UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

CENTRO DE POSTGRADO Y FORMACIÓN CONTINUA

MÁSTER DE PROFESORADO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

MATEMÁTICOS ASESINADOS POR EL TERCER REICH

MATHEMATICIANS KILLED BY THE THIRD REICH

ESTUDIANTE	Rubia Gómez, Luis
ESPECIALIDAD	Matemáticas

TUTOR/A Prof. D. Francisco García Arenas

Convocatoria de: mayo de 2021

«La esencia de las matemáticas es la libertad».

Georg Cantor

Resumen.

La relación entre las matemáticas y la historia es tan intrínseca y antigua como la misma humanidad, es por ello que debemos entender que la propia matemática es una ciencia que se ha nutrido y a su vez ha nutrido a las diversas ramas del saber: pintura, escultura, física, arquitectura, etc.

Sin embargo, la mayor parte de las veces la forma en que se enseñan las matemáticas las hace parecer un conocimiento teórico y estanco que no guarda relación con la vertiente social del mundo. Por ello, en el presente Trabajo Fin de Máster hemos pretendido mostrar esa relación entre las matemáticas y la historia reciente de la humanidad, con el objetivo de mostrar al alumnado como las matemáticas y las personas que las construyen son elementos íntimamente relacionados.

Para tal propósito, hemos tomado el ejemplo de la enseñanza de las matemáticas durante el Tercer Reich, así como un listado de matemáticos que fueron ejecutados por el simple hecho de tener un origen racial o pensamiento diferentes a los del régimen predominante.

El objetivo es mostrar la vertiente humana de los matemáticos y el carácter histórico y social de dicha materia, así como deducir que cualquier tipo de intolerancia acarrea una pérdida de riqueza cultural. Para ello se han estructurado una serie de biografías sobre matemáticos asesinados por el Tercer Reich y unas actividades ligadas al conocimiento que aportaron dichas personas antes de ser ejecutados. Cada actividad cumple con parte del contenido, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que marca la norma educativa.

Palabras Clave.

Aprendizaje, nazismo, matemáticas, componente social, historia, actividades.

Abstract.

The relationship between mathematics and history is as intrinsic and old as humanity itself, that is why we must understand that mathematics itself is a science that has nurtured differents branches of knowledge: painting, sculpture , physics, architecture, etc.

However, most of the time the way in which mathematics is taught makes it seem like a theoretical knowledge that is not related to the social aspect of the world. For this reason, in this Master's Thesis we have tried to show that relationship between mathematics and the recent history of humanity, with the aim of showing students how mathematics and the people who build it are closely related elements.

For this purpose, we have taken the example of the teaching of mathematics during the Third Reich, as well as a list of mathematicians who were executed for the simple fact of having a racial origin or thought different from those of the prevailing regime.

The goal is to show the human aspect of mathematicians and the historical and social character of this subject, as well as to deduce that any type of intolerance leads to a loss of cultural wealth. For this, we has elaborated a series of biographies on mathematicians assassinated by the Third Reich and some activities linked to the knowledge that these people contributed before being executed. Each activity complies with part of the content, evaluation criteria and learning standards set by the spanish educational laws.

Keywords.

Learning, Nazism, mathematics, social component, history, activities.

Índice.

1. Introducción.

En el presente Trabajo Fin de Máster se pretende abordar la relación entre las matemáticas y el nazismo, prestando especial atención a los matemáticos asesinados por el régimen nacionalsocialista, que gobernó Alemania entre 1933 y 1945.

La temática elegida resulta de gran interés para la formación docente como complemento a los estudios matemáticos y científicos que solemos tener el alumnado del máster de profesorado, es decir, estos aportes históricos complementan un área en la que dicho profesorado suele tener carencias debido a la excesiva especialización que sufren los grados en la actualidad y que nos hace especialistas en unas áreas, pero prácticamente ignorantes en otras.

Por tanto, a lo largo de este trabajo se pretende cumplir uno de los objetivos fundamentales de la competencia matemática que se pretende mostrar a nuestros futuros alumnos, el de formar ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos como bien enuncia PISA 2012 (Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias) al incluir en su definición de competencia matemática el siguiente fragmento: “Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan”

Por tanto, que mejor manera de construir alumnos reflexivos que mostrándoles la historia de las matemáticas, así como la implicación ética y moral que las matemáticas han llevado implícitas y más especialmente en tiempos convulsos como fue la Alemania Nazi de la primera mitad del siglo XX.

Para lograr este objetivo realizaremos una prosopografía centrada en el periodo histórico del Tercer Reich ejecutando una compilación biográfica de algunos de los matemáticos asesinados bajo el mando del nacionalsocialismo alemán. En concreto nuestra área de trabajo se basará en los siguientes matemáticos:

- Berwald, Ludwig.
- Blumenthal, Otto.

- Frölich, Walter.
- Grelling, Kurt.
- Pick, Georg.
- Remak, Robert.
- Strassmann, Reinhold.
- Tauber, Alfred.

La forma de proceder estará fundada en una pequeña biografía y en la contribución al mundo de las matemáticas por parte de cada uno de los matemáticos estudiados. Dicha información será explicada de forma transversal en los temas que estén relacionados con la temática principal de cada uno de los profesores descritos anteriormente y se complementará con actividades prácticas que puedan ejecutarse en el aula de los institutos.

2. Marco teórico.

Tradicionalmente los conocimientos de las distintas áreas se han considerado estancos, esto quiere decir que no se ha intentado mostrar al alumnado la relación entre las distintas disciplinas lo que ha provocado la sensación irreal y poco lógica del conocimiento. Sin lugar a dudas, dos de las materias en las que los discentes tienen dificultades para relacionarlas son la historia y las matemáticas. En la educación actual, la relación entre los distintos saberes resulta imprescindible como se deduce de la normativa nacional sobre educación. Con respecto a la relación entre las matemáticas y la historia nos encontramos el siguiente fragmento del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. "…Las matemáticas son un instrumento indispensable para interpretar la realidad y expresar los fenómenos sociales, científicos y técnicos de un mundo cada vez más complejo; contribuyen de forma especial a la comprensión de los fenómenos de la realidad social, de naturaleza económica, histórica, geográfica, artística, política, sociológica, etc., ya que desarrollan la capacidad de simplificar y abstraer." Y aún más explícitamente puede verse en el siguiente fragmento: "…Tampoco debe olvidarse la contribución de las matemáticas a otras áreas como la Geografía, la Historia o el Arte en donde las matemáticas han tenido una reconocida influencia…"

Son pocos los estudios que se han hecho al respecto, y entre los que podremos destacar simplemente algunos TFM relacionados con la temática como los siguientes:

- ¿Por qué incluir la Historia de la Matemática en el aula? Helena Palenzuela Rodríguez.
- La historia de las matemáticas como recurso didáctico. Beatriz Navarro Vicente.

3. Marco aplicado o propuesta de intervención.

Nuestra intervención tendrá lugar en los distintos bloques curriculares de las matemáticas de la enseñanza secundaria española. Como ya se mencionó con anterioridad, el contenido de este TFM pretende ser llevado a la práctica de una forma transversal, es decir, que se ejecutará desde 1º de E.S.O hasta 2º de Bachillerato aprovechando los contenidos que establece la ley para introducir una breve reseña biográfica de los autores preestablecidos (matemáticos asesinados por el Tercer Reich), así como para establecer actividades que nos permitan conocer su contribución al mundo de las matemáticas. Se trata por tanto de una intervención comunitaria que llevaremos a la práctica centrándonos en cómo se podría realizar en los distintos cursos de un instituto cualquiera.

3.1. Conceptos previos.

En primer lugar, procederemos a explicar la forma de proceder para cada uno de los ejemplos prácticos que se realizarán en clase. Dichos ejemplos serán coherentes en todo momento con la normativa aplicable en nuestro ámbito, es decir, el educativo. Por tanto, no regiremos en todo momento por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.[1] Dicho real decreto establece las competencias y objetivos del currículo en base a contenidos (estructurados en bloques), criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Por tanto, para cada una de nuestras actividades expondremos el bloque para el que está diseñada nuestra actividad, así como los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que aplicaremos. Previo paso a esta cuestión vemos de suma importancia definir los siguientes conceptos:

[1] Aunque la normativa ha cambiado, se ha elegido realizar el presente TFM con la normativa que se aplica aún en las aulas.

- Contenidos: Según la Web del Ministerio de Educación y Formación Profesional se definen los contenidos como: "*conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias."* Extrapolando dicha definición al caso de las matemáticas podríamos definir el contenido matemático como el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que permite la adquisición de las competencias matemáticas.[2] Dicho contenido se estructura en bloques de conocimiento según la normativa. Dichos bloques coinciden para las matemáticas de E.S.O y Bachillerato y se corresponden con:
    - Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas.
    - Bloque 2. Números y álgebra.
    - Bloque 3. Geometría.
    - Bloque 4. Funciones.
    - Bloque 5. Estadística y probabilidad.
- Criterios de evaluación. Buscan conocer el grado de adquisición de las competencias, así como saber si se han logrado los objetivos de la materia.
- Estándares de aprendizaje. Se corresponden con el desglose de los criterios de evaluación de forma que el profesorado tenga elementos de concreción, observables y medibles que permitan cuantificar el grado de rendimiento del alumnado en cada una de las competencias.

[2] Aunque usemos el término Competencias Matemáticas, en nuestra asignatura se valoraran distintas competencias según establece el Ministerio de Educación.

3.2. Introducción histórica y contextualización de la intervención.

Como ya se mencionó en la introducción, el periodo histórico que queremos desarrollar durante nuestra intervención es el protagonizado por el régimen nazi durante el Tercer Reich y más concretamente nos centraremos en los matemáticos asesinados durante dicho periodo. A modo de introducción citaremos los sucesos históricos ocurridos en dicha época:

Tras la República de Weimar de 1919 a 1933, Hitler es nombrado canciller de Alemania el 30 de enero de 1933 por el entonces presidente Paul von Hindenburg después de las elecciones generales de 1932 donde Hitler formó un gobierno de coalición formado por su propio partido, Partido Nacionalsocialista Obrero Alemán (NSDAP), y por el Partido Nacional del Pueblo Alemán (DNVP). El 14 de julio de 1933 se decreta el Partido Nazi como el único partido legal de Alemania, suponiendo el paso de la democracia a la dictadura.

