



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Máster en Matemáticas

Trabajo Fin de Máster:

**Estabilidad de soluciones de ecuaciones en  
derivadas parciales de tipo elíptico.  
El problema de Gelfand.**

Alicia Cabrerizo Lamarca

Septiembre 2017

---

Director:  
José Carmona Tapia



# Índice general

Introducción . . . . .	I
<b>1 Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1 Los espacios $L^p(\Omega)$ . . . . .	5
2.2 Espacios de Sobolev . . . . .	6
2.3 Principio del máximo . . . . .	9
2.4 Problema de autovalores . . . . .	12
2.5 Existencia y unicidad de soluciones de EDO . . . . .	13
2.6 Teoría cualitativa. Sistemas autónomos . . . . .	15
2.7 Resultado de Gidas-Ni-Nirenberg . . . . .	16
<b>3 Estabilidad</b>	<b>17</b>
3.1 Ejemplos de soluciones estables . . . . .	22
3.2 Estabilidad lineal. Valor propio principal del operador linealizado	25
3.3 Nuevos ejemplos de soluciones estables . . . . .	25
3.4 Propiedades elementales de las soluciones estables . . . . .	29
<b>4 El problema de Gelfand</b>	<b>39</b>
4.1 Motivación y resultado principal . . . . .	40
4.2 Dimensión $N = 1$ . . . . .	42
4.3 Dimensión $N = 2$ . . . . .	50
4.4 Dimensión $N \geq 3$ . . . . .	56
<b>5 Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Introducción

El primer contacto que tuvimos relacionado con la materia que se expone fue durante el Grado en Matemáticas en la asignatura de ecuaciones diferenciales II, cursada en el tercer año. En ésta abordamos el estudio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, que empezó a desarrollarse a partir de la segunda mitad del siglo XIX. Estudiamos la estabilidad para sistemas diferenciales ordinarios donde pretendíamos ver si la evolución que sigue un sistema a lo largo de todo el tiempo en el que está definido se ve afectado o no por cambios pequeños en las condiciones iniciales. Para un sistema que depende del tiempo, uno de los métodos tratados fue el método directo de Lyapunov. Inspirado en una visión física, Lyapunov consideraba que en cada punto del espacio de fases el sistema tiene una energía potencial y los puntos críticos son aquellos con energía potencial nula. Si además en un punto crítico la energía potencial tiene un mínimo local estricto y para cada solución con dato inicial cercano al punto crítico la energía potencial es función decreciente del tiempo, entonces para  $t$  divergente positivamente dicha energía tiende a cero y dicho punto crítico será estable.

En general, la estabilidad de un sistema se puede estudiar cuando las soluciones de ese sistema sean en cierto modo los puntos críticos de un funcional de energía potencial. Por esto, se trata en estos casos de dar una definición conveniente de estabilidad de manera que se siga verificando la condición suficiente anterior, que los puntos de mínimo correspondan con puntos estables.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de la estabilidad del problema de contorno elíptico de segundo orden

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado con frontera suave y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R})$ . El interés de este problema radica en que modeliza

numerosos fenómenos físicos y matemáticos en su manera más simple.

Las soluciones de (1) se pueden ver como los puntos críticos de un funcional, que se llama funcional de energía, definido en  $X = C_0^2(\bar{\Omega})$

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u) dx, \quad (2)$$

donde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2(\mathbb{R})$  primitiva de  $f$ . Por tanto, estudiaremos una definición de estabilidad para soluciones de (1) (o equivalentemente puntos críticos de (2)) y comprobaremos que los puntos de mínimo corresponden con soluciones estables. A la ecuación (1) se le conoce como ecuación de Euler-Lagrange para este funcional de energía.

Después de familiarizarnos con la noción de estabilidad para las ecuaciones elípticas semilineales de la forma (1), vamos a aplicar estos resultados a un caso concreto, cuando  $f$  es del tipo exponencial. Para dicha tarea consideraremos  $\Omega$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$  que si bien es un caso más simple, por las peculiaridades del espacio, recoge toda la gama de resultados conocidos para este problema. Nos referimos al siguiente problema de contorno elíptico de segundo orden, llamado problema de Gelfand

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{en } \mathcal{B} \\ u = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}, \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro y  $\mathcal{B}$  es la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ .

Este problema tiene varias aplicaciones en el mundo de la física, una de ellas es que describe el proceso de reacción en un material combustible durante lo que se denomina el periodo de ignición.

Pretendemos hacer un análisis de las soluciones de (3) y poner en práctica los conocimientos adquiridos en la primera parte para identificar las soluciones estables. Adelantamos también que, para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño, (3) tiene al menos una solución. Sin embargo, la multiplicidad de tales soluciones varía según el valor del parámetro  $N$ . Es decir, existirá  $\lambda^* = \lambda^*(N) > 0$  tal que:

- para  $0 < \lambda < \lambda^*$ , existe al menos una solución  $u \in C^2(\bar{\mathcal{B}})$  de (3), que será estable,
- y para  $\lambda > \lambda^*$ , no existe solución  $u \in C^2(\bar{\mathcal{B}})$  de (3).

Todo lo que hemos visto nos lleva a plantearnos la siguiente cuestión. Las soluciones de (1) también se pueden ver como soluciones “estacionarias” de un problema que depende del tiempo, de una ecuación parabólica:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = f(v) & \text{en } \Omega \\ v(t, x) = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ v(0, x) = u_0(x) & \text{para } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

En un sentido primitivo, si cuando el tiempo tiende a infinito una solución toma un valor estacionario (se estabiliza, sería como constante en el tiempo) en algún momento la derivada con respecto al tiempo se anula y obtendríamos una solución de (1). En este sentido se puede ver que las soluciones de este último problema son soluciones de (1). Debido a esto, cabría preguntarse si las condiciones de estabilidad mencionadas funcionan en los sistemas dinámicos, aunque no será tratado en este trabajo.

Para finalizar la introducción, indicamos como estructuraremos esta memoria:

Comenzaremos centrando los objetivos específicos del trabajo concretando los contenidos que se plantean y las aplicaciones que se van a llevar a cabo, como veremos en el capítulo uno.

Después presentaremos los preliminares. En ellos aparecen los contenidos imprescindibles para abordar el tema. En particular estudiaremos algunas propiedades de los espacios  $L^p(\Omega)$ , espacios de Sobolev y haremos una síntesis de resultados relacionados con el principio del máximo. Todo esto está recogido en el capítulo dos.

El tercer capítulo está dedicado a la estabilidad. En primer lugar, relacionaremos las soluciones del problema (1) con los puntos críticos del funcional de energía (2). Luego, veremos las condiciones que deben cumplir estas soluciones para ser soluciones estables. El resto del capítulo recoge ejemplos de soluciones estables, caracterizaciones de la estabilidad y algunas propiedades de las soluciones estables.

Por último, estudiaremos el comportamiento de las soluciones de (3) y aplicaremos los conceptos sobre estabilidad en este problema concreto. Se encontrará en el último capítulo del trabajo.

Los principales resultados y discusión de la memoria versan sobre el concepto de la estabilidad y el problema de Gelfand, correspondientes a los capítulos 3 y 4.

# Capítulo 1

## Objetivos

Mi interés por el tema planteado en esta memoria surge del empeño de seguir teniendo contacto con la investigación matemática, ya que tuve mis primeros acercamientos en el último año del Grado en Matemáticas. Pretendo familiarizarme con lecturas de contenido más denso y notación más pragmática que la utilizada en la docencia para que me permita poner en práctica los conocimientos que voy adquiriendo a lo largo de mi periodo como alumna y poder crecer como matemática.

Como se desarrolla en la introducción, el objetivo de este trabajo es conocer el concepto de estabilidad en problemas de ecuaciones en derivadas parciales y ver cómo se aplica en un ejemplo concreto. El ejemplo escogido es el problema de Gelfand, muy conocido en la literatura matemática. También buscamos analizar el comportamiento de sus soluciones en la bola unidad.

Por tanto, procedemos a describir los objetivos con más detalle.

**Objetivo 1:** Hacer un estudio de como se extiende el concepto de estabilidad a problemas contorno elíptico de segundo orden del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado con frontera suave y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R})$ . Para ello necesitaremos relacionar las soluciones de dicho problema con los puntos críticos del siguiente funcional, llamado funcional de energía, definido en  $X = C_0^2(\bar{\Omega})$

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u) dx,$$

donde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2(\mathbb{R})$  primitiva de  $f$ . A partir de este resultado, veremos una definición conveniente de estabilidad de manera que los puntos de mínimo corresponden con puntos estables.

Una vez que hemos tratado la definición de estabilidad veremos una proposición que nos permitirá caracterizarla a partir del valor propio principal de un problema linealizado asociado.

Trabajaremos ejemplos de soluciones estables, como que las soluciones minimales son estables. Por último consideraremos dos propiedades de dichas soluciones: la unicidad y la simetría.

Para el desarrollo de este objetivo incluiremos en los preliminares una sección en la que recogeremos algunas propiedades y teoremas de los espacios  $L^p(\Omega)$  y los espacios de Sobolev. Habrá otra dedicada al principio de máximo donde veremos diferentes versiones del mismo.

Una vez realizado el objetivo 1 es interesante incluir el estudio de la estabilidad en un caso particular, aunque el objetivo 2 irá más allá.

