Índice

1. Introducción

1.1. Motivación personal del estudio

La motivación del presente trabajo nace de una experiencia personal en el estudio de las matemáticas y las ciencias (en mi caso particular, de la física), compartida con otros colegas y contrastada por el alto porcentaje de alumnos que no pudiendo dejar a un lado el estudio de estas materias durante el periodo de escolarización obligatorio, crean rechazo a ambas asignaturas. Lo celebran con afirmaciones como: 'Es que son muy complicadas', 'No entiendo nada', 'Si yo quiero ir por letras, para que necesito saber matemáticas',… Y podríamos continuar con un sinfín de comentarios cada vez más originales, que caminan en oposición al concepto actual promovido por el *Programme for International Student Assessment* (PISA), a nivel europeo, sobre la alfabetización matemática que como alumnos se debería adquirir para como ciudadanos, en el momento en que se nos permite dejar nuestra formación, lanzarnos al mundo como personas independientes.

Si partimos de la definición de alfabetización matemática:

La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2003).

Es bastante fácil demostrar que un alto rendimiento escolar en la etapa obligatoria (y posteriores) no es siempre sinónimo de un elevado aprendizaje. Mi propio camino de aprendizaje podría servir como ejemplo al ir pasando por exámenes de asignaturas, con buenas notas, de las cuales no podría decir más que unas cuántas definiciones.

Recuerdo que fue durante primero y segundo de bachillerato cuándo me dí cuenta, con pequeños detalles que el conocimiento estaba integrado en un todo. Todo esto no sin sufrir en la asignatura de matemáticas, como todos los alumnos de ciencias, con cosas como el álgebra de matrices y el sinfín de 'j' e 'i' que inundaban demostraciones genéricas que en nuestra mente no simbólica no tenían cabida, suplicando la particularización del teorema para arrojar un poco de luz sobre lo poco que entendíamos. Y cómo esto podría poner mil y un ejemplos. He aprendido tantas matemáticas y tantas demostraciones que no he utilizado nunca, que me pregunto: ¿Son esas las matemáticas que tienen que aprender nuestros alumnos en la etapa de enseñanza obligatoria? ¿O son las matemáticas que tienen que aprender, las que nos permiten desarrollar nuestras ideas mentales a través de patrones y símbolos para poder comprender el mundo que nos rodea? En el caso de responder afirmativamente a la segunda pregunta, ¿No es la física un campo muy potente para combinar intuición física e intuición matemática, a la vez que aprendemos a usar las matemáticas como el lenguaje de la ciencia? Al fin y al cabo, ¿No es lo relevante aprender a observar y comprender el mundo y poder comunicarlo y compartirlo con los demás?

Tras acabar mi educación secundaria y cinco años de la carrera de ciencias físicas, había pasado por muchos altibajos sobre mi aprendizaje y sobre la formación que estaba adquiriendo. Sin embargo, el estudio de estas materias me iba proporcionado visiones y herramientas mentales diferentes sobre como afrontar problemas de cualquier índole. Clasificar, estructurar, razonar, imaginar... son ejemplos de palabras que cada vez tenían significados más fuertes en mi cerebro y por lo tanto consecuencias cotidianas. Pero los máximos de placer durante el estudio siempre ocurrían cuando de manera espontánea había integración de conocimientos, normalmente promovido por algún profesor o incluso compañeros, cuyo conocimiento y manera de enseñar provocaba un *pequeño despertar*.

Durante los años de estudiante y posteriores he dado clases particulares de física y matemáticas, lo cual sumado a mi propia experiencia como alumna, me ha hecho caer en la cuenta de que existen nudos de aprendizaje, barreras en ambas materias que parecen proceder de una fuente común. Por un lado porque al asumirse como materias absolutamente disjuntas suelen presentar desfases poco prácticos para el alumnado, por otro lado y quizás más importante, porque existen 'quehaceres' en ambas asignaturas, que en realidad son lo mismo, y rara vez nos preocupamos como docentes, por generar ese *pequeño despertar*, detonador del placer del aprendizaje y catalizador del conocimiento. Nuestro interés se centra en que es el mismo proceso cognitivo el que está involucrado en el pensamiento físico y en el pensamiento matemático y somos nosotros los que con nuestros currícula y planificaciones, le ponemos freno a la convergencia de nuestras intuiciones para sembrar las bases del conocimiento integrado y estructurado. (Hestenes, 2010)

1.2. Planteamiento del problema

El matemático ruso Arnold (1997, citado en Hestenes, 2010) señala que: *"Mathematics is a part of Physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap."* A mediados del siglo XX, la física y las matemáticas sufrieron a nivel académico, un divorcio que trajo consecuencias catastróficas. Generaciones enteras de matemáticos crecieron sin conocer la mitad de su disciplina y por supuesto sin conocer otras ciencias. El divorcio entre la física y las matemáticas no es sólo una simple deficiencia en el sistema educativo, es un problema fundamental en el aprendizaje conceptual y el conocimiento. Algunos departamentos de matemáticas han querido solventar este problema con cursos de modelización matemática, pero la modelización matemática sin ciencia es como el gato de Cheshire: ¡forma sin contenido! Este es uno de los problemas cognitivos a los que hay que hacer frente, y que justifica y alimenta nuestro creciente interés por un desarrollo de las matemáticas escolares sumergidas en el terreno de 'la física' y por lo tanto del 'Mundo Real', que comúnmente denotamos 'Contextos Cotidianos'

Otro de los problemas serios derivados de la separación entre la física y las matemáticas es la preparación de los profesores de matemáticas. Según el autor mencionado anteriormente, la falta de geometría y el exceso de formalismo que domina el curriculum de matemáticas en la universidad, se propaga a la formación de profesorado. Hay una evidencia abundante de que la mayoría de profesores ven su trabajo como un conjunto formal de reglas y algoritmos. Según la opinión del autor anterior, la mayoría tienen un conocimiento mínimo de la mecánica newtoniana, por lo que son ineptos a la hora de resolver un problema sencillo de movimiento.

Además, existen amplias evidencias de que no existe una transferencia automática entre el aprendizaje matemático completamente teórico y el ser capaz de usarlo en situaciones que no están llenas de matemáticas, por ejemplo, aplicarlo al campo de la física. Una de las razones por las que enseñamos matemáticas en la secundaria, es por que los alumnos se van a encontrar con matemáticas en una variedad de contextos y situaciones fuera del aula. Esto implica que las aplicaciones y el/la modelado/modelización deben estar en la agenda de enseñanza-aprendizaje, incluyendo tareas que las promuevan, sin necesariamente hacer mención a esos términos. Si el profesorado no tiene todo esto en cuenta en la aplicación de nuestros currícula, no tiene porqué darse por sí sólo, de modo natural o espontáneo, en el proceso cognitivo del alumnado. Del mismo modo, que los alumnos no aprenden automáticamente a desarrollar las competencias, ocurre en el profesorado, éstos no aprenden automáticamente a orquestar situaciones, aplicaciones y modelado/modelización. Si queremos que esto sea así, el futuro profesor deberá tener la oportunidad de entrenarlo en su preparación inicial como profesor y a lo largo del desarrollo de su vida profesional. De este modo, consideramos que será necesario que los profesores de matemáticas y ciencias en formación, sean conscientes de las ventajas presentes a la hora de estructurar planificaciones para desarrollar la competencia de modelización (Niss, Blum y Galbraith, 2007)

Añadiendo los argumentos anteriores a nuestra propia intuición sobre la situación actual de ciencia y matemáticas en las aulas de secundaria, el problema que hemos decidido abordar en el presente trabajo, se refiere por un lado al contenido curricular de las materias de física y matemáticas en la legislación estatal, constatando que el posible desfase existente, no tiene un sentido lógico sino práctico. Y por otro, se refiere a las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre el significado de las matemáticas escolares y su relación con la física como contexto real de la asignatura. Deberemos aclarar, que somos conscientes de que la física no es un mero contexto de las matemáticas, y que por supuesto no es el único contexto real útil para desarrollar ciertas competencias de nuestro interés, pero como veremos a lo largo del presente trabajo, encierra un gran potencial cuando se trata de movernos del 'Mundo Real' al 'Mundo Matemático' (Uhden et al, 2011), proceso que vertebrará nuestro estudio y que enmarcaremos en el denominado *Proceso de Modelización*.

2. Objetivos de la investigación

Los objetivos planteados, son por tanto, los siguientes:

1. Analizar el enfoque de la normativa curricular sobre el tratamiento conjunto de matemáticas y ciencias en la educación secundaria obligatoria y bachillerato.

Atendiendo siempre a éstos niveles educativos, lo desglosamos en los siguientes objetivos

a. Describir las características y finalidades de la educación matemática en el currículum actual y su interrelación con otras disciplinas científicas

b. Sintetizar los objetivos y criterios de evaluación, que presentan relación con otras disciplinas científicas, en el currículum de matemáticas

c. Comparar los contenidos curriculares de las matemáticas (análisis y geometría) y los de las materias de ciencias de la naturaleza y física y química

Consideramos que el currículo actual es el concepto central para comenzar nuestro análisis y estudio. El primer objetivo que hemos querido alcanzar ha sido conocer las características y las finalidades de las matemáticas escolares en la legislación curricular actual durante la enseñanza secundaria y el bachillerato, así como su relación con el ´mundo real', con la ciencia y el concepto de modelización a través de las ideas sobre el significado de las matemáticas escolares y de su contribución a las competencias básicas. En segundo lugar, realizar una síntesis de los objetivos y criterios de evaluación propuestos para la materia de matemáticas y reconocer en ellos su relación con el 'mundo real'o vida cotidiana y con otras áreas del saber. Concluiremos este objetivo con la comparación de los contenidos de Ciencias de la naturaleza y matemáticas para los bloques de análisis y geometría. Nuestra intención no es sólo aumentar nuestro conocimiento en lo que al concepto de matemáticas escolares se refiere y fundamentar mejor nuestro trabajo, sino ser capaces de obtener una primera síntesis sobre la existencia de lugares comunes de ambas asignaturas puedan ofrecer un buen soporte para el posterior diseño metodológico y dar amparo a otros objetivos del trabajo.

Somos conscientes de que toda propuesta relacionada con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se centra en la diversidad de interpretaciones existentes sobre matemáticas escolares, más si queremos presentar una enseñanza basada en su relación con otras disciplinas. Por eso este objetivo nos parece de especial relevancia, pues nos permite presentar como idea inicial nuestra interpretación de las mismas a través de la legislación actual además de identificar su relación con otras ciencias, en particular con la física.

2. Identificar en la literatura conocimiento y elementos que permita abordar de modo conjunto las matemáticas y las ciencias que trabajan los escolares.

En segundo lugar nos hemos encontrado en la necesidad de situarnos en un marco más amplio, y trasladar el problema planteado y las necesidades del currículo a herramientas concretas.

Hemos desarrollado la revisión bibliográfica en torno al proceso de modelización pues todo parece apuntar que este proceso representa una herramienta de gran potencial en lo que se refiere a la interrelación de disciplinas y facilita el paso del dominio real al dominio matemático. Este es el punto clave que trabajaremos para el desarrollo de objetivo 3.

3. ***Describir las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre el uso de la física como contexto real en el aula de matemáticas.***

Los profesores de secundaria en formación constituyen un colectivo de vital importancia, pues representan a los futuros docentes y serán sus creencias las susceptibles de trasladarse a las aulas de secundaria.

a. Reconocimiento por parte del profesorado en formación sobre el proceso de matematización horizontal en actividades matemáticas

b. Creencias del profesorado en formación sobre el uso del proceso de modelización como eje vertebrador del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de secundaria.

3. Marco de referencia

3.1. Análisis curricular

A lo largo de este epígrafe seguimos a Rico (1997). El análisis y la reflexión sobre los currículos que dan forma y orientan los modernos Sistemas Educativos permiten encontrar algunos invariantes. En particular, el currículo de la Educación obligatoria hace una selección y sistematización de teorías, conceptos, ideas y esquemas organizativos, encauzado mediante las siguientes cuestiones, a las que trata de proponer una respuesta adecuada:

- ¿Qué es el conocimiento?
- ¿Qué es el aprendizaje?
- ¿Qué es la enseñanza?
- ¿Qué es el conocimiento útil?

Estas cuestiones permiten establecer cuatro dimensiones en torno a las cuales organizar los diferentes niveles de reflexión curricular. Estas cuatro dimensiones son:

- Dimensión cultural/conceptual
- Dimensión cognitiva
- Dimensión ética/formativa
- Dimensión social

Éstas, se pueden estudiar desde diferentes niveles. En la siguiente tabla mostramos un resumen que pone de manifiesto que en las diferentes aproximaciones del estudio del currículo, hay cuatro órdenes de ideas o dimensiones permanentes, en base a las cuales se estructura la noción de currículo, como ya hemos mencionado

Componentes por nivel ======= Niveles	**1ª dimensión: Cultural/ conceptual**	**2ª dimensión: Cognitiva o de desarrollo**	**3ª dimensión: Etica o formativa**	**4ª dimensión: Social**
Planificación para los profesores	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
Sistema Educativo	Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
Disciplinas Académicas	Epistemología e Historia de la Matemática	Teorias del Aprendizaje	Pedagogía	Sociología
Teleológico o de finalidades	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales

En relación a la información presentada en la tabla, debemos añadir que los niveles de reflexión sobre el currículo no se agotan en los cuatro considerados anteriormente.

En este capítulo nos centraremos en dos de los niveles para las dimensiones o invariantes especificados:

1. Nivel Teleológico o de finalidades. A través del cual mostraremos las finalidades educativas para la legislación objeto de estudio, así como algunas ideas clave que dan soporte al concepto actual de matemáticas escolares
2. Nivel de Planificación para los profesores: para este nivel realizaremos una síntesis de objetivos, criterios de evaluación y contenidos del currículum de matemáticas que apuntan a su relación con otras disciplinas científicas. La metodología no será objeto de estudio ya que dentro del mismo marco curricular asumimos que debe ser similar para ambas materias.

Es imprescindible reseñar que el presente capítulo recoge un análisis amplio en lo que respecta a cursos de la educación matemática, pues es la intención ofrecerle al lector una visión general de la situación y/o concepto de las matemáticas escolares en la legislación actual. Lo cual da respuesta al objetivo 1 de la investigación planteado en el capítulo anterior. Por otra parte, y en lo que respecta a la profundidad del análisis, las síntesis realizadas para objetivos y criterios de evaluación, así como la presentación de relaciones entre algunos contenidos, tienen como finalidad ofrecer una pequeña muestra de la intensa relación entre ambas materias a nivel legal, sin llegar a establecer relaciones biunívocas entre ambas. Es nuestra intención presentar un primer examen en este amplio campo de la interdisciplinariedad y calmar nuestra intuición sobre lo que deberían ser las matemáticas dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

3.1.1. Matemáticas escolares en la enseñanza secundaria. Características y finalidades en el currículo actual

Los fines de la educación establecidos por un currículo enuncian sus prioridades educativas, expresan el modo en que la sociedad concibe la educación de los más jóvenes, determinan y justifican de modo significativo y singular todas las decisiones posteriores para la organización y planificación del sistema.

Las listas de finalidades para la educación matemáticas son extensas y diversificadas. Por ello, siguiendo a Rico (1997), hemos optado por ubicar estas finalidades en un sistema de cuatro dimensiones, que permite considerar el conocimiento matemático como parte integrante de la cultura, socialmente construido y determinado, en el que intervienen diversas necesidades formativas individuales respecto a las matemáticas y se consideran las connotaciones políticas, generales y específicas, conectadas con la formación matemática de los escolares. Sobre estas cuatro dimensiones es posible enunciar programas curriculares con metas muy distintas. Por ello llevaremos a cabo una síntesis de los enunciados curriculares que señalan las finalidades educativa en las leyes: Real Decreto 1467/2007 del 2 de Noviembre (BOE 6/11/2007) y Real Decreto 1631/2006 del 29 de diciembre (BOE 5/01/2007)

Para realizar la síntesis de los enunciados, nos ayudamos del programa Atlas.ti. Seleccionamos las finalidades educativas anteriormente mencionadas como nuestros criterios de análisis, y extraemos literalmente aquellos segmentos que representan la finalidad a la que hacen mención. La tabla que se muestra a continuación muestra por columnas los dos niveles educativos a los que hacemos mención (secundaria y bachillerato) y por filas las finalidades educativas de las matemáticas, organizados atendiendo a los cuatro tipos de finalidades del currículo, a sus cuatro dimensiones: Fines conceptuales y culturales, fines éticos y políticos, fines sociales y fines cognitivos y de desarrollo. (Rico, 1997). Así como un breve resumen sobre las ideas que sustentan el concepto de matemáticas escolares en la legislación.

