y su impacto, tanto en la motivación del alumnado como en el aprendizaje de los contenidos.

1.1 Justificación de la temática

Habiendo estudiado matemáticas durante muchísimos años, desde educación primaria hasta terminar mis estudios de ingeniería, siempre he necesitado encontrar una explicación a lo estudiado, ya sea práctica o lógica. Además, intentaba imaginar la situación, en la medida de lo posible, para poder visualizar en mi mente dichos contenidos, lo que me ayudaba mucho a comprenderlos.

Rara vez he tenido la oportunidad de contextualizar las matemáticas en los centros donde he estudiado. Y menos aún de utilizar recursos TIC. Ambos aspectos han sido objeto de análisis en muchos estudios anteriores, informando de una mejora motivacional y del aprendizaje por parte de los estudiantes.

He descubierto GeoGebra en la asignatura “Herramientas prácticas para el desarrollo del currículo de Matemáticas” del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y me ha abierto un mundo de posibilidades de aplicación y de visualización matemática, a nivel de la educación secundaria. Durante las “Prácticas Externas” en el centro (es otra asignatura del Máster que estoy realizando), decidí trabajar con este tipo de recursos desde el convencimiento de que contribuye a mejorar la visualización de contenidos y la comprensión de resultados matemáticos como fórmulas o demostraciones, y ello mejora la motivación de los estudiantes y sus actitudes hacia las matemáticas.

En el contexto del centro en el que he realizado mis prácticas, el alumnado no ha tenido la oportunidad, hasta ahora, de realizar salidas extraescolares dedicadas en su integridad a la actividad matemática. Considero que comprender la aplicabilidad en la vida real de los contenidos matemáticos que se estudian en secundaria, es tan importante como su propio dominio, pues da sentido a su aprendizaje. Puede servir esta experiencia para medir el impacto de este tipo de actividades en su motivación y en el aprendizaje.

1.2 Objetivos

El objetivo de este trabajo es investigar la influencia positiva del uso de GeoGebra y del trabajo matemático realizado en un contexto real en el aprendizaje matemático del alumnado de 4º de ESO.

En este caso particular, se pretende demostrar dicha influencia positiva en una muestra de 7 alumnas de 4º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, en una unidad didáctica sobre resolución de triángulos oblicuángulos.

2 MARCO TEÓRICO

En este apartado expongo los antecedentes que constituyen el marco teórico de mi trabajo, después de realizar una revisión de la literatura de investigación sobre mis dos focos de interés: TIC y actividad matemática en contexto real. A continuación, expongo la normativa que avala mi actuación, después de realizar un análisis de la legislación educativa vigente. Después, pondré en contexto mi investigación y, por último, realizaré un breve análisis del estado de la problemática que planteo en el centro en el que he desarrollado mis prácticas externas.

2.1 Revisión de antecedentes

He realizado una revisión de los antecedentes tanto a nivel de investigaciones previas como a nivel de normativa vigente en educación secundaria.

2.1.1 Aportaciones desde la investigación y la innovación sobre la temática

En primer lugar, voy a mostrar los referentes teóricos que justifican el uso de recursos TIC, como GeoGebra, en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En los últimos años ha aumentado considerablemente el número de investigaciones sobre la influencia del uso de TIC en el aula. En el caso de matemáticas, GeoGebra, es uno de los softwares que más terreno ha ido ganando y por ello, son numerosas las investigaciones sobre su potencialidad en la última década (García e Izquierdo, 2017; Wassie y Zergaw, 2018). GeoGebra destaca por ser un software de geometría dinámica, gratuito y de libre acceso, fruto de un proyecto iniciado por Markus Hohenwarter en 2001, que es útil para trabajar no solo los contenidos geométricos sino también para la estadística, el análisis o el cálculo (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis y Lavicza, 2008).

En su estudio de investigación, Hernández-Gómez et al. (2016) afirman que el programa GeoGebra favorece la interactividad entre los actores del proceso de aprendizaje (alumnado, educador y programa informático). Además, gracias a que libera de los trabajos repetitivos y rutinarios, permite emplear más tiempo para afianzar los contenidos esenciales. Asimismo, el alumno se siente protagonista de lo que hace y por tanto de su aprendizaje. Por otro lado, estos autores observan que al incorporar GeoGebra se motiva al discente en su trabajo en el aula y permite crear un ambiente muy participativo en clase.

De acuerdo con diferentes estudios (Vidaurre y Vallejos, 2015; Tamayo, 2014; Ortiz y Sánchez y Lozano, 2013) las situaciones de enseñanza se ven favorecidas por el uso de las TIC, y en concreto por el programa GeoGebra, en la siguiente medida:

- Al ser un aprendizaje activo y por descubrimiento, a partir de los conocimientos previos del alumno se facilita la adquisición de aprendizajes significativos.
- Cuando el estudiantado realiza un trabajo colaborativo efectivo en el que puede interactuar, discutir, compartir información y acompañarse.

En su tesis doctoral, García (2011) afirma que el uso de GeoGebra en el aula influye positivamente en las actitudes y en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Además, realiza aportaciones, tanto a nivel teórico como práctico, sobre los siguientes aspectos: el uso de TIC en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Secundaria (particularizado en el software GeoGebra), la mejora de las actitudes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes y el desarrollo de sus competencias matemáticas. A lo largo de su proceso de investigación-acción pudo observar cómo sus alumnos, al trabajar con GeoGebra, se implicaron y disfrutaron más en matemáticas, mostrándose más aplicados y con mayor autoconfianza, no solamente en clase sino también en sus casas. Este cambio de comportamiento, provocado por el gusto y confianza en el uso de este software de geometría dinámica, junto con sus cualidades y ventajas sobre métodos más tradicionales (lápiz y papel) y los beneficios del trabajo colaborativo, llevó a muchos de ellos a mejorar la comprensión matemática e interiorizar los contenidos geométricos trabajados.

Por otro lado, Gómez-Chacón (2010) presenta un estudio empírico realizado con estudiantes de Matemáticas sobre pensamiento geométrico y aprendizaje con GeoGebra, con el objetivo de detectar factores que favorecen o impiden el uso del pensamiento visual en el aprendizaje matemático. Los resultados de este análisis llevaron a afirmar que todos los estudiantes consideraban que el razonamiento visual es algo central en la resolución de problemas matemáticos. En cuanto a las creencias sobre el uso de GeoGebra, todos los estudiantes afirmaron que les resultó útil para la comprensión y la visualización matemática y el 80 % expresaron emociones positivas sobre varios factores, entre los que se incluyen el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Añadieron que este software de geometría dinámica les ayudó a superar bloqueos mentales y mejorar su motivación y confianza.

En definitiva, en los estudios consultados, los estudiantes insistieron en que GeoGebra puede favorecer, no sólo el pensamiento visual, sino que además ayuda a mantener una vía afectiva productiva.

Atendiendo ahora al segundo foco de interés de este trabajo, expongo los referentes teóricos relativos al trabajo matemático en contextos reales, cuya idoneidad y adecuación se ponen de manifiesto cuando analizamos el proceso de matematización expuesto en el proyecto PISA, que también he tomado como referente.

El programa PISA (Organización para la cooperación y el desarrollo económico [OCDE], 2005), mide la capacidad de los jóvenes de 15 años para utilizar sus conocimientos y habilidades en lectura, matemáticas y ciencias para afrontar desafíos de la vida real. El estudio PISA se centra en la aplicación práctica de las matemáticas a la vida cotidiana y los contextos sociales y profesionales en los que se tendrán que desenvolver los individuos. En la misma línea, se resalta la importancia de que los estudiantes de 15 años actúen como ciudadanos informados, reflexivos y consumidores inteligentes gracias a las competencias matemáticas.

El marco teórico del estudio PISA se sostiene en la hipótesis de que aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. Y, según Rico (2007), este proceso de matematización está compuesto por distintas fases.

La primera fase implica traducir problemas extraídos de un contexto del mundo real al mundo matemático. Esta es la fase denominada matematización horizontal e incluye actividades como:

- identificar matemáticas relevantes en un contexto general
- plantear interrogantes
- enunciar problemas
- representar el problema de un modo diferente
- comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal
- encontrar regularidades, relaciones y patrones
- reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos
- traducir el problema a un modelo matemático
- utilizar herramientas y recursos adecuados.

La segunda fase es la de matematización vertical y se puede entender como el planteamiento del problema matemático usando conceptos y destrezas matemáticas. Incluye acciones como:

- usar diferentes representaciones
- usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones
- refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos y
- argumentar y generalizar.

La figura 1, extraída de Rico (2007), expresa gráficamente la conexión entre ambos procesos.

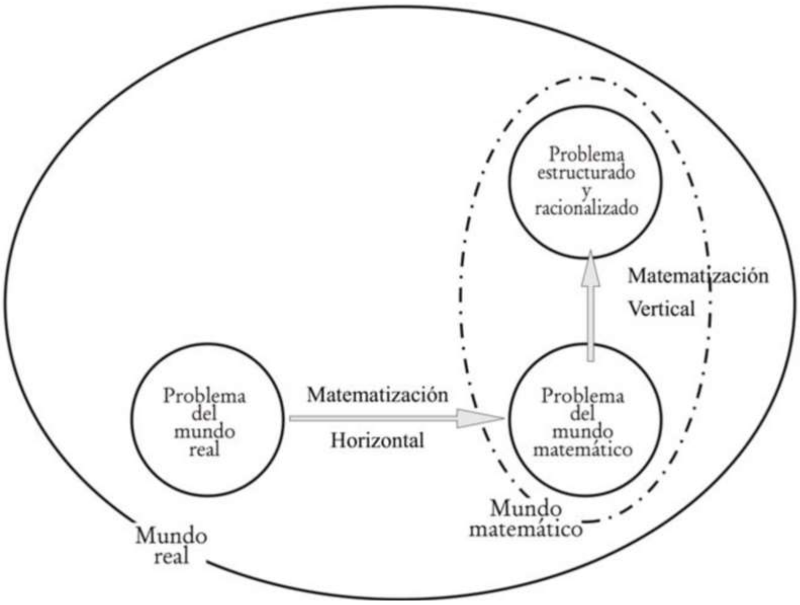


Figura 1: El proceso de matematización

Para Rico, la última fase de la matematización implica reflexionar sobre todo el proceso y sus resultados, en el que los estudiantes deben interpretar estos últimos con actitud crítica y validar el proceso completo. Comprende aspectos como:

- entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos
- reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados
- comunicar el proceso y la solución
- criticar el modelo y sus límites.

Para trabajar la matematización en sus diferentes etapas y así conseguir que el alumnado aprenda a utilizar matemáticas en su vida real, el docente puede recurrir a la contextualización matemática. No obstante, debe tener en cuenta muchos factores.

Para que las matemáticas que se enseñan en el aula posean sentido para el alumnado, Parra (2013) afirma que deben estar vinculadas al contexto de la vida de este. Debido a ello, propone al docente privilegiar la contextualización de la enseñanza de las matemáticas, la cual no se hace de manera arbitraria.

Una de las claves para contextualizar las matemáticas es que el docente conozca el objeto matemático, sus orígenes y aplicaciones. La segunda es que conozca a sus estudiantes, sus intereses, necesidades y el contexto donde ellos normalmente se desenvuelven. Y, la tercera clave, está en la capacidad del docente para buscar información y analizarla, de manera que amplíe su conocimiento de la matemática, sus fundamentos, sus orígenes y aplicaciones.

Según Parra (2016), la vinculación de las matemáticas con la realidad no es ni un capricho ni una moda pasajera. La necesidad de vincular las matemáticas con la realidad responde a un contexto histórico en el que abunda la información y, por lo tanto, más que acumular conocimientos en nuestras mentes, se requiere que sepamos gestionar la información y aplicarla en la resolución de los diferentes problemas que la vida nos presenta diariamente. En esta tarea de vincular las matemáticas con la realidad, Parra (2016) propone aprovechar las herramientas TIC para profundizar el conocimiento matemático.

En lo que respecta al dúo matemática y realidad, Alsina, Callís y Figueras afirman lo siguiente:

> Si matemática y realidad es entrar en contacto con la vida y consecuentemente la vida es acción, viveza y vitalidad, es obvio que la matemática integrada en la realidad es y debe ser "matemática viva", direccionalidad que comporta la necesidad de "vivir la matemática" como proceso y recurso de aprendizaje. (1998, p. 1)

Sobre la direccionalidad matemática y realidad estos autores destacan los siguientes objetivos:

- Dar significado al aprendizaje. El centro educativo y lo que representa debe integrarse en la realidad de la vida y no ser un "ghetto" cerrado donde se vive una vida paralela a la que se mueve fuera de él.
- Dar sentido a la matemática. La matemática debe convertirse en algo atractivo y divertido que capacita para comprender el entorno y que proporciona recursos importantes de pensamiento y razonamiento que posibilitan la solución a situaciones problemáticas diversas.
- Profundizar en el conocimiento y dominio de la realidad y entorno. Nuestra integración a la realidad es tanto más intensa cuanto mayor conocimiento tenemos de ella; la matemática debe aportar, en lo posible, este dominio

y aproximación y no únicamente desde la perspectiva de la integración a la realidad actual sino también de la capacitación para la flexibilización en integraciones a otras realidades presentes o futuras.

Aunque el entorno próximo ofrece muchas situaciones matematizables, el docente debe saber discriminar aquella realidad que es válida para el alumnado. Es decir, que sea una situación motivadora, atractiva y emocionalmente aceptada. Y, así conseguir un aprendizaje significativo.

2.1.2 Análisis de la normativa

Con respecto a la normativa vigente en educación secundaria expongo en primer lugar las competencias clave en el Sistema Educativo Español y seguidamente las orientaciones sobre estrategias metodológicas para trabajar por competencias en el aula relacionadas con la temática.

Según la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, las competencias clave en el Sistema Educativo Español son:

1. Competencia en comunicación lingüística. Se refiere a la habilidad para utilizar la lengua, expresar ideas e interactuar con otras personas de manera oral o escrita.
2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanos.
3. Competencia digital. Implica el uso seguro y crítico de las TIC para obtener, analizar, producir e intercambiar información.
4. Aprender a aprender. Es una de las principales competencias, ya que implica que el alumno desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo.

5. Competencias sociales y cívicas. Hacen referencia a las capacidades para relacionarse con las personas y participar de manera activa, participativa y democrática en la vida social y cívica.
6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor. Implica las habilidades necesarias para convertir las ideas en actos, como la creatividad o las capacidades para asumir riesgos y planificar y gestionar proyectos.
7. Conciencia y expresiones culturales. Hace referencia a la capacidad para apreciar la importancia de la expresión a través de la música, las artes plásticas y escénicas o la literatura.

Esta misma orden especifica que todas las áreas o materias del currículo deben participar, desde su ámbito correspondiente, en el desarrollo de las distintas competencias del alumnado. Y al mismo tiempo insiste en que la adquisición eficaz de las competencias clave por parte del alumnado, requiere del diseño de actividades de aprendizaje integradas, que permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

En el Anexo II de esta misma orden se indican algunas orientaciones para facilitar el desarrollo de estrategias metodológicas que permitan trabajar por competencias en el aula. Esta orden hace especial hincapié en despertar y mantener la motivación hacia el aprendizaje en el alumnado. Con el objetivo de favorecer la motivación, plantea a los docentes el reto de generar en el alumnado la curiosidad y la necesidad de adquirir los conocimientos, las destrezas y las actitudes y valores presentes en las competencias.

En relación con la integración de las TIC en el aula, en la mencionada orden se incluye la siguiente orientación:

> La selección y uso de materiales y recursos didácticos constituye un aspecto esencial de la metodología. Se debe potenciar el uso de una variedad de materiales y recursos, considerando especialmente la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje que permiten el acceso a recursos virtuales. (Orden ECD/65/2015, p. 7003)

También, se cita un extracto de esta orden que alude a dos orientaciones que versan explícitamente sobre la contextualización y su influencia en la motivación del alumnado:

> Para potenciar la motivación por el aprendizaje de competencias se requieren, además, metodologías activas y contextualizadas. Aquellas que faciliten la participación e implicación del alumnado y la adquisición y uso de conocimientos en situaciones reales, serán las que generen aprendizajes más transferibles y duraderos.
>
> Las metodologías que contextualizan el aprendizaje y permiten el aprendizaje por proyectos, los centros de interés, el estudio de casos o el aprendizaje basado en problemas favorecen la participación activa, la experimentación y un aprendizaje funcional que va a facilitar el desarrollo de las competencias, así como la motivación de los alumnos y alumnas al contribuir decisivamente a la transferibilidad de los aprendizajes. (Orden ECD/65/2015, p. 7003)

Es decir, la normativa vigente promueve el uso de TIC y de metodologías activas y contextualizadas, para favorecer el desarrollo de las competencias clave.

2.2 Contextualización y análisis de la problemática de interés

El centro educativo es el Instituto de Enseñanza Secundaria Santa Mª del Águila, situado en la localidad del mismo nombre dentro del municipio de El Ejido, en el Poniente Almeriense.

Se trata de un centro de difícil desempeño, entre otras cosas, por la confluencia de alumnado de muchas culturas, con lenguas maternas distintas al castellano. Además, hay un gran número de alumnado con Necesidades Especiales de Apoyo Educativo (NEAE), especialmente de Educación Compensatoria.

El profesorado es en su mayoría interino, lo que dificulta la actividad académica y especialmente la continuidad de los planes, programas y actividades desarrollados por el centro.

El alumnado del primer ciclo de ESO, de forma muy generalizada, presenta los siguientes problemas:

- Desfase curricular (no se saben las tablas de multiplicar, no dominan el cálculo, …)
- Dificultades de aprendizaje (no entienden lo que leen, ni escriben correctamente)
- Asistencia irregular
- Falta de hábitos de trabajo y mal comportamiento, llegando incluso a expulsión por acumulación de partes de amonestación
- Falta de motivación por su aprendizaje
- Heterogeneidad del grupo

Sin embargo, estas características están muy presentes en los primeros cursos de la educación secundaria, y mucho menos en el caso que nos ocupa (4º de ESO). El gran número de repetidores en la primera parte de la etapa obligatoria junto al abandono del sistema educativo cumplidos los 16 años, explican que haya mucho más alumnado en los primeros cursos que en 4º de ESO.

Ante la situación actual de pandemia, la modalidad semipresencial se ha visto impuesta en ciertos cursos de este centro, en este caso, 3º y 4º de ESO.

La propuesta de intervención desarrollada en este trabajo ha sido llevada a cabo en un grupo de 4º de ESO. Y las características del alumnado en particular, se describen en el epígrafe siguiente.