En los años posteriores las minorías de Alemania se ven desprovistas de sus derechos civiles sobre todo a partir de septiembre de 1935 cuando se promulga la Ley de Númeremberg que establecía que aquellas personas de sangre no alemana no tenían ningún derecho civil. Además, se prohibió el matrimonio entre alemanes y judíos, considerando a cualquier persona que tuviera un abuelo judío como judío. En este periodo también se ejerció una persecución de homosexuales y personas discapacitadas. Poco a poco esta persecución fue extendiéndose al resto de las minorías, afectando especialmente a gitanos y judíos, perteneciendo a este último colectivo la gran mayoría de los matemáticos que vamos a estudiar en este TFM.

Las ideas de superioridad racial aria fueron instalándose en toda la sociedad alemana, y el campo matemático no fue una excepción. En la comunidad matemática destacaba Ludwig Bieberbach un brillante matemático que se había convertido en profesor de la universidad de Berlín en 1917. Poco a poco su visión antisemita fue impregnando sus obras, llegando a afirmar que las mentes de judíos y alemanes funcionaban de una forma diferente a la hora de comprender y explicar las matemáticas. Dicha visión se puede ver en el siguiente fragmento de su obra, *Stilarten mathematischen Schaffens, p.357: "… la imaginación* *espacial es una característica de las razas germánicas, mientras que el razonamiento lógico puro es ricamente desarrollado por las razas románicas y hebreas. En el ámbito intelectual la raza se muestra en la forma de crear, la evaluación de los resultados, y considero que también en el punto de vista de las cuestiones de los fundamentos…"*

Estas ideas de superioridad racial no sólo fueron calando entre el profesorado y su obra, también afecto a la educación de los pupilos alemanes, muestra de ello son los siguientes problemas planteados en la guía "*Matemáticas en el Servicio de Educación Nacional y Política"* que fue distribuida en 1936 para plantear a los profesores las directrices pedagógicas:

- *"Un loco cuesta cada día 4 marcos, un inválido 5'5 marcos, un criminal 3'5 marcos. En muchos casos, un funcionario no cobra más que 4 marcos, un empleado 3'6 marcos, un aprendiz 2 marcos. Calculad cuánto cuestan anualmente los 300000 locos y epilépticos de Alemania. ¿Cuánto se ahorraría el estado si estos individuos fueran eliminados? ¿Cuántos préstamos de 1000 marcos podríamos conceder a matrimonios si pudiéramos economizar ese dinero?"*
- *"Entre los tres grupos raciales más importantes de Europa, se detectó el siguiente crecimiento de la población entre 1900 y 1930:*

  – Población teutónica: De 124 millones a 149 millones.

  – Población latina: De 103 millones a 121 millones.

  – Población eslava: De 166 millones a 226 millones.

  Asumiendo un nivel de crecimiento constante, calcula el crecimiento de estos tres grupos en un período de diez años. ¿Cuál será el porcentaje de población de los tres grupos en el año 1960 si esta tendencia continúa?

  ¿Qué riesgos para la población alemana puedes percibir si no ocurre un cambio en esta tendencia?"

Llega a ser relevante como en una materia tan aséptica de contenido político como son las matemáticas se llegó a incluir este tipo de contenido que sin lugar a duda pretendía dirigir el pensamiento de los niños hacia la causa nazi, algo que reconoció el propio Hitler en "*Mein Kampf*" (1924):

"…La culminación de toda labor educacional del Estado racista consistirá en infiltrar instintiva y racionalmente en los corazones y los cerebros de la juventud que le está confiada, la noción y el sentimiento de raza. Ningún adolescente, sea varón o mujer, deberá dejar la escuela antes de hallarse plenamente convencido de lo que significa la puridad de la sangre y su necesidad. Además, esta situación desde el punto de vista racial, tiene que alcanzar su perfección en el servicio militar, es decir, que el tiempo que dure este servicio hay que considerarlo como la etapa final del proceso normal de la educación del alemán en general…"

Ambos problemas podrían plantearse en nuestras clases de matemáticas, haciendo hincapié en los alumnos en la falta de moral de dichos problemas y en como los objetivos de la educación es hacer alumnos reflexivos que busquen la mejora de nuestra sociedad. El primer problema sería apropiado para el primer ciclo de la E.S.O y el segundo para el segundo ciclo de la E.S.O y bachillerato. Una forma de hacerlos reflexionar sobre dichas cuestiones matemáticas sería visualizando el siguiente fragmento de la película "*La vida es bella*":

https://www.youtube.com/watch?v=49pjtXcFDlk

3.3. Matemáticos asesinados por el nazismo y ejercicios prácticos para llevar a clase.

3.3.1. Berwald, Ludwig.

(8 de diciembre de 1883 – 20 de abril de 1942)

Nació en Praga en 1883, era hijo de unos famosos libreros judíos. En 1900 se traslada a Múnich junto a su familia, matriculándose en la universidad Ludwig Maximilian. En 1908 se doctoró con una tesis sobre las propiedades de curvatura en las superficies internas de un sistema rectilíneo y superficies contenidas en el mismo. Posteriormente se convirtió en profesor de la Universidad Carolina en Praga, logrando la cátedra en 1924. Destacó por sus conocimientos en geometría diferencial, destacándose por sus trabajos sobre la geometría de Finsler.

El 22 de octubre de 1941, fue deportado al gueto de Lodz, creado por el régimen Nazi en Polonia y donde se encarcelaron a judíos y gitanos. Murió el 20 de abril de 1942. (Ver anexo I)

Su contribución sería desarrollada en Matemáticas I. 1º Bachillerato de Ciencias y Tecnología, y en concreto dentro del Bloque 4 (Geometría) con el objetivo de poder atender de una forma adecuada a los siguientes contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables marcados por el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Contenidos:

- Geometría en el plano: Incluyendo las distintas ecuaciones de la recta, así como sus posiciones relativas.
- Distintos tipos de lugares geométricos del plano
- Distancias y ángulos entre rectas.

Criterios de evaluación:

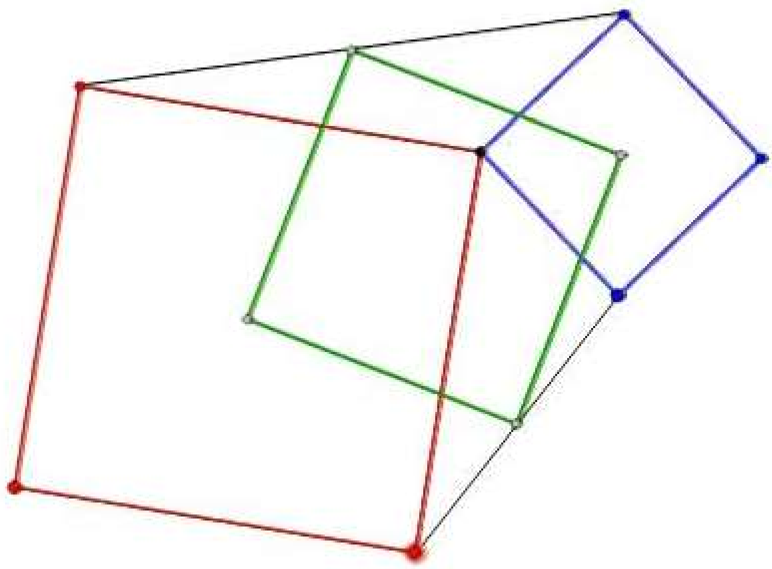
- Ser capaces de distinguir los distintos elementos de la geometría plana, así como obtener las ecuaciones de las rectas correspondientes de forma que puedan ayudarse de ellas para resolver los problemas de cálculo de incidencia y distancia.
- Resolver problemas de lugares geométricos, así como identificar las formas correspondientes de los lugares geométricos más comunes, analizando y comprendiendo sus ecuaciones reducidas de forma que puedan analizar sus propiedades métricas.

Estándares de aprendizaje evaluables.

- Son capaces de calcular distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.
- Logran obtener la ecuación de una recta según sus distintas formas, identificando los elementos característicos de cada forma.
- Conocen y diferencian las diferentes posiciones relativas de lados rectas.
- Reconocen los lugares geométricos más comunes en geometría, así como conocer sus características principales.
- Realizan investigaciones utilizando programas informáticos matemáticos en las que se pueda aplicar todo lo aprendido en geometría plana.

La actividad práctica consistirá en demostrar el teorema de Finsler-Hadwiger que establece que, si dos cuadrados tienen un vértice común, entonces los centros de ambos cuadrados y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices adyacentes al común forman un cuadrado.

Para hacerlo más visual se mostrará su desarrollo con GeoGebra, ya que como se menciona en Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009), dicho programa tiene una gran importancia en la adquisición de las competencias por parte del alumnado de ciencias.



Problema: Dados los cuadrados A y B de vértices: $A_1(3,2)$, $A_2(3,-2)$, $A_3(-1,-2)$, $A_4(-1,2)$ y $B_1(3,2)$, $B_2(3,8)$, $B_3(9,8)$, $B_4(9,2)$. Buscar el cuadrado que satisface el teorema de Finsler-Hadwiger.

Resolución: Consultar anexo II.

3.3.2. Blumenthal, Otto.

(20 de julio de 1876 – 12 de noviembre de 1944)

Nació en 1876 en Frankfurt (Alemania). Hijo de una familia de doctores judíos comenzó sus estudios de medicina en la Universidad de Gotinga, pero tras un semestre se cambió a la carrera de matemáticas. En 1905 se convirtió en profesor de la Universidad de Aquisgrán. Destacó por sus trabajos en análisis de funciones complejas, aunque durante la Primera Guerra Mundial comenzó a interesarse en resolución de problemas asociados a la aviación, tensión en vigas y vibración de membranas. La influencia de Blumenthal en las matemáticas continua actualmente gracias a la publicación de aplicaciones del Teorema de Blumenthal-Nevai. También, fue editor de diferentes revistas, entre las que destacaba la editada por la Sociedad de Matemáticas Alemana, de la que era miembro ejecutivo. Blumenthal fue expulsado de la universidad en 1933 debido a sus raíces judías, aunque él se había convertido al protestantismo desde muy joven.