Fines	***Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria***	***Real Decreto 1467/2007 del 2 de Noviembre por el que se establecen los contenidos mínimos de bachillerato BOE 6/11/2007***
Conceptuales y culturales	En su intento de comprender el mundo todas las civilizaciones han creado y desarrollado herramientas matemáticas: el cálculo, la medida y el estudio de relaciones entre formas y cantidades han servido a los científicos de todas las épocas para generar modelos de la realidad. Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas. Las matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas Las matemáticas contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística porque el mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, siendo, en particular, la geometría parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.	Es importante presentar la matemática como una ciencia viva y no como una colección de reglas fijas e inmutables. Detrás de los contenidos que se estudian hay un largo camino conceptual, un constructor intelectual de enorme magnitud, que ha ido evolucionando a través de la historia hasta llegar a las formulaciones que ahora manejamos. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber
Éticos y políticos	Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística.	

	La aportación a la competencia social y ciudadana desde la consideración de la utilización de las matemáticas para describir fenómenos sociales. Las matemáticas, fundamentalmente a través del análisis funcional y de la estadística, aportan criterios científicos para predecir y tomar decisiones. También se contribuye a esta compe-tencia enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, lo que permite de paso valorar los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios como formas alternativas de abordar una situación.	
Sociales	En la sociedad actual las personas necesitan, en los distintos ámbitos profesionales, un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que precisaban hace sólo unos años. Acometer los retos de la sociedad contemporánea supone, además, preparar a los ciudadanos para que adquieran autonomía a la hora de establecer hipótesis y contrastarlas, diseñar estrategias o extrapolar resultados a situaciones análogas. Los contenidos matemáticos seleccionados para esta etapa obligatoria están orientados a conseguir que todos los alumnos puedan alcanzar los objetivos propuestos y estén preparados para incorporarse a la vida adulta.	
Cognitivos y de desarrollo	En todos los casos, las matemáticas han de ser presentadas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cercanos a su experiencia, que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, continuarán haciéndolo en el futuro	Las matemáticas contribuyen a la adquisición de aptitudes y conexiones mentales cuyo alcance transcienden el ámbito de esta materia

Resumimos en la siguiente tabla algunos de los enunciados que ponen de manifiesto las ideas generales que sustentan el concepto de matemáticas escolares.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria	***Real Decreto 1467/2007 del 2 de Noviembre por el que se establecen los contenidos mínimos de bachillerato BOE 6/11/2007***
Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas. Desde un punto de vista formativo, la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc. pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general. También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, poniendo de relieve la importancia de los factores afectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad.	Las matemáticas constituyen un conjunto amplio de conocimientos basados en el estudio de patrones y relaciones inherentes a estructuras abstractas. Aunque se desarrollen con independencia de la realidad física, tienen su origen en ella y son de suma utilidad para representarla. Nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar situaciones reales y dar rigor a los conocimientos científicos. Participar en la adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su «forma de hacer». Este «saber hacer matemáticas» es un proceso laborioso que comienza por una intensa actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones previas necesarias para la formalización. A menudo, los aspectos conceptuales no son más que medios para la práctica de estrategias, para incitar a la exploración, la formulación de conjeturas, el intercambio de ideas y la renovación de los conceptos ya adquiridos. Nada hay más alejado del «pensar matemáticamente» que una memorización de igualdades cuyo significado se desconoce, incluso aunque se apliquen adecuadamente en ejercicios de cálculo

Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.	

Observamos que tanto las finalidades de la educación matemática como las ideas que sustentan el concepto de la matemática escolar en estos documentos, sugieren una estrecha relación de esta materia con otras áreas del saber, en particular y de especial relevancia con el saber científico. Nótese la mención realizada sobre la formalización posterior al desarrollo de intuiciones desde contextos y situaciones cercanas al alumno, la 'resolución de problemas y la verbalización de las matemáticas' como ejes del proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas. Son estas afirmaciones las que nos llevarán a realizar una búsqueda sobre los caminos, técnicas o quehaceres matemáticos que permiten desarrollar las estrategias de enseñanza-aprendizaje, orientadas según las ideas que sustentan las matemáticas escolares. A la luz de este análisis, podemos afirmar que nuestras preguntas de investigación no sólo surgen de una motivación personal o un tema de investigación al margen de la realidad educativa, sino que el concepto y finalidad de la educación matemática en la legislación española (poner documento) casa perfectamente con nuestra intuición sobre la situación actual y planteamiento del problema. En resumen, observamos a lo largo de esta breve síntesis que la legislación curricular contempla el 'saber hacer matemáticas' y su relación con otras áreas del saber como fundamental en lo que concierne a las finalidades educativas de las mismas en todas sus dimensiones.

3.1.2. Síntesis de Objetivos y Criterios de Evaluación

Continuamos con un estudio descriptivo del currículo de matemáticas. Describimos y analizamos desde el punto de vista de la materia de física la conceptualización que se hace en los diferentes niveles del conocimiento matemático escolar y el tratamiento de las dos de las cuatro componentes del currículo: Objetivos y criterios de evaluación.
Es de resaltar que en todo momento estamos desde el punto de vista de la clase de matemáticas aunque la descripción y el análisis estén enfocados para encontrar los puntos comunes con la vida cotidiana y otras disciplinas.

Objetivos
1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentaciónlas formas de expresión y razonamiento matemático,tanto en los **procesos matemáticos o científicos** como en los **distintos ámbitos** de la **actividad humana**.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. **Cuantificar** aquellos **aspectos de la realidad** que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de Información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes
5. Identificar las **formas y relaciones** espaciales que se presentan **en la vida cotidiana**, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. **Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana** de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploraciónsistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje la **flexibilidad para modificar el punto de vista** o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. **Elaborar estrategias personales** para el análisis de situaciones concretas y la identificación y **resolución de problemas,** utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los **aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.**
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desdelas distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos socialescomo la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

En la educación secundaria obligatoria (ESO), para el área de matemáticas encontramos 11 objetivos generales. En estos enunciados encontramos elementos que ponen de manifiesto la relación de las matemáticas escolares con otras áreas del saber, con la realidad científica y la vida cotidiana del alumnado. Son los siguientes:

- Resolución de problemas
- Procesos matemáticos
- Procesos científicos
- Reconocer situaciones que se puedan formular en términos matemáticos
- Cuantificar aspectos de la realidad
- Identificar formas y relaciones presentes en la vida cotidiana
- Actuar matemáticamente ante problemas de la vida cotidiana
- Elaborar estrategias personales de resolución de problemas
- Disfrutar de aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas

Observamos cómo todos los objetivos de las matemáticas para este nivel educativo están en relación con el 'Mundo Real', la resolución de problemas y la conexión de las matemáticas con otras áreas del saber. Por lo que su relación en particular con la materia de física, esta justificada.

Resulta también de interés un breve recorrido por los criterios de evaluación. Mostramos a continuación un cuadro resumen dónde podemos ver los criterios de evaluación de matemáticas de cada curso que están relacionados con el mundo real, mundo científico u otras áreas del saber.

Curso	*Criterios de evaluación*
1º ESO	Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto. Reconocer y describir figuras planas, utilizar sus propiedades para clasificarlas y aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico, haciendo uso de la terminología adecuada. Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.
2ºESO	Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.

	Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.
3ºESO	Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.

4ºESO (Opción A)	Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. Aplicar los conceptos y técnicas de cálculo de probabilidades para resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias diversas y útiles para la resolución de problemas, y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.
1º BACHILLERATO	Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.

	Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.
2ºBACHILLER ATO	Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

Observamos como en todos los cursos encontramos que al menos el 50% de los criterios de evaluación se encuentran relacionados con el mundo real (o vida cotidiana), el mundo científico u otras áreas del saber. También, que a medida que avanzan los cursos, los criterios de evaluación se van concretando en el 'uso' de las matemáticas y que por lo tanto necesitaremos de la traslación del mundo real al mundo matemático, traslación denominada proceso de matematización horizontal, que se encuentra contenida, y es fundamental, en el proceso de modelización.

3.1.3. Contenidos.

La materia de matemáticas está organizada en torno a cuatro bloques fundamentales:

1. Aritmética y álgebra
2. Análisis
3. Geometría
4. Probabilidad y Estadística

En lo que se refiere a los contenidos extraeremos para secundaria y bachillerato los correspondientes a Análisis y Geometría, transcribiendo en la siguiente tabla únicamente los susceptibles de relacionarse con ejemplos físicos, y/o los que son necesarios para el desarrollo de contenidos de física y se dan paralela o posteriormente, pudiendo causar desajustes (en caso de no coincidir en el tiempo) o favorecer (utilización común de herramientas y conceptos) el proceso de enseñanza-aprendizaje. No se quiere plantear aquí la oportunidad del temario de matemáticas en la legislación, sino poner de manifiesto la existencia de un cierto paralelismo entre algunos contenidos de física y matemáticas que si no se tienen en cuenta puede causar desajustes en el aprendizaje de dichas materias que, además por como se entiende el concepto de matemáticas escolares en la legislación que estamos estudiando, no debería tener cabida.

Algunas notas aclaratorias:

Durante el primer ciclo de la enseñanza secundaria, la materia se denomina Ciencias de la naturaleza sin hacer ningún tipo de distinción. En tercero aparece la separación entre física y química y biología y geología. Y es sólo en segundo de bachillerato dónde la física aparece como materia asilada en el currículo. Además de lo que se refiere a nombres o etiquetas, la matematización de fenómenos dentro del temario de ciencias de la naturaleza no aparece hasta el segundo ciclo de educación secundaria, por lo que durante los dos primeros cursos sólo mencionaremos para esta materia contenidos comunes que se repiten a lo largo de todos los cursos de secundaria.

	Contenidos de Análisis	*Contenidos de Física (Ciencias de la naturaleza)*
1ºESO	Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales. Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.	Familiarización con las características básicas del trabajo científico […] para comprender mejor los fenómenos naturales y resolver los problemas que su estudio plantea. Interpretación de datos e informaciones sobre la naturaleza y utilización de dicha información para conocerla.
2ºESO	Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.	

3ºESO	Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana	Valoración de las aportaciones de las ciencias de la naturaleza para dar respuesta a las necesidades de los seres humanos y mejorar las condiciones de su existencia, así como para apreciar y disfrutar de la diversidad natural y cultural, participando en su conservación, protección y mejora. Construcción del modelo cinético para explicar las propiedades de los gases. Utilización del modelo para la interpretación y estudio experimental de las leyes de los gases
4ºESO	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales. Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática.	Reconocimiento de las relaciones de la física y la química con la tecnología, la sociedad y el medio ambiente, considerando las posibles aplicaciones del estudio realizado y sus repercusiones Carácter relativo del movimiento. Estudio cualitativo de los movimientos rectilíneos y curvilíneos. Estudio cuantitativo del movimiento rectilíneo y uniforme Aceleración.
1º Bachillerato	-Aproximación al concepto de derivada. -Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.	

2º Bachillerato	Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto Función derivada. Calculo de derivadas Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al calculo de áreas de regiones planas	

	Contenidos de geometría	*Contenidos de Ciencias de la Naturaleza*
1º ESO	Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.	Familiarización con las características básicas del trabajo científico […] para comprender mejor los fenómenos naturales y resolver los problemas que su estudio plantea. Interpretación de datos e informaciones sobre la naturaleza y utilización de dicha información
2ºESO	Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico. Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.	

3ºESO	Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.	Estructura del átomo. Modelos atómicos de Thomson y de Rutherford
4ºESO	**¿Trigonometría?** **¿Cálculo vectorial?** Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.	Los principios de la Dinámica como superación de la física «del sentido común». Identificación de fuerzas que intervienen en la vida cotidiana: formas de interacción. Equilibrio de fuerzas

1ºBachillerato	Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de formulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos. Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Modulo de un vector.	Estudio del movimiento Dinámica La energía y su transferencia Electricidad Teoría atómico molecular de la materia
2º Bachillerato	Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico	Interacción gravitatoria Vibraciones y ondas Óptica Interacción electromagnética Introducción a la física moderna

Como conclusión podemos afirmar que uno de los contenidos matemáticos que reiteradamente genera desfase entre ambas materias es trigonometría y Cálculo vectorial. En el caso del cálculo vectorial, este puede empezar a ser necesario en 4º ESO. Este contenido tiene su introducción en matemáticas I por lo que el alumno se puede encontrar en dos situaciones: Dar el cálculo vectorial al comienzo del curso o darlo cuando la materia de física esté ya bien avanzada. En cualquiera de los dos casos sería de gran utilidad hacer converger conceptos y nomenclatura.

Dentro de este desfase evidente en lo que al cálculo vectorial se refiere, existen unos errores bastante habituales dentro del contexto físico, que consiste en no distinguir a priori con facilidad magnitudes escalares de vectoriales, asumiendo la *escalaridad* de toda magnitud que se nos ponga por delante. Este problema está contenido en no dominar el cálculo vectorial, sin embargo, me gustaría señalar aquí una alternativa, a modo de ejemplo, que si atiende cronológicamente con el temario de matemáticas.

Un niño aprende a sumar, como concepto de añadir, y lo hace físicamente con objetos. Lo siguiente que le enseñamos es a reproducir en el papel esa suma, tiene un signo una grafía es el signo +. Hacemos lo mismo con todas las operaciones matemáticas básicas (+, -, x, /). Llegamos a sumar duplas o ternas de números que colocamos dentro de unos paréntesis que hace que eso signifique que estamos uniendo dos puntos de una cuadrícula como la del famoso juego 'hundir la flota', y cuando tenemos que sumar esos nuevos objetos, a esa suma la volvemos a denotar con la misma grafía +. Cómo estos problemas se afrontan antes en física que en matemáticas, tenemos el detalle de reducirlos a una sola dimensión, ponerles el signo + sin ninguna connotación nueva y continuar.

La conclusión de esto es que hacer más hincapié en las cosas que parecen triviales puede ser fundamental. Pasamos de largo por definir los conjuntos de números porque nos parece demasiado sencillo situar puntos en la recta real, y se nos olvida que las fracciones (números rotos) no existieron siempre, por lo que no tienen porque ser algo trivial para el alumnado. Si esto es cierto, imaginemos lo que pasa al dar el salto a las tuplas de números. Si estamos esperando que adquieran un nivel de abstracción considerable a lo largo de su formación, no podemos usar la misma grafía para designar operaciones diferentes sin una buena justificación (que obviamente tampoco puede ser abstracta)

Otro de los contenidos que esta desfasado son las técnicas de derivación, que se utilizan en Física I y son temario de Matemáticas II, no obstante esto no deja de ser un mal menor, al tratarse de una destreza matemática y no de un concepto.

Por otra parte y pesar de que el estudio realizado en el cuadro anterior atiende a contenidos, también es conveniente recalcar que en muchos casos la física necesita de abandonar el formalismo para poder entender la esencia, es en ese momento de comprensión (en el que probablemente nos encontremos en un equilibrio inestable) dónde las matemáticas aparecen para dar forma y sustentar nuestras ideas ya *adquiridas.* Tenemos que sensibilizar a alumnos y profesores para que *conciban las matemáticas como el vocabulario de su propia intuición* (Meyer, 2010) Por eso resulta tan complejo expresar con anterioridad o posterioridad la necesidad de una u otra. Se debe tener siempre presente que en el contexto académico también se espera de las matemáticas una adquisición de capacidades, que permitan comunicar eficazmente ideas aunque sea de manera no formal. En este punto el formalismo no debe desfigurar la esencia de las ideas fundamentales (BOE 2007).

3.2. El modelo y el proceso de modelización

3.2.1. La oportunidad del proceso de modelización según el enfoque actual de las matemáticas escolares

La modelización y su enseñanza –aprendizaje en la escuela ha sido un tema destacado en las últimas décadas en vista de la creciente importancia en todo el mundo del uso de las matemáticas en ciencia, tecnología y el día a día. Dada la escasez de jóvenes interesados por la ciencia y las matemáticas, es verdaderamente necesario discutir las posibilidades de cambiar la educación matemática en la escuela, tratando de incluir ejemplos reales y las competencias necesarias para usar las matemáticas para resolver problemas reales. Esta idea es el punto de inicio establecido por el grupo ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) desde 1983.

De la misma opinión es el grupo ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) que señala en su décimocuarto estudio de 2010, que entre los temas que han sido fundamentales en la educación matemática en los últimos 30 años, figuran la modelización matemática y las aplicaciones de éstas fuera de los campos estrictamente matemáticos.

Que las aplicaciones matemáticas y la modelización hayan sido y sigan siendo temas centrales de la educación matemática no resulta sorprendente, ya que casi todas las preguntas y problemas de la educación matemática relativas al aprendizaje humano, influyen y están influenciadas por las relaciones entre las matemáticas y numerosos aspectos del mundo real.