Con respecto a la temática que nos ocupa:

- Uso de las TIC: El alumnado tiene experiencia en el manejo de ordenadores, al menos para conectarse a las clases online. Conocen el software GeoGebra porque su profesor lo ha usado anteriormente en este curso para estudiar el tema de funciones. No obstante, su conocimiento se reduce a la mera observación de su funcionamiento, ya que no han interactuado con GeoGebra ni como usuarios ni tampoco han participado en la creación de applets.
- Contextualización de las matemáticas: Los estudiantes nunca antes han salido del instituto, a modo de excursión, con el objeto de realizar un trabajo de matemáticas.

3 MARCO APLICADO O PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

A continuación, presento detalladamente mi propuesta de intervención.

3.1 Ámbito de intervención y destinatarios

La intervención didáctica se propone para un ámbito de aula.

El alumnado sujeto de mi intervención es el que cursa la opción de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en el grupo de 4º ESO. Se trata de un subgrupo de 7 alumnas de ese curso. Estas tienen un nivel medio-alto y dos de ellas tienen altas capacidades intelectuales. En general se comportan de forma educada y respetuosa y están interesadas en la materia, aunque algunas presentan más dificultades de comprensión que otras. Debido al tamaño reducido de este subgrupo, se han organizado las clases de manera que o todas las alumnas van a clase o todas las alumnas se quedan en casa. Es decir, desde el punto de vista del docente no hay que gestionar clase presencial y online al mismo tiempo. Y desde el punto de vista del alumnado, pueden interaccionar en persona con sus compañeras, al menos 2 veces por semana.

A pesar de alternar cada semana la modalidad online y la presencial, el docente titular de este grupo normalmente imparte clases de tipo magistral. En general, al principio de la clase resuelve dudas de los ejercicios propuestos el día anterior, luego explica la teoría nueva y presenta varios ejemplos de aplicación, escribiendo todo, ya sea en la pizarra o en la tableta digitalizadora (si la clase es online). No obstante, se esfuerza en presentar ejemplos curiosos y que resulten interesantes para las estudiantes. Por otro lado, el docente promueve la motivación de las alumnas proponiéndoles participar en un proyecto extraescolar dentro del programa de profundización del conocimiento “Andalucía Profundiza”. He podido comprobar que las alumnas valoran mucho este tipo de actividades, se interesan por los pasos a seguir, se preocupan por la fecha límite, le preguntan sobre los requisitos del trabajo que deben entregar… Y me resulta admirable puesto que gran parte de ese esfuerzo lo realizan fuera del horario de clase.

3.2 Planificación de la intervención didáctica en el aula

3.2.1 Concreción curricular

Antes de nada, es necesario remarcar que, en el momento de mi llegada al centro, este grupo estaba adelantado en cuanto a la planificación original prevista por el docente titular. Por ello, él ya tenía pensado añadir contenidos extra, que corresponden al curso de 1º de Bachillerato, para dar respuesta a esa demanda del alumnado. Además, debido a la participación en el programa "Andalucía Profundiza", las alumnas necesitaban aprender resolución de triángulos oblicuángulos. Debido a eso, me propuse enseñarles los teoremas del seno y del coseno, a pesar de que, como he comentado antes, se trata de un contenido de 1º de bachillerato.

En línea con el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, la intervención didáctica cumple con los siguientes contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje presentados en la tabla 1, pertenecientes al Bloque 4 de la asignatura de Matemáticas I de Bachillerato:

Tabla 1: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos.	2. Utilizar los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas, así como aplicarlas en la resolución de triángulos directamente o como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico.	2.1. Resuelve problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales.

Se trabajan todos los criterios de la tabla anterior, salvo la aplicación del teorema de la tangente y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Por otro lado, las competencias clave que se desarrollan con esta intervención didáctica son:

- CMCT. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: Habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas

- CAA. Competencia de aprender a aprender: Espíritu crítico, autonomía, creatividad y observación
- CSC. Competencia social y cívica: Actitud abierta, cooperativa y respetuosa
- SIEP. Sentido de iniciativa y emprendimiento
- CD. Competencia Digital

Los objetivos de esta secuencia didáctica en particular son:

- Manipular applets de GeoGebra para comprender los teoremas del coseno y del seno
- Resolver triángulos oblicuángulos y problemas relacionados con ellos
- Saber identificar los elementos necesarios para la resolución de ejercicios de topografía
- Realizar la toma de medidas de ángulos y distancias en un contexto real

Los objetivos de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria relacionados con esta intervención didáctica y los correspondientes al área de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el 4º curso de ESO se detallan en el Anexo A.

3.2.2 Materiales y recursos

Debido a la situación de pandemia el alumnado no podía usar GeoGebra en el aula, lo que me obligó a adaptar su uso a los recursos disponibles. Concretamente, durante las clases online las alumnas podían utilizarlo desde casa, y durante las clases presenciales yo disponía de un proyector que, conectado a mi ordenador, me permitía mostrar los recursos digitales.

Por ello, busqué en internet los applets GeoGebra idóneos para facilitar la comprensión de los contenidos objeto de esta intervención y les facilité los enlaces para que los manipulasen desde casa.

Todos los contenidos, ejemplos y ejercicios propuestos en esta intervención, incluyendo los enlaces de GeoGebra correspondientes, fueron recopilados previamente en un documento, de creación propia, que se compartió con el alumnado a través de Google Classroom y que se incluye en el Anexo B. No obstante, en el siguiente apartado de transposición didáctica expondré cómo se trabajaron estos contenidos, ejemplos y ejercicios durante la intervención realizada.

Además, elaboré una rúbrica de evaluación para la actividad realizada en contexto real, que se expone en el apartado 3.2.4, y creé una ficha para valorar el trabajo colaborativo realizado por las estudiantes en dicha actividad, que está disponible en el Anexo C. Esta ficha la compartí con las alumnas con la intención de clarificar la actividad y de comunicarles el contenido de su rúbrica de evaluación.

Para dicho trabajo el alumnado disponía de:

- Dos trípodes móviles de señalización
- Tizas grandes
- Papel y rotuladores
- Dos cartabones de madera
- Dos transportadores de ángulos de madera
- Dos cintas métricas de 5 metros

Para la toma de medidas de ángulos, lo ideal habría sido utilizar un teodolito, pero el centro no disponía de él y no teníamos el presupuesto necesario para solicitarlo.

3.2.3 Transposición didáctica

Puesto que los contenidos a enseñar superan ligeramente el nivel educativo del alumnado, resulta clave la correcta transposición didáctica, que permite hacer asequibles dichos contenidos.

Para facilitar la visualización geométrica, añadí bastantes recursos hechos con GeoGebra. Además, como medida de atención a la diversidad, puesto que dos de las alumnas tienen Altas Capacidades Intelectuales, incorporé contenidos extra.

Con la intención de completar la unidad didáctica con una experiencia real y ver su influencia en la comprensión del alumnado, propuse un trabajo en equipo contextualizado antes de terminar la intervención didáctica.

A continuación, se presenta la temporalización de dicha intervención didáctica.

Tabla 2: Temporalización de la intervención didáctica

Sesión	**Modalidad y duración**	**Contenidos**
1	Online, 60 min	● Triángulos oblicuángulos ● Teorema del coseno ● Ejemplos Teorema del coseno
2	Presencial, 60 min	● Resolución ejercicios del Teorema del coseno ● Teorema del seno ● Ejemplo del Teorema del seno
3	Online, 30 minutos	● Resolución ejercicios del Teorema del seno
4	Mixta (seis alumnas en casa y una alumna y la docente en clase), 60 min	● Explicación del ejercicio de topografía en previsión de la salida fuera del instituto
5	Presencial, fuera del instituto, 75 minutos	● Trabajo de topografía: Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles
6	Online, 60 min	● Explicación de otros ejercicios de topografía
7	Presencial, 60 min	● Resolución del ejercicio de topografía del trabajo en equipo

La metodología usada en esta propuesta de intervención combina el trabajo en grupo en contexto real con el trabajo individual. Además, el material didáctico compartido con el alumnado potencia el uso de las TIC al incluir el acceso a recursos virtuales.

En lo que sigue, detallo el desarrollo de las sesiones más ilustrativas de la unidad didáctica incluyendo el escenario de aprendizaje, los contenidos didácticos y los recursos GeoGebra utilizados en cada una de ellas, pudiendo consultarse los ejemplos y tareas realizadas por las estudiantes en el Anexo B.

Sesión 1

Modalidad y duración: online, 60 minutos.

Contenido didáctico: triángulos oblicuángulos, teorema del coseno, aplicación, ejemplos y ejercicios.

En esta primera clase, insistí en la importancia de la correcta nomenclatura de los lados y ángulos de los triángulos, puesto que, sin una correcta notación, las fórmulas de los teoremas del coseno y del seno no encuentran lógica alguna.

Escenario de aprendizaje: Es necesario destacar que en una clase online el alumnado siempre tiene el micrófono cerrado y rara vez interviene en clase. Además, por regla general no podía ver sus caras, puesto que sólo disponía de una pantalla y, aun así, no siempre tenían la cámara activada. Esta falta de retroalimentación suponía para mí una dificultad mayor, puesto que la metodología utilizada era diferente a la que estaban habituadas y yo necesitaba saber si estaban comprendiendo los contenidos trabajados y, sobre todo, si había dudas. Desde un principio les hice saber que para mí era muy importante que todas interactuásemos y dediqué tiempo a ello, esperando respuestas del alumnado y dando pie a que formulasen sus preguntas.

Recursos GeoGebra utilizados:

- Comprobación numérica del teorema del coseno:

En el enlace que aparece en el pie de la Figura 2, se pueden variar los tres vértices del triángulo (A, B y C) y con ello darse cuenta de que se cumple numéricamente el teorema para cualquier tipo de triángulo oblicuángulo, ya sea obtusángulo, rectángulo o acutángulo.

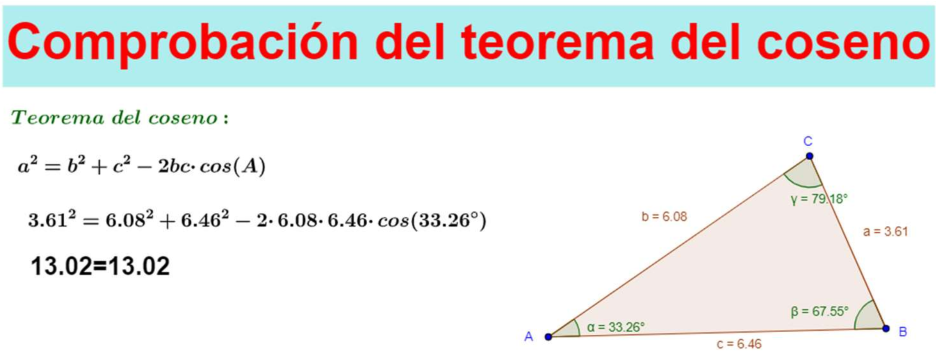


Figura 2: Comprobación numérica del teorema del coseno (https://www.geogebra.org/m/kdfNxBJd)

- Demostración gráfica o geométrica del teorema del coseno.

Presenté un primer recurso GeoGebra válido para triángulos oblicuángulos acutángulos (Figura 3).

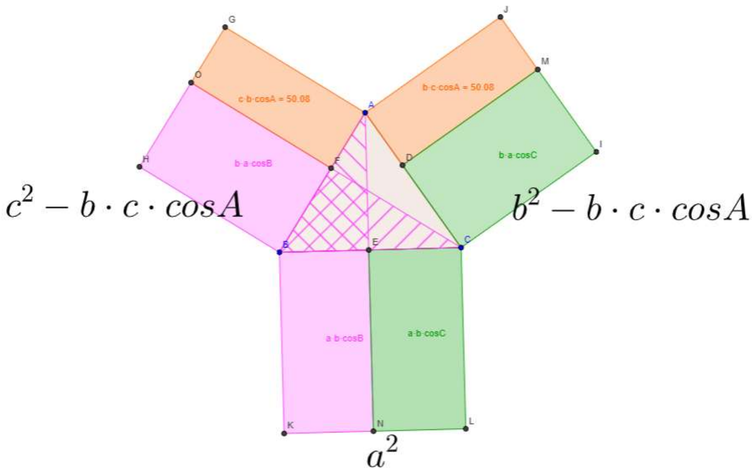


Figura 3: Demostración gráfica 1 del teorema del coseno (https://www.geogebra.org/m/uN8uGwRw)

En este caso, había que observar la composición de las áreas para obtener la fórmula del teorema. Observando en la Figura 3 el área sobre el lado a: a^2 es la suma del área rosa y del área verde. Sobre el lado c, se obtiene el área rosa. Y sobre el lado b, se obtiene el área verde.

En lugar de calcularlo, se trataba de manipular el applet, variando los vértices del triángulo (A, B y C), para observar cómo las áreas se modifican, pero siempre resultan coherentes gráficamente. También se podía observar que cuando el triángulo es rectángulo las dos áreas naranjas desaparecían. Y cuando el ángulo A se hace obtuso, este applet dejaba de funcionar correctamente. Por ello, seleccioné un segundo recurso GeoGebra válido para cualquier triángulo oblicuángulo.

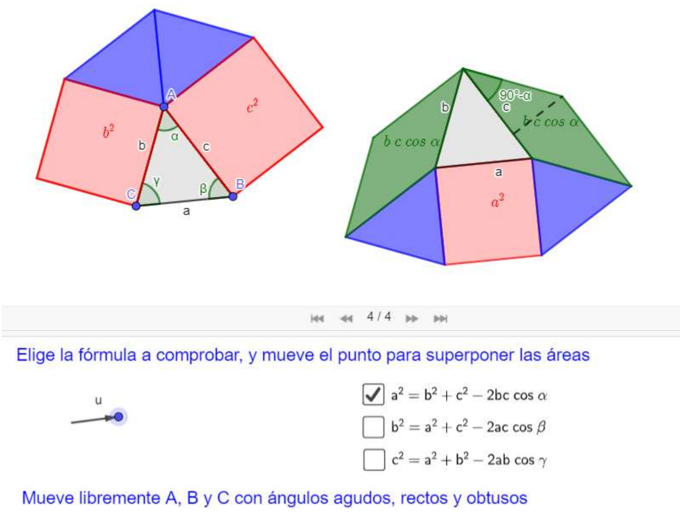


Figura 4: Demostración gráfica 2 del teorema del coseno (https://www.geogebra.org/m/yykhqsrw)

En este caso, en la Figura 4 se podían modificar los vértices del triángulo de la izquierda, para modificar ambas figuras a la vez. Y luego, con ayuda del vector u, desplazar la figura geométrica de la derecha con la intención de superponerla a la de la izquierda. Se podía comprobar, de esta manera, que las áreas de estas dos figuras eran exactamente iguales.

Es importante señalar que, en ambas figuras hay 3 triángulos iguales que hay que obviar para conseguir la ansiada fórmula:

- Área de la figura de la izquierda: $b^2 + c^2$
- Área de la figura de la derecha: $a^2 + b\ c\ \cos\alpha + b\ c\ \cos\alpha$

Propuse a las alumnas, aprovechando que estaban conectadas con su ordenador, que manipulasen ellas mismas este applet que, aunque es un poco más complicado que el anterior, resulta muy visual y gratificante cuando se consiguen superponer las figuras. Además, ligué este teorema con el de Pitágoras, lo que fue muy apreciado por el alumnado, puesto que les ayudó a entenderlos mejor.

En cuanto a la aplicación del teorema del coseno, además de mostrar los dos casos típicos, desde un principio intenté que les echasen un vistazo a las tablas 3 y 4, que son un resumen de los dos teoremas. A continuación, expuse los dos ejemplos invitando a las alumnas a que decidiesen la versión del teorema a utilizar en función de los datos proporcionados y que dictasen el teorema.

Tabla 3: ¿Qué elementos de un triángulo relacionan los teoremas del seno y del coseno?

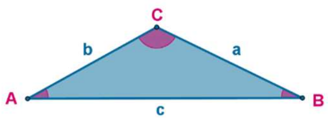
Teorema	**Fórmula** 	**¿Qué relacionan?**
Seno	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$	Lados y ángulos opuestos
Coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	Los tres lados con un solo ángulo

Tabla 4: Cuándo usar el Teorema del seno o el Teorema del coseno

Datos	Teorema seno	Teorema coseno
3 lados	NO	SÍ
2 ángulos y un lado	SÍ	NO
2 lados y el ángulo que forman	NO	SÍ
2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (1)	SÍ **(preferible)**	SÍ
3 ángulos	No se puede resolver (2)	

Notas: (1) En este caso, y según los datos proporcionados, puede haber una solución, dos soluciones o ninguna. (2) Atención: de los 3 datos proporcionados al menos tiene que haber un lado para definir el tamaño del triángulo. Si no, tiene infinitas soluciones.

Sesión 2

Modalidad y duración: presencial, 60 minutos.

Contenido didáctico: teorema del seno, aplicación, ejemplos y ejercicios.

Escenario de aprendizaje: En este caso el alumnado estaba en clase, lo que permitía la tan importante retroalimentación. Pero estaban sin su ordenador ni los apuntes (que no fotocopié). Por lo que este escenario dificultaba la experimentación individual en GeoGebra. Aun así, con el ordenador de clase, fui mostrando el documento y manipulando los applets y les propuse que hiciesen lo mismo en sus casas. Además, disponía de la pizarra tradicional, lo que me resultaba más cómodo que la pizarra digital.

Recursos GeoGebra utilizados:

- Comprobación numérica del Teorema del seno.

En el enlace que aparece en el pie de la fFigura 5 se podían variar los tres vértices del triángulo (A, B y C) y con ello darse cuenta de que se cumplía numéricamente el teorema para cualquier tipo de triángulo oblicuángulo, ya sea obtusángulo, rectángulo o acutángulo.