Tras esta expulsión decidió emigrar a Holanda y aceptar un trabajo en Utrecht, sin embargo, la invasión de Holanda por parte del ejército Nazi provocó el arresto de Blumenthal y su mujer que terminaron encarcelados en el campo de concentración de Theresienstadt (República Checa) donde murió en 1944.

Entre sus contribuciones a las matemáticas destacaremos el Teorema de Blumenthal de los polinomios ortogonales, dichos polinomios se caracterizan por formar bases ortogonales en ciertos espacios y tienen gran importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de la aproximación de funciones y la mecánica cuántica.

Para la actividad práctica relacionada con este matemático nos basaremos en los polinomios de Legendre, ya que se trata de polinomios ortogonales.

Lo primero que se hará es adaptar la actividad al contenido curricular que dictamina el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del

Bachillerato. En concreto tomaremos parte del contenido curricular del Bloque 2 (números y álgebra) para primero y segundo de E.S.O.

Contenidos:

- Introducción de los alumnos en la utilización del lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano de la vida, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico como forma de generalizar propiedades y expresar relaciones.
- Obtención de expresiones algebraicas y polinomios, así como de los términos generales de dichos polinomios basándose en la observación de pautas y regularidades.
- Valor numérico de las expresiones algebraicas, prestando especial atención a los polinomios.
- Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas.

Criterios de evaluación:

- Utilizar números naturales, enteros y racionales, así como saber realizar operaciones con ellos para transformar e intercambiar información de forma que sean capaces de resolver distintos problemas.
- Reconocer y utilizar propiedades de los números en contextos de divisibilidad y operaciones sencillas
- Desarrollar la habilidad para resolver operaciones combinadas como culmen a la correcta realización de operaciones aritméticas, sabiendo aplicar la jerarquía de las operaciones combinadas.

Estándares de aprendizaje evaluables.

- Ser capaces de hallar el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números a través de la suma, resta, multiplicación y división, así como de las potencias de exponente natural sabiendo aplicar de una forma adecuada la jerarquía de las operaciones.
- Realizan cálculos en los que aparezcan potencias de exponente natural, siendo capaces de aplicar las distintas reglas de las operaciones con potencias.
- Logran realizar, de una forma adecuada, operaciones combinadas entre números enteros y fraccionarios, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación correcta y respetando la jerarquía de las operaciones.

Problema: Dados los siguientes polinomios de Legendre:

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{2}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

a) Establece el grado de cada uno de ellos, su coeficiente principal y su término independiente.

b) Calcula el valor de todos los polinomios cuando x toma el valor 2.

c) Suma entre si los polinomios que tengan grado par.

Resolución: Consultar anexo III.

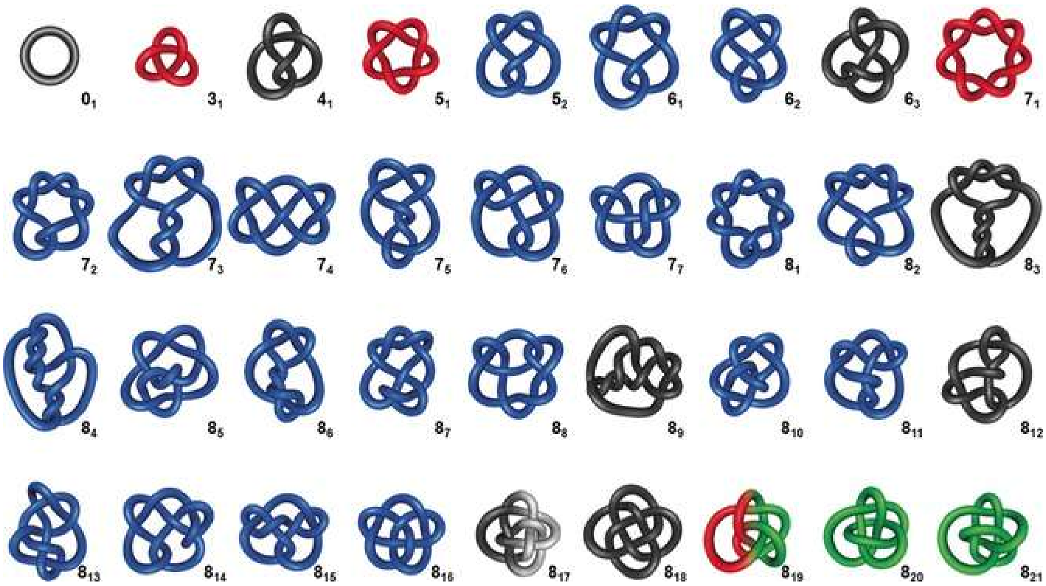
3.3.3. Fröhlich, Walter.

(2 de diciembre de 1902 – 29 de noviembre de 1942)

Nacido en 1902 en Praga, pronto destacó en el campo de las matemáticas, siendo profesor de la Universidad de Praga en el momento de la contienda. Se especializó en geometría descriptiva, aunque desde principios de la década de 1930 su interés se centró en la teoría de nudos.

El 21 de octubre de 1941 fue deportado al gueto de Lodz, ya descrito anteriormente, donde fue asesinado el 29 de noviembre de 1942. (Ver anexo IV)

Con Fröhlich introduciremos a los alumnos en la teoría de nudos que es la rama de la topología que se encarga de estudiar el objeto matemático que abstrae la noción de nudo.



Un nudo es matemáticamente una curva cerrada en el espacio tridimensional y que no tiene auto intersecciones. El nudo más simple es el círculo. El principal problema de la llamada Teoría de Nudos es su representación en el plano. A la hora de clasificar dos nudos se dice que dos nudos son equivalentes si se puede transformar uno en otro sin alterar su topología.

Algunos ejemplos de nudos aparecen en la naturaleza, por ejemplo, las moléculas de ADN y de ARN o las proteínas.

Para la puesta en práctica de la teoría de nudos nos adaptaremos al contenido curricular de 4º E.S.O y en concreto en la asignatura de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas. La actividad estará enmarcada dentro del Bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas). Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables serán los siguientes:

Contenidos:

- Planificación de procesos que lleven a la correcta resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Elaboración de estrategias y procedimientos para la puesta en práctica de la planificación anteriormente mencionada, mediante el uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, buscar regularidades y leyes, etc.
- Análisis de los resultados: mediante asignación de las unidades correspondientes, revisión de las operaciones, realizando las comprobaciones oportunas e interpretación de las soluciones en el contexto del problema planteado, búsqueda de distintas formas de resolución, etc.
- Planteamiento de investigaciones matemáticas en distintos contextos: numéricos, geométricos y funcionales.
- Realización de procesos de matematización y modelización de situaciones reales.
- Confianza del alumnado en sus capacidades de forma que pueda desarrollar adecuadamente actitudes propias del trabajo científico.
- Conocimiento sobre la forma de utilizar distintos medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

Criterios de evaluación:

- Expresar adecuadamente el proceso seguido para la resolución del problema.
- Utilizar procesos adecuados de razonamiento que lleven a distintas estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos adecuados y comprobando las soluciones obtenidas, así como su lógica dentro del contexto de nuestro problema.
- Descubrir y comprender distintas situaciones de cambio, de forma que se puedan deducir o inducir patrones que lleven a justificar la existencia de regularidades y/o leyes matemáticas, valorando la utilidad de estos procedimientos para hacer predicciones adecuadas.
- Interiorizar de una forma adecuada los problemas resueltos de forma que puedan ser planteados con variaciones en los datos, en el contexto, etc.
- Elaborar y presentar informes sobre los proceso, resultados y conclusiones obtenidas a lo largo de los proyectos de investigación.
- Llevar a cabo procesos de matematización de la realidad cotidiana, logrando la identificación de problemas que puedan ocurrir en la vida cotidiana.
- Apreciar la modelización matemática como una forma de resolución de problemas que podemos encontrarnos en nuestro día a día, logrando evaluar la eficacia e identificando las limitaciones de los problemas planteados.
- Superar las inseguridades al enfrentarse a la resolución de problemas de situaciones desconocidas.
- Reflexionar de una forma adecuada sobre las decisiones a la hora de resolver los problemas de forma que se logre un aprendizaje de cara a situaciones futuras similares.
- Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas para cada situación de una forma eficiente, de manera que permitan realizar los cálculos necesarios, así como las representaciones gráficas adecuadas que recreen situaciones matemáticas. Dichas representaciones ayudaran en

la comprensión de los conceptos matemáticos, así como en su correcta interpretación y análisis.

- Utilizar las tecnologías de la información de modo que se permita mejorar el proceso de aprendizaje, buscando, comprendiendo y sintetizando la información más relevante de forma que permita elaborar documentos propios logrando exponer y argumentar dicha información de forma que pueda ser transmitida a los demás.

Estándares de aprendizaje evaluables:

- Es capaz de expresar por escrito y oralmente, el proceso empleado para resolver los problemas adecuadamente.
- Tras analizar, comprende correctamente los enunciados de los problemas, sabiendo extraer los datos y sus relaciones, así como entendiendo el contexto del problema).
- Logra realizar estimaciones y crear conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver.
- Utiliza las estrategias y razonamientos matemáticos adecuados para la resolución de los problemas, sabiendo analizar los resultados.
- Es capaz de deducir patrones y regularidades de forma que establezca leyes matemáticas que le permitan resolver problemas parecidos.
- Analiza el resultado de forma que comprende si la solución es coherente con el problema planteado.
- Busca formas alternativas de resolución para los problemas.
- Sebe establecer conexiones entre los problemas y la realidad de forma que es capaz de describir la utilidad prácticas de los problemas analizados.
- Sabe exponer de forma clara y concisa el proceso seguido, así como las conclusiones a las que ha llegado.
- Logra desarrollar actitudes correctas para el trabajo matemático: esfuerzo, flexibilidad, persistencia, aceptación de la crítica razonada, etc.