Si tomamos las tres preguntas clave de cualquier plan de formación:

- ¿Por qué enseñar/aprender matemáticas?
- ¿Qué matemáticas enseñar/aprender?
- ¿Cómo enseñar/aprender matemáticas?

En primer lugar, una respuesta, aunque no la única, a por qué todas las personas deben de aprender matemáticas es que proporciona un medio de comprensión del mundo que nos rodea para afrontar problemas cotidianos y para prepararnos para futuras profesiones. Cuando atacamos la pregunta de cómo adquirimos el conocimiento matemático, no podemos evitar el rol que juegan sus relaciones con la realidad. Además las matemáticas son una parte de nuestra cultura y de nuestra sociedad que implican también a otras disciplinas y ya no sólo las matemáticas en general, sino que hoy en día la modelización y los modelos matemáticos han penetrado en una gran variedad de campos, dejando muy pocos, por no decir ninguno dónde los modelos matemáticos no desempeñen ninguna función.

Las relaciones entre el mundo real y las matemáticas también son particularmente relevantes dentro del proyecto PISA de la OCDE (Organisation for Economic Co-operation and Development) dónde se está manejando el concepto de alfabetización matemática entendido, como ya hemos mencionado a lo largo del presente trabajo, del siguiente modo: *La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.* Esto significa que PISA pone énfasis en un uso de las matemáticas en una multiplicidad de contextos y situaciones. En un gran número de países esto ha desarrollado una intensa discusión sobre los objetivos y el diseño de las matemáticas escolares y especialmente en el caso del proceso de modelización matemática y las aplicaciones y relaciones de las matemáticas con el mundo real (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2010)

En segundo lugar e intentado dar respuesta a ¿Qué matemáticas enseñar/aprender? y ¿Cómo enseñar/aprender matemáticas? podemos indicar que históricamente la ciencia es el amplio conjunto de conocimientos que permite conocer /entender el mundo en el que vivimos y su relación con el medio, así como permitir generar hipótesis y filosofar sobre la vida y el ser humano. Hoy los conocimientos a nivel escolar se vuelven algo menos 'naturales' y forman parte de una estructurada planificación que ha de ir cumpliéndose inexorablemente con unas pautas temporales estrechadas a las edades, con poco margen de error, del individuo. Las matemáticas, como todas las disciplinas también presentan una forma de organizar sus contenidos, que se han discutido y construido a lo largo de la historia. Estos tópicos reflejan ramas bien establecidas del pensamiento matemático y facilitan el desarrollo estructurado de un programa. Cuando se hace así la prioridad está en la estructura conceptual. Los currícula escolares no se organizan a partir de los fenómenos o situaciones derivadas de la realidad, ya que los objetos y fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático no están organizados lógicamente (Rico, 2006)

Desde el punto de vista de la teoría y proceso de modelización enfatizando en el proceso cognitivo, es sabido que los individuos no integran sus conocimientos en torno a conceptos sino en torno a estructuras más complejas denominadas modelos, en los que influyen la intuición física y la matemática, considerando este tipo de estructura como la que desarrolla los mecanismos de integración de conocimientos lógicos y estructurados en el individuo, para poder recordarlos y utilizarlos. Así pues, deberíamos tratar de darle peso a un aprendizaje centrado en modelos dentro de nuestras planificaciones. Ésto efectivamente se está demandando en la actualidad pues según la estrategia asumida en el proyecto PISA/OCDE, se trata de equilibrar la prioridad estructural en la organización de los contenidos. Para ello se propone definir el rango del contenido que puede evaluarse haciendo uso de una aproximación fenomenológica para describir las ideas, estructuras y conceptos matemáticos. Esto significa describir el contenido en relación con los fenómenos y los tipos de problemas de los que surgieron, es decir, organizar los contenidos atendiendo a grandes áreas temáticas (Freudenthal 1973, citado en Rico 2006). Por estos motivos nos encontramos ante un cambio de tendencia en lo que se refiere a las matemáticas que debemos diseñar y enseñar y que nuestros alumnos deben aprender durante la etapa escolar.

Es lógico pensar que las expectativas propuestas por la teoría del proceso de modelización, sean demasiado elevadas a la hora de establecer un curriculum articulado en torno a fenómenos, entre otras cosas, debido a las condiciones de contorno presentes en la elaboración de esta programación dentro del sistema educativo actual. Sin embargo el conocimiento sobre los procesos cognitivos de los individuos, las estrategias asumidas por el proyecto PISA/OCDE o RME (Realistic Mathematics Education) para el aprendizaje de los estudiantes, la existencia de errores en matemáticas y ciencias derivados de núcleos comunes e incluso la interpretación curricular presente en la legislación (2006) de ambas materias, hace evidente la necesidad de un cambio de mentalidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, así como el desarrollo de actividades específicas, para la adquisición de competencias comunes como:

- Pensar y razonar.
- Argumentar.
- Comunicar.
- Modelizar.
- Plantear y resolver problemas.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Consideramos que las competencias que establece un plan de formación según el proyecto PISA/OCDE se constituyen en elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. Las competencias tratan por tanto, de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso (Pajares, Sanz y Rico, 2000).

Además, la competencia específica en modelización tampoco escapa a los dominios de este proyecto. El dominio de esta competencia implica según el Marco de Evaluación PISA 2009 para las competencias clave en lectura, matemáticas y ciencia las capacidades de:

- Estructurar el campo o situación que va a modelarse;
- Traducir la realidad a una estructura matemática;
- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales;
- Trabajar con un modelo matemático;
- Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados;
- Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones);
- Dirigir y controlar el proceso de modelización

Observamos por tanto, como la teoría y el proceso de modelización, así como el uso de la física como un contexto real, tiene cabida en el sistema educativo actual, ya que la oportunidad del proceso de modelización en el aula, radica en la idea de qué es precisamente, en el tener que enseñar el juego del proceso de modelización, dónde matemáticas y ciencia deben converger. Es decir, aunando la intuición física, la observación del mundo y de la vida cotidiana, con la intuición matemática y la capacidad para integrar el lenguaje simbólico en la construcción de nuestro propio conocimiento. Es en este punto dónde adquiere relevancia la competencia específica en *modelización (matemática),* entendida como la habilidad para identificar cuestiones relevantes, variables y relaciones en un contexto real dado, traducirlas al contexto matemático e interpretar y validar la solución para nuestra situación (Blum y Borromeo Ferri 2009, citado en Unhden et al 2011).

Esta oportunidad de incluir la modelización en el proceso de enseñanza-aprendizaje basándonos en un enfoque teórico de las matemáticas escolares, podría tildarse de una oportunidad estrictamente desarrollada dentro del marco de un trabajo de investigación, sin embargo como ya hemos visto en epígrafes anteriores, el currículum de matemáticas (BOE 6/11/2007), hace referencia tanto a la relación de las matemáticas con otras disciplinas científicas como, en concreto, al papel de la modelización como contenido curricular. Por tanto, la oportunidad de desarrollar la competencia en modelización matemática también pertenece a nuestra realidad educativa desde el punto de vista legal.

3.2.2. Qué se entiende por modelo y modelización

The great game of science is modelling the real World, and ***each scientific theory lays down a system of rules for playing the game***. The object of the game is to construct valid models of real objects and processes. Such model comprise the content core of scientific knowledge. To understand science is to know how scientific models are constructed and validated. ***The main objective of science instruction should therefore be to teach the modelling game***. (Hestenes, 1992)

Como ya hemos visto, las matemáticas durante la educación secundaria obligatoria y el bachillerato necesitan entre otras cosas del proceso de modelización de situaciones reales, que bien pueden ser contextos reales de la vida cotidiana, de la vida social, de la académica o incluso de la vida científica.

En primer lugar, tener en cuenta que existen una multiplicidad de diferentes interpretaciones del término modelo y sobre maneras apropiadas de pensar sobre la naturaleza de actividades de modelización. Esto ha llegado a ser un problema pues esta falta de consenso estaba considerada como el problema principal que debía ser resuelto por la comunidad que pretende investigar en modelos y modelización. Siguiendo a Lesh and Fennewald (2010) los autores están de acuerdo en que la falta de claridad conceptual no es una virtud en una comunidad de investigación, sobre todo si impide la comunicación entre los miembros, también mencionan que el aumento de claridad es un objetivo clave en la construcción de este campo de investigación. Con esto queremos decir que es una cuestión actual y no trivial la puesta en común de un campo semántico preciso en esta área de la educación matemática y que no seremos nosotros en este trabajo los que le demos solución. También los autores anteriores señalan que sobre todo en las primeras etapas de desarrollo de la teoría, una cierta cantidad de diversidad de pensamiento es saludable para la comunidad investigadora.

Queremos recalcar de nuevo, que hablar de modelo y modelización no es cuestión baladí, por este motivo y como inicio, es necesario precisar los términos en los cuales se han de entender los conceptos de modelo y modelización matemática en el desarrollo de esta Memoria. Esto no significa que hayamos dado solución a la controversia sobre la interpretación del término sino únicamente que nos hemos decantado por las definiciones más afines con nuestra filosofía sobre el significado de educación matemática.

El concepto de Modelo ha estado presente en muchos de los campos científicos y matemáticos. Al respecto se han planteado algunas definiciones como:

Los modelos son sistemas conceptuales (consistentes en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que están expresados usando notación externa, y son usados para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas (Lesh and Doerr, 2003)

Un modelo es un sistema que consiste en: (a) elementos (b) relaciones entre elementos (c) Operaciones que describen como los elementos interactúan (d) patrones o reglas… que se aplican a las relaciones y a las operaciones. Sin embargo no todos los sistemas funcionan como modelos. Para ser un modelo, un sistema se debe de usar para describir otro sistema, para pensar sobre él, para darle sentido, para explicarlo o para hacer predicciones sobre el mismo.
(Lesh et al., 2000)

Un modelo es el vehículo al que se le atribuye el rol de unir el salto entre la comprensión informal conectada con lo real y la imaginación de la realidad en un lado, y la compresión de sistemas formales en el otro. (Van den Heuvel-Panhuizen, 1995, 2002).

Las matemáticas han sido descritas como la ciencia de los patrones. Las ciencias naturales pueden ser caracterizadas como la investigación de los patrones en la naturaleza. En el medio del dominio, desde un punto de vista teórico un modelo es la estructura básica del conocimiento coherente estructurado. Es una representación de una estructura en un sistema dado, a través del cual se pueden hacer inferencias lógicas, predicciones, explicaciones, planes y diseños. (Hestenes, 2010)

Estas definiciones de modelo, hacen referencia en gran medida a la visión que se tiene de la relación entre las matemáticas y el mundo real. Tomaremos como nuestra la última definición aportada por Hestenes en 2010, por presentar el modelo no sólo como la relación entre las matemáticas y el mundo, sino por situarlo en el medio del dominio, dándole la categoría de elemento que da estructura coherente a nuestro conocimiento. Por lo que esta definición resulta de relevancia no sólo dentro de las ciencias y las matemáticas sino enmarcada en el ámbito de la didáctica de las mismas.

Conscientes ahora de: qué es y dónde se sitúa un modelo ¿Cómo integrar el modelo simbólico en la intuición proporcionada por las situaciones reales? ¿Existe diferencia entre un modelo físico y un modelo matemático? Es decir, si el modelo está en el medio del dominio, ¿Es la combinación de dos modelos por separado uno matemático y otro físico ausente de todo componente matemático?

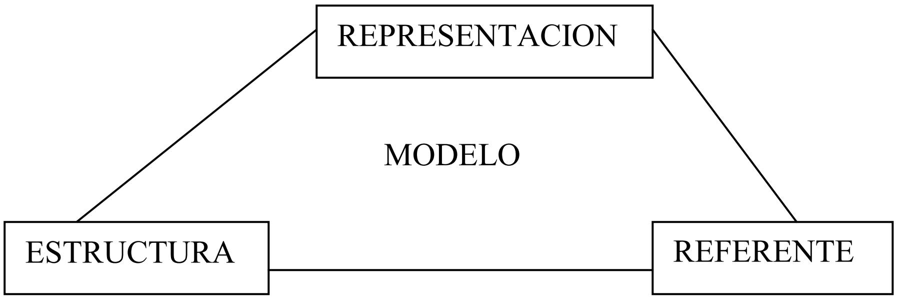
Procedemos por tanto a construir una interpretación más profunda del concepto de modelo, ya que esto nos ayudará a entender el proceso de modelización desde el punto de vista cognitivo y de su potencial didáctico para trabajar los contextos reales en el aula de matemáticas.

Podemos señalar, según Hestenes (2010), dos tipos de modelos:

-Modelos mentales (propio de cada individuo)
-Modelos conceptuales (aquellos que son públicamente compartidos)

Podemos añadir que un modelo, ya sea mental o conceptual se encuentra enmarcado por tres conceptos fundamentales:

-Representación (o manera en que expresamos el modelo)
-Estructura (o conjunto de relaciones entre los objetos del sistema)
-Referente (o sistema en si mismo. La realidad)



Una vez que hemos delimitado el concepto de modelo con sus partes integrantes, podemos abordar la pregunta planteada anteriormente: ¿Existe diferencia entre un modelo científico y un modelo matemático? En la literatura podemos encontrar definiciones que distinguen claramente uno de otro:

Un modelo científico es una representación de una estructura en un sistema físico o proceso. Los modelos en las diferentes ciencias difieren en los tipos de estructura. Debido a la complejidad de la naturaleza (o a las limitaciones humanas) el razonamiento a través de modelos es un trato esencial del pensamiento físico. Multitud de filósofos han investigado este tema y están de acuerdo con que la realidad no es accesible excepto a través de modelos idealizados y simplificados. Sin embargo cuando llega la interpretación del rol de las matemáticas en este proceso, surgen opiniones divergentes. Si el significado de un modelo científico deriva de su interpretación física, ¿De dónde viene el significado del modelo matemático? Los modelos puramente matemáticos son abstractos, lo cual significa que no tienen referente físico. Si asumimos la existencia de un modelo físico puro, y de un modelo matemático puro, dicha separación implica la existencia de un sistema físico cerrado sin matemáticas. Sólo la necesidad de resultados cuantitativos generaría la creación de un modelo matemático externo. Así que, se puede entender el modelo matemático como una representación del modelo físico en lenguaje matemático (Hestenes, 2010;Unhden at al, 2011)

Para resumir y siguiendo a Greca y Moreira (2001) los modelos físicos son un conjunto de estados simplificados e idealizados de un sistema físico dónde el modelo matemático es la estructura sintáctica del formalismo sin contenido semántico. El modelo matemático está relegado a un sistema axiomático, el cual sólo adquiere significado si es posteriormente interpretado a través de un modelo físico. Esto concuerda con la triangulación (Representación, Estructura, Referente) que Hestenes (2010) propone para enmarcar un modelo, y con la idea de que los modelos matemáticos no tienen referentes físicos.

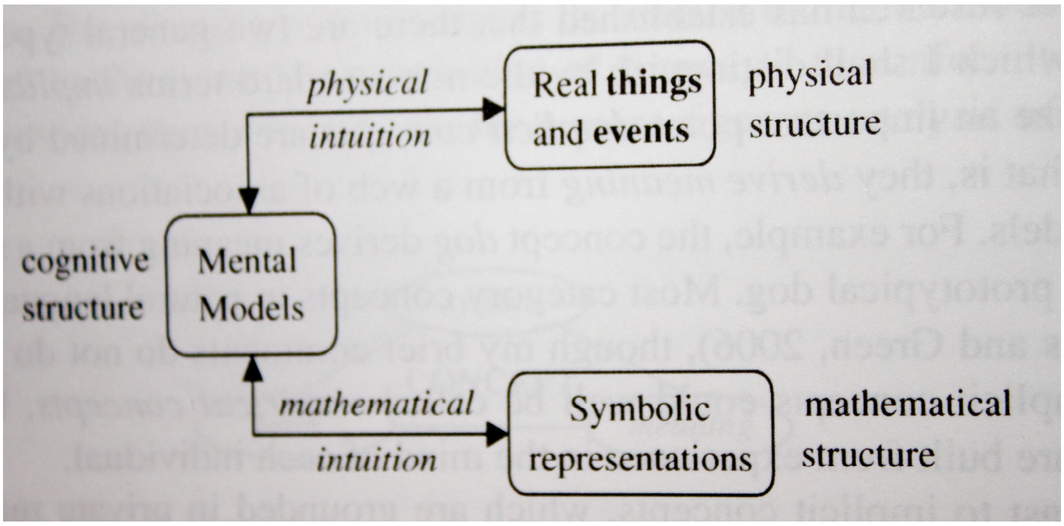
Sin embargo, aunque es difícil situar una frontera entre el modelo físico y el matemático, establecer distinciones claras sobre la existencia de modelos físicos y matemáticos no parece sustentar el camino histórico y filosófico de la ciencia. Deberíamos entender los modelos de situaciones observables como híbridos, lo cual concuerda con la componente epistemológica de este asunto, y considerar la imagen puramente cualitativa como el primer estado de un modelo físico-matemático en vez de un modelo sólo y distinguible (Unhden et al. 2011) Pues si los modelos matemáticos no tienen referente físico, ¿Cómo abordar los contextos reales en la clase de matemáticas sin salirnos del estricto modelo matemático? Necesitaremos por lo tanto asumir la posible existencia de un modelo híbrido cuya estructura variará en función de la disciplina que estemos trabajando, en nuestro caso particular el de la física como contexto real.