**Objetivo 2:** Ver cómo se aplican los resultados de estabilidad obtenidos en el objetivo 1 a un caso concreto, cuando  $f$  es del tipo exponencial. Este caso particular además lo trataremos cuando  $\Omega = \mathcal{B}$  (siendo  $\mathcal{B}$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$ ). El problema al que nos referimos es el problema de Gelfand:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{en } \mathcal{B} \\ u = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}, \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro.

También nos planteamos analizar el comportamiento que tienen las soluciones y estudiar su multiplicidad, que variará según el valor de  $N$ . Por este motivo, diferenciaremos los casos en que  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $3 \leq N \leq 9$  y  $N \geq 10$ . Debemos llegar a la conclusión de que existe  $\lambda^* = \lambda^*(N) > 0$  tal que:

- para  $0 < \lambda < \lambda^*$ , existe al menos una solución  $u_\lambda \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (3), que será estable,
- y para  $\lambda > \lambda^*$ , no existe solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (3).

Para llevar a cabo este objetivo tendremos que recurrir a algunos resultados importantes de existencia, unicidad y prolongabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y de teoría cualitativa de sistemas autónomos. También será clave el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg sobre el carácter radial

de las soluciones positivas de los problemas contorno elíptico que estamos considerando.

La bibliografía que hemos utilizado para cada objetivo es en líneas generales: [1] para estudiar los espacios  $L^p(\Omega)$  y los espacios de Sobolev, en el que también se encuentran todas las demostraciones, [2] es el libro a partir del cual hemos desarrollado el trabajo, [3] en este artículo se encuentra el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, junto con su demostración y [4] donde hemos consultado los resultados importantes referentes a las ecuaciones diferenciales.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo recopilamos los contenidos previos que serán de gran utilidad para el desarrollo de nuestros objetivos.

Sin ánimo de ser tediosos incluiremos los resultados principales de los espacios y elementos que veremos en el trabajo. Por otro lado, las demostraciones se escapan de nuestro objetivo, pero al final de cada sección se indicará donde se pueden consultar. También comentar que a lo largo de esta memoria  $\Omega$  denotará un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ .

En primer lugar pretendemos reunir algunas propiedades y teoremas de los espacios  $L^p(\Omega)$  y espacios de Sobolev. Tenerlas presentes será fundamental debido a que recurriremos a ellas a la hora de desarrollar varias demostraciones.

Añadiremos una sección en la que nos centraremos en el principio del máximo y en las distintas versiones que utilizaremos para cumplir nuestros objetivos.

Debido a que queremos estudiar una caracterización de estabilidad a partir del valor propio principal de un problema linealizado asociado, incluiremos previamente el concepto de valor propio principal de un sistema lineal y algunas de sus características.

Enunciaremos los principales resultados de existencia, unicidad y prolongabilidad de ecuaciones diferenciales, como el teorema de Picard-Lindelöf. También recordaremos los conceptos fundamentales de teoría cualitativa de sistemas diferenciales.

Por último enunciamos el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, que nos aportará el carácter radial de las soluciones.

## 2.1 Los espacios $L^p(\Omega)$

Recordemos que dado un conjunto  $\Omega$  medible respecto a la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$  (cuya medida denotaremos por  $|\Omega|$ ), se dice que una función medible respecto a dicha medida es integrable Lebesgue (o simplemente integrable) en  $\Omega$  siempre que la integral de Lebesgue de su valor absoluto sea finita.

Definimos  $L^1(\Omega)$  como el espacio de las funciones integrables sobre  $\Omega$  con valores de  $\mathbb{R}$  vía la relación de equivalencia de ser iguales en casi todo punto (c.t.p.). Podemos considerar en este espacio una norma

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Definimos los espacios  $L^p(\Omega)$  de la siguiente manera:

**Definición 1.** Sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p < \infty$ . Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

y se nota

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y existe una constante } C \text{ con } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

y se nota

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Un resultado importante relativo a la integrabilidad de los límites de sucesiones afirma que límite puntual más dominación aseguran la integrabilidad y la convergencia de las integrales y por tanto permite intercambiar el límite con la integral. Es el conocido teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

**Teorema 2.** [Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue] Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones de  $L^1(\Omega)$ . Supongamos que:

- $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$  c.t.p. en  $\Omega$ ,

- existe una función  $h \in L^1(\Omega)$  tal que para cada  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq h(x)$  c.t.p. en  $\Omega$ .

Entonces  $f \in L^1(\Omega)$  y  $\{f_n\} \xrightarrow{L^1(\Omega)} f$ .

Un teorema “casi” recíproco y menos conocido afirma que si una sucesión converge en un espacio  $L^p(\Omega)$  entonces tiene una parcial que converge puntualmente y está dominada.

**Teorema 3.** Sean  $\{f_n\}$  una sucesión en  $L^p(\Omega)$  y  $f \in L^p(\Omega)$ , tales que  $\{f_n\} \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$ . Entonces existe una subsucesión (que notaremos nuevamente por  $\{f_n\}$ ) tal que

- $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$  c.t.p. en  $\Omega$ ,
- existe una función  $h \in L^p(\Omega)$  tal que  $|f_n(x)| \leq h(x)$  para todo  $n$  y c.t.p. en  $\Omega$ .

Otros de los resultados conocidos sobre funciones integrables es la desigualdad de Hölder. Para enunciarlo, sea  $1 \leq p \leq \infty$ , denotaremos por  $p'$  al exponente conjugado de  $p$ , es decir,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Teorema 4** (Desigualdad de Hölder). Sean  $f \in L^p(\Omega)$  y  $g \in L^{p'}(\Omega)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces  $fg \in L^1(\Omega)$  y

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

El contenido de esta sección, junto con las demostraciones de todos estos resultados, se encuentra en [1].

## 2.2 Espacios de Sobolev

Después de hacer el estudio de los espacios  $L^p(\Omega)$  podemos hacer una pequeña introducción de los espacios de Sobolev.

**Definición 5.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto y sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . El espacio de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  se define por

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2 \dots g_N \in L^p(\Omega) \text{ tales que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N\},$$

donde  $C_c^\infty(\Omega)$  es el espacio de las funciones de clase infinito en  $\Omega$  con soporte compacto. Y notaremos  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$  y  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$  para  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

$W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio vectorial normado con

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^N \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En concreto  $H^1(\Omega)$  tiene la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde  $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$ , que es equivalente a la norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Algunas propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev se resumen en la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *El espacio  $W^{1,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$  y reflexivo para  $1 < p < \infty$ . Por tanto  $H^1(\Omega)$  es un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita.*

Una definición importante que es la que da sentido a la condición de contorno del problema de condiciones de contorno es la siguiente:

**Definición 7.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ ;  $W_0^{1,p}(\Omega)$  designa el cierre de  $C_c^\infty(\Omega)$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ . Notaremos  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

Queda fuera del ámbito de este trabajo el estudio en profundidad de las principales propiedades de los espacios de Sobolev pero me gustaría comentar que cuando una función  $u$  es continua en  $\bar{\Omega}$  entonces si  $u \in H_0^1(\Omega)$  se tiene que  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ .

Al igual que en la Proposición 6 las propiedades principales de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  se resumen en

**Proposición 8.** *El espacio  $W_0^{1,p}(\Omega)$  tiene la norma inducida por  $W^{1,p}(\Omega)$ , es un espacio de Banach separable y es reflexivo si  $1 < p < \infty$ .*

*$H_0^1(\Omega)$  es por tanto un espacio de Banach reflexivo y  $H_0^1(\Omega) \equiv \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$*

con  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Denotaremos al espacio dual de  $H_0^1(\Omega)$  como  $H^{-1}(\Omega)$ , es decir,  $(H_0^1(\Omega))' \equiv H^{-1}(\Omega)$ .

Algunos teoremas de inmersión que necesitaremos en capítulos posteriores son:

**Teorema 9** (Teorema de inmersión). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un abierto acotado, se verifica:*

- Si  $N > 2$  entonces  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \forall p \in [1, \frac{2N}{N-2}]$ .
- Si  $N = 2$  entonces  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \forall p \in [1, +\infty)$ .
- Si  $N = 1$  entonces  $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

*Con inmersiones continuas*

$$i : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

$$u \mapsto i(u) = u.$$

*A partir de ahora notaremos  $\frac{2N}{N-2} = 2^*$ .*

El siguiente resultado recoge condiciones para asegurar que dichas inmersiones son además compactas.

**Teorema 10** (Rellich-Kondrachov). *Si  $\Omega$  es un abierto con frontera regular de clase 1 entonces todas las inmersiones del Teorema 9 son compactas para todo  $p < 2^*$ , es decir,*

- *$i$  es continua.*
- *$i$  transforma acotados en relativamente compactos, si  $A$  es acotado entonces  $i(A)$  es compacto.*

La inmersión continua que proporciona el teorema anterior para  $p = 2$  se conoce como desigualdad de Poincaré.

**Corolario 11** (Desigualdad de Poincaré). *Si  $\Omega$  es un abierto acotado existe una constante  $C$  (dependiente de  $\Omega$  y de  $p$ ) tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

*para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$ .*

Análogamente para un  $p$  arbitrario se suele conocer como desigualdad de Sobolev.