- Distingue de forma correcta entre los problemas y los ejercicios de forma que adquiere la forma más adecuada de resolución en cada caso.
- Tiene una actitud de curiosidad, que le lleva a plantearse cuestiones matemáticas.
- Logra modelizar situaciones de la vida cotidiana en problemas matemáticos que después sabe resolver.
- Realiza representaciones gráficas que ayudan a explicar tanto el proceso seguido para resolver el problema como los resultados finales.
- Sabe elaborar objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas que permiten mostrar, analizar y comprender distintas propiedades geométricas.
- Elabora de una forma adecuada documentos propios en formato digital: textos, presentaciones, etc. tras sintetizar la información buscada y analizada. Sabe expresar las conclusiones obtenidas de una forma clara y concisa.
- Utiliza los recursos de forma adecuada para lograr exponer sus conocimientos en forma de presentaciones, exposiciones, etc.

Para ello les mostraremos los siguientes los siguientes ejemplos de nudos:

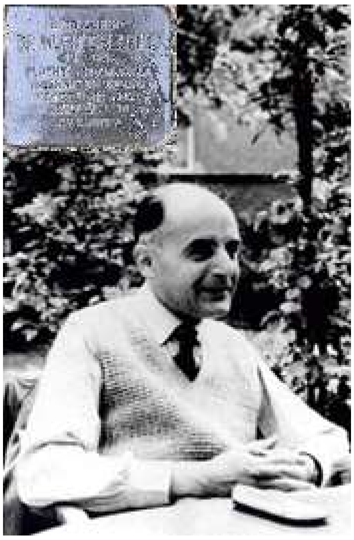
https://www.geogebra.org/m/Kd8PqdqN

https://www.geogebra.org/m/NZNQHGRe

https://www.geogebra.org/m/m3YJJB6M

Después se les pedirá que realicen un trabajo de investigación donde expliquen diez tipos de nudos que se encuentren en la vida real, deben indicar el tipo de nudo del que se trate y las ventajas y desventajas que presenta para el uso que se le da. El trabajo se realizará en grupos de 4 y deben exponerlo durante 10 minutos delante del resto de los compañeros prestando especial atención a los elementos matemáticos que muestren dichos nudos.

3.3.4. Grelling, Kurt.



(2 de marzo de 1886 – 18 de septiembre de 1942)

Kurt Grelling nació en 1886 en Berlín, pertenecía a una familia acomodada judía, siendo su padre doctor. De niño asistió a una escuela elemental de habla francesa, entrando en la Universidad de Gotinga en 1905. Pronto se interesó por las paradojas tanto matemáticas como filosóficas, siendo el creador de la paradoja semántica conocida como paradoja de Grelling-Nelson. Ejemplo:

Rojo.

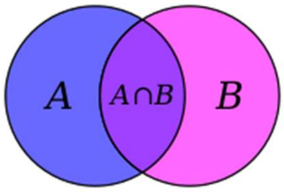
Rojo.

En 1910, obtuvo su doctorado en la universidad basado en una tesis sobre el desarrollo de la aritmética en la teoría axiomática de conjuntos. Pasando posteriormente a ser profesor de instituto y trasladándose a Bruselas en 1937, donde vivió hasta que fue arrestado en 1940, tras la invasión de Bélgica por el ejército Nazi. Tras este arresto se le propuso a su mujer, Greta, el divorcio de Kurt por ser de raza “aria”, sin embargo, tras la negativa de esta, los dos fueron enviados al campo de exterminio de Auschwitz-Birkenau el 16 de septiembre de 1942 donde fueron ejecutados en la cámara de gas el 18 de septiembre de 1942, al no considerarse aptos para el trabajo de dichos campos.

Para la actividad que realizaremos con los alumnos nos basaremos en el tema de su tesis, es decir, en la teoría de conjuntos, que es la rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos.

La teoría de conjuntos ayuda a construir y comprender todo el conocimiento matemático basándose en la lógica. Actualmente se acepta que los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel sería suficiente para el desarrollo de cualquier área de matemáticas: números, funciones, geometría, etc.

Una de las herramientas de la teoría de conjuntos son los diagramas de Venn, creados en 1880 por John Venn, y que nos permiten visualizar de una forma intuitiva las relaciones entre los distintos conjuntos, en concreto nos facilitan la comprensión de los conceptos de unión, intersección, inclusión y disyunción.



La actividad que crearemos mediante esta herramienta y de forma que pongamos en prácticas los estudios de Kurt Grelling se basaran en el contenido curricular de la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II de 2º Bachillerato y específicamente en el bloque 4, es decir, el de Estadística y Probabilidad.

A continuación, detallaremos los objetivos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que busca cumplir nuestra actividad respecto a la norma educativas.

Contenidos:

- Profundización en la Teoría de la Probabilidad mediante el estudio de la asignación de probabilidades a sucesos a través de la regla de Laplace y de la frecuencia relativa.
- Estudio de la probabilidad condicionada, así como las leyes que la rigen.
- Dependencia e independencia entre sucesos.
- Teoremas de Bayes y de la probabilidad total.

Criterios de evaluación:

- Asignar probabilidades a sucesos aleatorios mediante la regla de Laplace.

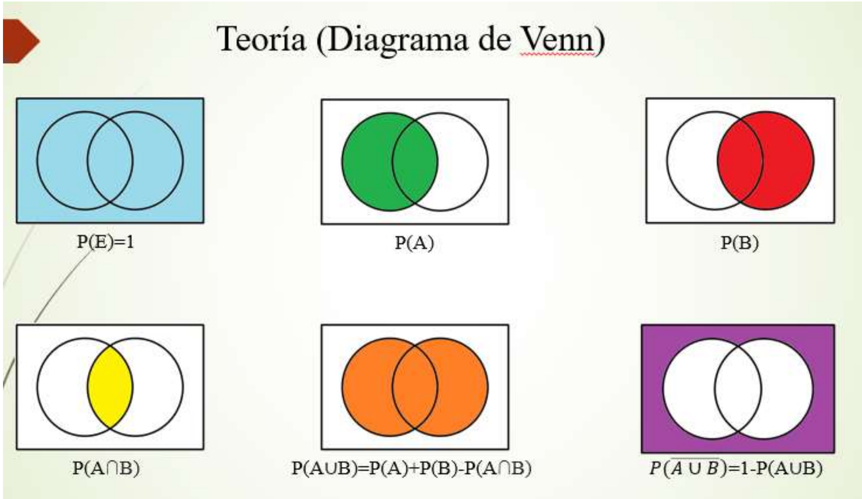
- Aplicar el teorema de Bayes de forma que seamos capaces de calcular la probabilidad de diferentes subconjuntos partiendo de unos datos iniciales obtenidos de contextos relacionados con las ciencias sociales.
- Presentar de forma ordenada los resultados y la información estadística mediante el uso del lenguaje matemático y estadístico, razonando de forma lógica los resultados obtenidos.

Estándares de aprendizaje:

- Logra calcular de una forma adecuada la probabilidad de sucesos mediante la regla de Laplace.
- Calcula correctamente la probabilidad de sucesos partiendo de sucesos que constituyen una parte del espacio muestral.
- Es capaz de obtener la probabilidad final de un suceso mediante la aplicación de la fórmula de Bayes.
- Resuelve de forma adecuada las cuestiones relacionadas con la toma de decisiones basándose en la probabilidad de las distintas alternativas.

La actividad consistirá en la resolución del examen de 2020 sobre la Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad, en concreto se resolverá la convocatoria ordinaria de Matemáticas Aplicadas a las ciencias sociales II en Andalucía. Además, se añaden dos apartados extras para completar y evaluar los conocimientos de los alumnos.

Previamente a la actividad se les explicará la teoría ayudados del esquema de la siguiente página:



Actividad: A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.

b) Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.

c) Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.

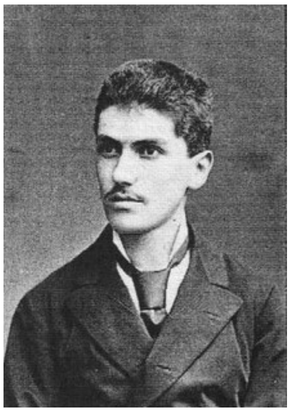
d) Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

e) Establezca si los sucesos haber leído el primer libro y haber leído el segundo libro son independientes.

f) Si usted fuera el editor y sabiendo que por la venta de ambos libros obtiene el mismo beneficio, ¿qué libro preferiría editar?

Resolución: Ver anexo V.

3.3.5. Pick, Georg Alexander.



(10 de agosto de 1859 – 26 de julio de 1942)

Nació en Viena en la época del Imperio austríaco, siendo hijo de una familia judía. Su padre era director de un instituto privado y decidieron educar a Georg en casa hasta cumplir los once años. Estudió en la Universidad de Viena y tras la publicación de su tesis doctoral pasó a ser profesor en la Universidad Carolina de Praga en 1881.

Dio clases a Einstein sobre cálculo diferencial absoluto, algo que ayudo al físico a formular la teoría de la relatividad general en 1915.

Cuando se jubiló, en 1927, volvió a Viena de donde huyó en 1938 tras la invasión de Austria por parte del ejército de Hitler. Permaneció en Praga hasta que fue capturado y trasladado al campo de concentración de Theresienstadt donde murió a las dos semanas de llegar.

Entre las aportaciones de Pick a las matemáticas destaca el teorema de Pick que permite calcular el área de un polígono que tengan los vértices en coordenadas enteras (polígono reticular) conocidos el número de puntos enteros del borde y el número de puntos enteros del interior del polígono. Es decir:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

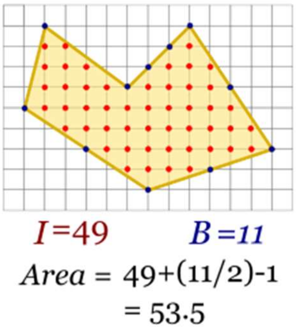
Donde:

A = Área del polígono.

I = Número de puntos enteros en el interior del polígono.

B = Número de puntos enteros en el borde.