Por otra parte, es consabido que un amplio estudio de matemáticas no garantiza la comprensión física de un fenómeno, y que la observación y comprensión física de un fenómeno no garantiza el saber trasladarlo a una configuración simbólica (Niss, Blum & Galbraith, 2007). Por ello nos reafirmamos nuevamente en el modelo híbrido, sustentado, además, por cómo se forman las estructuras mentales del conocimiento estructurado si articulamos los procesos de enseñanza aprendizaje en torno al proceso de modelización

De los dos tipos de modelos que hemos establecido anteriormente, son los mentales aquellos a través de los cuales podemos generar y/o comprender modelos conceptuales. Estos modelos mentales se van entrenando, conformando y completando dando lugar a una estructura cognitiva a través de dos vías fundamentales:

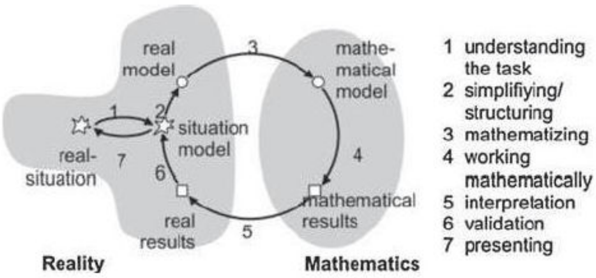
- *Intuición física* (Que une la estructura mental con la estructura física, cosas reales y eventos)
- *Intuición matemática* (Que une la estructura mental con la estructura y representación simbólica)

(Hestenes, 2010)



Es decir, nuestra estructura cognitiva, se forma a través de modelos mentales, los cuales se ven influenciados por dos intuiciones, la física, que se nutre del mundo real, y la matemática, que se nutre de representaciones simbólicas, entre las que existe una tensión cuando se va formando un nivel elevado de pensamiento.

Vemos cómo esta teoría de articular los procesos de enseñanza-aprendizaje a través del ciclo de modelado, o *Teoría de Modelado* da soporte a la creación de modelos híbridos. La necesidad del modelo físico/matemático no se antecede ni sucede, sino que se completa, siendo la situación real la fuente que proporciona las dos intuiciones física y matemática. Esto permitirá la posterior creación y comprensión de un modelo conceptual públicamente compartido. Es por tanto nuestra intención hacer hincapié en el proceso de traslación del dominio real al dominio matemático, por lo que tomamos como esquema de ciclo de modelado el siguiente, ya que pone el foco en el proceso cognitivo.



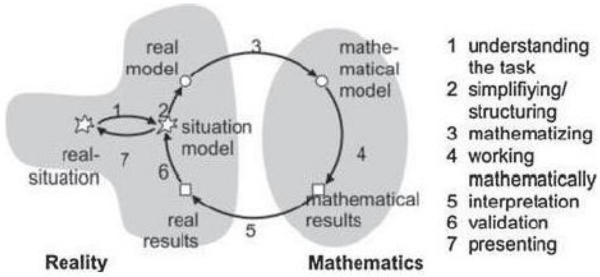
Modelling cycle from Blum and Leiß (2005) with emphasis on the cognitive processes

3.2.3. El proceso de matematización

La matematización es un proceso que presenta dos vertientes, la matematización *horizontal* y la *vertical.* La matematización horizontal significa moverse del mundo diario al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos (Freudenthal 1991). Sin embargo la diferencia entre estos dos procesos no presenta un corte claro y ambas actividades pueden coexistir en cualquier nivel de la actividad matemática. El tipo de matematización en que cada uno focaliza su educación matemática, tiene importantes consecuencias para el rol de los modelos […] y también para el tipo de modelos utilizados (Treffers y Goffree, 1985)[1]

[1] Información obtenida de la página web del Instituto Freudental.
http://www.fisme.science.uu.nl/en/

Retomemos momentáneamente el esquema propuesto para el proceso de modelización centrado en el proceso cognitivo:



Modelling cycle from Blum and Leiß (2005) with emphasis on the cognitive processes

El paso 3, es lo que corresponde a un proceso de matematización horizontal, nótese como dar este paso requiere de una comprensión del fenómeno o situación del problema dentro del mundo real, sin herramientas matemáticas. Por este motivo consideramos el proceso de matematización horizontal como uno de los pilares fundamentales de este ciclo que representa el proceso de modelización al completo. Además es precisamente en este momento del ciclo dónde se realiza el paso del dominio real al dominio matemático, por lo que sin esta etapa no tendríamos el trabajo dividido en los dos dominios de los que tanto hemos hablado para entender y justificar el proceso de modelización.

Por otra parte, el proceso de matematización vertical es una *traducción* entre diversas estructuras matemáticas que dan respuesta al mismo concepto. Si nos fijamos de nuevo en el ciclo, cuando pasamos al mundo matemático diferentes personas podrían seguir distintas estrategias: matematizar mediante una expresión algebraica, mediante una gráfica, una tabla… El tener que movernos de uno a otro sería un proceso de matematización vertical. No vemos esto como estrictamente necesario dentro del proceso de modelización, aunque si recomendable desde el punto de vista de la riqueza matemática.

3.2.4. Adecuación de la física para el desarrollo de la competencia de modelización

¿Está la física realmente interrelacionada con las matemáticas? Un ejemplo mencionado por Hestenes (2010) que parece revelador es el que se muestra en el siguiente cuadro:

Algunos físicos teóricos distinguidos	
Newton	Cauchy
Euler	Poincaré
Gauss	Hilbert
Lagrange	Weyl
Laplace	Von Neumann

Si esta lista la lee un matemático, no dudará en considerar colegas suyos a los presentes, pero el caso no será el mismo si es un físico el que echa un vistazo a la tabla (como le ocurre al autor). Realmente no son disciplinas disjuntas y su saber hacer histórico lo confirma.

Podemos preguntarnos, ¿es la modelización uno de los quehaceres que se encuentra a caballo entre ambas disciplinas? Teniendo en cuenta la noción de modelo que estamos utilizando, que podemos resumir en la unidad básica del conocimiento coherente estructurado, que se nutre de las representaciones simbólicas (intuición matemática) y de las cosas y sucesos reales (intuición física), partimos de no sólo la adecuación sino de la necesidad de la ciencia para la construcción de modelos (entendidos en el marco de esta investigación). La física en particular resulta una de las disciplinas científicas más representativas para este efecto en los niveles de educación secundaria y bachillerato, pues no sólo forma parte del modo en que construimos los modelos individualmente sino que la nutre la observación directa del mundo. Además los alumnos están o deberían estar familiarizados con esta asignatura y con la relevancia que ésta tiene en cuanto a representar el mundo real. Por otra parte, el alumnado suele ser consciente de la relación de esta materia con las matemáticas (fórmulas) aunque esta consciencia no siempre sea con carácter positivo.

Representar estructuras en diversas situaciones con una sola forma matemática no hay duda de que es una fuente primaria y de gran potencia para el modelado y esto la física lo conoce en profundidad. (Hestenes 2010)

4. Diseño Metodológico

Una vez planteados los objetivos de la investigación en el capítulo XX, en el siguiente capítulo resumiremos la metodología de la investigación, resumiendo las técnicas e instrumentos utilizados para obtener información que permitan dar respuesta a los objetivos.,

Es importante recordar que el diseño de la investigación que hemos seguido persigue fines centrados en la **descripción** y en la **exploración**, Por lo que, nuestro interés orbita en torno a estudiar un problema concreto en profundidad, referente a las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre el proceso de modelización en general, y el proceso de matematización horizontal en particular. Ambos entendidos como ejes del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de secundaria. Por su adecuación a la investigación planteada, las técnicas de recogida de datos utilizadas en el presente trabajo son de tipo cualitativo.

Las técnicas utilizadas serán:

- Estudio comparativo global, siguiendo el procedimiento empleado en Díez (2012) para analizar los vínculos del currículo de física y matemáticas en el los niveles de secundaria y bachillerato científico-tecnológico
- Revisión bibliográfica sobre el proceso de modelización
- Grupo de discusión
- Encuesta

El porqué del uso de estas técnicas se mostrará a lo largo del presente capítulo

El diseño de instrumentos, los dicta el método escogido. En nuestro caso básicamente se centran alrededor de:

- Búsqueda y diseño de actividades que incluyan modelización, en concreto el proceso de matematización horizontal, proceso que hemos considerado como pilar fundamental de un proceso de modelización y que lo distingue de otras actividades dónde dicho proceso no está presente.

- Diseño de un Cuestionario abierto, que no sólo funcionará independientemente como instrumento recabador de información, sino que dará estructura al debate planteado para el grupo de discusión.

4.1. Técnicas de recogida de datos de naturaleza cualitativa

Sin epistemología y metodología que la sustente, una técnica de investigación es apenas un confuso conjunto de procedimientos canónicos. Esta afirmación, válida para cualquier técnica, adquiere especial relevancia en el caso de las técnicas cualitativas. En ellas, el procedimiento es sometido a prueba, y enfrentado con sus límites en cada investigación particular, y su eficacia depende grandemente del modo en que el investigador las haya subjetivado. En estos casos la técnica se centra en el investigador, lo que no quiere decir que 'todo' valga, sino que la mediación de la técnica no es ajena ni al observador ni al observado. Estas técnicas no son susceptibles de una estandarización absoluta. Por lo que, finalmente, las formas deben de ser entendidas como esquemas a disposición de la investigación para recoger la información que se precisa (Canales y Peinado, 1994)

En lo que corresponde a describir las creencias de un colectivo de personas, en este caso del profesorado de matemáticas en formación sobre un tópico concreto, se creyó conveniente el apoyo de las ya mencionadas técnicas cualitativas de recogida de datos. Pues era necesario que las ideas brotasen libremente entre los sujetos participantes, así como la mano ejecutora del investigador para poder reconducir la información hacia el tema concreto en el caso de posible dispersión en la comunicación de las ideas por parte del forum elegido.

Del conjunto de técnicas de corte cualitativo, utilizaremos, no sin alguna reinterpretación teniendo en cuenta las limitaciones surgidas en la investigación, el grupo de discusión, del que hablaremos a continuación.

4.1.1. El grupo de discusión

Un grupo de discusión es un procedimiento de producción de información, que ha sido ampliamente utilizado en diferentes campos de la investigación sociológica y cuyas posibilidades en el ámbito educativo demuestran ser amplias (Gil, 2000). Está enmarcado dentro de las técnicas de recogida de datos cualitativas que trabajan con el habla, al igual que ocurre con la entrevista en profundidad, o la observación participante. La diferencia primordial del grupo de discusión frente a estas otras técnicas es la circulación del discurso. El discurso no es percibido como un instrumento en la realidad social inmediata (observación participante), ni como la confesión de una norma que trata de salir a la luz (entrevista en profundidad). El discurso va generando cambios en la opinión individual y grupal, llegándose a consensos o normas de grupo, focos que permitirán un buen análisis posterior de la situación (Callejo, 2002).

Esta técnica se caracteriza por su facilidad de realización, abaratamiento y rapidez, así como por su flexibilidad e interacción grupal, gracias a las cuales, se proporcionan respuestas e intervenciones en reacción a las respuestas y reacciones de los participantes dónde lo expresado por uno puede revertir el pensamiento de su homólogo (circulación del discurso). Es precisamente esta circulación, lo que hace que nos decantemos por el grupo de discusión para nuestro propósito, pues como ya hemos mencionado con anterioridad nos encontramos en una fase exploratoria, donde la recogida de información y nuevas ideas resulta de especial relevancia en la obtención de información preliminar para el proyecto de investigación.

El papel del moderador puede ir desde la absoluta ‘no intervención’, hasta la intervención total. Asimismo el debate puede ir desde la ‘no estructura’ hasta la guía perfectamente determinada y estructurada. El papel del moderador adoptado será de mínima intervención, teniendo en cuenta que nos encontramos en la primera fase de la investigación, dónde nuestro objetivo más inmediato es producir la máxima información posible intentando minimizar nuestras interacciones con el sistema. El debate será semiestructurado, pues se reproducirá atendiendo a un cuestionario abierto previo, realizado de manera individual. Dicho cuestionario tiene dos funciones, en primer lugar de recogida de información, y en segundo lugar se espera que actúe de catalizador en la producción de información, causando una relación sinérgica entre los pensamientos individuales y la producción del discurso grupal.

4.1.2. Las limitaciones de nuestro Grupo de Discusión

En lo que se refiere al diseño del grupo de discusión, siguiendo a Alonso (1996) debemos de cumplir una serie de pautas. En nuestro caso debido a algunas limitaciones, se producen diferencias con el modelo estándar planteado para el desarrollo de esta técnica. Las comentaremos una a una:

Es un grupo creado artificialmente, es decir cuyos miembros han sido seleccionados por un agente exterior al grupo con un propósito determinado.

El grupo está seleccionado con un propósito determinado, pues se seleccionó el grupo de alumnos que asistían al Máster en Profesorado de Educación Secundaria. Especialidad: Matemáticas. Por tanto, efectivamente la selección se realiza por un agente exterior al grupo, con el propósito determinado de estudiar las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre un tema en concreto.

El número de miembros debe de ser más de dos y no ser más de unos diez miembros, para evitar la creación de subgrupos

El grupo constaba de 14 miembros, lo que en teoría podría causar problemas de creación de subgrupos. Esto resultó inevitable pues no se consideró adecuado hacer una selección ya que el debate se realizó dentro del marco de la asignatura:

'Aprender a Enseñar Matemáticas' del Máster en Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Almería, y trataba a su vez de resultar una actividad enriquecedora para todos los miembros del grupo dentro del contexto de la asignatura.

Suele tener una duración de entre noventa minutos y dos horas

El diseño semiestructurado de esta técnica de recogida de datos, permitió estimar una duración aproximada de hora y media de debate, para evitar el cansancio y por lo tanto la falta de productividad en el discurso de los participantes.

Necesidad de homogeneidad o heterogeneidad parcial controlada

En este sentido el grupo resultaba óptimo, pues todos tenían en común ser profesores de matemáticas de enseñanza secundaria en formación, lo cual aportaba la homogeneidad necesaria al grupo para poder contribuir activamente en la conversación. La heterogeneidad presente para que surgiese el debate viene en este caso dada, por la formación inicial de cada uno de los participantes, así como por sus vivencias personales en el ámbito de la educación, tanto desde el punto de vista del docente (que pudieran o no tenerla) como desde el punto de vista del discente. Situación última que todos y cada uno de los interlocutores habían vivido en diversos niveles educativos e incluso estaban viviendo, lo cual les da un bagaje intelectual inevitable en este contexto.

Desconocimiento de los miembros entre si

Este es el punto más débil de nuestro diseño del Grupo de Discusión. Obviamente al ser todos alumnos de la misma asignatura, los participantes se conocían entre sí, dando lugar efectivamente a posibles inhibiciones o comportamientos que se han gestado al margen de las estrategias de la investigación (Alonso, 1996). Esto podría haberse evitado o minimizado, cuánto antes en el tiempo hubiéramos realizado el experimento, no dando lugar a que el grupo se conformase como grupo natural, dando lugar a relaciones personales (Canales y Peinado, 1994). Las limitaciones temporales de nuestra investigación hicieron que el grupo sobre el que trabajamos ya hubieran colaborado juntos en varias sesiones de clase en la especialidad Matemáticas.

A pesar de las diferencias de nuestro grupo de trabajo con el ideal de Grupo de Discusión, no debemos olvidar que las técnicas de recogida de datos deben estar siempre a disposición de la investigación y sus limitaciones, y que en particular las técnicas cualitativas presentan una mayor flexibilidad en lo que a su aplicación se refiere. La falta de otro grupo accesible hace que debamos centrarnos en las ventajas de nuestros participantes, que en este caso es la homogeneidad y cómo ésta responde a nuestras necesidades descriptivas sobre las creencias del profesorado de matemáticas en formación.

4.2. Instrumentos metodológicos

La necesidad de recoger información sobre 'Creencias' nos llevó por el camino del Grupo de Discusión. Camino que ahora nos lleva a tener que hacer brotar y estructurar la información que queremos obtener, para poner de manifiesto las concepciones y creencias que los profesores en formación tienen sobre el proceso de modelización en general y el proceso de matematización horizontal en particular, como elementos del proceso de enseñanza aprendizaje en el aula de secundaria. Como el tema principal debía ser el proceso de modelización, se presentaba un conflicto al hablar sobre este concepto a priori, pues exigía ofrecer cierta formación inicial a los entrevistados sobre el tema en cuestión. Esto presentaba un problema:

- La complejidad intrínseca del proceso de modelización y falta de tiempo para explicitarlo previamente a los sujetos.