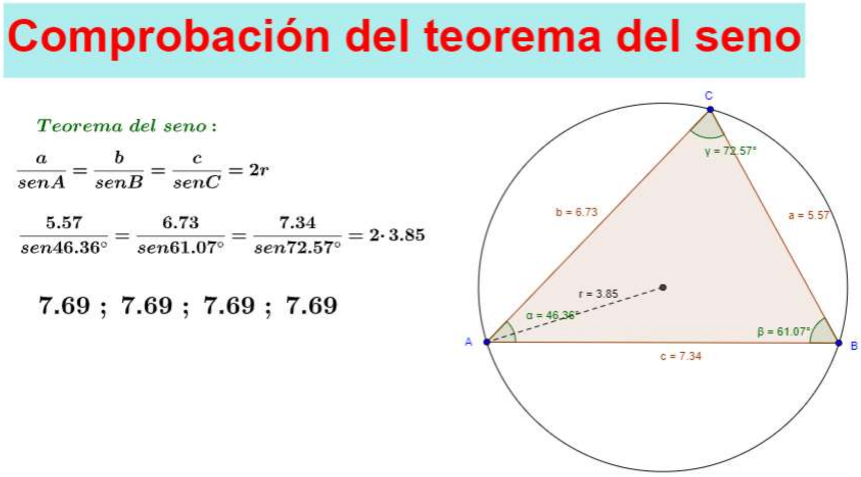


Figura 5: Comprobación numérica del teorema del seno (https://www.geogebra.org/m/V4x46Yrs)

Técnicas de Atención a la Diversidad:

En el recurso GeoGebra precedente (Figura 5) se podía observar la circunferencia circunscrita y la relación entre el teorema del seno y el radio de dicha circunferencia. La demostración de dicha relación necesitaba de contenidos extra, que no eran objeto de esta unidad didáctica, como por ejemplo las relaciones de los ángulos inscritos en una circunferencia. No obstante, propuse otro applet que permitía visualizar dichos ángulos e intentar deducir por ellas mismas la relación del teorema del seno.

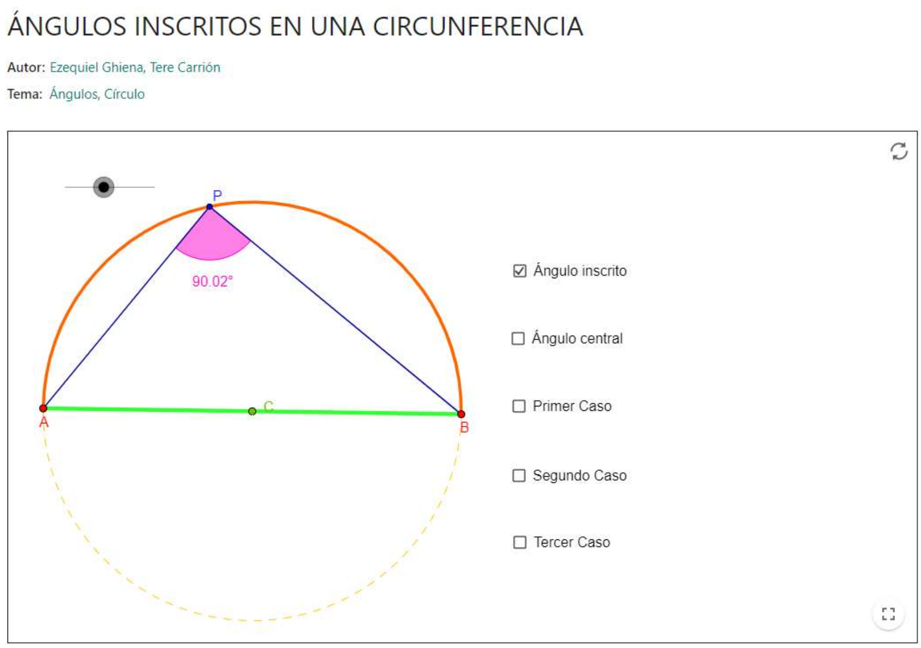


Figura 6: Ángulos inscritos en una circunferencia, aproximación al ángulo recto (https://www.geogebra.org/m/xpbgfrvp)

En este caso se podía:

- Con ayuda del deslizador, mover el punto P a lo largo de la circunferencia. Lo que permitía visualizar cómo el ángulo no variaba.
- Desplazar el centro de la circunferencia, C, para cambiar dicho ángulo. Si se alineaban A, B y C en un diámetro se obtenía un ángulo inscrito de 90º. Lo que se traducía en que la relación del Teorema del seno era 2R/sen90º=2R.

Este applet fue especialmente apreciado por el alumnado, tal y como me dijeron en la entrevista grupal que realicé al final de mi intervención. Les llamó la atención el deslizador que permitía mover el punto P.

En cuanto a la aplicación del teorema del seno, les mostré los tres casos típicos. Y a continuación, expuse varios ejemplos haciendo hincapié en el de “Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos” para mostrarles que, en función de los datos, puede tener dos, una o ninguna solución. Para ello, les compartí un enlace con un recurso GeoGebra incrustado. En el mismo, disminuyendo el parámetro b con ayuda del deslizador, se podía observar la transición entre una, dos y ninguna solución (fFigura 7).

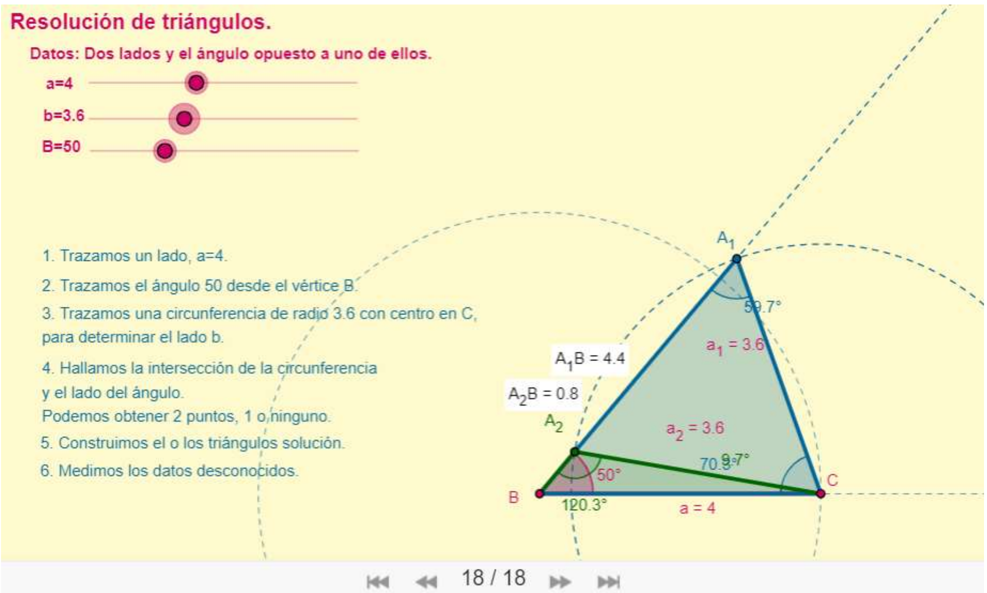


Figura 7: Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Nº de soluciones (Actividad 2 en https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491480889/contido/ud11_trigonometria_II/72_con_geogebra.html)

Sesión 5

Modalidad y duración: presencial, fuera del instituto, 75 minutos.

Contenido didáctico: Ejercicio de topografía en contexto real “Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles”.

Enunciado: Calcula la distancia entre Santa María del Águila y El Ejido.

> Tendremos que trabajar en equipo para calcular la distancia entre Santa María del Águila y El Ejido utilizando los contenidos aprendidos hasta ahora sobre la resolución de triángulos oblicuángulos.
>
> A priori, no tenemos ningún dato. Ni tan siquiera un dibujo. Podremos salir del instituto para hacer las mediciones de todos los parámetros necesarios. Tendréis que hacer suposiciones y aproximaciones. Mientras estén justificadas y sean válidas, serán aceptadas. Formaréis varios equipos de 2 personas como mínimo, y al menos 2 equipos en la clase.

Escenario de aprendizaje: El alumnado debía trabajar en equipo para realizar la mejor toma de medidas posible con las herramientas disponibles. En la fFigura 8 se ilustra la situación real, donde A representa El Ejido; B, Santa María del Águila y C y D son puntos auxiliares en el entorno del centro. Me parece importante precisar que, días antes a esta salida, investigué la existencia de dichos puntos, para asegurar el éxito de la misma.

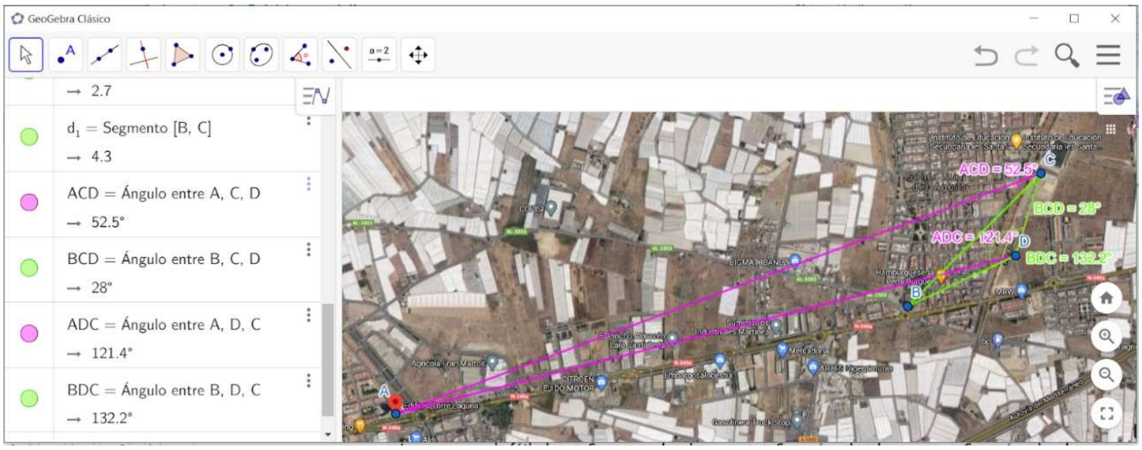


Figura 8: Croquis para calcular la distancia entre Sta. Mª del Águila y El Ejido (Imagen: Google Maps, dentro de un applet de GeoGebra)

La contextualización de este ejercicio les permitió:

- Identificar en el paisaje visible los puntos A y B entre los que se pide la distancia. Identificar y marcar los puntos auxiliares C y D.
- Darse cuenta de las condiciones de los puntos auxiliares, C y D. Para poder medir los ángulos se debe poder ver:
    - Desde C, los puntos A, B y D.
    - Y desde D, los puntos A, B y C.
- Realizar la toma de medidas de ángulos utilizando un transportador de ángulos como se ve en la fFigura 9. Para ello se encontraron con diversas dificultades que las llevaron a obtener valores de ángulos bastante alejados de la realidad:
    - Debían dibujar “a ojo”, con tiza, en el suelo, las líneas entre los puntos, que estaban además muy distantes. Ver fFigura 10.
    - El transportador de ángulos sólo tenía una precisión de 5 grados.
    - Además, para la mitad de los ángulos, las marcas de los grados estaban ordenadas en el orden opuesto al necesario según el croquis real, lo que les obligaba a deducir el ángulo suplementario.

Figura 9: Toma de medidas de ángulos desde el punto C con ayuda de los instrumentos disponibles

Figura 10: Dibujo de las líneas “a ojo” para la medida de los ángulos

- Nombrar ángulos con la notación de 3 letras, utilizando los puntos del croquis.
- Desenvolverse para la medida de distancias del orden de cientos de metros con la única ayuda de una cinta métrica de 5 metros. En un principio, propusieron medir la longitud de un paso. Pero, después de experimentar que los pasos no medían siempre exactamente lo mismo y que, además, dependían de la persona que andaba, propusieron hacer la media aritmética de los resultados obtenidos por varias personas en el siguiente procedimiento. Al final, obtuvieron distancias muy parecidas a las reales.
    - Contar los pasos que podían dar en los 5 metros de la cinta métrica y calcular la longitud del paso medio para una persona.
    - Contar los pasos de esa persona entre los puntos C y D y multiplicar por la longitud de su paso medio para obtener la distancia entre C y D.

3.2.4 Técnicas e instrumentos de evaluación

En este apartado se presentan, por un lado, la rúbrica de evaluación utilizada para valorar el aprendizaje de las estudiantes en la unidad didáctica y, por otro lado, los instrumentos de evaluación usados para analizar la investigación, para poder comprobar y dar respuesta a los objetivos de la misma.

La unidad didáctica de Resolución de triángulos oblicuángulos se evaluó con la puntuación del entregable del trabajo en grupo, usando la siguiente rúbrica:

Tabla 5: Rúbrica de evaluación de la unidad didáctica

ESTÁNDARES EVALUABLES	INDICADORES/NIVELES DE LOGRO			
	INSUFICIENTE	APROBADO	NOTABLE	SOBRESALIENTE
	[2, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 10]
Identificación y planteamiento del problema	Intenta la identificación y planteamiento del problema, pero no lo consigue correctamente	Consigue identificar el tipo de problema y lo plantea en un croquis, pero con alguna dificultad significativa.	Identifica el tipo de problema, selecciona los puntos útiles para su resolución, plantea la situación en un croquis y nombra los elementos de forma clara y correcta	Identifica el tipo de problema. Y, razonadamente, selecciona los puntos útiles para su resolución, plantea la situación en un croquis y nombra los elementos de forma clara y correcta
Toma de medidas	Intenta tomar las medidas necesarias, pero no lo consigue correctamente	Consigue tomar las medidas, pero algunas no son coherentes con el croquis planteado	Toma las medidas de forma correcta	Explica el procedimiento de toma de medidas y las identifica en el croquis, utiliza los nombres de los elementos del croquis de manera que se entienden claramente
Resolución del problema	Intenta la resolución del problema, pero no consigue resolverlo correctamente incluso si utiliza los teoremas adecuados	Consigue resolver el problema propuesto pero con alguna dificultad a la hora de razonar qué fórmulas trigonométricas son las adecuadas	Resuelve el problema con facilidad y reconoce los teoremas y fórmulas trigonométricas	Reconoce, entiende, razona y resuelve el problema utilizando los correctos teoremas y fórmulas trigonométricas
Presentación de la solución	Intenta presentar la solución, pero no lo consigue correctamente o no sabe discernir si la solución es posible	Consigue presentar la solución y, no siendo coherente, lo aclara	Presenta la solución, siendo ésta coherente con el croquis del problema planteado.	Presenta la solución y razona su coherencia con el croquis del problema planteado
Trabajo en equipo	El trabajo en equipo presenta dificultades insalvables	El trabajo en equipo es adecuado, aunque con alguna dificultad significativa	El trabajo en equipo es adecuado	El trabajo en equipo es excelente

En cuanto al análisis de la investigación, desde un principio descarté un estudio cuantitativo, puesto que la muestra de estudiantes con la que trabajé era demasiado pequeña y los resultados obtenidos carecerían de repercusión. Sin embargo, un análisis cualitativo es adecuado en este tipo de estudios porque se puede realizar un estudio de casos con toda la información recogida durante la puesta en práctica de la propuesta didáctica. Con este fin, fui realizando entradas muy detalladas en mi diario de clase y traté de recoger en la entrevista final todos los cambios que las estudiantes habían experimentado.

En este apartado presento el perfil previo de cada alumna. Y en el siguiente proporciono, en primer lugar, un análisis del funcionamiento de los grupos durante el trabajo en contexto real, y a continuación, el estudio de casos.

Durante el periodo anterior a la intervención didáctica, el perfil previo de las estudiantes es el mostrado en la Tabla 6.

Tabla 6: Perfil previo de las estudiantes

Estudiante	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Motivación matemática	Buena	Buena	Baja	Buena	Buena	Baja	Baja
Comprensión matemática	Buena	Media	Baja	Buena	Buena	Media	Baja
Rendimiento matemático	Sobresa-liente	Suficiente	Bien	Sobresa-liente	Notable	Bien	Suficiente

Los valores de rendimiento matemático corresponden a la calificación obtenida en la evaluación trimestral precedente al presente trabajo. Es necesario destacar que las estudiantes E1 y E5 tienen Altas Capacidades Intelectuales reconocidas por el centro educativo. A continuación, justifico los valores de motivación y comprensión matemática de la Tabla 6 con algunos extractos del diario de clase, que fui escribiendo durante el periodo de observación previo a mi intervención intensiva:

- E1: hace un comentario para corregir un punto utilizado para explicar el círculo goniométrico que demuestra que ha seguido la explicación y que la ha entendido al instante.
- E2: tiene problemas para nombrar los lados y ángulos de un triángulo, si en el enunciado no viene el dibujo del triángulo. No pone los paréntesis en la calculadora cuando es una fracción, por lo que no obtiene el

resultado correcto, y me pide ayuda. Durante otra clase, no entiende por qué utilizamos 2 triángulos para calcular la altura de un objeto. Le expliqué que sólo era una estrategia que nos servía para calcular la solución sin tener que subir al objeto y se muestra dubitativa.

- E3: le da error en la calculadora en el cálculo del arcoseno porque pone un seno mayor de 1. Y aun así no pregunta.
- E4: razona un ejemplo de topografía y propone la tangente para resolverlo. Durante otra clase, propone la resolución de un ejemplo de pendiente de una carretera con un procedimiento alternativo al que usa el docente, pero igualmente válido.
- E5: no toma apuntes, pero participa activamente en clase para demostrar que entiende. A veces impone su punto de vista.
- E6: es muy callada. Le pregunto si lo entiende todo y dice que sí, aunque a veces observo que no.
- E7: no practica con la calculadora, y aun así no le da tiempo a copiarlo todo. No dibuja el triángulo cuando el enunciado no tiene. Le he aconsejado que lo haga y duda de su utilidad.

Para realizar el estudio de casos, en primer lugar debía decidir qué alumnas seleccionar. Con este propósito, asigné un nivel de perfil matemático (bueno, medio o bajo) a cada alumna en función de los parámetros anteriormente citados en la Tabla 6. Y a continuación, seleccioné las estudiantes que pueden representar cada uno de los tres perfiles.

Tabla 7: Perfil matemático previo de las estudiantes

Estudiante	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
Perfil matemático	Bueno	Medio	Bajo	Bueno	Bueno	Medio	Bajo

La estudiante E4 presenta un perfil muy próximo a su compañera E1, además, ambas se sientan cerca en clase, tienen una actitud bastante parecida y se ayudan mutuamente en todo, según he podido comprobar. Sus intervenciones en clase muchas veces se complementaban. Por otro lado, las estudiantes E3, E5 y E6, aunque participaron en clase, se expresaron ligeramente menos que sus compañeras durante la entrevista, y, por tanto, su estudio habría sido menos fructífero. Por todo ello, las estudiantes seleccionadas son: la E1 para el perfil matemático bueno, la E2 para el perfil matemático medio y la E7 para el perfil matemático bajo.

4 RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL TRABAJO REALIZADO

En este apartado expongo los resultados del estudio, así como sus aportaciones, limitaciones, propuestas de mejora y prospectivas de futuro.

4.1 Resultados

Comienzo describiendo los resultados obtenidos por el alumnado en la unidad didáctica y explico el grado de consecución de cada uno de los objetivos didácticos.