Ejemplo:



Para poder crear una actividad relacionada con el matemático anteriormente descrito nos basaremos en el currículo de la materia de matemáticas de 1º de E.S.O., destacando que como el contenido es el mismo dicha actividad también sería apta para 2º de E.S.O. La actividad se enmarcaría en el bloque 3, es decir, el de Geometría y los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizajes que aplicaríamos serían los siguientes:

Contenidos:

- Elementos de la geometría plana, así como la distintas propiedades y relaciones de figuras planas.
- Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y relación entre los distintos ángulos de una figura plana.
- Construcciones geométricas sencillas:
- Mediatriz y bisectriz.
- Figuras planas como el triángulo, cuadrado, resto de figuras poligonales.
- Cálculo y medida de los ángulos en distintas figuras poligonales.
- Cálculo de áreas y perímetros: incluido hallar el valor de áreas por descomposición en figuras más simples.
- Triángulos rectángulos.
- Aplicación del teorema de Pitágoras.

Criterios de evaluación:

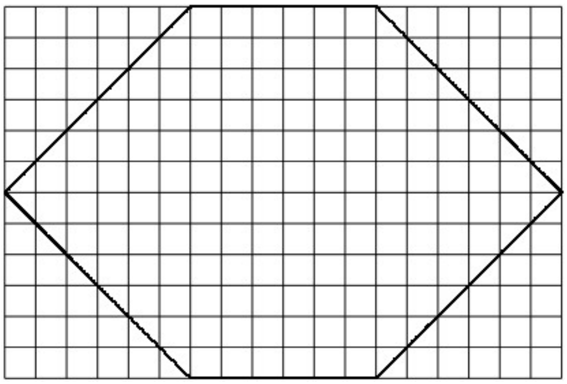
- Reconocer y describir tanto figuras planas, como sus elementos, propiedades y características de forma que puedan ser clasificadas.
- Plantear estrategias y elaborar procedimientos que permitan resolver problemas de perímetros, área y ángulos de figuras planas, sabiendo expresar el procedimiento utilizado.
- Aplicar el Teorema de Pitágoras, sabiendo reconocer las situaciones en las que es aplicable.
- Resolver problemas asociados al cálculo de longitudes y superficies.

Estándares de aprendizaje:

- Logra reconocer los distintos elementos de las figuras planas: ángulos, diagonales, simetrías, etc.
- Diferencia los elementos de los triángulos, sabiendo trazarlos y clasificarlos en función de sus lados y de sus ángulos.
- Diferencia los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo a sus características.
- Resuelve de forma adecuada problemas relacionados con perímetros, superficies y ángulos en figuras planas.
- Sabe aplicar de forma adecuada el Teorema de Pitágoras sabiendo reconocer las situaciones en las que aparece.
- Construye secciones de los cuerpos geométricos de forma que los subdivide en otros de fácil resolución.

Para el diseño de la actividad nos hemos basado en Bagni, G. (1997), donde se utiliza el Teorema de Pick de una forma didáctica para resolver problemas en la geometría reticular.

Actividad: Dada la siguiente figura, donde cada cuadrado tiene un centímetro de lado.



a) Establece de que figura se trata, ¿Es regular?

b) Calcula la suma de sus ángulos interiores.

c) Dibuja un eje de simetría mediante una mediatriz y otro mediante una bisectriz.

d) Calcula su perímetro.

e) Calcula su área por descomposición en otras figuras más simples.

f) Calcula su área aplicando el Teorema de Pick.

Resolución: Ver anexo VI.

3.3.6. Remak, Robert Erich

(14 de febrero de 1888 – 13 de noviembre de 1942) Robert Remak nació en Berlín en 1888, su abuelo, fue el primer judío al que se permitió dar clase en una universidad de Prusia sin abandonar su fe. Robert, fue criado en una familia de profesores universitarios y él mismo decidió estudiar matemáticas y física en la universidad de Berlín. En 1911 leyó sus tesis “Sobre la descomposición de grupos finitos en factores indirectos irreducibles”.

Al comenzar la Primera Guerra Mundial Remak se inscribió como soldado, esto postergó su solicitud para ser profesor universitario, algo que no logró hasta el 11 de enero de 1929. Es de destacar que este retraso también se debió a que dos de sus solicitudes fueron rechazadas por la oposición de Max Planck alegando que Remak no era puramente “ario”. Continuó como profesor hasta el 7 de abril de 1933 cuando la Ley para la Restauración de la Función Pública lo aporto de la docencia por ser descendiente de judíos.

La noche de 9-10 de noviembre de 1938 fue arrestado por ser judío, esa noche murieron 91 judíos y otros 30.000 fueron arrestados, sus negocios y unas 150 sinagogas fueron quemadas, dicho suceso se conoce como la noche de los cristales rotos. Remak fue llevado al campo de concentración de Sachsenhausen. Su mujer intentó tramitar la emigración de Remak a EE. UU, pero tras sus fracasos decidió divorciarse para poder salvar su propia vida, ya que ella no era judía.

A principios de octubre de 1942, los alemanes transfirieron 100.000 judíos a Auschwitz, entre ellos estaba Robert, quien fue ejecutado tres días después de su llegada a dicho campo de exterminio.

Entre sus aportaciones matemáticas destacaremos la Descomposición de Remak que consiste en la descomposición de un grupo abeliano en una suma finita de objetos irreducibles, entendiendo por grupo abeliano como aquel en que el resultado de la operación es independiente del orden de los argumentos, es decir:

$$g \circ f = f \circ g$$

Recordemos que la composición de funciones no es una propiedad que sea recíproca, sin embargo, en el caso de grupos abelianos dicha composición si será igual en ambos sentidos.

La actividad elaborada y relacionada con los estudios de este matemático estará enmarcada en el currículo de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Los elementos curriculares que aplicaríamos serían los que se enumeran a continuación y corresponden con el Bloque 3, o sea, el de análisis:

Contenidos:

- Funciones básicas: función lineal, función racional…
- Representación básica de funciones.
- Operaciones y composición de funciones.

Criterios de evaluación:

- Identificar distintas funciones elementales dadas mediante enunciados, o expresiones algebraicas de forma que puedan representarse gráficamente.
- Representar y estudiar las distintas propiedades de las funciones.

Estándares de aprendizaje evaluables:

- Reconoce las funciones reales tanto analítica como gráficamente.
- Sabe seleccionar las escalas adecuadas para representar las funciones y de esta forma poder interpretarlas.
- Logra comprobar los resultados con la ayuda de medios tecnológicos adecuados.
- Conoce y aplica de forma adecuada el concepto de composición

- Representa gráficamente funciones, y reconoce los elementos básicos de dichas representaciones.

El ejercicio planteado será el siguiente:

Actividad: Establezca las funciones dadas por el siguiente enunciado: f(x) se corresponde con el triple de un número más dos y g(x) con el cociente entre un número más tres y el doble de un número más uno. Establezca que tipo de función es cada una, dibújelas y diga si forma un grupo abeliano, justifique su respuesta.

Resolución: Ver anexo VII.

3.3.7. Strassmann, Reinhold.

(24 de enero de 1893 – finales de octubre de 1944)

Fue el tercer hijo del profesor Dr. Fritz Strassmann, considerado el padre de la medicina forense, y de su mujer Rose. Se bautizó como protestante, aunque su familia era de origen judío.

Durante la Primera Guerra Mundial participo como militar y fue herido por la munición de una bomba, esto le dejo secuelas que le acompañaron el resto de su vida.

En 1923 se graduó con honores en el doctorado de matemáticas. En una de sus visitas al hospital se enamoró de una enfermera con la que se casó y de la que se divorció siete años después. Pasó a vivir con sus padres, pasando frecuentes periodos en un sanatorio suizo.

En 1936 fue privado de su trabajo como estadístico debido a la ley Nuremberg, ley antisemita que le afecto directamente debido a su origen judío.

En octubre de 1938 su hermano Georg emigró a EE. UU, pero Reinhold se negó a marcharse junto a él porque estaba cuidando de su padre postrado en la cama como consecuencia de un ictus. En 1941 fue obligado a vender sus posesiones y fue forzado a trasladarse al gueto de Bayerisches Viertel en Berlín.

Finalmente, el 23 de octubre de 1944 fue deportado a Auschwitz donde probablemente fue ejecutado a los días siguientes.

Una de sus contribuciones al mundo matemático fue el Teorema de Strassmann, el cual establece que, para determinados campos, las series de potencia adecuadas con coeficientes en el anillo de valoración tienen sólo un número finito de ceros. Gracias a esta introducción al mundo de las series pasaremos a elaborar una actividad relacionada con dicho concepto matemáticos enfocado a alumnos de 3º de E.S.O y en concreto del Bloque 2 (Números y Algebra) de la asignatura de Matemáticas Académicas. Antes de enunciar la actividad, pasaremos a enumerar los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Contenidos:

- Búsqueda de regularidades, relaciones y propiedades que puedan aparecer entre distintos conjuntos de números.
- Expresión de dichas regularidades o sucesiones mediante el uso de lenguaje algebraico.
- Sucesiones numéricas y sucesiones recurrentes.
- Progresiones aritméticas y geométricas.

Criterios de evaluación:

- Calcular y operar con expresiones que simbolicen sucesiones numéricas observando las regularidades que se den entre ellas.
- Usar el lenguaje algebraico para extraer la información relevante de los enunciados y transformarlos en sucesiones.
- Resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con los conceptos anteriores.

Estándares de aprendizaje evaluables:

- Logra calcular los términos de una sucesión mediante formación conocidos los términos anteriores.
- Descubre la forma de la fórmula del término general.
- Reconoce las progresiones aritméticas y geométricas, sabe calcular su término general y el cálculo de la suma de los “n” primeros términos.
- Reconoce los elementos de las sucesiones en problemas de la vida cotidiana.

Actividad:

Ejercicio 1. Dado un cuadrilátero cuyos lados están en progresión aritmética de diferencia 6. Sabiendo que el perímetro es de 52 cm, halla las medidas de sus lados.

Ejercicio 2. Si sabemos que un cultivo de bacterias, se multiplica por bipartición cada 30 minutos y al principio tenemos 10 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 12 horas?

Resolución: Ver anexo VIII.