Se desechó por tanto la idea de presentar el concepto como algo teórico, sobre todo teniendo en cuenta el conflicto que nos presentaba de alienación de los resultados. Ante todo no se deseaba 'adoctrinar' sobre la modelización sino provocar controversia sobre el tema para que saliesen a la luz las ideas y creencias sobre esta forma de afrontar las matemáticas escolares. Pues aunque los encuestados no conociesen los términos clave, pueden poseer las creencias y manifestarlas sin usar los términos modelo, proceso de modelización y matematización horizontal.

También se desechó la idea de un cuestionario cerrado por la polisemia del concepto modelo y proceso de modelización. Otra de las contrapartidas que se encontró al cuestionario cerrado, era que ataca a la motivación de los encuestados, pues no se les deja aportar ideas nuevas, lo cual no tenía sentido alguno por encontrarnos en una fase exploratoria del estudio.

4.2.1. Búsqueda y Diseño de Actividades

La búsqueda y diseño de tareas se fue gestando bajo la necesidad de responder a una serie de preguntas. Tengamos en cuenta que el propósito último de las actividades elegidas es desencadenar ideas sobre la modelización y el proceso de matematización horizontal como actividades matemáticas dentro del aula de secundaria, para así poder dar respuesta al tercer objetivo de investigación:

Describir las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre el uso de la física como contexto real en el aula de matemáticas:

a. Reconocimiento por parte del profesorado en formación sobre el proceso de matematización horizontal en actividades matemáticas
b. Creencias del profesorado en formación sobre el uso de contextos físicos reales para utilizar la modelización como eje vertebrador del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de secundaria.

4.2.1.1. Iniciando el camino: Planteamiento de preguntas generales y resolución de actividades

Algunas de las preguntas o aspectos que tuvimos que solventar para la búsqueda y diseño de actividades adecuadas fueron las siguientes:

- ¿Cómo presentar un proceso de modelización sin nombrarlo?
- ¿Es necesario resolver la actividad para que desencadene reflexiones o información sobre el proceso de matematización horizontal?
- El problema de la interpretación del significado de 'Contexto Real'. El proceso de matematización horizontal como sinónimo de tarea de demanda cognitiva alta.
- El proceso de matematización vertical como contrapartida a la matematización horizontal. ¿Consideramos ambos procesos como competencias a desarrollar en el aula de matemáticas? ¿Los distinguimos?
- Una de las primeras decisiones que se tomaron sobre el diseño del cuestionario abierto, fue la necesidad de poner a los futuros docentes en la situación de tener que resolver una tarea, supuestamente adecuada para desarrollarla en el aula de secundaria. Esta idea inicial estuvo promovida por la creencia de que resulta complejo hablar sobre un determinado tipo de actividad si no nos hemos trabajado a fondo. Era necesario que los encuestados tomaran conciencia de cómo ellos mismos resolvían la actividad, que conocimientos, estrategias y destrezas ponían en juego para llegar a una solución correcta de la misma.

En este momento del desarrollo del cuestionario se procedió a realizar una búsqueda de tareas relacionadas con contextos reales, en particular contextos reales relacionados con la física y con el proceso de modelización. La revisión de tareas se realizó entre tareas de: El proyecto PISA, el Shell Centre for Mathematical Education (conocido en todo el mundo por su trabajo innovador en educación matemática), y IOWO (Instituto para el desarrollo de la educación Matemática) renombrado hoy como instituto Freudenthal.

Durante la selección de actividades y por lo tanto en el proceso de construcción del cuestionario, la experiencia personal fue de especial relevancia, por lo que a lo largo de las siguientes líneas procederemos a narrar en primera persona, fruto de las exigencias de la investigación.

La primera selección de actividades se realizó tomando como referencia algunas actividades del proyecto PISA que presentan errores en su resolución entre los profesores de matemáticas en formación. También se seleccionaron actividades que por tener conceptos del mundo físico asociado captaron mi atención. Lo primero que hice fue RESOLVERLAS. Cual fue mi sorpresa al darme cuenta que llegar a una solución que considerase absolutamente buena no resultaba trivial. Comencé a pensar que mi criterio empezaba a no ser del todo fiable para la selección de actividades, pues las lecturas de las revisiones bibliográficas y la resolución de actividades matemáticas que implicaban pensar, razonar, argumentar, matematizar y modelizar, estaban produciendo en mi un cierto grado de entrenamiento. Por otra parte no sabíamos si la posible creencia por parte de los encuestados de que la actividad era de física, podría llevarlos a debatir sobre conceptos más complejos. Ya no podía distinguir si era y no asequible o dónde estaba el límite para sacarle rendimiento a la actividad elegida.

Empezaba a tener la imperiosa necesidad de pasarle aquellas actividades a alguien y contacté con compañeros y amigos con diversa formación académica y les pedí un favor: que resolvieran un par de actividades previamente seleccionadas y que contestasen a unas pocas preguntas. Las actividades seleccionadas en este caso fueron: 'Golpe de golf' y 'Gradientes' (Ver anexo I y II). La edad y formación de los encuestados así como la materia a la que asociaban las actividades resultó la siguiente:

Edad	Formación	ACTIVIDAD: GOLPE DE GOLF	ACTIVIDAD: MONTAÑA RUSA	ACTIVIDAD: GRADIENTES
22	Estudiante de Ingeniería de Caminos (5º)	FÍSICA Y MATEMÁTICAS	FÍSICA Y MATEMÁTICAS	
22	Estudiante de Arquitectura (5º)	FÍSICA	FÍSICA	MATEMÁTICAS
26	Empresario. Matemáticas hasta 3º ESO	FÍSICA	FÍSICA	
27	Licenciada en Ambientales	FÍSICA	FÍSICA	MATEMÁTICAS
28	Licenciada en ambientales	MATEMÁTICAS	MATEMÁTICAS	MATEMÁTICAS O QUÍMICA
27	Ingeniero Electrónico	FÍSICA	FÍSICA	MATEMÁTICAS
25	Humanidades:Imagen y Sonido	FÍSICA	FÍSICA	

Estos resultados pusieron de manifiesto que actividades consideradas como actividades matemáticas, no eran consideradas como tal por individuos con una formación científico matemática elevada. Esto señalaba el buen camino pues necesitábamos actividades que generasen controversia sobre la asignatura en la cual debía de ser tratadas.

A pesar de que en este momento sólo se les pidió la resolución de las actividades y que dijesen en que asignatura la enmarcarían. Las preguntas iniciales que nos rondaban para pasar el cuestionario fueron las siguientes:

1. Sexo, edad y formación inicial del encuestado
2. ¿A que asignatura crees que pertenece esta actividad?
3. ¿Qué conocimientos previos crees que hay tener en cuenta para desarrollar la actividad?
4. ¿Crees que es beneficioso haber vivido la actividad para resolverla?
5. ¿Qué contenidos matemáticos conceptos/destrezas se ponen en juego para desarrollar la actividad?
6. ¿Dentro de que asignatura/s y nivel/es enmarcarías el ejercicio?
7. ¿Plantearías esta actividad a alumnos de secundaria y/o bachillerato?

4.2.1.2. Tomando las primeras decisiones: Elección de la actividad que presenta matematización horizontal

Tras esta primera aproximación y determinar que la actividad GOLPE DE GOLF, parecía bastante más adecuada que la de 'GRADIENTES' procedimos a un análisis algo más detallado de la actividad, con la intención de justificar su pertinencia como actividad matemática, teniendo en cuenta además que estábamos buscando una actividad que presentase un proceso de matematización horizontal.

¿Qué conocimientos previos necesitamos?

- Conocer las magnitudes posición, tiempo, trayectoria y velocidad
- Conocer como se miden las magnitudes anteriores

¿Qué se podría poner en juego/aprendemos al resolver este ejercicio?

Para resolver esta cuestión nos basamos tanto en los currícula actuales de física y matemáticas para la educación secundaria como en los Aspectos Clave para la Evaluación de competencias el lengua, ciencia y matemáticas del proyecto PISA 2009, no sin olvidar nuestra propia experiencia para afrontar tareas en estas materias. Los aspectos relevantes que consideramos que se ponen en juego son los siguientes:

- Relacionar dos variables
- Monotonía: crecimiento/decrecimiento de una magnitud
- Manipulación de modos de representación: Verbal y Gráfico
- Describir, codificar y decodificar información visual (PISA 2009. Aspectos clave)
- Cambios y sus relaciones. Reconocimiento de los tipos de cambio, en particular cuando se producen (PISA 2009. Aspectos Clave)
- Interpretar gráficas como representaciones abstractas de relaciones (Shell Centre)
- Modelar una situación real a través de una gráfica
- Traducción entre lenguaje cotidiano, gráfico y algebraico.
- Conocimiento de una situación en la que la velocidad cambia con el tiempo
- Estudio cualitativo de movimiento compuesto. Composición de velocidades (¿Por qué no se para arriba del todo la pelota?)
- Intentar construir el modelo lineal que rige las velocidades en los diferentes ejes. O simplemente comprobarlo.
- Revisión del carácter vectorial de la velocidad.
- Comprender y expresar mensajes con contenido científico utilizando el lenguaje oral y escrito con propiedad, interpretar diagramas, gráficas, tablas y expresiones matemáticas elementales, así como comunicar a otros, argumentaciones y explicaciones en el ámbito de la ciencia. (BOE 2007. Objetivos de secundaria)

- Las fuerzas como causa de los cambios del movimiento (BOE 2007. Física y Química 4º ESO)
- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados (BOE 2007. Matemáticas 4º ESO)

Posibles errores encontrados al resolver este problema:

La actividad elegida se encuentra dentro del marco de tareas propuestas por el Shell Centre, con o cual los posibles errores matemáticos derivados de la resolución de este ejercicio ya se encuentran catalogados. Tras pasarle los ejercicios al primer grupo encontramos que además de los errores planteados por el Shell Centre desde el punto de vista matemático, también aparecían errores típicos de ejercicios resueltos en la clase de ciencias (Hierrezuelo y Montero, 1991)

- Error conceptual: confundir la gráfica con el dibujo. (Shell centre for mathematical education, 1990)
- Incapacidad de traducir una argumentación perfectamente válida en una gráfica (Shell Centre for mathematical education, 1990)
- Construir gráficas angulosas en vez de suaves, extremadamente común en alumnos que han sido introducidos a las gráficas en la forma convencional, marcando puntos (Shell Centre for mathematical education, 1990)
- Dificultad para entender que un movimiento real pueda considerarse como la suma de dos movimientos imaginarios (La ciencia de los alumnos)- Pelota permanece estacionaria en el punto más alto de la trayectoria

La idea fundamental al proponer esta actividad, es sobre todo dejar una actividad lo más ‘abierta’ posible. Plantear un problema o tarea en el que se da una situación real cuya interacción con la persona que va a resolverla es un dibujo. Planteamos una interacción visual, eliminando todos los artificios matemáticos, y seguidamente una pregunta que hay que responder adecuadamente, pero sin establecer de qué manera queremos la solución. De esta manera se espera ver cómo los futuros profesores de matemáticas reconocen actividades matemáticas y usan éstas para resolver problemas de la vida real. Al plantear un problema sin indicaciones, estamos dejando libertad para 'pasar' del mundo real al mundo matemático en caso de necesidad. Son las matemáticas las que deben estar al servicio de lo que queremos resolver y no a la inversa (Meyer, 2010). Es nuestra intención, por tanto, describir qué tipo de matemáticas encuentran nuestros encuestados en una situación física real y si el acto de convertir dicha situación a alguna manifestación matemática, lo consideran actividad matemática.

4.2.1.3. Jugando con la frontera: Elección de una actividad en contexto real que no presenta matematización horizontal.

Los libros de texto, son el material más inmediato y más utilizado en las aulas de secundaria para impartir las clases. Por este motivo la segunda actividad de matemáticas que escogeremos será extraída de un libro de texto de secundaria que se esté utilizando actualmente en algún centro escolar.

En esta ocasión necesitamos una actividad con aspecto de contexto real pero que realmente no presente la necesidad de pasar de un dominio a otro. Es decir que se pueda resolver con conocimientos estrictamente matemáticos. La idea de presentar una actividad de este tipo, es comprobar si los profesores en formación distinguen estas dos actividades y si el hecho de tener que matematizar horizontalmente, aunque no se manifieste en estos términos es una de las características de la actividad para considerarla una actividad matemática en contexto real.

Dado que la actividad de GOLPE DE GOLF, estaba enmarcada en el tema de funciones y gráficas, se realizó una revisión de problemas planteados en libros de texto actuales para este tema. La actividad elegida, extraída del libro de texto: Matemáticas. 3º ESO. Los caminos del saber. Ed. Santillana

En un entrenamiento para una carrera de 5000m, un atleta ha registrado estos tiempos:

Tiempo (s)	***0***	***10***	***20***	***30***	***40***	***50***	**…**
Espacio (m)	***0***	***65***	***130***	***195***	***260***	***325***	**…**

a) ***Representa los datos en una gráfica***

b) ***Si continúa con la misma velocidad, ¿Qué tiempo tardará en recorrer 5000 m?***

¿Qué conocimientos previos necesitamos?

- Conocer las magnitudes espacio recorrido, tiempo y velocidad
- Conocer como se miden las magnitudes anteriores
- Conocer el concepto de gráfica

¿Qué se podría poner en juego/aprendemos al resolver este ejercicio?

Para resolver esta cuestión nos basamos tanto en los currícula actuales de física y matemáticas para la educación secundaria como en los Aspectos Clave para la Evaluación de competencias el lengua, ciencia y matemáticas del proyecto PISA 2009, no sin olvidar nuestra propia experiencia para afrontar tareas en estas materias. Los aspectos relevantes que consideramos que se ponen en juego son los siguientes:

- Relacionar dos variables
- Manipulación de modos de representación: Tabla y Gráfico
- Conocimiento de una situación en la que la velocidad se mantiene constante a lo largo del tiempo

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados (BOE 2007. Matemáticas 4º ESO)

Algunas datos de interés sobre la actividad.
La actividad elegida está extraída del libro Matemáticas 3º ESO Santillana- Los caminos del saber. Libro que se encuentra actualmente en activo.

La idea de esta actividad, es enfrentarnos a una actividad 'habitual' e los libros de texto de nuestro alumnado, que presente conceptos de otras materias, pero que no necesite de traslación de un dominio real a un dominio matemático y que por lo tanto considerarla actividad en 'contexto real' es una mera ilusión. Sin embargo hemos tenido en cuenta que presente matematización horizontal, es decir la traducción y uso de varios modos de representación.

4.2.1.4. Primera aproximación a la organización de cuestiones relevantes en el presente estudio

Limar las preguntas que queríamos desarrollar en el cuestionario abierto para dar respuesta al objetivo de investigación ha sido uno de los puntos más duros del trabajo, pues traducir a un conjunto de preguntas, no demasiado extenso, el tercer objetivo de investigación, basándonos en la revisión bibliográfica realizada, para un grupo de personas no versadas en el proceso de modelización y sus aplicaciones, no resultó una actividad trivial. Por este motivo las cuestiones fueron sufriendo diversas evoluciones a lo largo del tiempo. Presentamos la primera aproximación a la organización de cuestiones relevantes, a la que todavía le quedaría por cambiar para representar lo que serán los cuestionarios que reciban los profesores de matemáticas en formación. En primer lugar se planteó una traducción del objetivo para desgranar esa pregunta en las cuestiones adecuadas que deberían conformar el cuestionario

¿Creen los profesores de matemáticas (en formación) que el paso del dominio real al dominio matemático es una competencia matemática, o por el contrario, esto le corresponde a otras disciplinas dónde necesitamos las matemáticas como herramienta?

Nótese que ha sido este momento en el que hemos restringido nuestra pregunta a un proceso de matematización horizontal, contenida en un proceso de modelización, pues como ya hemos mencionado en el capítulo anterior consideramos ésta como un punto clave de dicho proceso. Además restringir y formular la pregunta global en términos de dominio real y dominio matemático, hace que no necesitemos una introducción al proceso de modelado para ir extrayendo la información deseada. Esperamos que esto facilite la relación con los informantes.