El primer objetivo se trabajó de forma individual y los tres siguientes mediante el trabajo en grupos. Para la creación de grupos de trabajo, como no conocía lo suficiente al alumnado, les di la oportunidad de crear ellas mismas los grupos. El grupo formado por E1, E2, E3 y E4 fue propuesto por ellas mismas, lo que me lleva a pensar que suelen trabajar juntas y que están habituadas a formar grupos. Sin embargo, el grupo E5, E6 y E7 estaba compuesto por alumnas con muchas diferencias de personalidad, lo que en un principio me hizo pensar que tendrían problemas para entenderse durante el trabajo en equipo. No obstante, durante el trabajo en contexto real, ambos grupos trabajaron de forma cooperativa y pude observar una sinergia que ayudaba a todos los participantes a comprender los contenidos.

Para evaluar la consecución de los objetivos didácticos de mi propuesta, recurrí a la observación de clase y a la corrección de los trabajos grupales entregados mediante la rúbrica presentada en la tabla 5:

- Manipular applets de GeoGebra para comprender los teoremas del coseno y del seno.

Según me dijeron las alumnas, todas manipularon de forma autónoma los applets de GeoGebra para comprender los teoremas del coseno y del seno, los cuales, además, se sabían de memoria como pude comprobar por mí misma.

- Resolver triángulos oblicuángulos y problemas relacionados con ellos.

Grupo de E1, E2, E3 y E4: A pesar de utilizar los teoremas adecuados e intentar la resolución del problema, no lo consiguen correctamente. No aplican el método de resolución explicado previamente, lo que las lleva a cometer algunos errores. A pesar de eso, saben explicar que la solución no es correcta y proponen que puede deberse a la toma de medidas en contexto real.

Grupo de E5, E6 y E7: Consiguen resolverlo de acuerdo a las medidas tomadas, sin especificar qué teoremas utilizan.

- Saber identificar los elementos necesarios para la resolución de ejercicios de topografía.

Ambos grupos seleccionan los puntos útiles para su resolución, plantean la situación en un croquis y nombran los elementos de forma clara y correcta como se muestra en la figura 11.

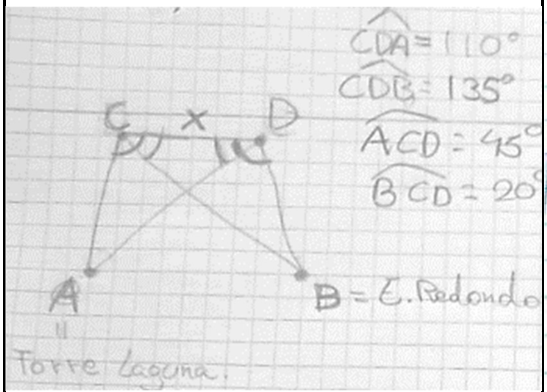
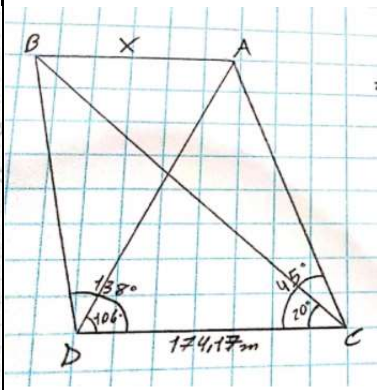
Grupo de E1, E2, E3 y E4	Grupo de E5, E6 y E7
	

Figura 11: Croquis realizados por los grupos de trabajo

- Realizar la toma de medidas de ángulos y distancias en un contexto real.

Ambos grupos demuestran iniciativa y creatividad a la hora de realizar las medidas. Además, trabajan con actitud abierta, cooperativa y respetuosa con sus pares. Demuestran que son capaces de diseñar estrategias para superar in situ las dificultades que les surgen y, además, intentan minimizar el error cometido. Todo ello las lleva a desenvolverse muy bien en la toma de medidas, que resultan satisfactorias teniendo en cuenta los utensilios que tenían a disposición.

Con la información anterior realicé la evaluación de la presente unidad didáctica, en la que ambos grupos obtuvieron una calificación de notable. Sin embargo, esta evaluación grupal no tuvo en cuenta los rendimientos individuales de cada alumna, por reducirse a la aplicación de la rúbrica de evaluación de la actividad grupal y podría considerarse un punto débil de esta propuesta.

A continuación, presento un análisis cualitativo del trabajo de los dos grupos y de los tres casos representativos, analizando la información de mi diario y de la entrevista realizada al finalizar la propuesta didáctica. Dicha entrevista grupal se incluye en el Anexo D.

Comienzo con el estudio del funcionamiento de los grupos en el trabajo en contexto real. Dentro del grupo E1, E2, E3 y E4:

- Las estudiantes E1, E2 y E4, al plantear la actividad fuera del instituto, respondían activamente y proponían ideas para buscar los puntos necesarios. Asimismo, participaron con gusto en la toma de medidas.
- La estudiante E3 se mostró muy discreta, pero participó en la toma de medidas y atendía a las explicaciones de sus compañeras.

Dentro del grupo E5, E6 y E7:

- La estudiante E5 proponía también posibles puntos auxiliares. Gobernada por el entusiasmo, intentaba aplicar a toda costa su propuesta de croquis en la tierra en el punto auxiliar D. No obstante, el grupo llegó a un entendimiento de manera civilizada y cordial.
- La estudiante E6 permaneció discreta, aunque atenta durante el planteamiento de la actividad. Luego, tuvo problemas para visualizar un ángulo obtuso en contexto real, pero presentó mucho interés en mi explicación y la entendió. Igualmente, participó en las mediciones.
- La estudiante E7 respondía a mis preguntas al plantear la actividad fuera del instituto demostrando que se había leído las indicaciones. Por otro lado, no dudaba en buscar los puntos auxiliares andando de arriba abajo en el entorno del centro. Además, participó activamente en la toma de medidas.

Centrándome en el estudio de los 3 casos seleccionados, a continuación, analizo los cambios observados en ellas durante toda mi intervención, en cuanto a la motivación y comprensión matemática.

La estudiante E1, con Altas Capacidades Intelectuales, mantuvo una motivación y comprensión matemáticas buenas. Se interesó por los contenidos e interactuaba mucho en clase. En lo que respecta a GeoGebra, la herramienta la ayudó a mejorar su motivación matemática y se interesó en el uso de esta herramienta en casa:

- Docente: ¿Habéis utilizado GeoGebra en casa?
- E1: Hemos intentado ver cómo va *(en casa, por su cuenta)*, porque otros años no hemos utilizado GeoGebra...

Las siguientes afirmaciones dejaban claro que GeoGebra mejoraba su comprensión matemática gracias a la visualización dinámica en lugar de estática:

- E1: ... cuando explicabas algo pues ponías un ejemplo basándote en GeoGebra. Era más visual.
- E1: La barra que la mueves y se va moviendo el ángulo pues permite que lo veas más visual *(refiriéndose a un deslizador).*

Por otra parte, con respecto a la actividad contextualizada, en el siguiente extracto de la entrevista final ella misma confirmó que la salida fuera del centro le había motivado.

- Docente: ¿Volveríais a hacer una salida fuera del instituto si os diesen la elección?
- Todas: Sí
- E1: Porque sales de la rutina y no siempre aquí sentadas en las mesas.
- Docente: ¿Os habéis aplicado un poquito más porque era en una situación real?
- E1: Sí, digamos que hemos aplicado lo que hemos visto en clase.

Además, según mis anotaciones en el diario, durante la clase anterior a la salida fuera del centro se interesó por las condiciones de los puntos auxiliares y por cómo íbamos a poder identificarlos.

El hecho de realizar la actividad en contexto real la ayudó a comprender mejor el procedimiento matemático según queda reflejado en la siguiente respuesta.

- Docente: Al día siguiente de nuestra salida para realizar las mediciones, os expliqué más ejemplos de topografía. ¿Os resultó más fácil de entender el método de cálculo porque ya habíamos hecho una experiencia real?
- E1: Entiendes ya el porqué de todo eso.

En cuanto al rendimiento matemático, esta estudiante obtuvo una calificación inferior a su calificación previa. Esto pudo deberse al hecho de trabajar en grupo y sobre todo a la calificación global de la tarea, en lugar de individual. En cualquier caso, según mi observación, esto no supuso ningún impedimento e incluso al final de la unidad didáctica se mostró agradecida por la metodología utilizada.

La estudiante E2, en la fase previa tenía una motivación matemática buena y una comprensión matemática media.

Con respecto a la influencia del uso de GeoGebra en la estudiante E2, sus respuestas durante la entrevista final confirmaron su gusto por el uso de GeoGebra:

- E2: A mí me gustó la de los ángulos circunscritos *(refiriéndose a su experiencia con GeoGebra)*
- Docente: ¿Pensáis que las matemáticas son más divertidas usando recursos como GeoGebra?
- E2: Son más amenas.

No obstante, dado que ella no me comentó nada acerca de la evolución de su comprensión matemática, no tengo evidencias para afirmar si GeoGebra contribuyó o no a ello.

En lo que respecta a la actividad en contexto real, las notaciones de mi diario demuestran que la actividad supuso para ella un aliciente, incrementando de esta manera su motivación matemática. Además, según lo observado, este tipo de actividad le permitió mejorar su comprensión, al aplicar los métodos matemáticos en situaciones reales. En contraposición a sus dudas sobre el uso de herramientas matemáticas antes de mi intervención, su respuesta a la siguiente pregunta deja ver su seguridad ante la utilidad de dicho recurso:

- Docente: Al día siguiente de nuestra salida para realizar las mediciones, os expliqué más ejemplos de topografía. ¿Os resultó más fácil de entender el método de cálculo porque ya habíamos hecho una experiencia real?
- E2: Sí, tienes que tener varios puntos para poder medir los ángulos entre ellos.

En cuanto al rendimiento, esta alumna obtuvo una mejora en la calificación. De nuevo, pudo deberse a un mayor aprendizaje, pero también al hecho de que la nota era común a todo su grupo.

Por su parte, la estudiante E7 previamente tenía una motivación y comprensión matemáticas bajas.

Con respecto a la influencia del uso de GeoGebra en esta estudiante, las siguientes afirmaciones reflejan que se implicó mucho en la manipulación de los applets GeoGebra. Lo que contrasta con su motivación matemática previa:

- E7: Ha estado bien el uso que le hemos dado *(refiriéndose a su experiencia con GeoGebra)*
- E7: Hay que abrirse a nuevas oportunidades *(refiriéndose al uso de GeoGebra comparado con el lápiz y papel)*

Igualmente, esta alumna afirmó que la visualización dinámica que proporciona el uso de GeoGebra mejoró su comprensión matemática:

- E7: Sí, la visualización siempre hace que sea más fácil entender algo.

Según mis observaciones, durante la actividad en contexto real mejoró notablemente su motivación matemática. Y, tal y como ella afirmó en la entrevista final, el hecho de encontrar utilidad a las matemáticas fue motivador para ella:

- E7: Que, por primera vez, me parece que las matemáticas se pueden utilizar en la vida real.

Además, este tipo de actividad influyó en la mejora de su comprensión matemática, tal como afirmó:

- E7: A mí me ha servido para entender más algunos conceptos *(refiriéndose al trabajo en contexto real)*

Por último, esta estudiante experimentó una mejora notable en su calificación. De nuevo, pudo deberse a un mejor aprendizaje, pero también al hecho de que la nota era común a todo su grupo.

La Tabla 8 muestra un resumen de la evolución expuesta para los tres casos.

Tabla 8: Estudio de casos. Evolución de las estudiantes

Perfil matemático	Bueno	Medio	Bajo
Estudiante	E1	E2	E7
Motivación matemática previa	Buena	Buena	Baja
Motivación matemática durante la propuesta	Buena	Buena	Buena
Comprensión matemática previa	Buena	Media	Baja
Comprensión matemática durante la propuesta	Buena	Buena	Buena
Rendimiento matemático previo	Sobresaliente	Suficiente	Suficiente
Rendimiento matemático durante la propuesta	Notable	Notable	Notable

En general, los cambios en la comprensión y motivación matemáticas observados en estos tres casos, fueron positivos.

4.2 Aportaciones del trabajo

Este trabajo, aunque modesto, puede ser válido y útil para otros docentes que se planteen utilizar este tipo de metodología. Esto demuestra que se puede recurrir a recursos presentes en internet, como los applets de GeoGebra, y también, realizar pequeñas innovaciones aplicando las matemáticas en un contexto real. Todo ello para contribuir a alcanzar los objetivos didácticos mejorando la motivación y el aprendizaje del alumnado.

Además, este trabajo sirve para demostrar que se puede sacar partido de la docencia online, sobre todo si el centro no cuenta con recursos informáticos suficientes para trabajar en el aula. Esta propuesta aprovecha los recursos propios del alumnado y propone applets que no necesitan conocimiento sobre el manejo del programa y que están pensados para ser manipulados fácilmente por el alumnado desde cualquier navegador, sin necesidad de instalar GeoGebra.

Igualmente, aporta una propuesta didáctica que favorece el trabajo autónomo tanto síncrono como asíncrono y mejora la visualización geométrica gracias al uso de GeoGebra. Dentro de esta, aporta también una actividad en contexto real, detallada paso a paso, incluyendo la rúbrica de evaluación. Esta es útil para aplicar los contenidos de la unidad didáctica de resolución de triángulos oblicuángulos, y sirve para dar sentido a las matemáticas, lo que es muy apreciado por el alumnado.

4.3 Limitaciones de la investigación

Esta investigación presenta limitaciones de diversa índole. Algunas de ellas impuestas por el desarrollo de la asignatura “Prácticas Externas”, la que, al mismo tiempo, ha posibilitado este trabajo de investigación. Otras impuestas por el contexto de centro educativo o el grupo analizado. A continuación, detallo todas y cada una de ellas.

La intervención se ha realizado en un periodo de tiempo corto, impuesto por la planificación de la asignatura de Prácticas Externas. Lo que ha dificultado conocer mejor al alumnado y sus intereses, y la observación de su evolución.

La muestra objeto de análisis es muy reducida, 7 alumnas, lo que me ha llevado a utilizar un análisis cualitativo, descartando totalmente el análisis cuantitativo.

La modalidad de docencia, a veces online, a veces presencial, ha dificultado la programación de las actividades. La manipulación de los applets era conveniente hacerlos durante las clases online, puesto que sólo en ese caso las alumnas estaban conectadas con su ordenador. Y en especial, la salida fuera del centro debía ser presencial.

En particular, durante las clases online, la baja interacción entre alumnas y entre alumnas-docente ha dificultado la observación de los cambios y su análisis.

La falta de los instrumentos necesarios de medida, como un teodolito, ha provocado un cálculo alejado de la realidad en la actividad contextualizada.

Además, reducir la evaluación de la unidad didáctica a la evaluación de la actividad realizada en contexto mediante la rúbrica grupal, ha impedido analizar más en profundidad el rendimiento matemático de cada alumna de forma individual.

4.4 Propuestas de mejora y prospectivas de futuro

Por un lado, sería conveniente trabajar con GeoGebra de forma presencial y que el software pudiera ser utilizado por propio el alumnado en clase, en pequeños grupos, lo que permitiría resolver las dudas de los estudiantes sobre su uso en directo. Al mismo tiempo, posibilitaría la observación de la evolución que aporta el manejo de dicho programa para trabajar actividades matemáticas al aprendizaje del alumnado.

Esta intervención didáctica podría verse mejorada con los utensilios de medida adecuados, lo que llevaría a unas medidas más realistas y, por consiguiente, unos resultados más acordes a la realidad en la actividad contextualizada.

Además, se podría mejorar la evaluación didáctica para considerar el rendimiento individual, lo que permitiría afinar más la evaluación del rendimiento matemático correspondiente a la unidad didáctica y la comparación con la situación previa.

5 CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN PERSONAL

Procedo a continuación a analizar el grado de consecución del objetivo principal de la presente investigación: investigar la influencia positiva del uso de GeoGebra y del trabajo matemático realizado en un contexto real en el aprendizaje matemático del alumnado de 4º de ESO.

Como presento en el apartado de técnicas e instrumentos de evaluación, para analizar los datos y evaluar el rendimiento de las alumnas (obtener su calificación en la unidad didáctica) utilicé los parámetros de motivación y comprensión matemáticas, que procedo a detallar.

Según queda reflejado en mis observaciones, el uso de GeoGebra influyó de forma positiva en la motivación matemática, tanto en la motivación intrínseca (motivadas por el propio disfrute al trabajar matemáticas con la herramienta) como en la motivación extrínseca (motivadas por la mejora de su comprensión matemática y las consecuencias que esta podía tener en su calificación en la asignatura). Prueba de ello es el hecho de que las estudiantes utilizaran GeoGebra fuera de clase, de motu propio, para mejorar su visualización de los contenidos trabajados en clase, según ellas admitieron. Además, según observé a lo largo de toda mi intervención, el alumnado en general demostró un interés notable por saber cómo funcionaba dicho programa en detalle y me hicieron saber su gusto al manipular los applets. Todo esto concuerda con los resultados obtenidos por García (2011) en su tesis doctoral.

En cuanto a la influencia de GeoGebra en la comprensión matemática, las alumnas E1 y E7 afirmaron que la herramienta contribuyó a una mejora de su visualización geométrica y ello mejoró su comprensión, tal como obtuvo Gómez-Chacón (2010) en su estudio empírico con estudiantes de Matemáticas.

Con lo que respecta a la influencia del trabajo matemático en un contexto real en la motivación matemática, la entrevista desprende una influencia positiva global y específicamente para la estudiante E7, la influencia fue significativa puesto que se observó un cambio radical en su comportamiento. Para finalizar, puedo afirmar que el trabajo matemático en un contexto real influyó de forma positiva en la comprensión matemática del alumnado y, en especial, en la estudiante E2, quien entendió mucho mejor las estrategias matemáticas utilizadas, después de haberlas puesto en práctica en contexto real, y sin embargo, antes de hacerlo las consideraba un método de resolución rebuscado, más complicado de lo necesario. Esta estudiante creía que medir la distancia pedida directamente era más fácil, pero no se había dado cuenta de que eso no se podía hacer a simple vista y en un contexto real. Al igual que E2, la estudiante E7 también afirmó que esta experiencia le sirvió para comprender mejor ciertos contenidos. Estas reflexiones encajan con lo que afirma Parra (2013) sobre la importancia de vincular las matemáticas al contexto del alumnado para que posean sentido para el mismo y así obtener un aprendizaje significativo.

Con el objetivo de enriquecer mi reflexión personal, durante la entrevista final quise saber la opinión del alumnado sobre mi intervención con el propósito de mejorar mi labor docente en un futuro.