3.3.8. Tauber, Alfred.

(5 de noviembre de 1866 – 26 de julio de 1942)

Nació en Bratislava, en el antiguo Imperio Austrohúngaro, comenzando sus estudios en matemáticas en la Universidad de Viena en 1884. Aunque su principal interés fueron las matemáticas, también estudió temas de física, filosofía y economía política. En 1888 presentó su tesis sobre varios teoremas de la teoría de grupos. Durante los siguientes años continuó publicando artículos matemáticos de gran calidad. Finalmente logró un puesto como profesor universitario en 1908 en la Universidad de Viena. Durante esta etapa desarrolló múltiples aspectos de las matemáticas destacando la Teoría Tauberiana que recibió este nombre gracias a su contribución. En sus orígenes, dicha teoría, simplemente se utilizaba para tener un criterio que permitiera asignar un valor a la suma de series. Sin embargo, actualmente, dicha teoría es una herramienta de gran utilidad a la hora de estudiar el comportamiento asintótico de sucesiones, series y funciones.

El 1938, tras la anexión de Austria por parte de Alemania, fue obligado a dimitir como profesor, siendo deportado a finales de junio de 1942 al campo de exterminio de Theresienstadt, donde fue ejecutado el 26 de julio de dicho año.

La actividad propuesta que relaciona el contenido matemático aportado por Alfred Tauber con los cursos que impartimos, estará dirigida a los alumnos de la asignatura Matemáticas II, es decir, a 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. En concreto la enmarcaremos en el Bloque II (Análisis) y consistirá en la realización de un apartado de un ejercicio de las pruebas de EvAU, para acceso a las universidades andaluzas al que hemos añadido algunos apartados extra.

Para la realización de este ejercicio atenderemos al cumplimiento de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que nos marca la ley.

Contenidos:

- Límite de una función, tanto en un punto como en el infinito.
- Continuidad de una función.
- Tipos de discontinuidad.
- Cálculo de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Función derivada.
- Regla de L'Hôpital y su aplicación al cálculo de límites.

Criterios de evaluación:

- Estudiar la continuidad de las funciones e identificar los distintos tipos de discontinuidades.
- Determinar las asíntotas de una función tanto analíticamente como gráficamente.
- Aplicar de forma correcta la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

Estándares de aprendizaje:

- Conoce las propiedades de las funciones, sabiendo representar las funciones y prestando especial atención al entrono de los puntos de discontinuidad.
- Sabe aplicar de forma correcta los conceptos de límite y de derivada.
- Utiliza la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones que le permiten calcular los límites.
- Calcula y representa de forma adecuada las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, sabiendo diferenciar los casos en que aparecen cada una de ellas.

La actividad propuesta está basada en el examen de las pruebas de acceso a las universidades andaluzas de 2020, en concreto de la convocatoria de junio.

Actividad: Considera la función *f* definida por $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Representa la función

Resolución: Ver anexo IX.

4. Conclusiones.

Destacar que el presente TFM pretende dar unas ideas generales de la forma en que podemos obtener una sinergia al unir los conocimientos matemáticos e históricos. Como menciona Rico, L. (Edt.) (1997), la enseñanza de las matemáticas no se limita a enseñar unos procedimientos establecidos para resolver problemas, es mucho más, las matemáticas deben enseñarnos a pensar y reflexionar, aprovechando cualquier organizador del currículo para ayudarnos a lograr dicho objetivo, en nuestro caso nos hemos centrado en el organizador histórico.

Por todo lo anterior, consideramos imprescindible cambiar la forma de transmitir las matemáticas, ya que debemos intentar, en la medida de lo posible, enseñar no sólo los conceptos y procedimientos matemáticos, sino también el contexto en que dichos conceptos fueron descubiertos. Por tanto, este TFM, es sólo un ejemplo de la forma en que podemos introducir una época histórica transversalmente a los conocimientos matemáticos. El periodo elegido ha sido el nazismo, pero dicha forma de trabajar enlazando pequeños aportes históricos con matemáticas podría ser extensible a cualquier otro periodo temporal, y la temática podría cambiar cada año haciendo que los discentes vean las matemáticas como algo real y que ha tenido gran importancia a lo largo de toda la historia.

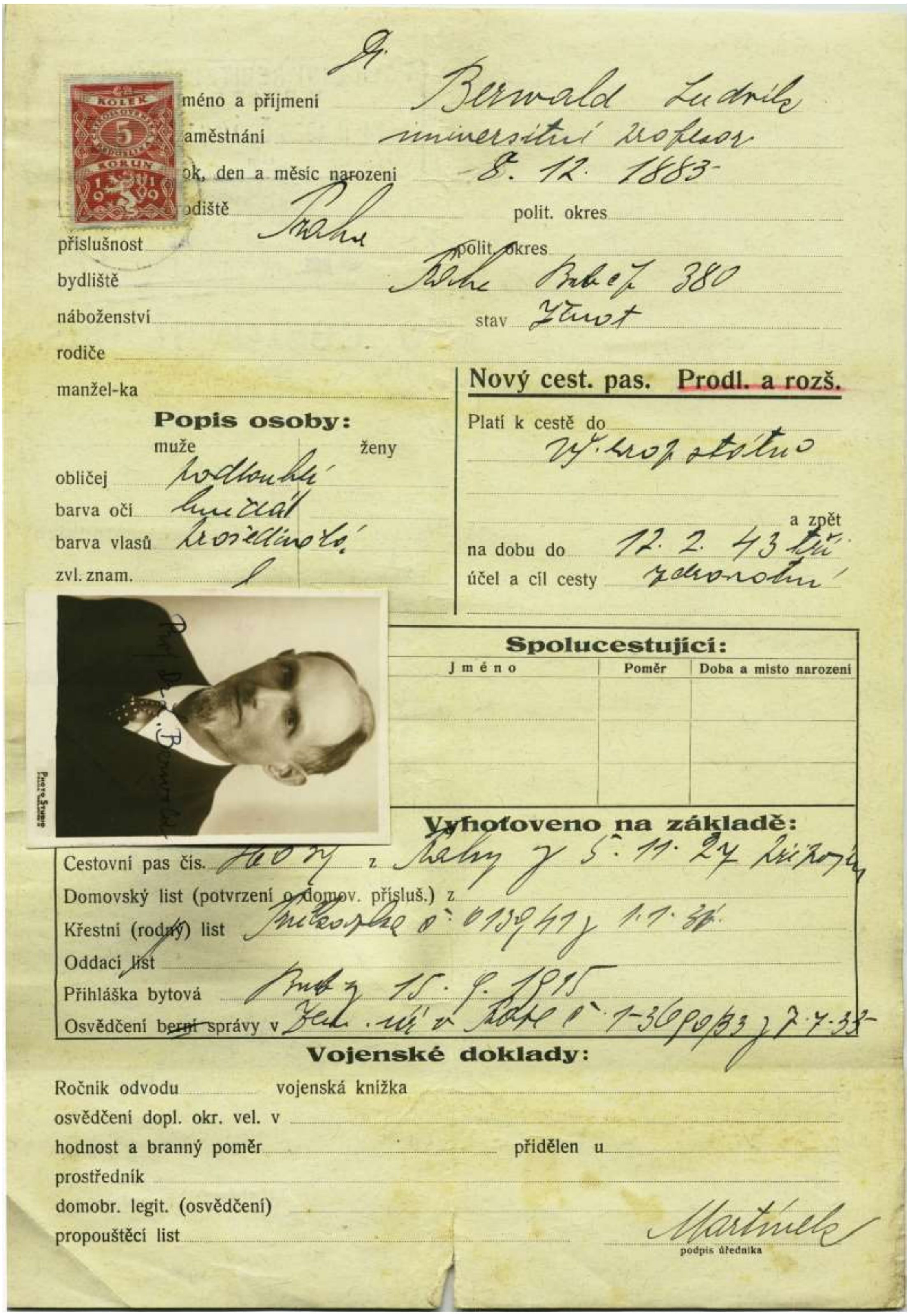
5. Bibliografía.

- Muñoz, J. M. S. (2012). Nazis y Matemáticas. Crónica de una Barbarie. Pensamiento matemático, 2(2), 67-103.
- Schappacher, N. (1998). The Nazi era: the Berlin way of politicizing mathematics. In Mathematics in Berlin (pp. 127-136). Birkhäuser, Basel.
- Rico, L. (Coord.) (1997). La Educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: Horsori
- Montaño, A. O., & Castañeda, P. N. Z. (2017). Influencia curricular en el desempeño en el área de matemáticas de las pruebas PISA (2012). Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (42).
- Palenzuela Rodríguez, H. (2017). ¿Por qué incluir la Historia de la Matemática en el aula?
- Navarro Vicente, B. (2015). La historia de las Matemáticas como recurso didáctico.
- del Estado, B. O. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid (3 de enero de 2015), 169-546.
- Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias, 27(3), 433-446.
- Berwald, L. (2015). Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. BoD–Books on Demand.
- de Orellana, A. E. Teoría de nudos.
- Butzer, P., & Volkmann, L. (2006). Otto Blumenthal (1876–1944) in retrospect. Journal of Approximation Theory, 138(1), 1-36.
- Rodríguez-Rodríguez, R. J. Paradojas lógicas.
- Bagni, G. (1997). Georg Pick's reticular geometry and didactics of mathematics. Didactics of mathematics in education. Thessaloniki: Erasmus ICP-96-G-2011/11, 219-228.

- Díaz, J. V. Teoría Tauberiana. Una Perspectiva Distribucional con Aplicaciones a Teoría de Números y Ecuaciones Diferenciales.
- (www.nux.cz), N., 2021. Holocaust. [online] Holocaust.cz. Available at: <https://www.holocaust.cz/> [Accessed 28 April 2021].
- Maths History. 2021. MacTutor History of Mathematics Archive. [online] Available at: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/> [Accessed 28 April 2021].

Anexos.

Anexo I. Pasaporte de Berwald, Ludwig.