**Corolario 12** (Desigualdad de Sobolev). *Si  $\Omega$  es un abierto acotado y  $N > 2$  para  $q + 1 \leq 2^*$  existe una constante  $C$  (dependiente de  $\Omega$  y de  $p$ ) tal que*

$$\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

De la reflexividad de  $H_0^1(\Omega)$ , los teoremas de inmersión compacta y el Teorema 3 se obtiene el siguiente corolario.

**Corolario 13.** *Sea una sucesión  $\{u_n\}$  acotada en  $H_0^1(\Omega)$  y  $N > 2$ , entonces existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que para una parcial (que notaremos nuevamente por  $\{u_n\}$ ) se tiene:*

- $\{u_n\}$  converge débil a  $u \in H_0^1(\Omega)$ , es decir,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

- $\{u_n\} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$  para todo  $p \in [1, 2^*]$ .
- $\{u_n\} \rightarrow u(x)$  c.t.p.  $x \in \Omega$  y existe una función  $h \in L^p(\Omega)$  para todo  $p \in [1, 2^*]$  tal que  $|u_n(x)| \leq h(x)$ .

Los resultados referentes a esta sección, junto con sus demostraciones, se pueden consultar en [1].

## 2.3 Principio del máximo

En primer lugar, para poder enunciar el principio del máximo tenemos que conocer las definición de función superarmónica.

**Definición 14.** *Dado  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$ , una función  $u \in C^2(\Omega)$  es superarmónica en  $\Omega$  si*

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

*De forma similar, una función  $u \in C^2(\Omega)$  es subarmónica en  $\Omega$  si  $-\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$ .*

Por tanto, la primera versión del principio fuerte del máximo que daremos es la siguiente:

**Proposición 15.** *Sean  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$  y  $u \in C^2(\Omega)$  una función superarmónica. Entonces,  $u$  no puede alcanzar un mínimo en un punto interior, a no ser que  $u$  sea constante.*

El principio fuerte del máximo inmediatamente implica el siguiente principio de comparación fuerte.

**Proposición 16.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  una función que satisface*

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Entonces,  $u \equiv 0$  o  $u > 0$  en  $\Omega$ .*

En estos dos resultados hemos trabajado con el operador de Laplace, pero podemos extender el principio del máximo a un operador elíptico más general.

Para este fin, observemos que la conclusión de la Proposición 16 se puede dividir en dos partes:

- Principio de comparación débil: si  $u$  es superarmónico en  $\Omega$  y  $u \geq 0$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $u \geq 0$  en  $\Omega$ .
- Principio de comparación fuerte: si  $u$  es superarmónico en  $\Omega$  y  $u \geq 0$  en  $\partial\Omega$ , entonces  $u > 0$  en  $\Omega$ , a menos que  $u \equiv 0$ .

Este procedimiento de dos pasos se utilizará en lo que sigue. Consideramos un operador elíptico de la forma

$$-Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + V(x)u,$$

donde  $a_{ij}, b_i, V \in C(\Omega)$  para todo  $i, j = 1, \dots, N$ . Además, asumimos que  $V \geq 0$  en  $\Omega$ . Enunciamos el principio del máximo para dicho operador.

**Proposición 17.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$ ,  $L$  un operador elíptico en  $\Omega$  tal que  $V \geq 0$  y  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  una función que satisface

$$\begin{cases} -Lu \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces,  $u \geq 0$  en  $\Omega$ .

Antes de hacer referencia al principio fuerte del máximo para el operador elíptico general, veamos el siguiente lema del punto de frontera.

**Lema 18.** Sean  $\Omega$  un dominio suave acotado de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$ ,  $L$  un operador elíptico en  $\Omega$  tal que  $V \geq 0$  y  $u \in C^2(\Omega)$  una función que satisface

$$-Lu \geq 0 \text{ en } \Omega.$$

Asumimos que para algun  $x_0 \in \partial\Omega$ ,  $u(x_0) \leq 0$  y  $u(x_0) < u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Entonces, la derivada normal exterior de  $u$  en  $x_0$  satisface

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

**Corolario 19.** Sean  $\Omega$  cualquier dominio de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $L$  un operador elíptico uniforme y  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  una función que satisface

$$\begin{cases} -Lu \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces,  $u > 0$  en  $\Omega$ , a menos que  $u \equiv 0$ .

Otra versión útil de este principio es aplicarlo a dominios acotados de medida pequeña, conocido como principio del máximo para dominios pequeños.

**Proposición 20.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $V(x) \in L^p(\Omega)$ ,  $p > N/2$ . Existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $|\Omega| < \epsilon$ , entonces para cualquier función  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  que satisface

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u \geq 0 & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tenemos  $u \geq 0$  en  $\Omega$ .

Para finalizar, exponemos el principio de comparación no lineal. Definimos el concepto de subsolución y supersolución.

Una función  $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$  se llama una subsolución de (3.1) si satisface

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(u) & \text{en } \Omega \\ u \leq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por otro lado, una función  $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$  se llama una supersolución de (3.1) si satisface

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f(u) & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Proposición 21.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función localmente de Lipschitz y  $\underline{u}, \overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$  una subsolución y una supersolución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, si  $\underline{u} \leq \overline{u}$  en  $\Omega$ ,  $\underline{u} \equiv \overline{u}$  o  $\underline{u} < \overline{u}$ .

En esta sección se ha utilizado la bibliografía: [2] y en ella se encuentran todas las demostraciones.

## 2.4 Problema de autovalores

Al linealizar el problema de contorno elíptico de segundo orden

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se pueden extraer algunos resultados que serán muy útiles para obtener una caracterización del concepto de estabilidad. En efecto, en este trabajo consideramos el correspondiente sistema linealizado

$$\begin{cases} -\Delta v - f'(u)v = \lambda v & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

aunque veremos resultados algo más generales.

**Definición 22.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  y  $v \in C(\overline{\Omega})$ . Supongamos que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi \neq 0$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi - V(x)\varphi = \lambda\varphi & \text{en } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces,  $\lambda$  se llama valor propio de  $-L = -\Delta - V(x)$  (con condiciones de contorno de Dirichlet) y  $\varphi$  función propia asociada a  $\lambda$ .

Existe una sucesión creciente  $\{\lambda_n(-\Delta - V(x); \Omega)\} \rightarrow +\infty$  tal que (2.1) admite una solución no trivial para  $\lambda = \lambda_n$ . Nos interesa el primer elemento de esta sucesión,  $\lambda_1(-\Delta - V(x))$ .

**Teorema 23.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  y  $V \in C(\overline{\Omega})$ . Entonces,  $-L = -\Delta - V(x)$  tiene un autovalor más pequeño, llamado valor propio principal de  $-L$ ,  $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta - V(x); \Omega)$ .

Además,  $\lambda = \lambda_1$  es el único valor propio para el que las funciones propias no cambian de signo y  $\lambda_1$  viene dado por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx - \int_{\Omega} V(x)\varphi^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx} \right\} \\ &= \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \exists v \in C^2(\Omega), v > 0 \text{ con } -\Delta u - V(x)v \geq \lambda v \right\}. \end{aligned}$$

Para estos resultados hemos utilizado la bibliografía: [2] y en ella se encuentra la demostración del teorema.

## 2.5 Existencia y unicidad de soluciones de EDO

Enunciaremos algunos resultados de ecuaciones diferenciales que hemos empleado en las demostraciones del capítulo cuatro.

Un resultado clásico de existencia y unicidad del problema

$$\begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

es el teorema de Picard-Lindelöf.

**Teorema 24** (Picard-Lindelöf). Sean  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto,  $(t_0, Y_0) \in D$  y  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función continua verificando la condición de Lipschitz en un entorno de  $(t_0, Y_0)$ , es decir, para todo  $(t_0, Y_0) \in D$  existen  $\epsilon, L > 0$  con

$$\|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq L\|Y_2 - Y_1\|,$$

para todo  $(t, Y_1), (t, Y_2) \in \mathcal{B}_\epsilon(t_0, Y_0) \cap D$ .

Entonces existe  $\delta > 0$  de manera que el problema de Cauchy (2.2) admite una única solución en el intervalo  $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .

Después de este teorema, que nos proporciona existencia, unicidad de las soluciones del problema de Cauchy, nos plantearemos encontrar un intervalo “maximal” de existencia de solución, a la cual denominaremos solución no prolongable.

**Definición 25.** Sea  $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $(t_0, Y_0) \in D$  y consideremos el problema (2.2). Dado  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo real no degenerado con  $t_0 \in I$  e  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una solución de (2.2) en  $I$ . Diremos que  $Y$  es solución no prolongable de (2.2) si dada cualquier otra solución  $Z : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ , se tiene que  $J \subset I$  y  $Z$  es la restricción de  $Y$  al intervalo  $J$ .

De la definición deducimos que, en caso de existir, la solución no prolongable debe ser única. Además, podemos ver las condiciones suficientes para la existencia de dicha solución.

**Teorema 26.** Sean  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto,  $(t_0, Y_0) \in D$  y  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función continua, de manera que en un entorno de cada punto se verifica la condición de Lipschitz. Entonces existe solución no prolongable para el problema (2.2).

Por último, daremos un resultado que proporciona información sobre cómo construir el intervalo maximal de existencia de solución.