Algunos de los conceptos esenciales a tener en cuenta para encontrar respuesta a esta pregunta:

- Dominio/Contexto real
- Dominio Matemático
- Actividad Matemática

Un primer intento de cuestionario:

1. ¿Qué contextos, situaciones o ejemplos reales te parecen adecuados para desarrollar las matemáticas en el aula de secundaria?
2. ¿Usarías los ejemplos anteriores como elementos motivacionales o como ejes vertebrador de tu actividad matemática?
3. ¿Crees que un estudio completamente teórico de las matemáticas nos da las herramientas necesarias para ser capaz de usar las matemáticas en contextos que no estén llenos de ellas? ¿Por qué?
4. ¿Cuáles de los siguientes tópicos crees que son competencia matemática, o por el contrario corresponden a otras materias escolares (física y química)? ¿Por qué?

a. El dominio del espacio y del tiempo
b. La organización y optimización de recursos, formas y proporciones
c. La capacidad de previsión y control de la incertidumbre
d. Manejo de la tecnología digital
e. Capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar situaciones reales
f. Generar hipótesis y verificar el ámbito de validez de la solución
g. Expresarse y comunicarse en lenguaje matemático
h. Identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real
i. Representar una situación real simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes.
j. Interpretar enunciados y gráficas
k. Estudio cuantitativo del movimiento rectilíneo uniforme
l. Representar el mismo problema de formas diferentes
m. Comprender la relación lenguaje natural, simbólico y formal
n. Reconocer Isomorfismos con otros problemas ya conocidos
o. Traducir un problema a un modelo matemático
p. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla o gráfica o expresión analítica
q. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias
r. Utilización del modelo para la interpretación y estudio experimental de las leyes de los gases

5. ¿Crees que todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática?

La problemática de restringir las preguntas a un conjunto asequible y el estar realizando el cuestionario en base a la revisión bibliográfica, dio lugar a la celebración de un seminario entre miembros del departamento de Didáctica de la matemática y las ciencias experimentales. De este seminario se extrajeron las siguientes conclusiones:

1. Necesidad de formular preguntas directas. Precisión
2. Minimizar el número de preguntas
3. Fundamental: Jugar con la frontera en las dos actividades

Además se limaron las siguientes preguntas:

1. ¿Consideras que es actividad matemática?
2. ¿Plantearías la actividad en el aula de matemáticas y en que momento o con que finalidad?

Y por último se propusieron algunas preguntas de interés en la investigación para considerarlas a largo plazo

1. ¿El proceso de enseñanza del master de profesorado cambia las ideas sobre modelización?
2. ¿Podemos extraer evidencias de que al estudiar preguntas PISA cambia la creencia de lo que significan las matemáticas?

4.2.1.5. El cuestionario abierto

Teniendo en cuenta las aportaciones realizadas durante el seminario, se llevó a cabo la redacción final del cuestionario abierto que se pasaría al grupo del Máster en educación secundaria. Especialidad: Matemáticas.

Finalmente el cuestionario constaba de dos tareas, una con posibilidad de matematización horizontal y otra no. Cada una de las tareas iba seguida de 7 preguntas que se pueden ver en el anexo III

El planteamiento de proponer estas dos tareas era que en la tarea 1, había implicado un proceso de matematización horizontal y la tarea estaba conectada con la realidad sobre todo porque se planteo como una tarea abierta en la que las estrategias de resolución no estaban definidas. La tarea 2, se eligió porque sólo presentaba matematización vertical y además el propio enunciado del ejercicio indicaba qué representación se deseaba en la solución (una gráfica). En ambas estaba implicado el concepto de velocidad lo que daba el tinte necesario para la vida real y su relación con otras disciplinas, en este caso la física.

De las preguntas propuestas en la primera aproximación solamente se conservó la idea de la pregunta número dos.
La pregunta número cuatro, fue eliminada, pues era un intento de darle un poco de 'seriedad' al cuestionario, y de extraer la información relevante, que posteriormente se canalizó en otras preguntas de carácter abierto, pues nos parecía que de la otra manera se aproximaba demasiado a un cuestionario cerrado y a un sistema de categorías que aún no teníamos disponible.

La redacción del cuestionario ha sido uno de los puntos más complejo y conflictivo de la investigación, somos conscientes de que el proceso de elaboración del cuestionario no se ha desarrollado mediante un proceso riguroso, dónde se haya contrastado la relevancia de las preguntas con expertos, para alcanzar un grado de consenso en cuanto su adecuación para el objetivo de investigación planteado. El cuestionario ha sido elaborado en base a las lecturas realizadas para la realización del presente trabajo, así como teniendo en cuenta las decisiones tomadas en torno a las definiciones de matemáticas escolares y el proceso de modelización, por lo que simplemente pretende ser un estudio exploratorio basándonos en nuestras creencias sobre las matemáticas y ciencias en la educación secundaria, amparados por la revisión bibliográfica realizada. Se ha tratado que sea un cuestionario conciso y directo dónde las preguntas presentasen la mínima ambigüedad posible teniendo en cuenta la dificultad, dadas las circunstancias contextuales en el ámbito de la modelización.

4.3. Desarrollo de la práctica

El desarrollo de la práctica constaba de dos partes diferenciadas:

- Realización del cuestionario abierto
- Grupo de discusión semiestructurado basándonos en las preguntas del cuestionario

Ambas partes se realizaron dentro del marco del Master en profesorado de educación secundaria y bachillerato de la universidad de Almería, con un grupo de 14 personas cuya especialidad dentro del Máster era: Matemáticas. Como ya hemos mencionado en epígrafes anteriores la formación inicial de los encuestados era diversa:

- 6 Licenciados en Matemáticas
- 1 Ingeniero en Telecomunicaciones
- 1 Ingeniera Química
- 1 Arquitecta
- 1 Diplomado en Informática de Sistemas
- 4 Cuya formación inicial desconocemos

La duración del cuestionario fue de aproximadamente una hora y la del grupo de discusión, cuya realización esta documentada a través de la grabación de video y audio, aproximadamente 1 hora y media.

5. Análisis de datos

5.1. La experiencia del grupo de discusión

El debate dentro del grupo de discusión, no sólo se llevo a cabo sino que además se grabó la sesión en vídeo. Finalmente el análisis de video no se llevo a cabo pues no aportaba nueva información a la recabada en los cuestionarios, y había una participación muy superior de algunos informantes frente a otros, lo que podía causar una cierta polarización en las creencias del profesorado al contrastar los cuestionarios (anónimos) con el debate.

Sin embargo, los contras mencionados para la no realización de análisis del video no quieren decir que la realización del grupo de discusión no haya aportado nada a la investigación, ya que resultó una experiencia de enriquecedora desde el punto de vista personal/investigador.

Inicialmente se optó por un grupo de discusión semiestructurado dónde el moderador sería una figura pasiva con casi ninguna intervención para dejar que las ideas surgieran libremente. También se dejó muy claro que no se iban a evaluar los conocimientos científicos de los informantes y por lo tanto las tareas no se debatieron en el grupo de discusión, la intención de esta decisión era no cohibir al grupo. Al realizar la experiencia nos dimos cuenta que lo más relevante no era dejar que las ideas afloransen libremente, pues la resolución de tareas y cuestionarios de forma individual no había sido suficiente para causar controversia, ya que como se veía en los cuestionarios, no se establecía prácticamente distinción entre una tarea y otra, lo que ponía de manifiesto un 'no reconocimiento' del proceso de matematización horizontal como competencia matemática. En caso de repetir la experiencia las tareas habría que resolverlas en el seno del grupo de discusión, considerando ésta la única manera de hacer salir a flote la diversidad de estrategias y errores habituales que ponen de manifiesto que el proceso de modelización es actividad matemática, además de enriquecer el conocimiento de todos los presentes.

Además se optó, por ser inexperta entre otras cosas, por una figura pasiva del moderador, que en mi opinión resultó insuficiente. En futuras ocasiones no dudaría en intervenir más directamente aún a riesgo de sesgar la información, ya que somos nosotros, como moderadores, los que al tener la información sobre el tema a tratar, los que tenemos que provocar que las ideas principales salgan a la luz de una u otra manera.

5.2. Análisis de los cuestionarios

Para realizar el análisis de datos de los cuestionarios, optamos en primer lugar por una transcripción de las preguntas y respuestas a una tabla (Ver anexos IV y V), en la que además añadimos una columna con comentarios sobre las soluciones aportadas: si eran o no correctas y las estrategias de resolución empleadas: conceptos, herramientas… Esta decisión fue tomada debido a la dificultad de realizar el análisis de 14 cuestionarios en formato papel, pues la tabla en formato digital resulta un documento de manipulación mucho más sencilla al poder referirnos a un cuestionario y a una pregunta concreta por filas y columnas respectivamente.

La estructura de la tabla por columnas es la siguiente:

Columna 1	Nº de cuestionario (numerados aleatoriamente)
Columna 2	Sexo
Columna 3	Edad
Columna 4	Formación
Columna 5	Estrategias de resolución
Columna 6-12	Preguntas 1-7 del cuestionario

Se presentan dos tablas de análisis de datos, una por cada actividad planteada a los encuestados, ya que cada actividad presentaba las mismas preguntas.

En lo que respecta al análisis de la información, necesitamos previamente un sistema de categorías que nos permita seleccionarla y ordenarla. Este sistema nace de la revisión bibliográfica en general y del propio objetivo de investigación en particular, así como de la lectura preliminar de los cuestionarios, pues el propio vocabulario del informante procura una manera de clasificar, ya que aparecen conceptos que pueden presentar matices frente a los elegidos durante la revisión bibliográfica. El sistema de categorías propuesto es un sistema inicial, con todo lo que esto conlleva, ya que no se han realizado otros experimentos con otros grupos dónde se pueda comprobar que las categorías se repiten/saturan, ni se ha efectuado un contraste con expertos en la materia. Por otra parte, la propia resolución de la tarea nos proporcionará información, pues aunque no entraremos en calificar los conocimientos científico-matemáticos del profesorado en formación, si revisaremos el uso que han hecho del proceso de matematización horizontal, vertical y el uso de otras herramientas y/o conceptos matemáticos, pues entendemos que en el propio *hacer matemático* también se manifiestan las creencias sobre el mismo.

Para gestionar el sistema de categorías, seleccionar la información relevante y analizar los datos nos ayudamos del programa de análisis cualitativo de datos Atlas.ti 6.2

Los códigos manejados para el análisis de datos son utilizados para señalar dónde aparecen esos conceptos directa/indirectamente a lo largo de los cuestionarios al completo, dando una idea general sobre las ideas que sustentan cada actividad.

Para presentar los códigos seleccionados podemos clasificarlos en tres subtipos. Los que nacen a priori de la lectura de los cuestionarios, como conceptos relevantes y para dar respuesta al objetivo de investigación, los códigos que hacen referencia a herramientas o conceptos matemáticos y los códigos que nacen de las respuestas aportadas a los cuestionarios.

A priori	***Herramientas o Conceptos Matemáticos***	***Emergentes de los cuestionarios***
		Abstracción
		Argumentar
Conectar con la realidad		
Experiencia		
	Funciones cuadráticas	
	Funciones Lineales	
	Gráficas	
		Matemáticas Aplicadas
Matematización Horizontal		
Matematización Vertical		
Modelizar		
		Pensar
	Proporcionalidad	
		Razonar
	Regla de 3	
		Recordar fórmulas/necesidad de conocimientos de física
Relación con otras materias		
	Tablas	

En lo que respecta a los códigos, encontramos la necesidad de hacer un par aclaraciones. Nótese que entre los códigos a priori y los que nacen de la lectura de los cuestionarios, puede parecer que tenemos algunas parejas que proporcionan la misma información:

1. Conexión con la realidad- Matemáticas Aplicadas
2. Relación con otras materias- Recordar fórmulas/necesidad de conocimientos de física

3. Relación con otras materias- Matemáticas Aplicadas

Encontramos que estas tres parejas de códigos cuya fuente está localizada en senos de información diferentes, podrían en una primera aproximación englobarse dentro del mismo código o clave para ser identificadas dentro de un texto, sin embargo consideramos que esta manera de expresarse, por ejemplo: *conexión con la realidad* o *matemáticas aplicadas*, podrían presentar matices diferentes, los cuales podrían ir generando un buen sistema de categorías si el experimento se fuera repitiendo con diferentes grupos de profesores de matemáticas en formación. Siendo el discurso la fuente de información de la que disponemos para este tipo de experimentos debemos actuar con cautela en lo que a los matices semánticos se refiere. Si nos fijamos en la segunda pareja, notamos como hemos querido ser conservadores (decisión que hemos tomado durante todo el experimento, quizás no acertadamente, pero nuestros motivos teníamos) pues nuestro código a priori, encapsulaba cualquier mención a la *relación con otras materias*, sin embargo la manera de expresarse de nuestro forum resultó ser algo más específica y necesitamos por tanto la categoría *Recordar fórmulas/necesidad de conocimientos de física.* La necesidad de esta categoría tras la lectura de los cuestionarios, arrojaba algo de luz sobre la 'bondad' de la elección de las actividades elegidas, puesto que la materia de 'Física' brotaba sin ningún tipo de interacción con los futuros profesores de matemáticas que la propia actividad que ellos estaban realizando individualmente.

Finalmente, para analizar los datos, realizaremos en primer lugar un estudio de la frecuencia con la que aparecen los códigos en los cuestionarios, y en segundo lugar un análisis del cuestionario por columnas, es decir analizando cada una de las preguntas que les fueron planteadas a los informantes, en el mismo orden en el que ellos mismos las contestaron.

5.3. Frecuencia con la que aparecen los códigos en los cuestionarios

En primer lugar en el análisis de datos realizaremos un estudio de las frecuencias con las que aparecen los códigos elegidos en cada una de las actividades, esto nos dará las ideas generales que sustentan cada una de las tareas elegidas. En la siguiente tabla mostramos las frecuencias con las que aparecen los códigos por orden alfabético.

5.3.1. Recogida de Datos

Códigos	Frecuencia-Golpe de Golf	Frecuencia: Atletismo
Abstracción	2	0
Argumentar	1	0
Conexión con la realidad	4	7
Experiencia	3	1
Funciones cuadráticas	1	0
Funciones lineales	0	3
Gráficas	1	11
Matematización Horizontal	1	1
Matematización Vertical	0	1
Matemáticas aplicadas	3	0
Modelizar	2	2
Pensar	2	1
Proporcionalidad	0	2
Razonar	9	4
Recordar fórmulas/necesidad de	8	3

conocimientos de física		
Regla de 3	0	2
Relación con otras materias	7	4

5.3.2. Interpretación de resultados

En lo que atañe a las diferentes categorías seleccionadas para el análisis de cuestionarios, vamos a contrastar en las dos tareas con más detalle los siguientes:

Conexión con la realidad
Matematización horizontal
Matematización vertical
Recordar fórmulas/necesidad de conocimientos de física
Relación con otras materias

Ya por ser conceptos que vertebran la revisión bibliográfica, como *la conexión con la realidad* o el proceso de *matematización horizontal,* o bien por presentar frecuencias altas en los cuestionarios, como *la necesidad de recordar fórmulas o la relación con otras materias.* Se puede observar en la tabla de frecuencias que la actividad 2 es vista como una actividad más ligada con la realidad que la actividad 1. Sin embargo, la relación con otras materias es superior en ésta actividad. Esto nos lleva a la esencia del objetivo sobre las creencias del profesorado en formación sobre el uso de otras disciplinas como contexto real en el aula de matemáticas. Tras la revisión bibliográfica nos ha quedado claro que esta relación entre los contextos reales y las matemáticas, no existe sin un proceso de matematización horizontal, ya que sin este es posible pasar por aplicaciones matemáticas sin salirse estrictamente del dominio matemático y por tanto sin la necesidad de conocimiento de conceptos e interpretación de los resultados.

El recordar fórmulas o la necesidad de conocimientos de física que no se recuerdan para poder resolver correctamente la tarea, se hace mucho más evidente en la resolución de la tarea 1. Esto es de interés, ya que en ambos casos el concepto físico subyacente necesario es el concepto de velocidad. Esto nos hace pensar que el proceso de matematización horizontal en el que no damos pautas para las estrategias de resolución, causa inseguridad. Vemos de nuevo que este proceso de moverse de una situación física real a un lenguaje matemático no está dentro del saber hacer matemáticas, ya que se observa la necesidad de poner de manifiesto la falta de fórmulas y/o conocimientos de física, lo cual no ocurre si el problema está perfectamente definido como es el caso de la tarea 2.

El proceso de matematización horizontal aparece mencionado en dos ocasiones, no con esas palabras sino como 'trasposición a términos matemáticos', lo curioso es que ambas ocasiones son en el mismo cuestionario, es decir respuestas aportadas por un mismo estudiante. Una por cada tarea y por tanto considera que ambas tareas presentan la misma necesidad de 'trasponer a términos matemáticos'

5.4. Estrategias de resolución

Para realizar el estudio de las estrategias de resolución utilizamos las tablas que se pueden ver en el anexo… Como ya hemos mencionado, estamos estudiando la tabla por columnas, las estrategias de resolución corresponden al estudio de la columna 5, etiquetada del mismo modo que el epígrafe al que da nombre.