Dr.

jméno a příjmení Berwald Ludwig

zaměstnání universitní profesor

rok, den a měsíc narození 8. 12. 1883

rodiště Praha polit. okres

příslušnost polit. okres

bydliště Praha Bubeč 380

náboženství stav ženat

rodiče

manžel-ka

Popis osoby:

	muže	ženy
obličej	podlouhlý	
barva očí	hnědé	
barva vlasů	prošedivělé	
zvl. znam.	/	

Nový cest. pas. Prodl. a rozš.

Platí k cestě do Všech států

a zpět

na dobu do 12. 2. 43

účel a cíl cesty zdravotní

Prof. Dr. L. Berwald

Spolucestující:

Jméno	Poměr	Doba a místo narození

Vyhotoveno na základě:

Cestovní pas čís. z

Domovský list (potvrzení o domov. přísluš.) z

Křestní (rodný) list

Oddací list

Přihláška bytová 15. 9. 1915

Osvědčení berní správy v

Vojenské doklady:

Ročnik odvodu vojenská knižka

osvědčení dopl. okr. vel. v

hodnost a branný poměr přidělen u

prostředník

domobr. legit. (osvědčení)

propouštěcí list

Martinek

podpis úředníka

Anexo II. Resolución actividad relacionada con Berwald, Ludwig.

Al ver que el vértice común es el $A_1 = B_1$ debemos tomar los vértices adyacentes a cada uno de los cuadrados, siendo para el cuadrado A los vértices A_2 y A_4 y para el cuadrado B los vértices B_2 y B_4.

Estableciendo el punto medio entre A_4 y B_2 tendremos $C_1 = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (1{,}5)$

Haciendo lo mismo con A_2 y B_4 saldrá calcularemos $C_2 = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (6{,}0)$

A continuación, calcularemos C_3 como el punto medio entre A_1 y A_3, obteniendo $C_3 = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (1{,}0)$

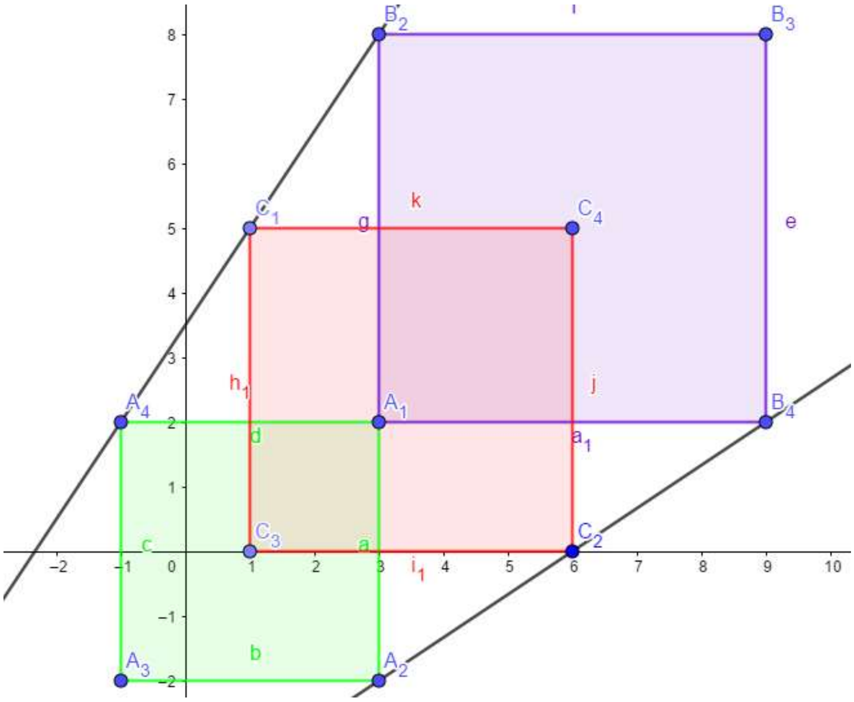
Para finalizar calculamos el último vértice como el punto medio entre B_2 y B_4 y saldrá C_4 = $= \left(\frac{3+9}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (6{,}5)$

Para demostrar que en efecto se trata de un cuadrado vemos que dos de sus lados adyacentes miden lo mismo:

$$\overline{C_1C_3} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-5)^2} = 5$$

$$\overline{C_1C_4} = \sqrt{(6-1)^2 + (5-5)^2} = 5$$

Gráficamente obtendríamos el resultado que se muestra en la siguiente página:



De forma más general se les presentará a los alumnos la siguiente actividad en GeoGebra, de forma que puedan observar como el teorema sirve para cualquier cuadrado:

https://www.geogebra.org/calculator/axzykdg6

Anexo III. Resolución actividad relacionada con Blumenthal, Otto.

a) $P_1(x) = x$ → Grado 1. Coeficiente principal 1. No tiene termino independiente.

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ → Grado 2. Coeficiente principal $\frac{3}{2}$. Término independiente $\frac{-1}{2}$.

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ → Grado 3. Coeficiente principal $\frac{5}{2}$. No tiene término independiente.

$P_4(x) = \frac{1}{2}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ → Grado 4. Coeficiente principal $\frac{35}{2}$. Término independiente $\frac{3}{2}$.

$P_5(x) = \frac{1}{2}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ → Grado 5. Coeficiente principal $\frac{63}{2}$. No tiene término independiente.

b)

$P_1(2) = 2$

$$P_2(2) = \frac{1}{2}(3.2^2 - 1) = \frac{11}{2}$$

$$P_3(2) = \frac{1}{2}(5.2^3 - 3.2) = 17$$

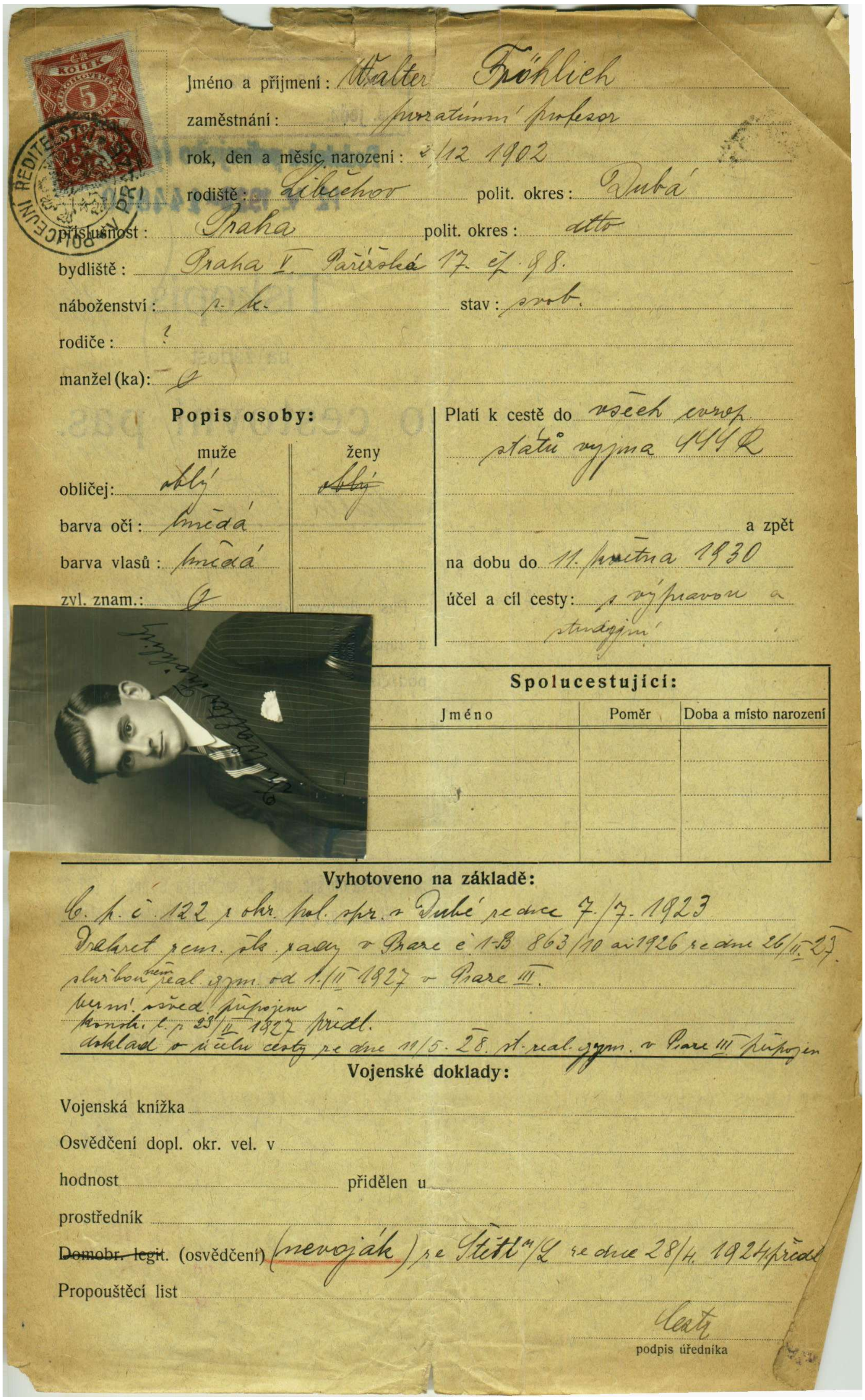
$$P_4(2) = \frac{1}{2}(35.2^4 - 30.2^2 + 3) = \frac{443}{2}$$

$$P_5(2) = \frac{1}{2}(63.2^5 - 70.2^3 + 15.2) = 903$$

c)

$$P_2(x) + P_4(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + \frac{1}{2}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{35}{2}x^4 - \frac{27}{2}x^2 + 1$$

Anexo IV. Pasaporte de Fröhlich, Walter.



Jméno a příjmení: Walter Fröhlich

zaměstnání: prozatímní profesor

rok, den a měsíc narození: 2/12 1902

rodiště: Liběchov polit. okres: Dubá

příslušnost: Praha polit. okres: dtto

bydliště: Praha II. Pařížská 17 č. p. 98.

náboženství: ř. k. stav: svob.

rodiče:

manžel (ka):

Popis osoby:

	muže	ženy
obličej:	oblý	oblý
barva očí:	hnědá	
barva vlasů:	hnědá	
zvl. znam.:	0	

Platí k cestě do všech evrop. států vyjma SSSR a zpět

na dobu do 11. května 1930

účel a cíl cesty: s výpravou a studijní

Spolucestující:

Jméno	Poměr	Doba a místo narození

Vyhotoveno na základě:

C. p. č. 122 s okr. pol. spr. v Dubé ze dne 7/7. 1923

Dekret zem. šk. rady v Praze č. I-B 863/10 ai 1926 ze dne 26/II 27.

služ. [illegible] real. gym. od 1/II 1927 v Praze III.