**Lema 27** (Wintner). Sean  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  abierto no acotado,  $(t_0, Y_0) \in D$ , y  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función continua, de manera que en un entorno de cada punto se verifica la condición de Lipschitz. Sea además  $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  la solución no prolongable de (2.2). Notemos por  $\alpha = \inf J$  y  $\beta = \sup J$ . Se verifica alguna de las siguientes propiedades (no necesariamente excluyentes):

- i) la gráfica de  $Y$  es no acotada en  $[t_0, \beta[ \times \mathbb{R}^N$  (resp. en  $] \alpha, t_0] \times \mathbb{R}^N$ ),
- ii)  $\lim_{t \rightarrow \beta} d((t, Y(t)), \partial D) = 0$  (resp.  $\lim_{t \rightarrow \alpha} d((t, Y(t)), \partial D) = 0$ ).

Todos estos conceptos, junto con sus demostraciones, se encuentran en: [4].

## 2.6 Teoría cualitativa. Sistemas autónomos

En este apartado pretendemos recordar los conceptos fundamentales de la teoría cualitativa de ecuaciones y sistemas diferenciales que utilizaremos a lo largo de nuestra memoria. Consideramos el sistema autónomo

$$Y' = F(Y), \tag{2.3}$$

para alguna función  $F \in C^1(\Omega)$  y  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$ .

Lo primero es definir a el concepto de órbita del sistema y de punto estacionario.

**Definición 28.** *Llamaremos trayectoria u órbita del sistema (2.3) al conjunto imagen de cualquier solución del mismo. Obsérvese que a cada solución le corresponde una órbita, mientras que puede darse el caso de soluciones distintas que tengan asociadas la misma órbita*

**Definición 29.** *Se dice que  $Y_0 \in \Omega$  es un punto crítico o estacionario para el sistema si  $F(Y_0) = 0$ , es decir, si la función constante  $Y(t) = Y_0$ , definida para cada  $t \in \mathbb{R}$ , es solución del mismo. En otro caso se dirá que  $Y_0$  es un punto regular.*

Usando los resultados de existencia y unicidad de solución no prolongable vistos, se obtiene el siguiente lema.

**Lema 30.** *Sea  $Y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  una solución de (2.3) con órbita asociada  $\Gamma$ . Entonces o bien  $\Gamma$  consiste en un único punto crítico (y además  $I = \mathbb{R}$ ) o bien solamente contiene puntos regulares. Además en ese caso, o bien dicha solución es inyectiva o bien es periódica e  $I = \mathbb{R}$ .*

Se podría decir que las órbitas son básicamente de tres tipos: puntos críticos, órbitas periódicas o corresponden con soluciones inyectivas. Esto se deberá al comportamiento de la solución en  $-\infty$ .

El objetivo de esta sección es enunciar el Teorema de Poincare-Bendixon. Para ello necesitamos las siguientes definiciones y un lema previo.

Notamos por  $\varphi(t, Y)$  al flujo del sistema (2.3) y  $\Gamma$  es una órbita del mismo. Definimos el  $\omega$ -límite de  $\Gamma$ ,  $\omega(\Gamma)$ , como los puntos de acumulación del conjunto imagen de una solución en  $+\infty$  y  $\alpha$ -límite de  $\Gamma$ ,  $\alpha(\Gamma)$ , como los puntos de acumulación del conjunto imagen de una solución en  $-\infty$ .

**Lema 31.** *Sea  $\Gamma$  una órbita de (2.3). Entonces  $\omega(\Gamma)$  y  $\alpha(\Gamma)$  son unión de órbitas.*

Además, para cada órbita  $\Gamma$  de (2.3) y cada  $Z \in \Gamma$ , denotamos

$$\begin{aligned}\Gamma_Z^+ &= \{\varphi(t, Z) : t \geq 0\}, \\ \Gamma_Z^- &= \{\varphi(t, Z) : t \leq 0\}.\end{aligned}$$

Enunciamos el teorema esperado:

**Teorema 32.** *[Poincaré-Bendixson] Sea  $\Gamma$  una órbita del sistema (2.3). Supongamos que para algún  $Z \in \Gamma$  el conjunto  $\Gamma_Z^+$  (respect.  $\Gamma_Z^-$ ) está contenido en un conjunto compacto  $K \in \Omega$ . Si  $\omega(\Gamma)$  (respect.  $\alpha(\Gamma)$ ) no contiene puntos críticos, entonces se trata de una órbita periódica.*

Se puede extraer la siguiente consecuencia.

**Corolario 33.** *Sea  $\Gamma$  una órbita periódica de (2.3) cuyo interior está contenido en  $\Omega$ . Existe al menos un punto crítico de (2.3) en su interior.*

Los resultados de esta sección y sus demostraciones se pueden consultar en: [4].

## 2.7 Resultado de Gidas-Ni-Nirenberg

Para finalizar el capítulo vamos a enunciar el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg. En él se muestra el carácter radial de las soluciones positivas de problemas de contorno elíptico definidos en una bola de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^N$ .

**Teorema 34** (Resultado de Gidas-Ni-Nirenberg). *Sean  $\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R\}$  y  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}_R})$  una solución positiva de*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \mathcal{B}_R \\ u = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_R, \end{cases}$$

donde  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $u$  es radialmente simétrica y  $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$  para  $0 < r < R$ .

El interés es que se verifica independientemente de cómo sea  $f$ . Como veremos más detenidamente, si  $f(u) \geq 0$  entonces cualquier solución no trivial será positiva en  $\mathcal{B}_R$  (por el principio del máximo) y por tanto radial.

Este teorema se encuentra en: [3].

# Capítulo 3

## Estabilidad

Intuitivamente, un sistema está en un estado estable si puede recuperarse de perturbaciones; un pequeño cambio no impedirá que el sistema regrese al equilibrio. Si colocamos una canica en el centro de un plato y la golpeamos ligeramente, después de rodar hacia adelante y hacia atrás la canica volverá a su posición estable. Si en cambio le damos la vuelta al plato y ponemos cuidadosamente la canica en el centro de la parte superior, estaría en un equilibrio bastante inestable, una brisa ligera sería suficiente para hacerla caer.

Algunos fenómenos pueden entenderse observando las variaciones de energía del sistema.

Consideremos una función suave  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y pensemos en ella como la energía potencial de un sistema, una cantidad que varía con respecto a un parámetro físico relevante, una cantidad que el sistema tiende a minimizar. Un pozo de potencial es un entorno de un mínimo local de  $E$ : la energía potencial capturada es incapaz de convertirse en otro tipo de energía. Como tal, un pozo de potencial es un estado estable de este sistema.

Desde el punto de vista matemático, es claro que  $t_0 \in \mathbb{R}$  es un punto de mínimo local de  $E$  si  $E'(t_0) = 0$  y  $E''(t_0) > 0$ . Relajando la desigualdad, obtenemos la siguiente definición:

**Definición 35.** *Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $E : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función*

de clase  $C^2(I)$ . Un punto  $t_0 \in I$  es un punto crítico estable<sup>1</sup> de  $E$  si

$$E'(t_0) = 0 \quad y \quad E''(t_0) \geq 0.$$

Si consideramos la canica rodando dentro de un recipiente, la energía potencial del sistema se puede describir correctamente como una función de un parámetro, la distancia de la canica al centro del recipiente. La gráfica de  $E$  es entonces una parábola con las ramas hacia arriba, como se muestra en la Figura 3.1 (o con las ramas hacia abajo, en el caso en que el recipiente esté del revés). Sin embargo, en la mayoría de las situaciones, el estado de un sistema no puede describirse con un único parámetro  $t \in \mathbb{R}$ . Trabajaremos en un contexto donde la energía se define en un espacio funcional adecuado  $X$ .

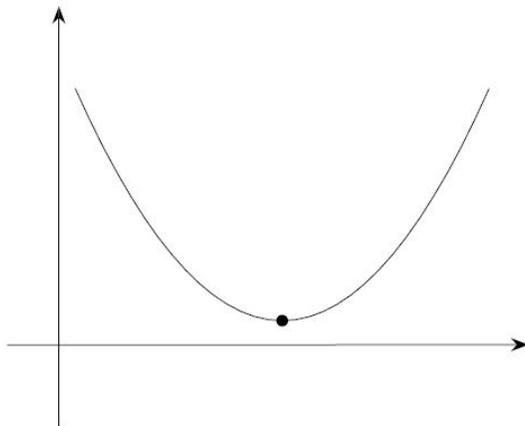


Figura 3.1: Pozo de potencial.

Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  acotado con frontera suave y  $X = C_0^2(\overline{\Omega})$ . Consideramos el siguiente problema de contorno elíptico de segundo orden

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Un punto  $t_0$  que satisface la Definición 35 se suele llamar semi-estable, mientras que se dice que es estable si se mantiene la desigualdad estricta  $E''(t_0) > 0$ . Dado que la teoría que desarrollaremos no utiliza la desigualdad estricta, no haremos distinción entre soluciones semi-estables y estables.

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1(\mathbb{R})$  y el funcional  $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido como

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u) dx, \quad (3.2)$$

donde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^2(\mathbb{R})$  primitiva de  $f$ .

En esta sección vamos a comprobar que hay relación entre las soluciones  $u \in X$  del problema (3.1) y los puntos críticos del funcional (3.2). Además, nos planteamos estudiar lo que significaría la estabilidad de una solución para este problema.