- Docente: ¿Qué más cosas podéis comentar de la experiencia conmigo que puedan ser útiles para mí, como futura profesora?
- E7: Que eres muy amable.
- E2: Que preguntas mucho si nos enteramos y eso está muy bien. (*E5, E6 y E4 asienten con la cabeza).*
- E4: Sí, y que, si no sigues los apuntes del libro, das los apuntes previos para tener nosotras una idea de lo que vamos a dar. *(Todas asienten).*
- E7: Sí, es más fácil.
- E1: Y luego, en el documento que nos diste estaba todo variado, la teoría, los ejercicios para luego ponerlo en práctica...
- E5: O por si no entiendes la explicación, como a veces me pasa a mí, que me pierdo un poco, que por las mañanas estoy más en las musarañas y no me entero de nada. Luego lo miro en los apuntes y digo, ¡ah! pues hoy ha explicado esto y ya sé cómo es.
- E1: Es como un apoyo.

Estos comentarios me sirven para reafirmar mi opinión sobre la interacción entre todos los actores del aprendizaje. La valoración positiva de mis alumnas respecto a este tema (les gusta que les pregunte y que me interese por su comprensión), me invita a seguir actuando de esa manera. También he podido experimentar las diferencias de retroalimentación según la modalidad de docencia (online, presencial y mixta), lo que me hace ser más consciente de las limitaciones que ello supone. Por consiguiente, tendré en cuenta este factor a la hora de realizar programación de unidades didácticas futuras, para ofrecer una docencia acorde a la modalidad.

Asimismo, este trabajo ha supuesto para mí un aliciente para seguir realizando programaciones didácticas con ayuda de GeoGebra y en contexto real, en la medida de lo posible, puesto que el alumnado las apreció mucho y el impacto en su aprendizaje matemático se puso de manifiesto.

Este trabajo ha contribuido de múltiples formas a mejorar mi labor docente y me ha servido de iniciación a la investigación-acción. Por un lado, he tenido la oportunidad de crear una programación didáctica y llevarla al aula, lo que me ha proporcionado información muy valiosa sobre el tiempo que se tarda en impartirla y las dificultades que el alumnado presenta. Durante la elaboración de la programación didáctica pude comprobar la existencia de una infinidad de recursos GeoGebra disponibles en internet para un mismo contenido, según diferentes puntos de vista o niveles de aprendizaje e incluso con distintas notaciones. Por lo tanto, no es necesario saber crear applets para poder incluirlos en una unidad didáctica. No obstante, la búsqueda del applet de GeoGebra perfecto para el alumnado puede necesitar un tiempo significativo.

Por otra parte, la creación del trabajo colaborativo contextualizado me permitió aprender que es necesario investigar la contextualización, ponerse en la piel del alumnado para prever sus decisiones y reflexionar sobre las posibles soluciones. Además, hay que gestionar factores externos como la autorización a los padres del alumnado o el tiempo meteorológico, puesto que si estaba nublado no se podían realizar las medidas.

En definitiva, para la construcción de este tipo de intervención didáctica es necesario un tiempo y una dedicación mayores que para una más tradicional. No obstante, teniendo en cuenta el impacto positivo creado en el alumnado creo que merece la pena el esfuerzo realizado.

Para terminar, mi participación durante las prácticas externas en la docencia de cursos de diferentes niveles me ha permitido darme cuenta de la dificultad de la gestión de ciertas aulas. Agradezco los valiosos consejos de mi tutor de prácticas sobre este tema que, sin duda, aplicaré en un futuro.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A., Callís, J. y Figueras, E. (1998). Matemática y realidad. Un instrumento y un fin. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 15*, 97-108.

García, M. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Almería, Almería. http://funes.uniandes.edu.co/1768/2/Garcia2011Evolucion.pdf

García, J. G. J. e Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica Sobre Tecnología, Educación y Sociedad, 4*(7).

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Visualización matemática: intuición y razonamiento. En M. Castrillón, M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, J. M. Martínez y J. Rojo (Eds.), *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 200-221). Universidad Complutense Madrid

Hernández-Gómez, E., Briones-Peñalver, A.J, Serdeira-Azevedo, P. y Medina-Vidal, F. (2016). GeoGebra y TIC en matemáticas de enseñanza secundaria. *Anuario jóvenes investigadores*, *9*, 212-215.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, I., y Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. Documento presentado en el *ICME 11. 11th International Congress on Mathematical Education,* Mexico. http://tsg.icme11.org/document/get/666

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana.* Santillana. https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 25,* de 29 de enero de 2015, 6986-7003. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf

Ortiz, E. L., Sánchez, A.L. y Lozano, A. (2013). *REA y estilos* de aprendizaje según Vark en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Internacional Magisterio, Educación y Pedagogía*, *64*, 91-93.

Parra-Sandoval, H. (2013). Claves para la contextualización de la matemática en la acción docente. *Omnia, 19*(3), 74-85.

Parra-Sandoval, H. (2016) Matemática y realidad en la era de las tecnologías de la información. En J.L. Prieto, R.E. Gutiérrez (Eds.), *Memorias del II Encuentro de Clubes de Geogebra del Estado Zulia, 2*, 27-36. Aprender en Red A.C.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, *3,* de 3 de enero de 2015, 169-546. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Tamayo, E. D. (2014). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes del último grado de secundaria. *Revista Apertura, 5*(2), 58-69.

Vidaurre, W. E. y Vallejos, L. M. (2015). Software educativo para lograr aprendizajes significativos en el área de matemática. *UCV-HACER. Revista de Investigación y Cultura, 4*(2), 38-45.

Wassie, Y.A. y Zergaw, G.A. (2018). Capabilities and contributions of the dynamic math software, GeoGebra—A review. *North American GeoGebra Journal*, 7(1), 68–86.

ANEXOS

Anexo A Objetivos de la ESO y de área

A continuación, se detallan los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria relacionados con la intervención didáctica propuesta y aquellos correspondientes al área de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el 4º curso de ESO.

Los objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria relacionados con la presente intervención didáctica, según el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, son los siguientes:

> Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
>
> Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.
>
> Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

Según especifica la Orden de 15 de enero de 2021, dentro de los objetivos del área de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el 4º curso de ESO, la presente intervención didáctica contribuye a desarrollar en el alumnado las capacidades que le permitan:

> Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

Anexo B Material didáctico

Resolución de triángulos oblicuángulos

1 ¿Qué son los triángulos oblicuángulos?

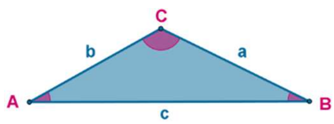
Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no es recto ninguno de sus ángulos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras, el triángulo oblicuángulo se resuelve por leyes del seno y de cosenos, así como el que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo es180 grados.

- triángulo oblicuángulo acutángulo: si tiene sus tres ángulos agudos.
- triángulo oblicuángulo obtusángulo: si tiene un ángulo obtuso.

1.1 Teorema del coseno

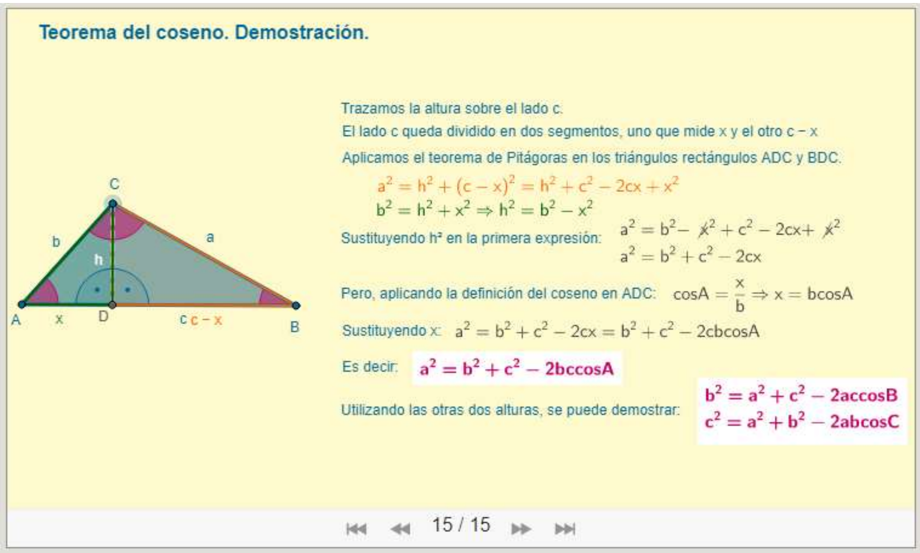
1.1.1 Enunciado del teorema del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.



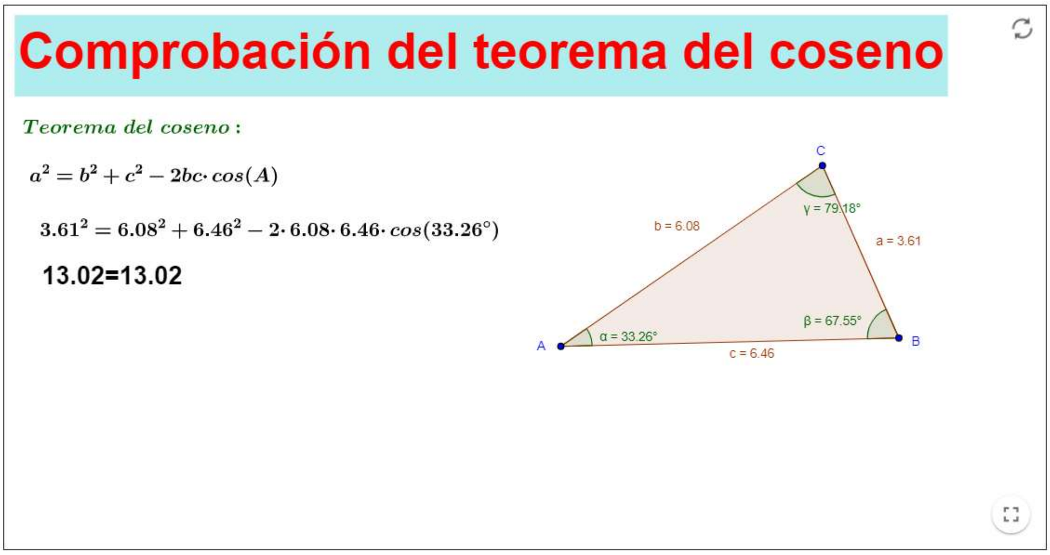
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

1.1.2 Demostración del Tª del coseno



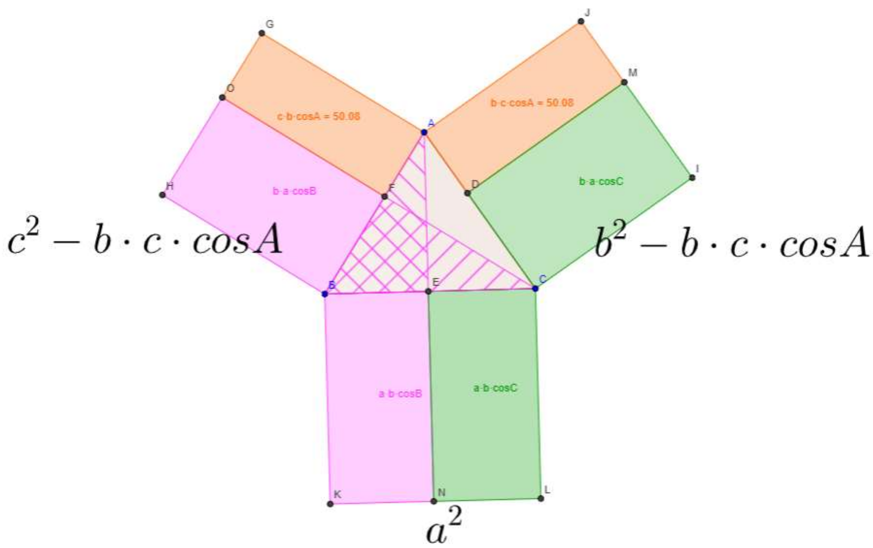
Comprobación numérica del teorema del coseno para distintos triángulos: obtusángulo, rectángulo y acutángulo.

Se puede variar el triángulo en el applet y mostrar los 3 casos. Enlace GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/kdfNxBJd



Demostración gráfica o geométrica del Tª del coseno:

- Sólo para triángulos oblicuángulos acutángulos, en este caso habría que sumar y restar las igualdades de las áreas para obtener la fórmula. Enlace GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/uN8uGwRw

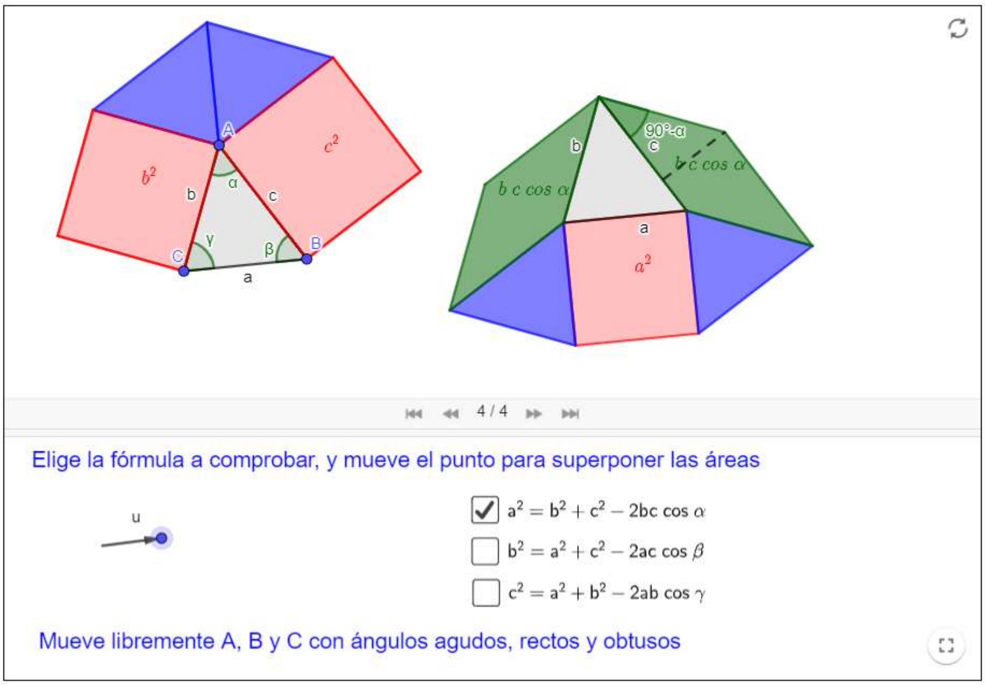


- Para cualquier tipo de triángulos. Enlace GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/yykhqsrw

Teorema del coseno. Demostración geométrica.

Autor: Álvaro Fernández y Pablo Triviño

Tema: Coseno, Trigonometría



1.1.3 El Tª de Pitágoras como caso particular del Tª del coseno

El Tª de Pitágoras es un caso particular del Tª del coseno, en el que el CosA = 0 (puesto que A=90º) y se elimina el término en coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

1.1.4 Aplicación del Tª del coseno

El teorema del coseno se utiliza para resolver triángulos cuando se conocen:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ambos. LAL
- Tres lados: LLL

En el capítulo 1.3 Cuándo usar el Tª del coseno o el Tª del seno está recopilado en una tabla cuándo usar el Tª del coseno o el Tª del seno en función de los datos proporcionados.

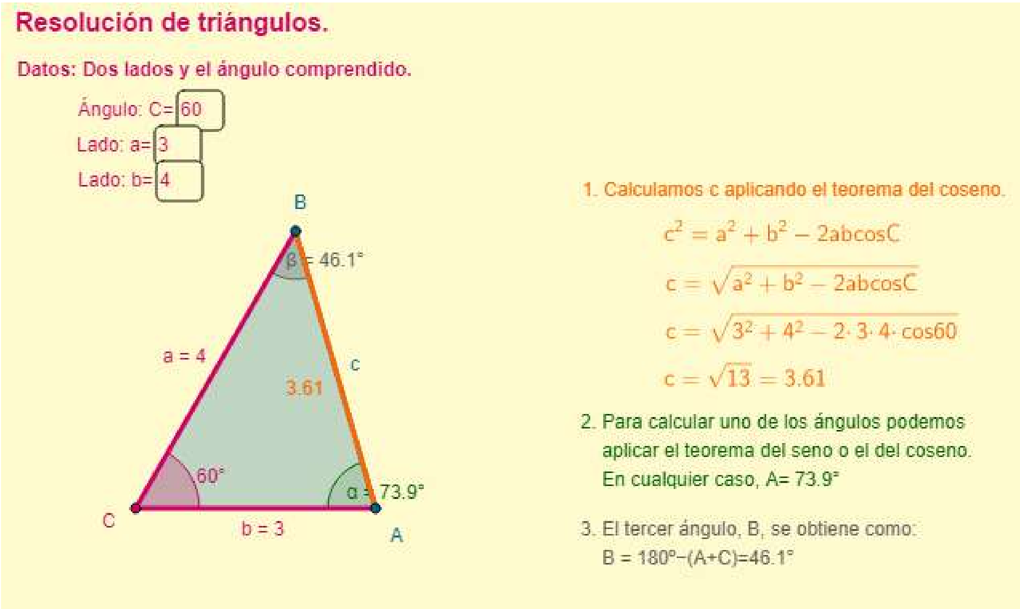
1.1.5 Ejemplos del Tª del coseno

1. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. LAL

   Lado a=3

   Lado b=4

   Ángulo C= 60º



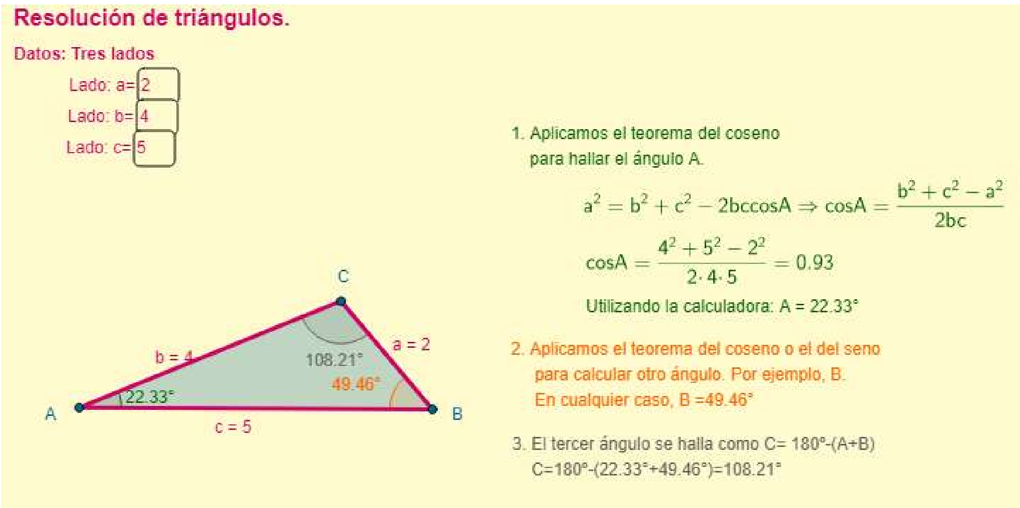
Se trata de un triángulo oblicuángulo acutángulo.