[illegible] připojen

[illegible] 23/II 1927 předl.

doklad o účelu cesty ze dne 11/5. 28. st. real. gym. v Praze III připojen

Vojenské doklady:

Vojenská knížka

Osvědčení dopl. okr. vel. v

hodnost přidělen u

prostředník

~~Domobr. legit.~~ (osvědčení) (nevoják) ze [illegible] ze dne 28/4. 1924 předl.

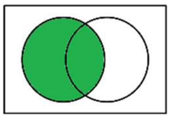
Propouštěcí list

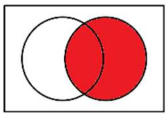
[illegible]

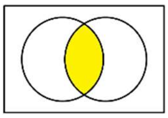
podpis úředníka

Anexo V. Resolución actividad relacionada con Grelling, Kurt.

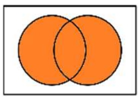
Datos:

$P(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$ 

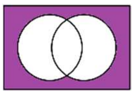
$P(B) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$ 

$P(A \cap B) = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$ 

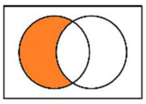
<u>Resolución:</u>

Apartado a) 

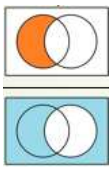
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{60} + \frac{17}{60} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

Apartado b) 

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

Apartado c) 

$$P\,(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{23}{60} - \frac{2}{15} = \frac{1}{4}$$

Apartado d) 

$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{17}{60}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{43}{60}} = \frac{1}{4} : \frac{43}{60} = \frac{60}{172} = \frac{15}{43}$$

Apartado e)

Dos sucesos son independientes si:

$$P(A).P(B) = P(A \cap B)$$

$\frac{23}{60} * \frac{17}{60} \neq \frac{2}{15}$ → Por tanto, son sucesos, dependientes.

Apartado f)

Debería editar el libro A por ser $P(A) = \frac{23}{60} > P(B) = \frac{17}{60}$

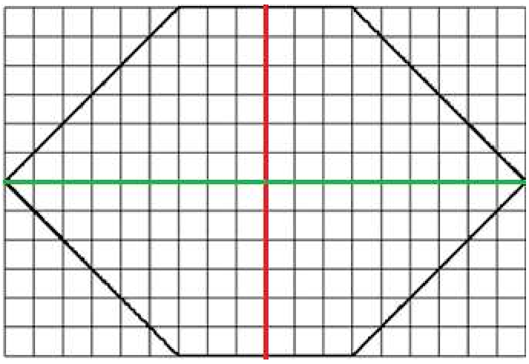
Anexo VI. Resolución actividad relacionada con Pick, Georg Alexander

a) Se trata de un hexágono no regular.

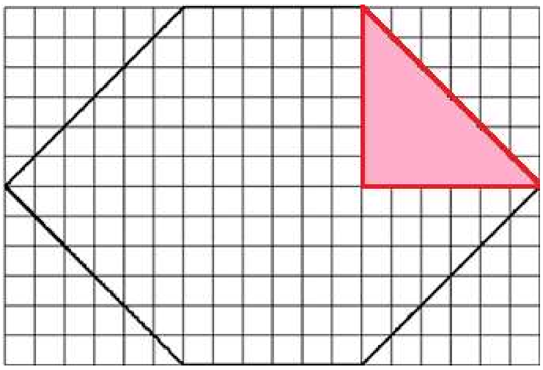
b) (Número de lados - 2) *180 = (6-2) *180 = 720º

c) Rojo: Mediatriz.

Verde: Bisectriz.



d) Para resolver los lados inclinados se aplica el Teorema de Pitágoras al siguiente triángulo rectángulo:



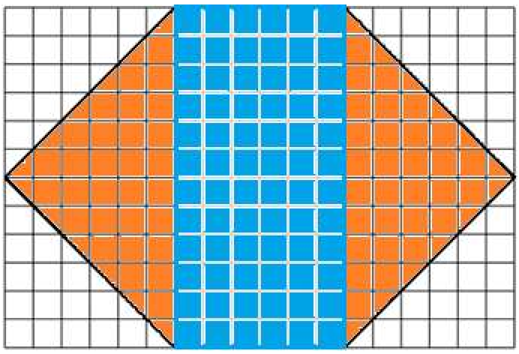
$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$h^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow h = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} \approx 8{,}49\ cm$$

Por tanto, el perímetro quedará como:

$$P = 4 * 8{,}49 + 2 * 6 = 45{,}96\ cm$$

e) Tenemos múltiples soluciones entre ellas una sería descomponer la figura en dos triángulos y un rectángulo.



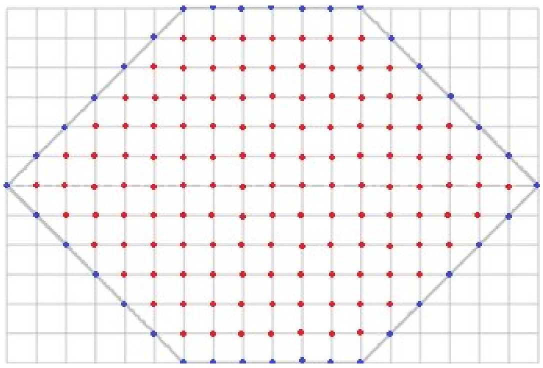
Siendo:

$$A_{triángulo} = \frac{b * h}{2} = \frac{12 * 6}{2} = 36\ cm^2$$

$$A_{rectángulo} = b * h = 12 * 6 = 72\ cm^2$$

$$A_{Tota} = 2 * 36 + 72 = 144\ cm^2$$

e)



I = Número de puntos enteros en el interior del polígono = 127

B = Número de puntos enteros en el borde = 36

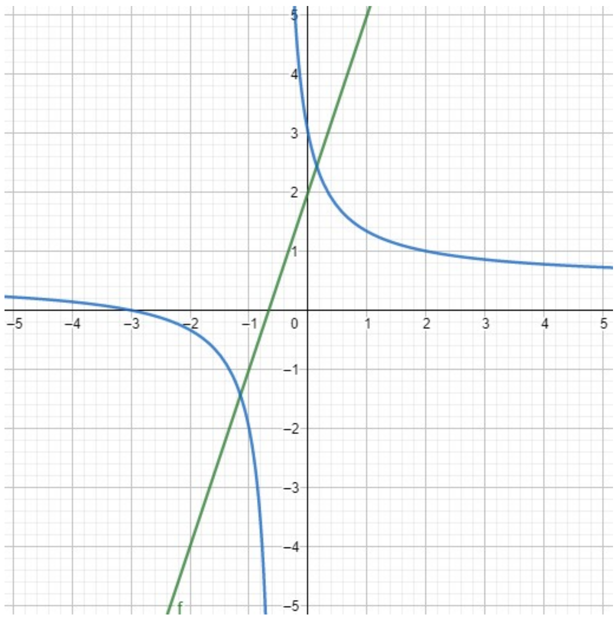
$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

$$Área = 127 + \frac{36}{2} - 1 = 144\ cm^2.$$

Anexo VII. Actividad relacionada con Remak, Robert Erich.

$f(x) = 3x + 2$ → Función lineal. (verde)

$g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ → Función racional. (azul)



$$g \circ f = g[f(x)] = g(3x + 2) = \frac{3x + 2 + 3}{2(3x + 2) + 1} = \frac{3x + 5}{6x + 5}$$

$$g \circ f = f[g(x)] = f\left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right) = 3\frac{x + 3}{2x + 1} + 2 = \frac{3x + 9}{2x + 1} + 2\frac{(2x + 1)}{2x + 1}$$
$$= \frac{3x + 9}{2x + 1} + \frac{4x + 2}{2x + 1} = \frac{7x + 11}{2x + 1}$$

Como puede observarse no se trata de un grupo abeliano, ya que:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Anexo VIII. Resolución actividad relacionada con Strassmann, Reinhold.

Ejercicio 1)

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$52 = \frac{4(a_1+a_4)}{2} \rightarrow 26 = a_1 + a_4 \rightarrow a_1 + a_2 + 3d = 26 \rightarrow 2a_1 = 8 \rightarrow a_1 = 4$$

Por tanto, los lados medirían: 4 cm, 10 cm, 16 cm y 22 cm.

Ejercicio 2)

Del enunciado podemos deducir:

$a_1 = 10$. Instante inicial.

$a_2 = 10 * 2 = 20$. Bacterias a los 30 minutos.

$a_3 = 20 * 2 = 40$. Bacterias a los 60 minutos.

A las 12 horas tendremos n=24, por tanto:

$$a_n = a_1 * r^{n-1} \rightarrow a_{24} = 10 * 2^{23} = 83886080 \text{ bacterias.}$$

Anexo IX. Resolución actividad relacionada con Tauber, Alfred.

- Asíntotas verticales:

Las asíntotas verticales pueden estar en x=1 y x=-1. Pasaremos a comprobarlo:

- Para x=1

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Por tanto, x=1, es asíntota vertical.

- Para x=-1

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{2x - 2}{2x} \right) = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{2x - 2}{2x} \right) = \frac{-4}{-2} = 2$$

Por tanto, en x=-1, no hay asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales:

Como el numerador y el denominador tienen grado par, es suficiente con que hagamos el límite cuando tiende a infinito ya que ambos resultados dan lo mismo.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \right) = \frac{\infty}{\infty} \to L'Hôpital$$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 2}{2x} \right) = \frac{\infty}{\infty} \to L'Hôpital \to \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Por tanto, en y=1 hay una asíntota horizontal.

- Asíntotas oblicuas: Como hay asíntota horizontal, no habrá asíntotas oblicuas.

b)