A (3.2) se le conoce como funcional de energía y a  $-\Delta u = f(u)$  como ecuación de Euler-Lagrange para este funcional de energía.

**Proposición 36.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$ ,  $X = C_0^2(\bar{\Omega})$  dotado con su norma natural  $\|\cdot\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R})$  y  $F$  una primitiva de  $f$ . Consideramos también  $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido como (3.2). Entonces,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  es una solución de (3.1) si y sólo si  $u$  es un punto crítico de  $\mathcal{E}_\Omega$ .

*Demostración.* Para probarlo vamos a calcular la derivada de  $\mathcal{E}_\Omega$  en la dirección del vector  $\varphi \in X - \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_\Omega(u)(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}_\Omega(u + t\varphi) - \mathcal{E}_\Omega(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \left( \int_\Omega (|\nabla u|^2 + t \nabla u \nabla \varphi + t^2 |\nabla \varphi|^2 - |\nabla u|^2) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega \frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \frac{t}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \int_\Omega \frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} dx \right). \end{aligned}$$

Vemos que para  $x \in \Omega$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + t\varphi(x)) - F(u(x))}{t} = \left. \frac{\partial F}{\partial t}(u(x) + t\varphi(x)) \right|_{t=0} \varphi(x) = f(u(x))\varphi(x),$$

es decir, converge puntualmente.

Tomando  $|t| < 1$  y escribiendo  $a = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  el teorema del valor medio implica que

$$\left| \frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} \right| \leq \left| \frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{u}) \frac{t\varphi}{t} \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^\infty([-a, a])},$$

donde  $f = F'$ .

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 2) podemos pasar al límite cuando  $t \rightarrow 0$ , con lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(u + t\varphi) - F(u)}{t} dx = \int_{\Omega} f(u)\varphi dx,$$

así

$$\mathcal{E}'_{\Omega}(u)(\varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f(u)\varphi dx \quad \text{para todo } \varphi \in X.$$

El funcional tiene un punto crítico si y sólo si se cumple la siguiente igualdad para todo  $\varphi \in X$

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(u)\varphi dx.$$

Puesto que  $\Omega$  es un dominio suave podemos usar la fórmula de integración por partes, obteniendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} -(\Delta u)\varphi dx,$$

es decir,  $u$  es un punto crítico de  $\mathcal{E}_{\Omega}$  si y sólo si

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f(u))\varphi dx = 0,$$

para todo  $\varphi \in X$ .

Por último, comprobaremos que  $\int_{\Omega} (-\Delta u - f(u))\varphi dx = 0$  para todo  $\varphi \in X$  si y sólo si  $u$  es solución del problema (3.1).

Si  $u$  es solución del problema, entonces  $-\Delta u - f(u) = 0$  y

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f(u))\varphi dx = 0,$$

para todo  $\varphi \in X$ . Recíprocamente, consideramos

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in X,$$

con  $g(x) = -\Delta u(x) - f(u(x)) \in C(\overline{\Omega})$ . En particular  $g \in L^2(\Omega)$ , con lo que

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \text{para todo } \varphi \in L^2(\Omega),$$

debido a que  $C_0^2(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ . Entonces  $g(x) \equiv 0$  en  $L^2(\Omega)$  y como  $g$  es continua

$$g(x) = -\Delta u(x) - f(u(x)) = 0 \text{ para todo } x \in \Omega$$

y  $u$  es solución de (3.1). □

Acabamos de identificar las soluciones  $u \in X$  de (3.1) con puntos críticos de  $\mathcal{E}_\Omega$ . ¿A cuál de estas soluciones debemos llamar estables? Para averiguarlo, calcularemos la segunda derivada de los puntos críticos de  $\mathcal{E}_\Omega$  en la dirección del vector  $\varphi \in X$ . Fijando  $u \in X$  y la dirección dada  $\varphi \in X \setminus \{0\}$  definimos la función  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$E(t) = \mathcal{E}_\Omega(u + t\varphi), \quad (3.3)$$

donde  $\mathcal{E}_\Omega$  viene dado por (3.2). Por lo visto anteriormente,

$$E'(0) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(u) \varphi dx.$$

Para obtener  $E''(0)$ , calculamos

$$\begin{aligned} \frac{E'(t) - E'(0)}{t} &= \frac{E'(t)}{t} = \frac{\mathcal{E}'_\Omega(u + t\varphi)(\varphi)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left( \int_\Omega \nabla(u + t\varphi) \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(u + t\varphi) \varphi dx \right) \\ &= \frac{1}{t} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{1}{t} \int_\Omega f(u + t\varphi) \varphi dx \\ &= \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \int_\Omega \frac{f(u + t\varphi) - f(u)}{t} \varphi dx. \end{aligned}$$

Vemos que para  $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u(x) + t\varphi(x)) - f(u(x))}{t} \varphi(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial t} (u(x) + t\varphi(x))|_{t=0} \varphi^2(x) \\ &= f'(u(x)) \varphi^2(x), \end{aligned}$$

es decir, converge puntualmente.

Tomando  $|t| < 1$  y escribiendo  $a = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$  el teorema del valor medio implica que

$$\left| \frac{f(u + t\varphi) - f(u)}{t} \varphi \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\tilde{u}) \frac{t\varphi}{t} \varphi \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|f'\|_{L^\infty([-a, a])}.$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 2) podemos pasar al límite cuando  $t \rightarrow 0$ , con lo que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{f(u + t\varphi) - f(u)}{t} \varphi dx = \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx,$$

así, al tomar límites

$$E''(0) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx \text{ para todo } \varphi \in X.$$

Echando un vistazo a la Definición 35 es natural definir la estabilidad como sigue.

**Definición 37.** Sean  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $\Omega$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Una solución  $u \in C^2(\Omega)$  de

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } \Omega$$

es estable si

$$Q_u(\varphi) := \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \quad (3.4)$$

**Observación 38.** De la definición anterior se pueden extraer algunas observaciones.

- La forma cuadrática  $Q_u$  se llama segunda variación de la energía.
- $u$  es estable en  $\Omega$  si y sólo si es estable en cada subdominio  $\omega \subset \Omega$ .
- Si  $\Omega$  es acotado y  $u \in L^\infty(\Omega)$  se puede tomar  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  en la definición anterior.

### 3.1 Ejemplos de soluciones estables

Después de conocer la definición de estabilidad (Definición 37) veremos algunos ejemplos de soluciones estables. Para ello necesitaremos incluir en cada apartado algunas definiciones previas.

## Los minimizadores de energía son estables

Para comprobar este ejemplo daremos primero la noción de minimizador local de energía.

**Definición 39.** Sea  $X$  un espacio de funciones de Banach con norma  $\|\cdot\|$ . Supongamos que  $X$  contiene a  $C_c^1(\Omega)$  y sea  $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Una función  $u \in X$  es un minimizador local de  $\mathcal{E}_\Omega$  si existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u + \varphi) \text{ para todo } \varphi \in C_c^1(\Omega) \text{ con } \|\varphi\| < t_0.$$

En particular, supongamos que  $u$  es un minimizador local de  $\mathcal{E}_\Omega$  definido por (3.2). Entonces 0 es un punto de mínimo local de  $E$  determinado por (3.3), ya que  $E(t) = \mathcal{E}_\Omega\left(u + \frac{t}{\|\varphi\|}\varphi\right)$  con  $t \in (0, t_0)$ . Así,  $E'(0) = 0$  y  $E''(0) \geq 0$ , por lo que  $u$  es una solución estable de (3.1).

## Los puntos críticos que minimizan la energía de un lado son estables

Como hicimos en el ejemplo anterior, vamos a definir primero el concepto de minimizador local unilateral.

**Definición 40.** Sean  $X$  un espacio de funciones de Banach que contiene a  $C_c^1(\Omega)$  y  $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Una función  $u \in X$  es un minimizador local unilateral de  $\mathcal{E}_\Omega$  si existen  $t_0 > 0$  y  $\epsilon \in \{-1, +1\}$  tal que

$$\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u + \epsilon\varphi) \text{ para todo } \varphi \in C_c^1(\Omega) \text{ con } \varphi \geq 0 \text{ y } \|\varphi\| < t_0.$$

Supongamos que  $u$  es a la vez un punto crítico y un minimizador unilateral de  $\mathcal{E}_\Omega$  definido por (3.2) y consideramos por ejemplo que  $\epsilon = +1$ . Entonces, dado  $\varphi \geq 0$ , 0 es un punto de mínimo local de  $E|_{[0, t_0)}$ , donde  $E$  está definido por (3.3). Deducimos que  $E'(0) = 0$  y  $E''(0) \geq 0$ , por tanto se verifica (3.4) para  $\varphi \geq 0$ . Ahora, tomamos una función test arbitraria  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  y la dividimos en su parte positiva y en su parte negativa:  $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$  ( $-\varphi^- \geq 0$ ). Como  $\Omega$  es acotada, con un argumento estándar de aproximación, (3.4) sigue siendo válido para las funciones test  $\varphi^+, \varphi^-$ . Luego

$$Q_u(\varphi) = Q_u(\varphi^+) + Q_u(\varphi^-) \geq 0,$$

y por tanto  $u$  es estable.