2. Tres lados. LLL.

   Lado a=2

   Lado b=4

   Lado c=5



Se trata de un triángulo oblicuángulo obtusángulo.

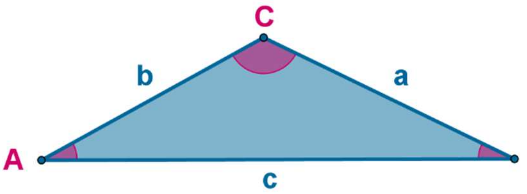
1.1.6 Ejercicios del Tª del coseno

1. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. LAL
   Lado a=4
   Lado b=5
   Ángulo C= 60º
2. Tres lados. LLL. Antes de resolverlo, una vez conocido el lado c del triángulo anterior, intenta averiguar si el ángulo C de este triángulo es mayor, igual o menor que 60º.
   Lado a=4
   Lado b=5
   Lado c=6

1.2 Teorema del seno

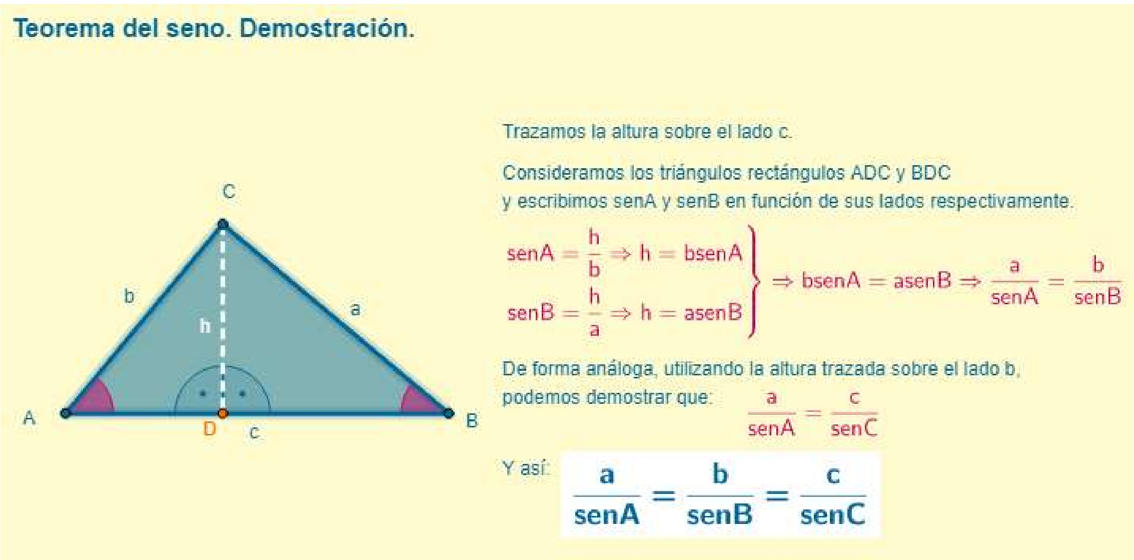
1.2.1 Enunciado del teorema del seno

En un triángulo cualquiera, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

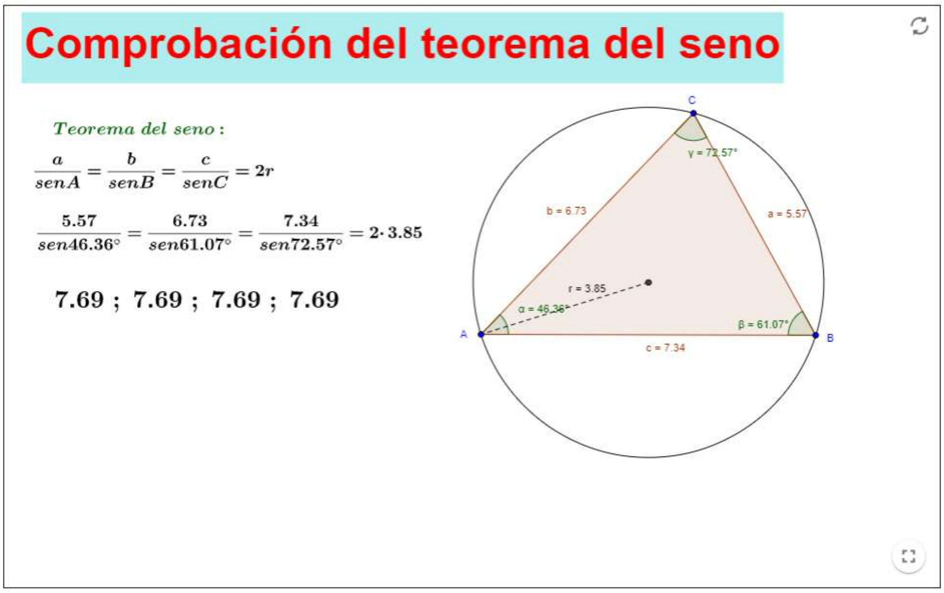


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\ A} = \frac{b}{\operatorname{sen}\ B} = \frac{c}{\operatorname{sen}\ C}$$

1.2.2 Demostración del Tª del seno

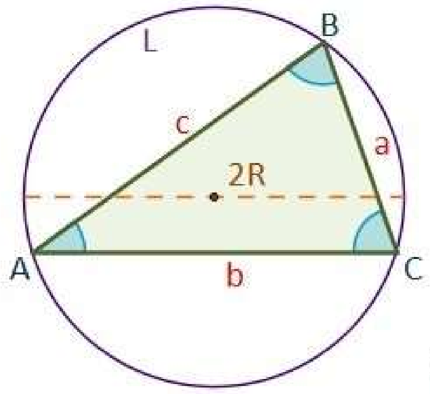


Comprobación numérica del Tª del seno. Enlace GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/V4x46Yrs



1.2.3 Relación entre el teorema del seno y el radio de la circunferencia circunscrita

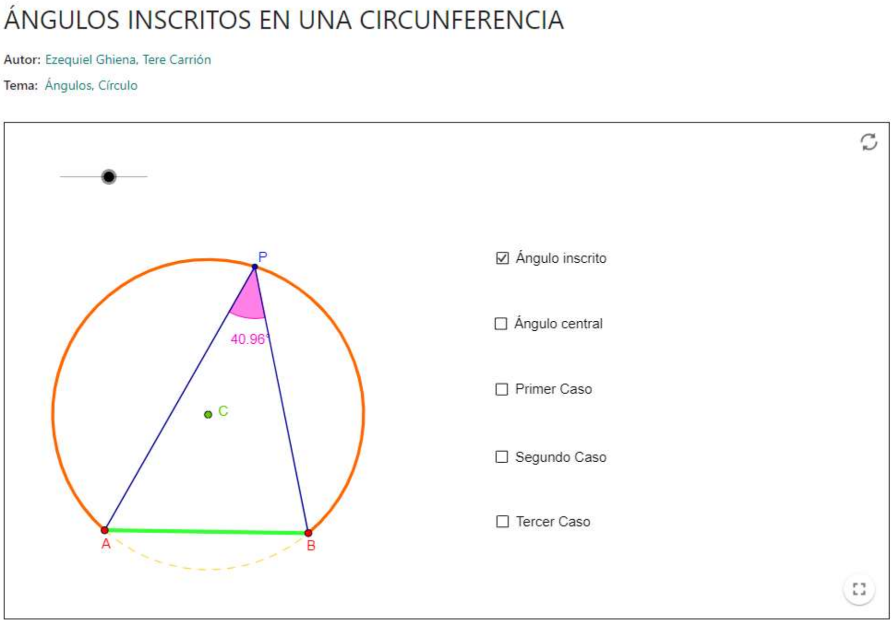
Todas las razones entre cada lado (a, b y c) y el seno del ángulo opuesto (A, B y C) son directamente proporcionales y dicha proporción es 2R.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

Extra:

- Ángulos inscritos en una circunferencia. Recurso Geogebra: https://www.geogebra.org/m/xpbgfrvp



1.2.4 Aplicación del Tª del seno

El teorema del seno se utiliza para resolver triángulos cuando se conocen:

- Dos ángulos y un lado en común. ALA
- Dos ángulos y lado opuesto a uno de ellos. LAA
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ALL

En el siguiente apartado está recopilado en una tabla cuándo usar el Tª del coseno o el Tª del seno en función de los datos proporcionados.

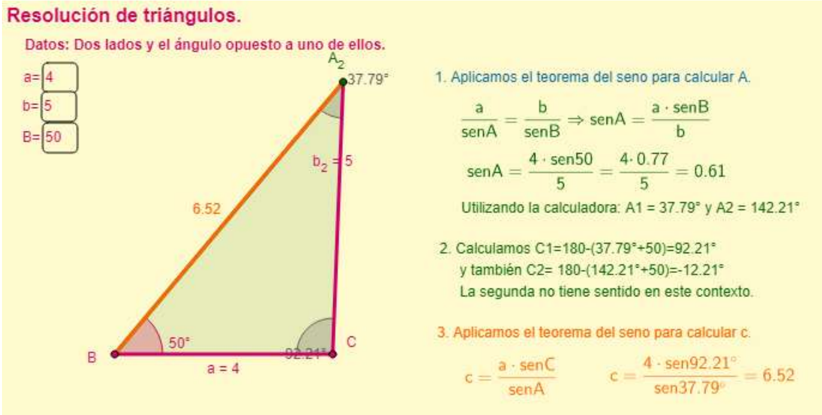
1.2.5 Ejemplos del Tª del seno

1. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ALL. **Caso con una solución**

   Lado a=4

   Lado b=5

   Ángulo B= 50º

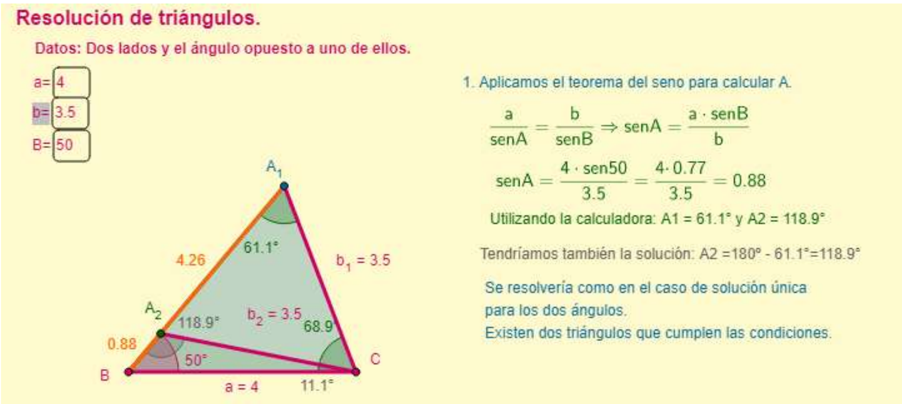


2. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ALL. **Caso con dos soluciones**

   Lado a=4

   Lado b=3.5

   Ángulo B= 50º

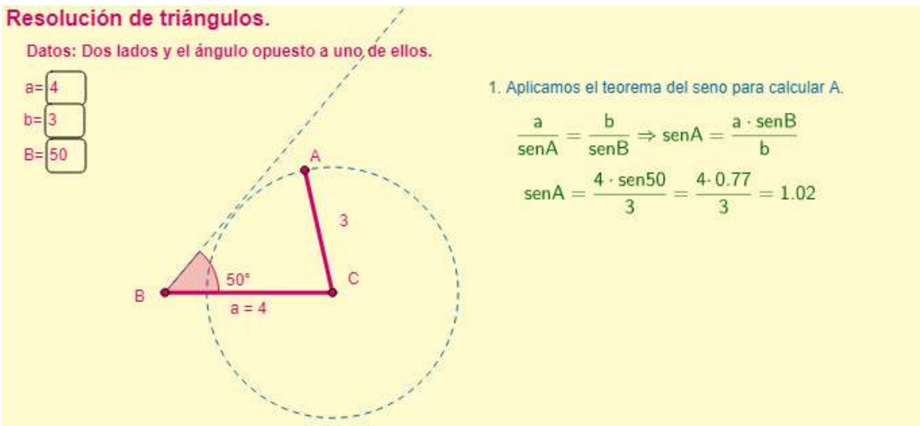


3. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ALL. **Caso sin solución.**

   Lado a=4

   Lado b=3

   Ángulo B= 50º

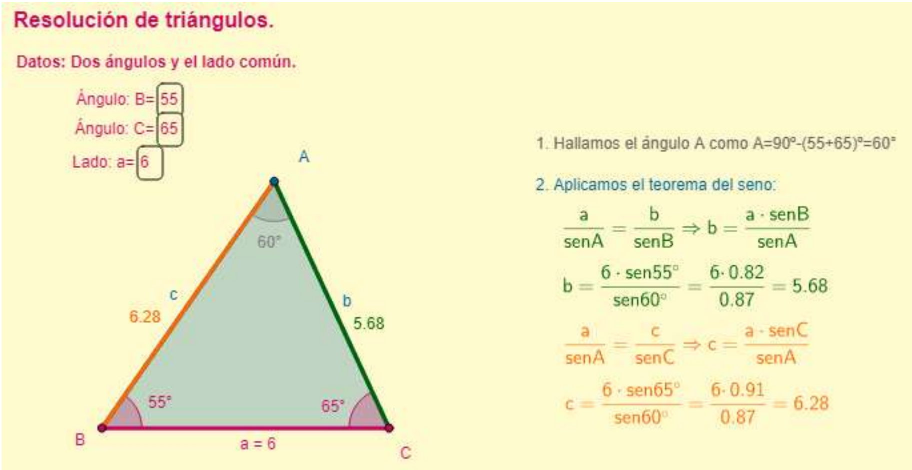


4. Dos ángulos y el lado común. ALA

   Lado a=6

   Ángulo B=55º

   Ángulo C= 65º



1.2.6 Ejercicios del Tª del seno

1. Dos ángulos y el lado común. ALA

   Lado a=6

   Ángulo B=55º

   Ángulo C= 65º

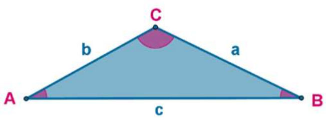
2. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. ALL.

   Lado a=4

   Lado b=3

   Ángulo B= 45º

1.3 Cuándo usar el Tª del coseno o el Tª del seno

Teorema	**Fórmula** 	**¿Qué relacionan?**
Seno	$\frac{a}{\text{sen }A} = \frac{b}{\text{sen }B} = \frac{c}{\text{sen }C}$	Lados y ángulos opuestos
Coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	Los tres lados con un solo ángulo

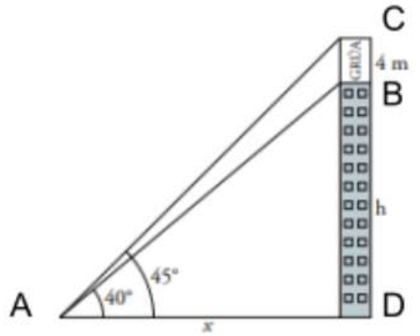
Datos	Teorema seno	Teorema coseno
3 lados	NO	SÍ
2 ángulos y un lado	SÍ	NO
2 lados y el ángulo que forman	NO	SÍ
2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos [1]	SÍ **(preferible)**	SÍ
3 ángulos	No se puede resolver [2]	

Notas: [1] En este caso, y según los datos proporcionados, puede haber una solución, dos soluciones o ninguna. [2] Atención: de los 3 datos proporcionados al menos tiene que haber un lado para definir el tamaño del triángulo. Si no, tiene infinitas soluciones.

1.4 Ejercicios prácticos del Tª del coseno y Tª del seno.

Ejercicio 36 página 160

36. **En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.**



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 40° = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 45° = \dfrac{h+4}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h = \operatorname{tg} 40° \cdot x \\ h = \operatorname{tg} 45° \cdot x - 4 \end{array}\right\} \rightarrow \operatorname{tg} 40° \cdot x = \operatorname{tg} 45° \cdot x - 4 \rightarrow$$

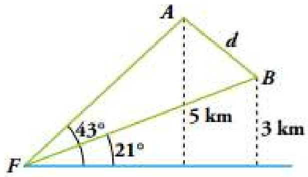
$$\rightarrow 4 = (\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 40°) \cdot x \rightarrow x = \frac{4}{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 40°} \rightarrow x = 24{,}86 \text{ m}$$

$$h = \operatorname{tg} 40° \cdot x \rightarrow h = 20{,}86 \text{ m}$$

Por tanto, el edificio mide 20,86 m de altura.

Ejercicio 41 página 160

41. Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.