5.4.1. Interpretación de resultados

A la vista de los resultados recogidos en el anexo…

En lo que respecta a las estrategias de resolución de las tareas planteadas de los cuestionarios con la tarea 1: *Golpe de Golf*, resuelta correctamente, todas las respuestas son verbales. También se encuentran otras soluciones que presentan fórmulas y objetos matemáticos, pero que no dan respuesta a la pregunta planteada. Se observa por tanto que en ningún caso se siente la necesidad de matematizar la solución. Asociamos esto a dos motivos no excluyentes:

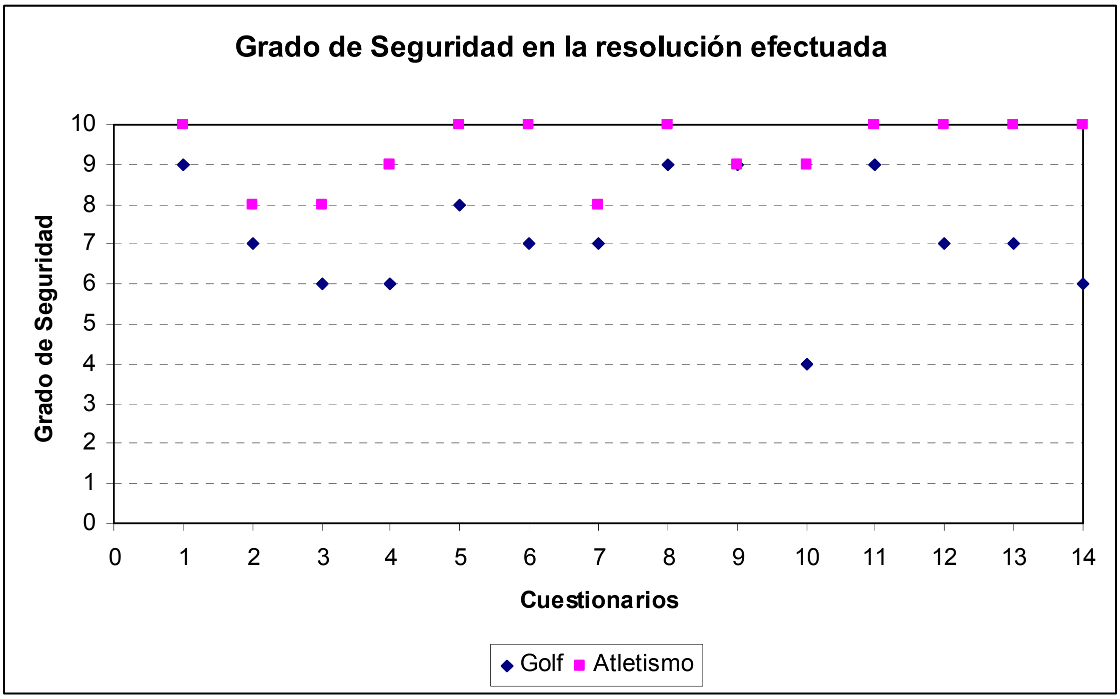
- La actividad en sí misma, no necesita del lenguaje matemático para ser resuelta, aunque si se podría resolver con elementos matemáticos.
- Los profesores de matemáticas en formación no tienen asumido este proceso como algo natural en su práctica matemática, por lo que si no se explicita el uso de las matemáticas en el enunciado no consideran necesario efectuar ese paso de un dominio a otro.

Por otra parte, la tarea 2: *Atletismo* es resuelta correctamente por todos los informantes, aunque aparecen varias estrategias de resolución, todas ellas elaboradas en lenguaje matemático.

Estas diferencias en las soluciones y en el modo de elegir estrategias de resolución, ponen de manifiesto que realmente las tareas elegidas presentan diferencias en lo que al concepto de matemáticas escolares se refiere, lo cual aporta su granito de arena a la bondad de los cuestionarios planteados.

5.5. Grado de Seguridad

5.5.1. Recogida de Datos



5.5.2. Interpretación de resultados

Observamos que la actividad *Atletismo*, provoca grados de seguridad en la resolución efectuada mayores que en la actividad *Golpe de Golf*, salvo en el cuestionario 8 que presentan el mismo grado de seguridad. El rango de variación entre la seguridad de la actividad 1 y el de la actividad 2 oscila entre [0, 5] puntos.

5.6. ¿Es actividad matemática?

5.6.1. Recogida de Datos

A la pregunta de si las tareas planteadas son o no actividad matemática, solamente encontramos un caso (cuestionario 14) en el que se considera que la tarea golpe de Golf no es directamente actividad matemática. Sin embargo, posteriormente ofrece argumentos por los cuales las matemáticas están presentes:

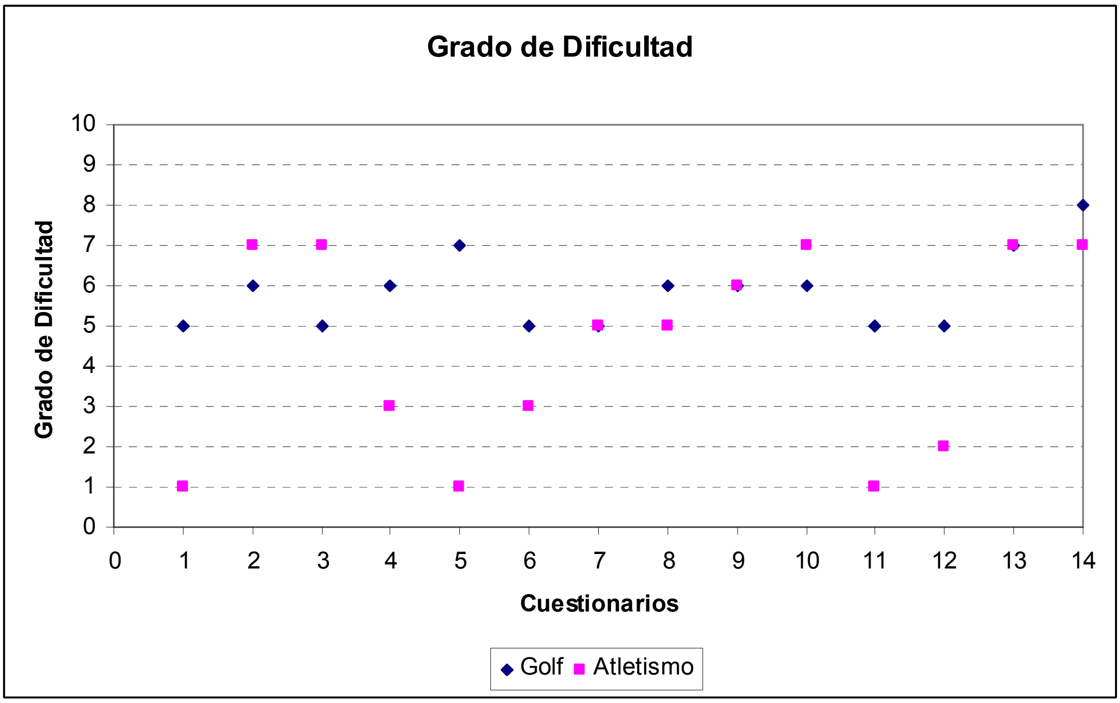
Bueno, no es realmente una actividad relacionada con los contenidos matemáticos pero indirectamente si ya que la velocidad es una derivada y por otra parte es bueno que los alumnos relacionen contenidos de distintas asignaturas para resolver una actividad.

5.6.2. Interpretación de resultados

Asociamos esta respuesta masiva a que sí es actividad matemática, a que los encuestados están familiarizados con las tareas matemáticas propuestas en el informe PISA. Esta pregunta sobre si es actividad matemática la reconsideraremos más adelante teniendo en cuenta su relación con si los encuestados la plantearían en el aula de secundaria/ bachillerato, por lo que la interpretación de los resultados se concluirá en dicho epígrafe.

5.7. Grado de Dificultad

5.7.1. Recogida de Datos



5.7.2. Interpretación de resultados

En tres de los cuestionarios la tarea *Atletismo* es considerada más compleja que la tarea *Golpe de golf.*

En dos de los cuestionarios ambas tareas son consideradas con el mismo grado de dificultad.

En las 9 restantes la tarea Golpe de Golf es considerada más compleja que la tarea Atletismo. El rango oscila entre [1, 6] puntos.

5.8. ¿Plantearías la actividad en el aula de secundaria/bachillerato?

5.8.1. Recogida de Datos

La actividad *Golpe de golf* sería planteada por 11 de los informantes y no sería planteada por los 3 restantes, los motivos por los cuales no plantearían la actividad son los siguientes:

> *-No, que la plantee el de física.*
> *- No a alumnos de matemáticas ya que no se pide que deduzcas la ecuación del movimiento. Sino que sepas deducir uno más bien de física. Yo lo plantearía en grupos de bachillerato; en secundaria no se plantean este tipo de conocimiento.*
> *- No estoy segura, probablemente no porque preferiría hacer otro tipo de actividades más interesantes desde el punto de vista de conseguir competencias matemáticas, o más relacionadas con contenidos que hemos estado viendo a lo largo del curso.*

Entre los argumentos a favor de plantearla encontramos

- Que es una buena actividad de razonamiento y comprensión.
- Es una buena actividad para pensar y argumentar.
- Conecta las matemáticas con la realidad.
- Si porque es una buena actividad para ver como dos variables se representan en una gráfica.

La actividad *Atletismo* sería planteada por todos los informantes, menos por uno que la considerada demasiado fácil.

Entre los argumentos a favor de plantearla encontramos:

- Es un problema ligado a la realidad.
- Es una actividad de funciones lineales y gráficas.
- Ayuda a desarrollar la capacidad de cálculo.
- Ayuda a desarrollar competencias como pensar y razonar.

5.8.2. Interpretación de resultados

En la tarea *Golpe de golf*, encontramos que a pesar de que es considerada actividad matemática no todos la plantearían en el aula de matemáticas, bien por considerarla competencia de otras disciplinas o bien por la creencia de que otras tareas representan mejor los conceptos matemáticos aprendidos durante en curso. Dentro de los argumentos a favor de plantear la tarea, encontramos que muchas de las palabras utilizadas por los informantes coinciden con las competencias mencionadas en el informe PISA, como: pensar, argumentar, razonar… lo que hace suponer que el conocimiento y tratamiento de estas actividades provoca cambios en lo que a las creencias del profesorado en formación se refiere y por este motivo se encuentran contradicciones entre su manera de afrontar las tareas y su pensamiento sobre lo que consideran o no actividad matemática y los porqués de plantearla en el aula de secundaria/bachillerato.

Me gustaría reseñar dentro del argumento a favor de plantear la actividad:

> *Es una buena actividad para el tema de funciones para que los niños se den cuenta de que variables con la que se representan en una gráfica*

Este tipo de afirmaciones resultan cuanto menos curiosas, si tenemos en cuenta que nadie abordó la tarea golpe de golf mediante una gráfica. Es pues éste un ejemplo de las discrepancias entre nuestro hacer matemático y lo que consideramos matemáticas escolares.

En los argumentos mencionados para considerar la tarea 2, apta para proponerla en aula, aparecen con mayor frecuencia referencias a conceptos/destrezas matemáticas y además los mencionados en la tarea 1 como: pensar, razonar, argumentar y la relación con la vida cotidiana. La aparición de más conceptos/destrezas matemáticas la asociamos a que es una actividad preparada para desarrollar el proceso de matematización vertical lo que hace más evidente las estrategias de resolución

5.9. Las tareas y el momento de realización dentro del proceso de Enseñanza- Aprendizaje (E-A)

5.9.1. Recogida de Datos

La pregunta 6 del cuestionario reza lo siguiente:

Supogamos que vas a dar un tema concreto, por ejemplo, funciones y gráficas. Otorga un valor entre 1 y 10 a la pertinencia de la tarea para su utilización en cada uno de los siguientes momentos del proceso de enseñanza aprendizaje:

Utilización de la tarea dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje	**Pertinencia de la tarea** (1 no es adecuado utilizar la tarea en ese momento, 10 es muy adecuado utilizarla en ese momento)
Como anécdota inicial para introducir un tema	
Como elemento motivador	
Cómo una tarea más dentro de la actividad matemática del aula	
Como eje del proceso de enseñanza/aprendizaje	

En caso de que el informante no considerase la actividad apta para plantearla en el aula de secundaria y/o bachillerato, quedaba exento de completar la tabla anterior y se le asignaría automáticamente un cero a cada casilla.

Hemos realizado un promedio de los valores asignados en cada uno de los cuestionarios, obteniendo los siguientes resultados:

Utilización de la tarea dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje	**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 1/Tarea 2**
Como anécdota inicial para introducir un tema	5,46	6,54	0,84
Como elemento motivador	6,54	6,46	1,01
Cómo una tarea más dentro de la actividad matemática del aula	4,69	7,23	0,65
Como eje del proceso de enseñanza/aprendizaje	5,15	6,38	0,81

5.9.2. Interpretación de resultados

Si tenemos en cuenta el momento en el que plantear las tareas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, observamos que en promedio la tarea 2 se considera más apta para ponerla en práctica en el aula de secundaria. Salvo cuando se trata de elemento motivador que ambas tareas son consideradas en el mismo nivel de importancia.

5.10. Tipo de tarea

5.10.1. Recogida de Datos

La tarea 7 enunciaba lo siguiente:

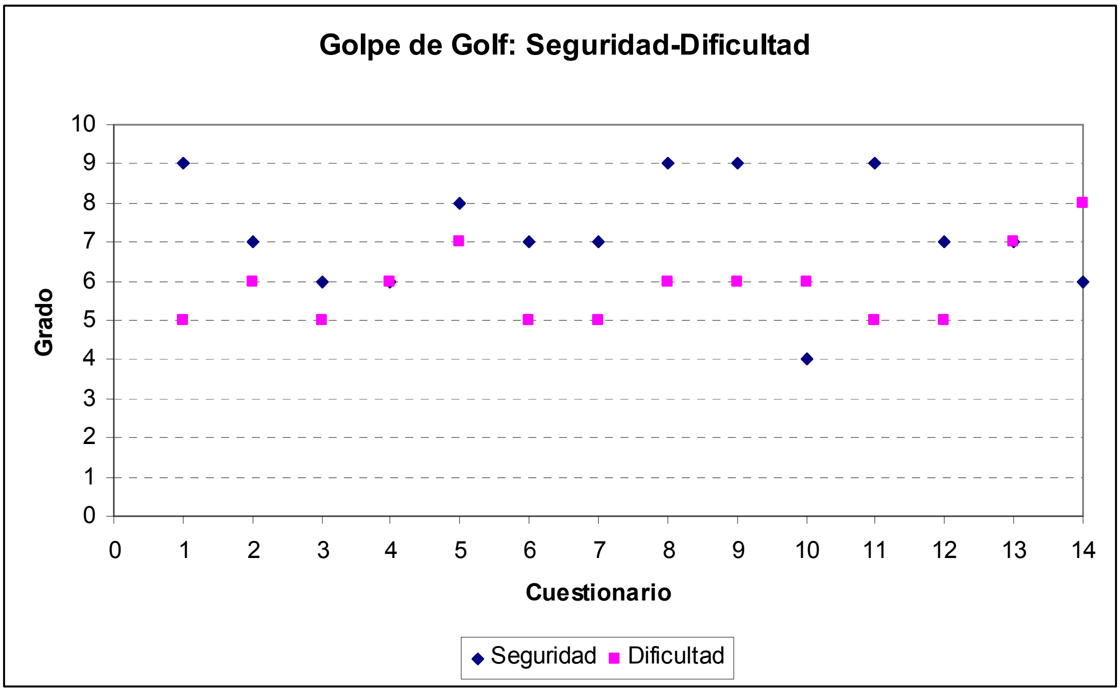
Según tu opinión, enmarca la tarea en alguna de las siguientes definiciones:

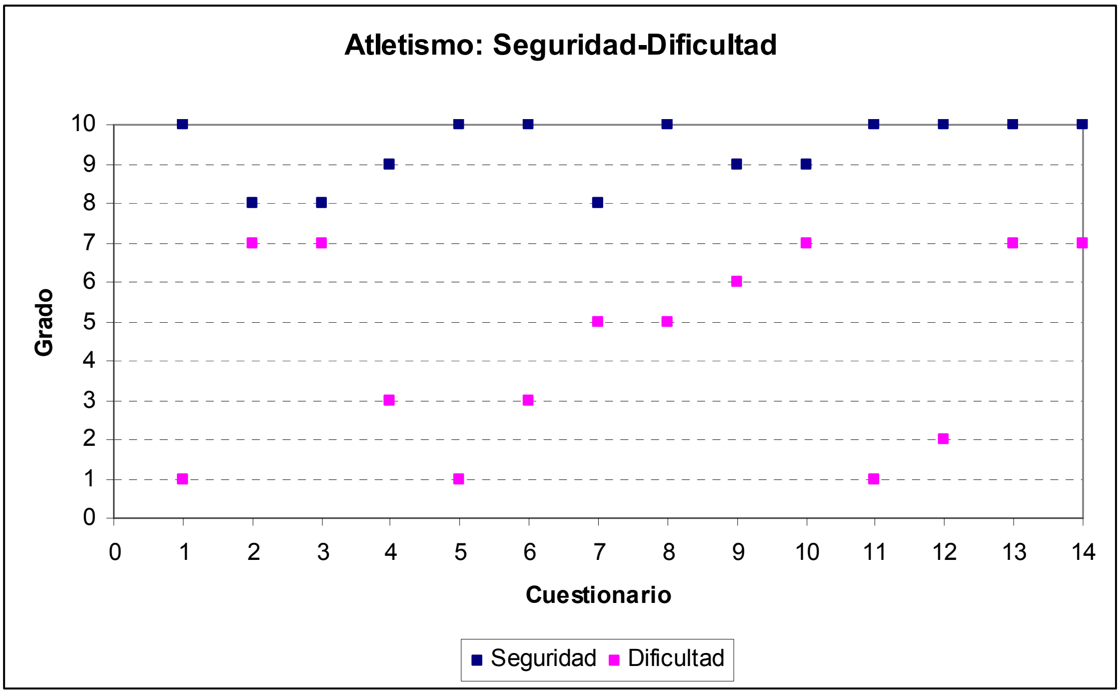
a. *Tarea para aumentar la habilidad y eficacia de los alumnos en recordar hechos básicos, definiciones y reglas*
b. *Tarea para aumentar la rapidez y exactitud de los estudiantes en resolver problemas rutinarios*
c. *Tarea para hacer que los estudiantes se impliquen en formas de razonamiento más complejas y desarrollar destrezas de comunicación*.