## Las soluciones minimales son estables

Supongamos que existe una subsolución y una supersolución y consideremos además que son distintas y ordenadas:  $\underline{u} \leq \bar{u}$  en  $\Omega$ . Por el principio fuerte del máximo (Proposición 21) resulta que la desigualdad es siempre estricta:  $\underline{u} < \bar{u}$  en  $\Omega$ .

**Lema 41.** Sean  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  y  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Supongamos que existen  $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$  una subsolución y una supersolución de (3.1) tal que  $\underline{u} < \bar{u}$  en  $\Omega$ . Entonces existe una única solución  $u$  de (3.1) con las siguientes propiedades: dada cualquier supersolución  $\bar{u}_2 \in C^2(\bar{\Omega})$  de (3.1) tal que  $\bar{u}_2 \geq \underline{u}$ ,

1.  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}_2$  y
2.  $u$  minimiza  $\mathcal{E}_\Omega$  entre todas las funciones  $v \in C^2(\bar{\Omega})$  tal que  $\underline{u} \leq v \leq \bar{u}_2$ .

A  $u$  se le llama la solución minimal de (3.1) relativa a  $\underline{u}$ .

Denotamos por  $u$  a la solución minimal relativa de  $\underline{u}$ ,  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ . El principio fuerte del máximo (Proposición 21) implica que  $u \in \{\underline{u}, \bar{u}\}$  o  $\underline{u} < u < \bar{u}$ . Analicemos los tres casos.

- Si  $u = \underline{u}$ , usando que  $\underline{u} < \bar{u}$ , dado  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  con  $\varphi \geq 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que  $u = \underline{u} \leq u + t\varphi \leq \bar{u}$  para todo  $0 < t < t_0$ . Por 2 del Lema 41,  $\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u + t\varphi)$  y deducimos que 0 es un punto de mínimo de  $E|_{[0, t_0)}$ .
- Si  $u = \bar{u}$  por la condición  $\underline{u} < \bar{u}$ , dado  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  con  $\varphi \geq 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que  $\underline{u} \leq u - t\varphi \leq \bar{u} = u$  para todo  $0 < t < t_0$ . Por 2 del Lema 41,  $\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u - t\varphi)$  y deducimos que 0 es un punto de mínimo de  $E|_{[0, t_0)}$ .
- Si  $\underline{u} < u < \bar{u}$ , dado  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  con  $\varphi \geq 0$  existe  $t_0 > 0$  tal que  $\underline{u} \leq u + t\varphi \leq \bar{u}$  para todo  $0 < t < t_0$ . Por 2 del Lema 41,  $\mathcal{E}_\Omega(u) \leq \mathcal{E}_\Omega(u + t\varphi)$  y deducimos que 0 es un punto de mínimo de  $E|_{[0, t_0)}$ .

En los tres casos, como  $u$  es solución de (3.1),  $E'(0) = 0$ . Por esto, debemos tener  $E''(0) \geq 0$  y se verifica (3.4) para  $\varphi \geq 0$ . Descomponiendo una función test arbitraria en su parte positiva y en su parte negativa deducimos que  $u$  es estable.

## 3.2 Estabilidad lineal. Valor propio principal del operador linealizado

Se puede caracterizar la estabilidad del problema (3.1) a partir del valor propio principal de un problema lineal asociado.

**Proposición 42.** *Sea  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Una solución  $u \in C^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de*

$$-\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega$$

*es estable si y sólo si  $\lambda_1(-\Delta - f'(u); \Omega) \geq 0$ .*

*Demostración.* Una función  $u \in C^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  es una solución estable si y solo si

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx \geq 0,$$

para todo  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , esto es,

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx} \geq 0,$$

para todo  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , si y solo si

$$\inf_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} f'(u) \varphi^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi^2 dx} \right\} = \lambda_1(-\Delta - f'(u); \Omega) \geq 0,$$

por la caracterización del valor propio principal (Teorema 23). □

## 3.3 Nuevos ejemplos de soluciones estables

A partir de la nueva caracterización de la estabilidad se pueden producir nuevos ejemplos de soluciones estables.

### Las soluciones monótonas son estables

En primer lugar veamos qué son las soluciones monótonas.

**Definición 43.** Una solución  $u \in C^2(\Omega)$  es monótona si

$$\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0 \text{ en } \Omega,$$

o mediante alguna rotación del espacio se reduce a ese caso.

Derivamos  $-\Delta u = f(u)$  con respecto a  $x_N$ :

$$-\Delta \frac{\partial u}{\partial x_N} - f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_N} = 0.$$

Si  $u \in C^3(\overline{\Omega})$  es monótona,  $v = \frac{\partial u}{\partial x_N}$  es positiva y resuelve

$$-\Delta v - f'(u)v = 0 \text{ en } \Omega,$$

con lo que, usando el Teorema 23,  $\lambda_1(-\Delta - f'(u); \Omega) = 0$ . Concluimos con que  $u$  es estable por la Proposición 42.

## Las soluciones positivas en epígrafos coercitivos son estables

Antes de comprobar dicho ejemplo veamos la definición de epígrafo coercitivo.

**Definición 44.** Un dominio  $\Omega$  es un epígrafo coercitivo si, rotando el espacio, existe  $g \in C(\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R})$  tal que  $\Omega = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > g(x')\}$  y  $\lim_{|x'| \rightarrow +\infty} g(x') = +\infty$ .

Ahora ya se puede plantear el lema que recoge el ejemplo señalado.

**Lema 45.** Sea  $\Omega$  un epígrafo coercitivo. Si  $u > 0$  resuelve (3.1), entonces  $u$  es monótona y por lo tanto estable.

*Demostración.* El argumento de la demostración se basa en la estrategia del plano móvil (moving plane): dado  $\lambda > 0$ , consideramos el hiperplano

$$T_\lambda = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N = \lambda\},$$

y

$$\Sigma_\lambda = \{(x', x_N) \in \Omega : x_N < \lambda\},$$

la región debajo de  $T_\lambda$ . Reflejaremos  $\Sigma_\lambda$  a través del hiperplano  $T_\lambda$ : para  $x \in \Sigma_\lambda$  el reflejo de  $x$  viene dado por  $\hat{x}_\lambda = (x', 2\lambda - x_N)$ . Observamos que como  $\Omega$  es un epigrafo, si  $x \in \Sigma_\lambda$  tenemos  $g(x') < x_N < \lambda$  con lo que  $2\lambda - x_N > 2x_N - x_N = x_N > g(x')$  y  $\hat{x}_\lambda \in \Omega$ . Por esto, podemos definir  $\hat{u}_\lambda(x) = u(\hat{x}_\lambda)$  para  $x \in \Sigma_\lambda$ . Sea también  $w_\lambda = \hat{u}_\lambda - u$ . Probaremos que para cualquier  $\lambda > 0$ ,

$$w_\lambda > 0 \text{ en } \Sigma_\lambda, \quad (3.5)$$

es decir, que hay una cierta monotonía en la dirección de la última coordenada.

Primero veremos que (3.5) se cumple para  $\lambda > 0$  pequeños, es decir, para valores de  $\lambda$  cercanos al ínfimo de la proyección de  $\Omega$  en el eje  $x_N$ . Para ello, vamos a estudiar el problema que verifica  $w_\lambda$ . Si calculamos el laplaciano de esta función

$$-\Delta w_\lambda = -\Delta \hat{u}_\lambda - (-\Delta u),$$

y estudiamos el término  $-\Delta \hat{u}_\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \hat{u}_\lambda}{\partial x_i^2}(x)$ :

$$\frac{\partial \hat{u}_\lambda}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', 2\lambda - x_N) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', 2\lambda - x_N) & i = 1, \dots, N-1 \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x', 2\lambda - x_N) & i = N \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_\lambda}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x', 2\lambda - x_N) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x', 2\lambda - x_N) & i = 1, \dots, N-1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x', 2\lambda - x_N) & i = N, \end{cases}$$

llegamos a  $-\Delta \hat{u}_\lambda(x) = -\Delta u(x', 2\lambda - x_N)$ . Como  $u$  satisface  $-\Delta u = f(u)$

$$-\Delta u(x) = f(u(x)),$$

$$-\Delta \hat{u}_\lambda(x) = -\Delta u(x', 2\lambda - x_N) = f(u(x', 2\lambda - x_N)) = f(\hat{u}_\lambda(x)),$$

con lo que

$$-\Delta w_\lambda = f(\hat{u}_\lambda(x)) - f(u(x)) = \begin{cases} \frac{f(\hat{u}_\lambda(x)) - f(u(x))}{w_\lambda(x)} w_\lambda(x) & \text{si } w_\lambda(x) \neq 0 \\ f'(u(x)) & \text{si } w_\lambda(x) = 0. \end{cases}$$

Por tanto, si definimos

$$V_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(\hat{u}_\lambda(x)) - f(u(x))}{w_\lambda(x)} & \text{si } w_\lambda(x) \neq 0 \\ f'(u(x)) & \text{si } w_\lambda(x) = 0, \end{cases}$$

tenemos que

$$-\Delta w_\lambda - V_\lambda(x)w_\lambda = 0 \text{ en } \Sigma_\lambda. \quad (3.6)$$

Además  $w_\lambda \geq 0$  en  $\partial\Sigma_\lambda = (\Omega \cap T_\lambda) \cup (\partial\Omega \cap \overline{\Sigma_\lambda})$  ya que

- por definición  $\hat{u}_\lambda = u$  con lo que  $w_\lambda = 0$  en  $\Omega \cap T_\lambda$ ,
- debido a que  $u$  es solución de (3.1),  $u = 0$  y  $\hat{u}_\lambda \geq 0$  con lo que  $w_\lambda \geq 0$  en  $\partial\Omega \cap \overline{\Sigma_\lambda}$ .