Calculamos $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$:

$$sen\ 43° = \frac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \frac{5}{sen\ 43°} = 7{,}33 \text{ km}$$

$$sen\ 21° = \frac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \frac{3}{sen\ 21°} = 8{,}37 \text{ km}$$

Para calcular d utilizamos el triángulo de la derecha:

$$sen\ 22° = \frac{h}{7{,}33}$$

$$h = 7{,}33 \cdot sen\ 22° = 2{,}74 \text{ km}$$

$$cos\ 22° = \frac{x}{7{,}33} \rightarrow x = 7{,}33 \cdot cos\ 22° = 6{,}8 \text{ km}$$

$$y = 8{,}37 - x \rightarrow y = 8{,}37 - 6{,}8 = 1{,}57 \text{ km}$$

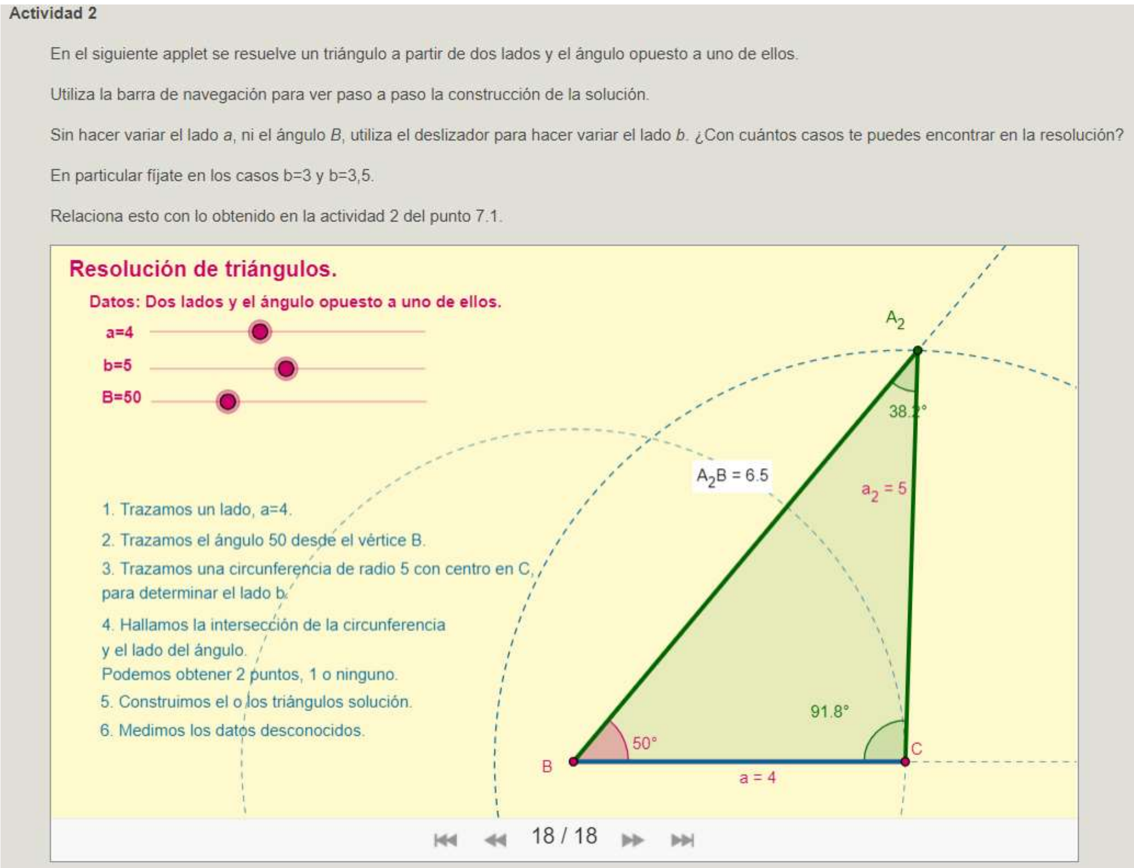
Utilizamos el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2{,}74^2 + 1{,}57^2} = 3{,}16$ km

La distancia entre A y B es de 3,16 km.

¡Extra! Pregunta de reflexión

En el caso particular “Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, ALL”, y si el ángulo dado es mayor de 90º, ¿cuántas posibles soluciones hay como máximo? Recurso a utilizar, actividad 2 de este enlace:

https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491480889/contido/ud11_trigonometria_II/72_con_geogebra.html



Indicaciones/Ayuda:

- Fijar el ángulo B de manera que sea Ángulo B<90º. Variar los otros dos datos. ¿Cuántas soluciones son posibles con Ángulo B<90º?
- Fijar el ángulo B de manera que sea Ángulo B= 90º. Variar los otros dos datos. ¿Cuántas soluciones son posibles con Ángulo B=90º?
- Fijar el ángulo B de manera que sea Ángulo B>90º. Variar los otros dos datos. ¿Cuántas soluciones son posibles con Ángulo B>90º?

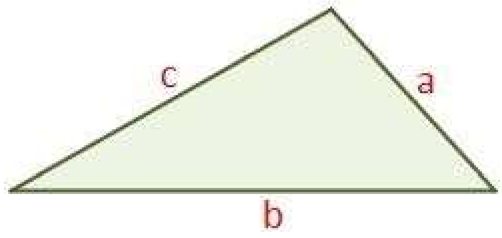
1.5 Cálculo de áreas de un triángulo cualquiera

1.5.1 Conocidas la base y la altura

El área de este será un medio la base (*b*) por la altura (*h*).

$$Área = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

1.5.2 Conocidos los 3 lados: Fórmula de Herón



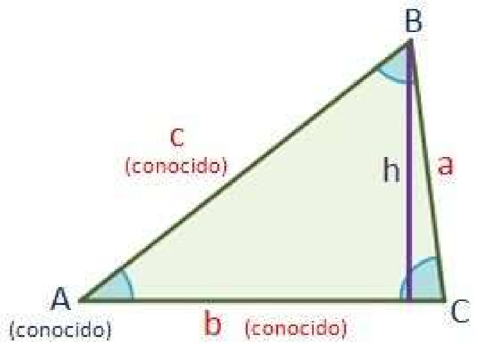
El área del triángulo, S es:

S=p(p-a)(p-b)(p-c)

siendo a, b, c los tres lados y p el semiperímetro:

p=(a+b+c)/2

1.5.3 Conocidos 2 lados y el ángulo que forman: Fórmula con el seno



El área del triángulo, S es:

S=1/2bcsenA

b, c los lados conocidos y A el ángulo que forman

Demostración:

El área del triángulo es:
$$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

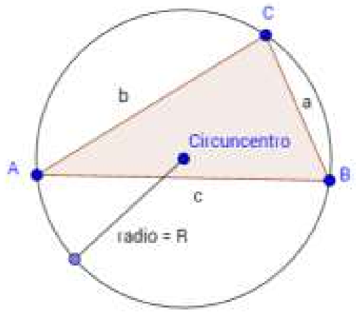
La altura (h) se puede calcular a partir del lado (c) y el seno del ángulo (A).

$$h = c \cdot \operatorname{sen} A$$

Sustituyendo obtenemos la fórmula del área.

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} A$$

1.5.4 Conocidos los 3 lados y el radio de la circunferencia circunscrita



$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Demostración:

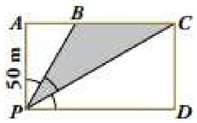
Conociendo la relación entre el Tª del seno y el radio de la circunferencia circunscrita: a/senA=2R

Área: S=1/2bcsenA ⇒ S=1/2bca/2R⇒ S=abc/(4R)

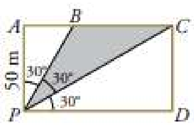
1.5.5 Ejemplos de área de un triángulo

Ejercicio 42 de la página 160

42. **Para iluminar una parcela rectangular se han colocado tres focos en P de modo que los ángulos de iluminación $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ y $\widehat{CPD}$ son iguales.**



Una avería apaga el foco central. ¿Cuál es el área y el perímetro de la zona oscurecida, si $\overline{AP} = 50$ m?



En el triángulo $PAB \rightarrow tg\, 30° = \frac{\overline{AB}}{50} \rightarrow \overline{AB} = 28{,}9$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow tg\, 60° = \frac{\overline{AC}}{50} \rightarrow \overline{AC} = 86{,}6$ m

En el triángulo $PAC \rightarrow cos\, 60° = \frac{50}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = 100$ m

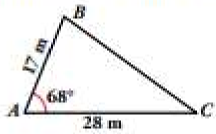
$$\left.\begin{array}{l} \text{Área rectángulo} = 50 \cdot 86{,}6 = 4\,330 \text{ m}^2 \\ \text{Área } APB = \dfrac{28{,}9 \cdot 50}{2} = 722{,}5 \text{ m}^2 \\ \text{Área } PDC = \dfrac{86{,}6 \cdot 50}{2} = 2165 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Área de } PBC\text{:} \\ 4\,330 - (722{,}5 + 2165) = 1\,442{,}5 \text{ m}^2 \end{array}$$

Calculamos ahora el perímetro de PBC:

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } APB,\ cos\, 30° = \dfrac{50}{\overline{PB}} \rightarrow \overline{PB} = 57{,}7 \text{ m} \\ \overline{BC} = 86{,}6 - 28{,}9 = 57{,}7 \text{ m} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Perímetro de } PBC\text{:} \\ \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{PC} = 215{,}4 \text{ m} \end{array}$$

Ejercicio 4 de la página 163

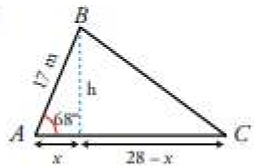
4. En este triángulo, halla la altura sobre AC, el área del triángulo y el ángulo $\hat{C}$.



- Altura sobre $AC \rightarrow$ h

$sen\ 68° = \dfrac{h}{17} \rightarrow h = 15{,}76$ m

- Área del triángulo $= \dfrac{28 \cdot 15{,}76}{2} = 220{,}64\ m^2$

- 

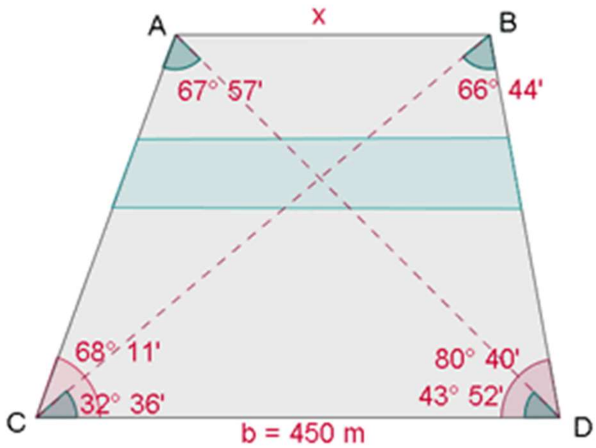
$cos\ 68° = \dfrac{x}{17} \rightarrow x = 6{,}37$ m; $28 - x = 21{,}63$ m

$tg\ \hat{C} = \dfrac{h}{28 - x} = 0{,}729 \rightarrow \hat{C} = 36°\ 5'\ 31'' \approx 36°$

1.6 Ejercicios de topografía

1.6.1 Cálculo de la distancia entre 2 puntos inaccesibles.

- Se fija en el plano horizontal dos puntos C y D, y se mide la distancia que los separa: b = 450 m.
- Se miden con el teodolito los ángulos C y D. C= 68º 11' y D= 80º 40'.
- También se miden los ángulos BCD = 32º 36' y ADC = 43º 52'.



- El ángulo A se calcula por pertenencia al triángulo ACD. A= 180º-68º11’-43º52’=67º57’
- Aplicando Tª del seno al triángulo ACD:

$$\frac{AC}{sen\,43^{o}52'}=\frac{450}{sen\,67^{o}57'} \qquad AC=336.45m$$

- El ángulo B se calcula por pertenencia al triángulo BCD. B= 180º-80º40'-32º36'=64º44'
- Aplicando Tª del seno al triángulo BCD:

$$\frac{CB}{sen\,80^{o}40'}=\frac{450}{sen\,66^{o}44'} \qquad CB=483.35m$$

- Aplicando el Tª del coseno al triángulo ABC:

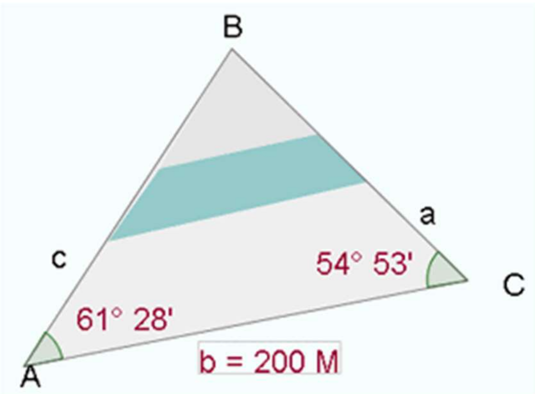
$$x^2=336.45^2+483.35^2-2\cdot 336.45\cdot 483.35\cdot\cos(68^{o}11'-32^{o}36')$$

$$x=286.902m$$

1.6.2 Cálculo de la distancia entre un punto accesible y uno inaccesible.

Cuando se tiene un punto inaccesible B y se desea medir su distancia a un punto accesible A, se mide la distancia de A a un segundo punto accesible C de manera que se obtenga un triángulo con vértices A, B, C.

Encontrar la distancia entre dos puntos A y B si se sabe que la distancia de A a un punto C es de $200m$ y con la ayuda de un teodolito se obtuvo que $A=61^{o}28'$ y $C=54^{o}53'$.



- Calculamos la medida del ángulo B, para esto, utilizamos el resultado que nos dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^{o}

$$\begin{aligned} A+B+C &= 180^o \\ 61^o 28' + B + 54^o 53' &= 180^o \\ 116^o 21' + B &= 180^o \\ B &= 180^o - 116^o 21' \\ B &= 63^o 39' \end{aligned}$$

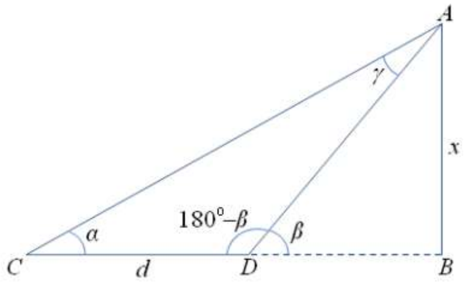
- Aplicamos el teorema del seno para b, c, B, C

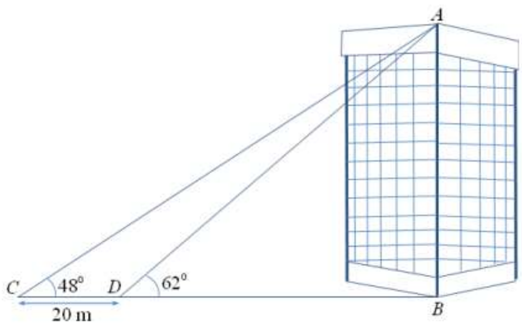
$$\begin{aligned} \frac{c}{sen\, C} &= \frac{b}{sen\, B} \\ \frac{c}{sen\, 54^o 53'} &= \frac{200}{sen\, 63^o 39'} \\ \frac{c}{0.818} &= \frac{200}{0.896} \\ \frac{c}{0.818} &= 223.214 \\ c &= 0.818 \cdot 223.214 \\ c &= 182.589 \end{aligned}$$

Así, la distancia buscada es de $182.589\, m$

1.6.3 Cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible desde un terreno horizontal sin obstáculos

Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48◦. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14◦. Calcular la altura del edificio.





- Llamemos x = AB a la altura del edificio.
- En este caso tenemos que: α = 48º, β = 62º y d = 20

- Por lo tanto, γ = β − α = 62º − 48º = 14º
- Entonces, aplicando el Tª del seno en el triángulo ACD:

$$\overline{AC} = \frac{d \cdot \text{sen}\,(180^\circ - \beta)}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{20 \cdot \text{sen}\,118^\circ}{\text{sen}\,14^\circ} \approxeq 72{,}994$$

- Por tanto: $x = \overline{AC} \cdot \text{sen}\,\alpha = \overline{AC} \cdot \text{sen}\,48^\circ \approxeq 54{,}245$

Es decir, la altura del edificio es de, aproximadamente, 54, 245 metros.

1.7 Ejercicios propuestos de topografía

1.7.1 Nos convertimos en topógrafas por un día. Distancia entre Santa María del Águila y El Ejido

Calcula la distancia entre Santa María del Águila y El Ejido.

Tendremos que trabajar en equipo para calcular la distancia entre Santa María del Águila y El Ejido utilizando los contenidos aprendidos hasta ahora sobre la resolución de triángulos oblicuángulos.

A priori, no tenemos ningún dato. Ni tan siquiera un dibujo.

Podremos salir del instituto para hacer las mediciones de todos los parámetros necesarios. Tendréis que hacer suposiciones y aproximaciones. Mientras estén justificadas y sean válidas, serán aceptadas.

Formaréis varios equipos de 2 personas como mínimo, y al menos 2 equipos en la clase.

Seguramente necesitaremos:

- Algo para medir ángulos y distancias, se aceptan propuestas e ideas.
- Algo para medir grandes distancias, se aceptan propuestas e ideas.
- También tizas grandes por si tenemos que marcar puntos en el suelo.
- Papel y lápiz para apuntar nuestras mediciones.
- Mucha sesera para pensar en las posibles maneras de resolver este problema.
- Casco de seguridad. ¡Nooo! que es broma, con una gorra de topógrafa es suficiente :-P.

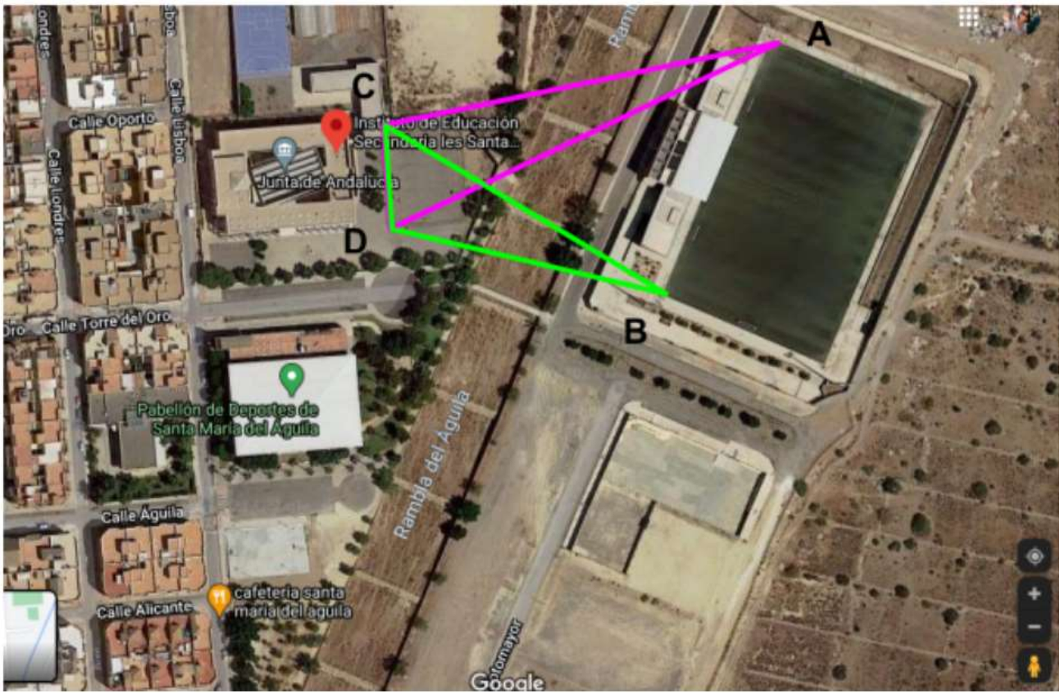
Y sobre todo ¡que no cunda el pánico! Yo estaré a vuestro lado para ayudaros si fuese necesario.

1.7.2 Largo del campo de fútbol

Suponemos que el largo del campo de fútbol es igual que la distancia entre dos postes de iluminación, visibles desde el instituto.

Los puntos A y B son los postes de iluminación del campo.

Los puntos C y D son libres.

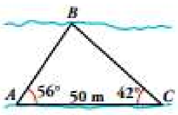


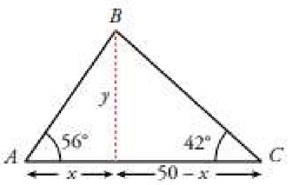
1.7.3 Anchura de un río, Ejercicio 3, página 163

Se puede calcular la distancia AB siendo B inaccesible como [aquí].