Presentamos a continuación una tabla dónde se muestra la frecuencia con la que se considera cada tipo de tarea en las dos actividades planteadas.

Tipo de Tarea	Golf	Atletismo
a	3	6
b	1	4
c	10	4

5.11. Relación entre el grado de Seguridad y el Grado de Dificultad.





5.11.1. Interpretación de resultados

En la gráfica que muestra las series seguridad-Dificultad para la tarea Atletismo se ve claramente la relación más seguridad, menos dificultad, lo cual no resulta tan evidente en la misma gráfica obtenida para la tarea golpe de golf. Este tipo de resultados nos reafirma en la complejidad para entender- interpretar la tarea *golpe de golf* por los informantes, pues sus respuestas siempre resultan más *desordenadas* que en el caso de la tarea *Atletismo.*

Además si calculamos el cociente entre el grado de seguridad y el grado de dificultad para cada tarea observamos lo siguiente:

	Tarea 1: Golpe de Golf	Tarea 2: Atletismo
Grado de Seguridad	9,3	7,2
Grado de Dificultad	5,9	4,6
Cociente	1,2	2,0

5.12. Relación entre el Tipo de Tarea y el Momento de plantearla dentro del proceso de E-A

En esta pregunta del cuestionario la repuesta de 10 sujetos de 14, es decir el 71% de los encuestados consideran que la tarea Golpe de Golf es una:

Tarea para hacer que los estudiantes se impliquen en formas de razonamiento más complejas y desarrollar destrezas de comunicación

Sin embargo, el momento en el que consideran más oportuno desarrollar esta actividad es como elemento motivador.

Si bien es cierto que los promedios calculados para el momento de utilización de la tarea Golpe de golf no oscilan demasiado, ya que el rango recorre desde [4,69;

6,54], si presentan una variación mayor en comparación con la tarea atletismo. Siendo el elemento motivador, la única categoría comparable en ambas actividades.

En lo que respecta a la tarea Atletismo, el 43% de los encuestados la enmarcan como una:

> *Tarea para aumentar la habilidad y eficacia de los alumnos en recordar hechos básicos, definiciones y reglas*

Y en promedio el momento ganador para desarrollarla dentro del aula es *Como una tarea más dentro de la actividad matemática en el aula.* Categoría cuya comparación entre promedios en ambas tareas se lleva el menor índice.

Podemos concluir que la tarea 2 resulta más familiar en lo que actividad matemática se refiere que la tarea 1, cuando tratamos de enmarcarlas dentro del aula.

Estos resultados fruto del contraste entre el momento de utilización y tipo de tarea, nos dan una idea sobre las creencias del profesorado en formación sobre la modelización como eje vertebrador dentro del aula, pues actividades que consideran *más ricas* en lo que a las formas de razonamiento y destrezas de comunicación se refiere, son relegadas a papeles motivadores y no como actividades habituales dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

6. Conclusiones

Al comienzo del trabajo pretendíamos conocer *la situación actual de las matemáticas en la legislación* y *las creencias del profesorado de matemáticas en formación sobre el proceso de modelización en el aula de secundaria.* Al respecto podemos extraer algunas conclusiones como resultado de la implementación de algunas técnicas e instrumentos.

En lo que respecta al objetivo 1, relacionado con el análisis curricular, en la legislación actual el papel de las matemáticas no se resume a un papel meramente cuantificador, sino que su relación con otras disciplinas y con el mundo real resulta esencial dentro del programa y del 'saber hacer matemáticas'. Todo esto no sólo se encuentra reflejado en nuestro currículo sino que está avalado por numerosos artículos de investigación cuya propuesta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina pasa necesariamente por relacionarla con el mundo real y con otras áreas, encontrando argumentos sólidos para que la física sea uno de esos contextos relevantes para el estudio de las matemáticas en diversidad de niveles educativos, en concreto los que nosotros tratamos que son: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Sobre las conclusiones obtenidas derivadas del desarrollo teórico del objetivo 2, relacionado con el proceso de modelización, podemos afirmar que el concepto de modelo resulta francamente complejo, sobre todo debido a su carácter polisémico, por lo que nosotros hemos optado por asumir una de las definiciones que se ajusta a nuestro modo de entender los procesos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas y ciencias. En lo que respecta al proceso de modelización, se han tomado una serie de decisiones basándonos fundamentalmente en intentar derrocar la idea equívoca de lo que es un contexto real, ya que estos no existen dentro de un proceso de E-A si no hay dos dominios (real y matemático) sobre los que trabajar. Por ello la conclusión de más relevancia sobre modelización resulta que ésta no puede darse sin un proceso de matematización horizontal, lo cual nos exige la necesidad aprender a traducir de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático.

Para finalizar, haremos referencia al tercer objetivo planteado en la presente investigación. En lo que respecta a las creencias del profesorado de matemáticas en formación, podemos concluir como un primer análisis exploratorio, que los profesores son conocedores de una necesidad de cambio en lo que a las matemáticas escolares se refiere y que estas deben relacionarse con otras áreas del saber y con situaciones reales, sin embargo en su propia práctica no reconocen los procesos que diferencian esa 'manera' de hacer matemáticas en la que la traducción del mundo real al matemático representa el papel fundamental de procesos de traducción entre una representación matemática y otra (matematización vertical). Recordemos que la elección de presentar dos tareas, se basaba en la necesidad de comprobar si los profesores en formación distinguían un contexto real dónde necesariamente existe el paso del 'lenguaje/dominio/situación' cotidiana a un 'lenguaje/dominio/situación' matemática, observamos que en lo que respecta a ser una actividad ligada con la realidad, no observamos distinciones entre una actividad y otra. El reconocimiento de lo que es actividad en contexto real, queda reducido a la resolución de problemas sin profundizar en las traducciones de lenguaje. Identifican como actividad matemática sin ninguna duda tareas 'clásicas' que presentan matematización vertical ya que no les es costoso clasificar las herramientas matemáticas necesarias, que proporcionen los argumentos necesarios para los porqués de plantearla en el aula, sin embargo esta claridad no está presente en tareas abiertas que requieren de un proceso de matematización horizontal. En algunos casos, son capaces incluso de reconocer las relaciones de las tareas abiertas con las herramientas o destrezas matemáticas implicadas, aunque en ningún caso aparecen reflejadas en su 'hacer matemático'.

Los futuros profesores de matemáticas, reconocen actividades relacionadas con otras áreas del saber con la posibilidad de efectuar un proceso de matematización horizontal para su resolución como actividad matemática, aunque su opinión sobre plantearla en el aula es mucho más conservadora que frente a tareas clásicas dónde sólo encontramos procesos de matematización vertical. Esto podemos verlo reflejado en diversos factores encontrados a lo largo del análisis de los cuestionarios:

1. En primer lugar, en la actividad *Atletismo* no se encuentran discrepancias entre la forma de resolver la tarea y los argumentos ofrecidos para clasificarla como actividad matemática y plantearla en el aula, lo cual no ocurre sistemáticamente en la tarea 1.
2. En segundo lugar, el grado de seguridad en la resolución de la tarea *Atletismo* es significativamente más elevado que en la tarea *Golpe de Golf*.
3. La relación promedio entre el grado de seguridad y el grado de dificultad es prácticamente el doble en el caso de la tarea Atletismo, lo que proporciona un indicador sobre la mayor *familiaridad* de esta tarea para los informantes.
4. Ambas tareas son consideradas actividad matemática, sin embargo la tarea *Atletismo* es más *popular* a la hora de ser planteada en el aula.
5. La actividad *Golpe de Golf*, es considerada como una tarea que hace que los estudiantes se impliquen en formas de razonamiento más complejas y desarrollen destrezas de comunicación, sin embargo asocian este tipo de tareas a elementos motivadores.
6. La actividad *Atletismo* es considerada por la mayoría como una tarea para aumentar la habilidad y eficacia de los alumnos en recordar hechos básicos, definiciones y reglas y alcanza su máximo de popularidad como una tarea más dentro de la actividad matemática del aula.

Todo esto nos lleva a concluir que el proceso de matematización horizontal no es un proceso asumido por los profesores de matemáticas en formación en su práctica, ni reconocido como una competencia matemática, causa que conlleva una mala interpretación del significado de actividades relacionadas con contextos reales y en consecuencia, del concepto modelización, significante que si mencionan a lo largo de los cuestionarios. Sus clasificaciones de las tareas dentro de tipo y momento del proceso de enseñanza-aprendizaje, nos hace concluir que no existen motivos para creer que los profesores consideren actividades que impliquen razonamientos más complejos y destrezas de comunicación como actividades habituales dentro del aula, sin embargo la falta de comprensión y reconocimiento sobre el proceso de matematización horizontal podría ser la causa de dichas creencias, pues sin conocer en profundidad el pilar fundamental que sustenta este tipo de actividades, ¿Cómo tener una idea sólida al respecto?

Cuando planteamos el apartado b)

Describir las creencias del profesorado en formación sobre el uso de la física como contexto real en el aula de matemáticas:

Contenido dentro del objetivo 3:

Creencias del profesorado en formación sobre el uso del proceso de modelización como eje vertebrador del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula de secundaria.

No sabíamos a ciencia cierta cuales iban a ser las respuestas del profesorado en formación, por lo que tenía cabida plantearnos darle una respuesta completa. A posteriori, y conociendo la respuesta al apartado a) del mismo objetivo

Reconocimiento por parte del profesorado en formación sobre el proceso de matematización horizontal en actividades matemáticas.

Ya comentado en párrafos anteriores

Quizás parte del problema para dar respuesta al apartado b) sea que la respuesta al reconocimiento del proceso de matematización horizontal, es negativa

Como ya hemos mencionado en las reflexiones de la investigación, se tomaron medidas muy conservadoras a la hora de desarrollar el grupo de discusión y de plantear las actividades desde un punto absolutamente individual, con la intención de no intimidar o cohibir a los informantes. Probablemente ese exceso de cautela sea contraproducente si queremos llegar al fondo de una cuestión tan compleja como es la traducción de situaciones físicas (o cotidianas, pues cada uno elige el termo de dónde quiere sacar las actividades del *mundo real*) a lenguaje matemático en cualquiera de sus representaciones. Sin embargo esta cautela también nos ha proporcionado ventajas, pues hemos podido ver claramente, como el lenguaje de los profesores de matemáticas en formación tiene carencias como: proceso de matematización (horizontal y vertical), traducción de lenguaje, establecimiento de dos dominios diferenciados y conceptos aprendidos cuyos matices en nuestro entendimiento provocan la diferencia entre las maneras de *hacer matemáticas.* Como ocurre con el famoso proceso dentro del presente trabajo: ***Modelización.***

7. Líneas abiertas

Las conclusiones extraídas nos llevan a establecer la necesidad de formación de profesorado específica en torno a procesos de modelización en el aula así como a la creación de material didáctico para el aula.

Por estos motivos algunas de las propuestas de continuación del presente trabajo podrían seguir las siguientes líneas:

- Revisión de actividades que presenten procesos de matematización horizontal en los libros de texto actuales para los niveles de secundaria y bachillerato
- Elaboración de unidades didácticas que permitan desarrollar al profesorado en activo procesos de matematización horizontal en el aula.
- Elaboración de unidades didácticas sobre modelización para profesores de secundaria y bachillerato en formación, dentro del marco del máster de profesorado.

8. Referencias

Alonso, L.E (1996) El Grupo de discusión en su práctica. Memoria social: intertextualidad y acción comunicativa. *Revista internacional de sociología- Tercera Época nº 13* Enero- Abril 1996. Páginas 5-36

Callejo J (2002) Observación, entrevista y grupo de discusión: El silencio de tres prácticas de investigación. *Revista Española de Salud Pública,* Septiembre-Octubre, Vol.76, número 5. Ministerio de Sanidad y consumo España pp. 409-422

Canales, M y Peinado, A (1994) Métodos y Técnicas en investigación en ciencias sociales Delgado JM y Gutiérrez J (Eds) *Grupos de discusión* (Capítulo 11) Madrid Síntesis

De Lange J, Goddijn A, Roodhardt A, Krabbendam H (1989) Las matemáticas en la enseñanza secundaria. Materiales didácticos diseñados en el OW &OC (antiguo IOWO). Salamanca: ICE

Díez, A (2011) *Evaluación del rendimiento aritmético. Un estudio comparativo.* Memoria de TESIS DOCTORAL para optar al grado de doctor en la especialidad de Didáctica de las Matemática. Universidad de Granada. España

Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education
Disponible en:
http://www.fisme.science.uu.nl/fisme/en/

Hestenes D. (2010) Modeling Theory for Math and Science Education. R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines, A. Hurford. *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* (Chapter 3) Ed. Springer

Hierrezuelo J, Montero A, (1991) La Ciencia de los alumnos Su utilización en la didáctica de la Física y Química. Granada: Ed ELZ

Lesh R, Galbraith P.L, Haines C.R, Hurford A. 2010. *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA 13.* (págs 1-13) Ed. Springer

Lesh R and Fennewald T (2010) *Introduction to Part I Modeling: What is it? Why do it?* ICTMA 13 (Chapter 2) Ed Springer

Marja Van Den Heuvel-Panhuizen (2003). The didactical use of models in Realistic mathematics education: An example from longitudnal trayectory on percentage *Educational Studies in Mathematics* ***54:*** 9–35

Meyer, D. (2010) *Math Class needs a Makeover* [Video]
Disponible en:
http://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover.html

Mitra, Sugata (2010) The child-driven education
Disponible en:
http://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover.html

Olaf Uhden, Ricardo Karam, Mauricio Pietrocola, Gesche Pospiech (2011). *Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education* (Manuscrito no publicado) Springer Science+Business Media B.V. 2011

Pajares R, Sanz A., Rico L. Aproximación a un modelo de evaluación: El proyecto PISA 2000. Ministerio de educación cultura y deporte

PISA (Program for International Student Assessment) 2009. Assesment Framework Key competencies in reading, mathematics and science

Rico L, Marín A, y Romero I, (1997) Fines de la educación matemática y proyectos curriculares. En, Luis Rico Romero (Ed) *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* pp 319-374

Rico L, (1997) Dimensiones y componentes de la noción de currículo En, Luis Rico Romero (Ed) *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* pp 377-414

Rico L (2006) Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación 2006.* INECSE (Instituto nacional de evaluación y calidad del sistema educativo).

Shell Centre for Mathematical education (1990). *Lenguaje de funciones y gráficas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Bilbao: Ministerio de Educación y Ciencia. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Font V, Godino J.D, Goñi J.M, Planas N (2011) *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas.* Barcelona: Ed GRAÓ

Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans Wolfgang Henn and Mogens Niss. 2007 *Modelling and Applicatios in Mathematics Education. The 14th ICMI Study VOL 10.* (págs 3-33) Ed. Springer.