El principio del máximo para dominios pequeños (Proposición 20) implica que  $w_\lambda \geq 0$  en  $\Sigma_\lambda$ , siempre que  $\lambda > 0$  sea pequeño. Como  $u > 0$  en  $\Omega$  y  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ , tenemos que  $w_\lambda > 0$  en  $\partial\Omega \cap \overline{\Sigma_\lambda}^2$ . Ahora, por el principio fuerte del máximo (Corolario 19) aplicado a (3.6),  $w_\lambda > 0$  en  $\Sigma_\lambda$  (no puede ser cero porque toma valores estrictamente positivos). Hemos probado que (3.5) se verifica para valores de  $\lambda$  cercanos al ínfimo de la proyección de  $\Omega$  en el eje  $x_N$ .

A continuación, llamamos  $\lambda_0$  al supremo de los  $\mu > 0$  tales que (3.5) se verifica para todo  $0 < \lambda \leq \mu$ . Supongamos que  $\lambda_0 < \infty$ . Por la continuidad de  $w_\lambda$  con respecto a  $\lambda$ , tenemos que  $w_{\lambda_0} \geq 0$  en  $\Sigma_{\lambda_0}$ . Además, por lo visto anteriormente,

$$\begin{aligned} -\Delta w_{\lambda_0} - V_{\lambda_0}(x)w_{\lambda_0} &= 0 \text{ en } \Sigma_{\lambda_0}, \\ w_{\lambda_0} &> 0 \text{ en } \partial\Omega \cap \overline{\Sigma}_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Debido al principio fuerte del máximo (Corolario 19) la desigualdad es estricta, es decir,  $w_{\lambda_0} > 0$  en  $\Sigma_{\lambda_0}$ . Fijamos  $\delta > 0$  pequeño y un conjunto compacto  $K \subset \Sigma_{\lambda_0}$  tal que  $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus K| \leq \frac{\delta}{2}$ . Al ser  $w_{\lambda_0} > 0$  en  $\Sigma_{\lambda_0}$  y  $K$  compacto,  $w_{\lambda_0} \geq \eta > 0$  en  $K$  para alguna constante  $\eta > 0$ . Eligiendo un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, se sigue que  $w_{\lambda_0+\epsilon} > 0$  en  $K$ , mientras que  $|\Sigma_{\lambda_0+\epsilon} \setminus K| \leq \delta$ . Por tanto

$$\begin{aligned} -\Delta w_{\lambda_0+\epsilon} - V_{\lambda_0+\epsilon}(x)w_{\lambda_0+\epsilon} &= 0 \text{ en } \Sigma_{\lambda_0+\epsilon} \setminus K, \\ w_{\lambda_0+\epsilon} &\geq 0 \text{ en } \partial(\Sigma_{\lambda_0+\epsilon} \setminus K). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Ya que  $\hat{u}_\lambda > 0$  porque  $\hat{x}_\lambda \in \Omega$ .

Por el principio del máximo para dominios pequeños (Proposición 20),  $w_{\lambda_0+\epsilon} \geq 0$  en  $\Sigma_{\lambda_0+\epsilon} \setminus K$  y como ya teníamos que  $w_{\lambda_0+\epsilon} > 0$  en  $K$ , el principio fuerte del máximo (Colorario 19) conlleva a que (3.5) se cumple para  $\lambda = \lambda_0 + \epsilon$ , llegando a una contradicción con la definición de  $\lambda_0$ . Así que, (3.5) se verifica para todo  $\lambda > 0$ .

Nuestro objetivo era probar que  $u$  es monótona en la dirección  $x_N$ , es decir,  $\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', \lambda) > 0$  para todo  $(x', \lambda) \in T_\lambda \cap \Omega$  y para todo  $\lambda > 0$ . Para ver esto, fijamos  $\lambda > 0$  y observamos que  $w_\lambda$  es una solución positiva de (3.6) en  $\Sigma_\lambda$  y que  $w_\lambda = 0$  en  $T_\lambda \cap \Omega$ . Por el lema del punto de frontera (Lema 18)  $-\frac{\partial w_\lambda}{\partial x_N}(x_0) > 0$  para  $x_0 \in T_\lambda \cap \Omega$ .

Operando, como  $w_\lambda(x', x_N) = u(x', 2\lambda - x_N) - u(x', x_N)$ :

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x_N}(x', x_N) = -\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', 2\lambda - x_N) - \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) = -2\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N),$$

con lo que deducimos que

$$2\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', \lambda) = -\frac{\partial w_\lambda}{\partial x_N}(x', \lambda) > 0, \text{ para todo } (x', \lambda) \in T_\lambda \cap \Omega.$$

Por lo que  $u$  es monótona y por tanto estable  $u$  es estable.  $\square$

### 3.4 Propiedades elementales de las soluciones estables

Después de tratar con ejemplos que nos permiten familiarizarnos con el concepto de estabilidad, en esta última parte del capítulo estudiaremos dos de las propiedades que pueden tener las soluciones estables: unicidad y simetría.

#### Unicidad

Imponiendo condiciones a la función  $f$  se pueden extraer consecuencias que nos proporcionarán unicidad de soluciones estables. En particular si  $f$  es convexa, el problema (3.1) tendrá como mucho una solución estable.

Comenzaremos probando que si  $f$  es no creciente y  $\Omega$  está acotado (3.1) tiene una única solución.

*Demostración.* Si multiplicamos  $-\Delta u = f(u)$  por  $\varphi \in C_0^2(\Omega)$  e integramos por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(u) \varphi dx \text{ para todo } \varphi \in C_0^2(\Omega).$$

Supongamos que existen dos soluciones distintas  $u_1, u_2$  de (3.1). Por tanto, la función  $u_1 - u_2$  verifica

$$\begin{aligned} -\Delta(u_1 - u_2) &= f(u_1) - f(u_2) && \text{en } \Omega, \\ u_1 - u_2 &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2)) \varphi dx \text{ para todo } \varphi \in C_0^2(\Omega).$$

Si consideramos la función test  $\varphi = (u_1 - u_2)^+ \in H_0^1(\Omega)$

$$\|(u_1 - u_2)^+\|_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)^+|^2 dx = \int_{\Omega} (f(u_1) - f(u_2)) (u_1 - u_2) \leq 0,$$

de donde deducimos que  $(u_1 - u_2)^+ = 0$  y necesariamente  $u_1 \leq u_2$ . Si intercambiamos los roles de  $u_1$  y  $u_2$  obtenemos la desigualdad inversa, con lo que  $u_1 = u_2$ .  $\square$

De lo contrario, la ecuación puede tener muchas soluciones. Pero tal vez la unicidad se mantiene en las soluciones estables, como comentábamos anteriormente. Este es el caso cuando el término no lineal es convexo, como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 46.** Sean  $N \geq 1$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  un dominio acotado suave y  $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta; \Omega) > 0$  el valor propio principal del Laplaciano de Dirichlet en  $\Omega$ . Supongamos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  es convexo. Si  $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$  son dos soluciones estables de (3.1) entonces,  $u_1 = u_2$  o  $f(u) = \lambda_1 u$  en los rangos de  $u_1$  y  $u_2$ .

*Demostración.* Sean  $u_1, u_2$  dos soluciones estables de (3.1). Entonces  $w = u_2 - u_1$  resuelve

$$-\Delta w = f(u_2) - f(u_1) \text{ en } \Omega.$$

Multiplicando la igualdad anterior por  $w^+$ , la parte positiva de  $w$

$$-\Delta w w^+ = (f(u_2) - f(u_1))w^+ \text{ en } \Omega,$$

e integrando por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} -\Delta w w^+ dx = \int_{\Omega} \nabla w \nabla w^+ dx,$$

con lo que

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla w^+ dx = \int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 dx = \int_{\Omega} (f(u_2) - f(u_1))w^+ dx.$$

Como  $u_2$  es estable, tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla w^+|^2 dx \geq \int_{\Omega} f'(u_2)(w^+)^2 dx,$$

luego

$$\int_{\Omega} (f(u_2) - f(u_1))w^+ dx \geq \int_{\Omega} f'(u_2)(w^+)^2 dx,$$

y

$$\int_{\Omega} (f(u_2) - f(u_1) - f'(u_2)w^+)w^+ dx \geq 0.$$

Por ser  $f$  convexa

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{w^+} = f'(u_2 + \theta(u_2 - u_1)) \leq f'(u_2),$$

y la expresión  $f(u_2) - f(u_1) - f'(u_2)w^+$  tiene que ser no positiva. Si  $f$  es estrictamente convexa  $f(u_2) - f(u_1) - f'(u_2)w^+ < 0$ . Necesariamente  $w^+ = 0$ , es decir,  $u_2 \leq u_1$ . La desigualdad inversa la obtenemos intercambiando los roles de  $u_1$  y  $u_2$ , es decir,  $u_1 \leq u_2$  con lo cual  $u_1 = u_2$ . De lo contrario,  $f$  es lineal en la unión de todos los intervalos de la forma  $[u_1(x), u_2(x)]$ ,  $x \in \Omega$ , por lo tanto en los rangos de  $u_1$  y  $u_2$ . Así que  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones estables de un problema lineal, lo cual es posible si pertenecen al espacio propio asociado al valor propio principal  $\lambda_1$ .  $\square$