Y luego calcular h con sen56º

3. Para medir la anchura de un río, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. Hállala.





$$tg\,56° = \frac{y}{x} \rightarrow y = x\,tg\,56°$$

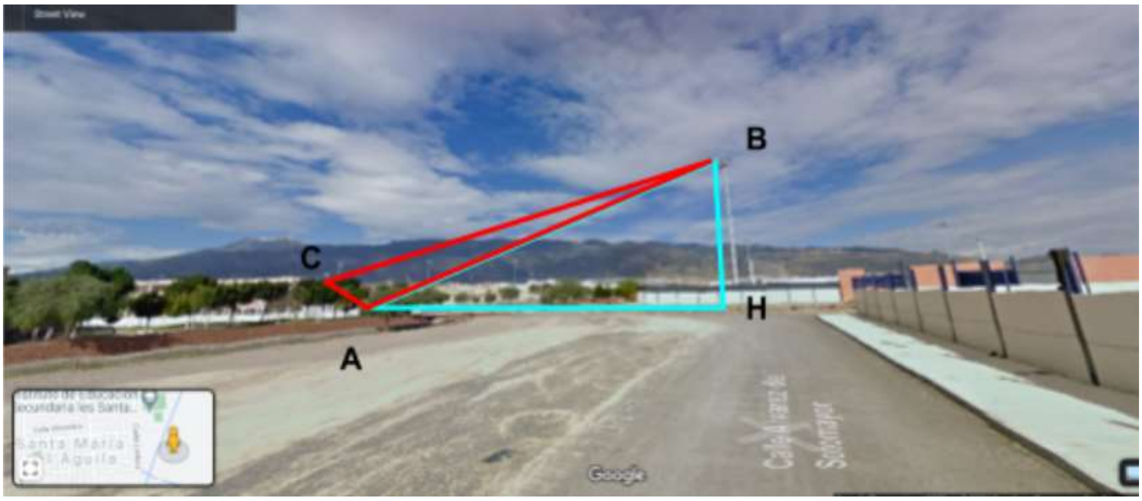
$$tg\,42° = \frac{y}{50 - x} \rightarrow y = (50 - x)\,tg\,42°$$

$$x\,tg\,56° = (50 - x)\,tg\,42° \rightarrow x = \frac{50 \cdot tg\,42°}{tg\,56° + tg\,42°} \approx 18{,}89$$

$y = x\,tg\,56° \approx 28$ m

El río tiene 28 m de anchura.

1.7.4 Altura del poste de iluminación del campo de fútbol



Se eligen dos puntos del instituto C y A desde los cuales se miden los ángulos:

- Desde C: BCA
- Desde A: BAC y HAB

Se mide también la distancia entre dichos puntos CA.

Se resuelve el lado AB aplicando el Tª del seno al triángulo ABC.

Con el lado AB se calcula la altura HB aplicando la definición de seno en un triángulo rectángulo.

Referencias

https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491480889/contido/ud11_trigonometria_II/index.html

https://www.geogebra.org/t/trigonometry

https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas

https://lasmatematicas.eu/docs/bachillerato/1bach/mat1/apuntes/usos_trigonometria_4.pdf

Libro de texto: Bescós i Escruela, E. y Pena i Terrén, Z. (2015). *Inicia Dual Matemáticas I, Bachillerato*. Barcelona. España.

Anexo C Ficha de trabajo colaborativo

Título: Nos convertimos en topógrafas por un día

Objetivos formativos y cooperativos

Al finalizar la actividad las estudiantes serán capaces de calcular distancias en la naturaleza entre 2 puntos inaccesibles con la ayuda de herramientas trigonométricas.

Tamaño de los grupos

Siendo 7 alumnas en clase, se formarán equipos de 2 personas como mínimo, y al menos 2 equipos en la clase.

Materiales

- Recursos educativos sobre la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Instrumento para medir ángulos y distancias.
- Instrumento para medir grandes distancias.
- Tizas grandes para marcar en el suelo.
- Dos postes para indicar los puntos seleccionados en el lado accesible.
- Papel y lápiz para apuntar las mediciones.

Tarea del grupo

- Calcular la distancia entre Santa María del Águila y El Ejido. Para ello:
  - Identificar el tipo de problema: Relacionar el problema propuesto con los tipos de ejercicios de topografía vistos en clase.
  - Plantear el problema:
    - Establecer tanto los puntos dentro del panorama visible alrededor del instituto entre los cuales calcular la distancia pedida como los puntos auxiliares.
    - Realizar un croquis de referencia en el que queden reflejados dichos puntos y los puntos auxiliares.
  - Tomar las medidas necesarias para calcular la distancia pedida.
  - Realizar los cálculos.
  - Presentar la solución.

Criterio de éxito

El grupo ha realizado todas las tareas y todos los miembros del grupo saben explicar el procedimiento utilizado.

Habilidades sociales en juego

- Respetar el turno de palabra.
- Compartir las cosas y las ideas.
- Usar un tono de voz suave.
- Argumentar el punto de vista propio.
- Aceptar el punto de vista de los demás.
- Ponerse en el lugar del otro (empatía).
- Preguntar con corrección.
- Pedir ayuda con corrección.
- Ayudar a las compañeras.
- Animar a sus compañeras.
- Escuchar con atención a las compañeras.
- Controlar el tiempo de trabajo.

Criterios de evaluación

ESTÁNDARES EVALUABLES	INDICADORES/NIVELES DE LOGRO				
	MUY DEFICIENTE	INSUFICIENTE	APROBADO	NOTABLE	SOBRESALIENTE
	[0, 2)	[2, 5)	[5, 7)	[7, 9)	[9, 10]
Identificación y planteamiento del problema	No intenta identificar ni plantear el problema	Intenta la identificación y planteamiento del problema pero no lo consigue correctamente	Consigue identificar el tipo de problema y lo plantea en un croquis, pero con alguna dificultad significativa.	Identifica el tipo de problema, selecciona los puntos útiles para su resolución, plantea la situación en un croquis y nombra los elementos de forma clara y correcta	Identifica el tipo de problema. Y, razonadamente, selecciona los puntos útiles para su resolución, plantea la situación en un croquis y nombra los elementos de forma clara y correcta
Toma de medidas	No toma las medidas necesarias	Intenta tomar las medidas necesarias pero no lo consigue correctamente	Consigue tomar las medidas, pero algunas no son coherentes con el croquis planteado	Toma las medidas de forma correcta	Explica el procedimiento de toma de medidas y las identifica en el croquis, utiliza los nombres de los elementos del croquis de manera que se entienden claramente
Resolución del problema	No llega a resolver el problema correctamente utilizando los correctos razonamientos	Intenta la resolucion del problema pero no consigue resolverlo correctamente incluso si utiliza los teoremas adecuados	Consigue resolver el problema propuesto pero con alguna dificultad a la hora de razonar qué fórmulas trigonométricas son las adecuadas	Resuelve el problema con facilidad y reconoce los teoremas y fórmulas trigonométricas	Reconoce, entiende, razona y resuelve el problema utilizando los correctos teoremas y fórmulas trigonométricas
Presentación de la solución	No presenta la solución	Intenta presentar la solución pero no lo consigue correctamente o no sabe discernir si la solución es posible	Consigue presentar la solución y, no siendo coherente, lo aclara	Presenta la solución, siendo ésta coherente con el croquis del problema planteado.	Presenta la solución y razona su coherencia con el croquis del problema planteado
Trabajo en equipo	No hay trabajo en equipo	El trabajo en equipo presenta dificultades insalvables	El trabajo en equipo es adecuado, aunque con alguna dificultad significativa	El trabajo en equipo es adecuado	El trabajo en equipo es excelente

Anexo D Entrevista grupal

Transcripción de la grabación de la entrevista realizada al grupo durante la última clase (clase 7).

Preguntas sobre el trabajo en grupo:

1. ¿Os ha gustado trabajar en grupo, de forma cooperativa? ¿Por qué?
Todas: Sí.
Estudiante 1: Porque aprendemos unas de otras.
Estudiante 3: Si lo hubiera hecho yo sola de todas formas habría necesitado la ayuda de las demás para poder hacerlo.
Estudiante 4: Siempre nos consultamos unas a otras, aunque no sea un trabajo en grupo.
Estudiante 1: Para los exámenes y todo eso también lo hacemos.
Le he preguntado a Estudiante 5 si le había gustado y dice que sí.
Estudiante 4: Trabajar en grupo también siempre es más fácil. Este año con el Covid, pues eso…
Estudiante 1: Aprendes de los demás y todo eso.
Estudiante 2 añade algo sobre prepararse para los exámenes (pero no se entiende muy bien)

2. ¿Creéis que comprendéis mejor las matemáticas cuando trabajáis con las compañeras que cuando trabajáis solas?, es decir, ¿las compañeras os aportan algo para que sea más fácil comprender las cosas?
Todas: Sí, unánime.

3. ¿La descripción detallada de las tareas y la rúbrica os han facilitado la realización de este trabajo?
Estudiante 2: Así sabíamos lo que teníamos que hacer y las cosas eran más fáciles.
Estudiante 1: Nos ha ayudado a organizarnos.
Estudiante 4: Exacto, y a saber lo que hay que poner.
Estudiante 7: La explicación estaba muy bien, se entendía.

4. ¿Qué herramientas habéis utilizado para trabajar en grupo fuera del aula?

Estudiante 4, Estudiante 3, Estudiante 1 y Estudiante 2: Llamadas de WhatsApp.

Estudiante 3: Habíamos hecho un grupo de WhatsApp, y por eso.

Estudiante 1: Y utilizamos un documento de Google que como se puede compartir, pues era más fácil.

Estudiante 5: Correo electrónico, al menos nosotras dos (refiriéndose a Estudiante 6)

Estudiante 7: Correo electrónico y WhatsApp.

Docente: ¿Y no habéis hecho ninguna reunión en directo porque no sabéis, o por qué?

Estudiante 7: Porque no teníamos tiempo (porque no conseguían estar libres al mismo tiempo)

Estudiante 6: asentía.

Preguntas sobre el trabajo en situación real: Topografía

5. ¿Qué os ha aportado la salida fuera del instituto?

Estudiante 7: Que, por primera vez, me parece que las matemáticas se pueden utilizar en la vida real.

Docente: ¿Por primera vez seguro? ¿No creéis que las matemáticas se utilizan en otros aspectos de la vida, aparte de la topografía?

Estudiante 4: no, se refiere ahora. Como somos más avanzadas, pues las matemáticas están más avanzadas que en niveles inferiores.

Docente: Pero en primero se ven proporciones, que también son súper aplicables, por ejemplo.

Estudiante 1: Ya, pero nosotras nunca hemos salido como en una excursión o cosas de estas para hacer un trabajo sobre matemáticas puras.

6. ¿Volveríais a hacer una salida fuera del instituto si os diesen la elección?

Todas: Sí

Estudiante 1: Porque sales de la rutina y no siempre aquí sentadas en las mesas.

Docente: ¿También os ha aportado un poco de motivación para aprender los contenidos?

Todas: Sí

7. ¿Os habéis aplicado un poquito más porque era en una situación real?

Estudiante 1: Sí, digamos que hemos aplicado lo que hemos visto en clase.

Estudiante 7: A mí me ha servido para entender más algunos conceptos.

8. Al día siguiente de nuestra salida para realizar las mediciones, os expliqué más ejemplos de topografía. ¿Os resultó más fácil de entender el método de cálculo porque ya habíamos hecho una experiencia real?

Estudiante 2: Sí, tienes que tener varios puntos para poder medir los ángulos entre ellos.

Docente: Una vez que ya lo has vivido es más intuitivo que te digan que necesitas varios puntos auxiliares para poder calcular.

Estudiante 1: Entiendes ya el porqué de todo eso.

Estudiante 4: Ya sabes que necesitas varios puntos auxiliares para poder jugar con ellos.

9. ¿Qué no os ha gustado de esta salida?

Estudiante 3: Que es de matemáticas.

Estudiante 7: El viento.

Estudiante 1: Que no teníamos las herramientas adecuadas para que saliera bien.

Estudiante 5: Y que la mayoría de nosotras hemos tenido que cargar con la mochila de un lado a otro.

Docente: Es cierto que la logística no ha sido perfecta por falta de tiempo.

Estudiante 1: pero no es tan importante, es más que no teníamos los instrumentos necesarios.

10. ¿Creéis que se podrían hacer otras actividades sobre un contexto real, utilizando las matemáticas? ¿Sabéis algún ejemplo?

Estudiante 1: Con las medias, hacer tipo una encuesta.

Estudiante 2: Las gráficas también.

Estudiante 7: Porcentaje de subida y de bajada de precios.

Estudiante 4: Analizar los precios de las verduras en las cooperativas.

Docente: ¡Ah, sí! muy de la zona. Di que sí.

Preguntas sobre el uso de GeoGebra:

11. ¿Cuánto pensáis que hemos utilizado GeoGebra durante mi intervención: más bien mucho o poco? *(quería saber su punto de vista, puesto que me da la impresión de que no he dedicado tiempo a explicarles cómo se utiliza de forma autónoma. Más bien he mostrado los applets en clase dentro de mis explicaciones y les he dado los enlaces para que, de forma voluntaria, los manipulasen ellas en casa)*

Estudiante 1: Sí lo hemos utilizado.

Estudiante 7: Ha estado bien el uso que le hemos dado.

12. ¿Habéis utilizado GeoGebra en casa?

Estudiante 4: Sí

Estudiante 1: Hemos intentado ver cómo va, porque otros años no hemos utilizado GeoGebra, entonces es nuestro primer año.

Estudiante 4: Nosotras intentamos ver si se podía dibujar algo para tener los triángulos mejor hechos.

Estudiante 1: Tampoco sabemos muy bien cómo va.

Docente: Es cierto que no hemos tenido tiempo para explicaros cómo se manipula…

Estudiante 1: Claro, cuando explicabas algo pues ponías un ejemplo basándote en GeoGebra. Era más visual.

13. Me gustaría que me dierais vuestras opiniones sobre la experiencia de trabajar los contenidos de los triángulos con applets de Geogebra ¿Pensáis que es más fácil entender esos contenidos con GeoGebra? ¿Por qué?

Estudiante 7: Sí, la visualización siempre hace que sea más fácil entender algo.

Estudiante 2: A mí me gustó la de los ángulos circunscritos.

14. ¿Pensáis que es positivo que el ordenador nos ayude con las construcciones matemáticas (triángulos…) para aprender mejor o pensáis que es mejor construirlas con lápiz y papel?

Todas: Sí.

Estudiante 7: Hay que abrirse a nuevas oportunidades.

Docente: Hay menos posibilidades de equivocarte al dibujar, más precisión.

Estudiante 1: La barra esa que la mueves y se va moviendo el ángulo pues permite que lo veas más visual.

Docente: Sí, eso se llama deslizadores y permite variar un parámetro.

Estudiante 1: ¡Ah! no sabía cómo se llamaba.

15. ¿Os gustaría estudiar más contenidos usando recursos como GeoGebra?

Estudiante 4: Lo hemos utilizado antes, también con las funciones.

Todas: Sí nos gustaría.

16. ¿Pensáis que las matemáticas son más divertidas usando recursos como GeoGebra?

Todas: Se ríen y dicen, nooo, sobre todo Estudiante 3.

Estudiante 2: Son más amenas.

Docente: ¿Les encontráis una lógica?

Todas: Sí.

Estudiante 1: Es más práctico.

17. ¿Prestáis más atención cuando os explican las matemáticas usando recursos como GeoGebra o no?, ¿estáis más motivadas?

Estudiante 3: Se intenta, otra cosa es que nos enteremos. Pero se intenta.

Docente: digo que si prestáis más atención por el hecho de que el docente vaya a utilizar un recurso GeoGebra.

Todas: No, igual.

Estudiante 5: No es lo mismo prestar atención que enterarse.

18. (Si las estudiantes afirman estar más motivadas con los ordenadores) ¿al estar más motivadas se comprende mejor?

No era el caso especialmente, puesto que dicen estar motivadas siempre.

Preguntas sobre mi docencia:

19. ¿Qué más cosas podéis comentar de la experiencia conmigo que puedan ser útiles para mí, como futura profesora?

Estudiante 7: Que eres muy amable.

Estudiante 2: Que preguntas mucho si nos enteramos y eso está muy bien.

Estudiante 5, Estudiante 6 y Estudiante 4 asienten con la cabeza.

Estudiante 4: Sí, y que si no sigues los apuntes del libro das los apuntes previos para tener nosotras una idea de lo que vamos a dar.

Todas asienten.

Estudiante 7: Sí, es más fácil.

Estudiante 1: Y luego, en el documento que nos distes estaba todo variado, la teoría, los ejercicios para luego ponerlo en práctica…

Estudiante 5: O por si no entiendes la explicación, como a veces me pasa a mí, que me pierdo un poco, que por las mañanas estoy más en las musarañas y no me entero de nada. Luego lo miro en los apuntes y digo, ¡ah! pues hoy ha explicado esto y ya sé cómo es.

Estudiante 1: Es como un apoyo.

Docente: ¿A lo mejor el hecho de no tener que copiar en clase os permite más atender?

Estudiante 5: Yo creo que sí.

Estudiante 7: El problema es que cuando copiamos estamos más pendientes de tenerlo todo para luego poder entenderlo.

Estudiante 4: Pero depende, porque si hay ejercicios es mejor tenerlos copiados.

Estudiante 1: Cuando se explica la teoría, a lo mejor nos enteramos mejor si no tuviésemos que copiar la teoría, porque sabemos que luego vamos a tener esos apuntes ya ahí.

Estudiante 4: Pero si es un ejemplo es bueno hacerlo.

Docente: Como docente hay que llegar a un acuerdo entre entenderlo y que luego lo sepáis hacer vosotras. Y el hecho de escribir hace que los conceptos entren en muchos casos.

Estudiante 4: Sobre todo las fórmulas.

Docente: Hay que practicar.

Estudiante 4: Y no escribir nada en clase da la sensación de que no estás interesado por la clase.
Docente: ¿Tenéis más comentarios que ya es la última pregunta?
Estudiante 6: Sí, que nos has enseñado muy bien y he entendido mejor las cosas con tus explicaciones.
Estudiante 1: Lo del proyecto está bien porque nos hemos enterado mejor, lo hemos puesto más en práctica. Lo que pasa es que tenías que haber dejado un poco más de días para hacer el trabajo. *(Tomamos las medidas el lunes y lo tenían que entregar el miércoles por la noche)*
Estudiante 7: Ya que no teníamos los recursos suficientes para hacer bien las medidas, pues haber dejado más tiempo...
Estudiante 1: Porque como tenemos extraescolares y todo eso.