Supongamos que existe una solución minimal de (3.1), denotada por  $u$ . Se deduce del resultado de unicidad anterior que si  $f$  es estrictamente convexo,

entonces  $u$  es la única solución estable de (3.1). Por minimalidad,  $u$  está por debajo de todas las demás soluciones de la ecuación. ¿Pueden ordenarse todas las soluciones de la ecuación de tal manera? Cuando  $f$  es estrictamente convexa, la respuesta es siempre negativa. De hecho, si  $u_1, u_2$  denotan dos soluciones diferentes de  $u$ , entonces necesariamente deben cruzarse como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 47.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$ . Consideramos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  es estrictamente convexo. Sean  $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$  dos soluciones distintas de (3.1) tal que*

$$u_1 \leq u_2 \text{ en } \Omega.$$

*Entonces,  $u_1$  es la única solución estable de (3.1).*

*Demostración.* Llamamos  $w = u_2 - u_1$ . Por las condiciones impuestas,  $w \geq 0$  en  $\Omega$  y por la convexidad

$$-\Delta w = f(u_2) - f(u_1) \geq f'(u_1)w \text{ en } \Omega,$$

con lo que

$$-\Delta w - f'(u_1)w \geq 0 \text{ en } \Omega.$$

Por el principio fuerte del máximo (Corolario 19), o  $w \equiv 0$ , que queda excluido, o  $w > 0$  en  $\Omega$ . Por consiguiente  $u_1$  es estable (por la Proposición 42). Además, podemos deducir que  $u_1$  es la única solución estable de (3.1) por la Proposición 46.  $\square$

La suposición de convexidad no puede descartarse en la proposición 46. Un contraejemplo viene dado por el término no lineal  $f(u) = u - u^3$ , que no es convexo.

**Proposición 48.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado suave de  $\mathbb{R}^N$  y notemos  $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta; \Omega) > 0$  al valor propio principal del Laplaciano de Dirichlet en  $\Omega$ . Para  $\lambda > 0$  consideramos la ecuación*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u - u^3) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

- Si  $\lambda \leq \lambda_1$ , entonces  $u = 0$  es la única solución de (3.7) y es estable.
- Si  $\lambda > \lambda_1$ , existen por lo menos dos soluciones estables no triviales de (3.7).

*Demostración.* Comenzaremos con el caso  $\lambda \leq \lambda_1$ . Sea  $X = H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Cualquier solución clásica de (3.7) es un punto crítico del funcional de energía  $\mathcal{E}_\Omega : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{4} \int_\Omega (u^2 - 1)^2 dx,$$

por lo visto al inicio de la sección, ya que  $F(u) = -\frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$  es una primitiva de  $f$ . Vamos a probar que  $\mathcal{E}_\Omega$  es estrictamente convexo y esta acotado por debajo por  $\frac{\lambda}{4}|\Omega|$ . Esto implica que  $u = 0$  es el único punto crítico de  $\mathcal{E}_\Omega$  debido a que si el funcional es estrictamente convexo es claro que solo puede tener un punto crítico y automáticamente tiene que ser un mínimo global. Como  $u = 0$  es un mínimo global, es estable.

Desarrollando  $(u^2 - 1)^2$ , reescribimos  $\mathcal{E}_\Omega$  como  $\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(u) &= \frac{1}{2} \left( \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx \right), \\ \mathcal{E}_2(u) &= \frac{\lambda}{4} \int_\Omega (u^4 + 1) dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Poincaré

$$\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

con lo que si  $\lambda \leq \lambda_1$ ,  $\mathcal{E}_1 \leq 0$ . Por otro lado,  $\mathcal{E}_2 \geq \frac{\lambda}{4}|\Omega|$  es estrictamente convexo. Por esto, es suficiente probar que  $\mathcal{E}_1$  es convexo. Sean  $u, v \in X$  y  $t \in [0, 1]$  entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{2} \left( \int_\Omega |\nabla(tu + (1-t)v)|^2 dx - \lambda \int_\Omega (tu + (1-t)v)^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( t^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (1-t)^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + t(1-t) \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \right. \\ &\quad \left. - t^2 \lambda \int_\Omega u^2 dx - (1-t)^2 \lambda \int_\Omega v^2 dx - t(1-t) \lambda \int_\Omega uv dx \right) \\ &= t^2 \mathcal{E}_1(u) + (1-t)^2 \mathcal{E}_1(v) + t(1-t) \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx \\ &= \left( t \mathcal{E}_1(u)^{\frac{1}{2}} + (1-t) \mathcal{E}_1(v)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + t(1-t) \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx \\ &\quad - 2t(1-t) (\mathcal{E}_1(u) \mathcal{E}_1(v))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Vamos a comprobar que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx \leq 2 \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - \lambda v^2) dx},$$

o lo que es lo mismo

$$\left[ \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - \lambda uv) dx \right]^2 \leq \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) dx \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - \lambda v^2) dx. \quad (3.8)$$

Para ello, consideramos la forma cuadrática simétrica semidefinida positiva (ya que  $\lambda \leq \lambda_1$ )

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} uv dx,$$

así,

$$\begin{aligned} 0 \leq a(u \pm \alpha v, u \pm \alpha v) &= a(u, u) + \alpha^2 a(v, v) \pm 2\alpha a(u, v) \\ &= a(v, v)\alpha^2 \pm 2\alpha a(u, v) + a(u, u). \end{aligned}$$

La ecuación de segundo grado (con respecto a  $\alpha$ ) no puede tener más de una raíz real, con lo que el discriminante tiene que ser menor o igual que 0,

$$4a(u, v)^2 - 4a(u, u)a(v, v) \leq 0 \text{ y } a(u, v)^2 \leq a(u, u)a(v, v).$$

Por tanto, acabamos de probar que se cumple la desigualdad (3.8) y, por la convexidad,

$$\mathcal{E}_1(tu + (1-t)v) \leq \left( t\mathcal{E}_1(u)^{\frac{1}{2}} + (1-t)\mathcal{E}_1(v)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq t\mathcal{E}_1(u) + (1-t)\mathcal{E}_1(v),$$

es decir,  $\mathcal{E}_1$  es convexo.

Pasamos al caso  $\lambda > \lambda_1$ . Tenemos que  $\underline{u} = 0$  y  $\bar{u} = 1$  son subsolución y supersolución, respectivamente, de (3.7). Por el Lema 41, existe una solución minimal  $u$  de (3.7) (relativa a  $\underline{u} = 0$ ). Al ser  $u$  minimal, es estable. Como  $\lambda > \lambda_1$ , la solución 0 no es estable, porque si lo fuera tendría que ocurrir

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \geq \int_{\Omega} \varphi^2 dx \text{ para todo } \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

pero esto no es posible por la caracterización de  $\lambda_1$ , para  $\varphi_1$

$$\lambda \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx,$$

con lo que  $u \neq 0$ .

Por esto,  $-u$  es otra solución estable del problema ya que si  $u$  lo es, verifica la condición (3.4), es decir,

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \int_{\Omega} (1 - 3u^2) \varphi_1^2 dx \geq 0 \text{ para todo } \varphi \in C_c^1(\Omega),$$

y es claro que también la cumple  $-u$ . Hemos encontrado al menos dos soluciones estables no triviales del problema, acabando con la unicidad de solución estable al quitar la condición de convexidad de  $f$ .  $\square$

## Simetría

Cuando una ecuación muestra una cierta simetría, es natural plantearse si sus soluciones son también simétricas. Nos podemos preguntar si alguna solución  $u$  de (3.1) en  $\Omega = \mathcal{B}$ , la bola unidad en  $\mathbb{R}^N$ , es radialmente simétrica. Esto es así si  $u$  es estable, como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 49.** Sean  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B}$  la bola unidad en  $\mathbb{R}^N$  y  $u \in C^3(\overline{\mathcal{B}})$  una solución estable de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \mathcal{B} \\ u = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Entonces  $u$  es radialmente simétrica. Además,  $r \rightarrow u(r)$  es constante, creciente o decreciente en  $(0, 1)$ .

*Demostración.* En primer lugar mostraremos que  $u$  es radial. Si descomponemos la derivada de  $u$  como la derivada del vector normal y la derivada tangencial y probamos que la derivada tangencial es cero, demostraremos que  $u$  solo tiene componente radial. Por tanto, es suficiente probar que cualquier derivada tangencial  $v = x_i \frac{\partial u}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  es idénticamente cero. La integración por partes implica por un lado que

$$\int_{\mathcal{B}} v dx = \int_{\partial\mathcal{B}} (x_i u n_j - x_j u n_i) d\theta, \quad (3.10)$$

ya que  $n_i = x_i$  es la  $i$ -ésima componente del vector unitario normal a  $\partial\mathcal{B}$

apuntando hacia el exterior. Por otra parte, derivando  $v$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( x_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( x_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + x_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial x_j} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial x_k^2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &\quad - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} - x_j \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial x_i},\end{aligned}$$

calculando su laplaciano

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \\ &\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \\ &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right),\end{aligned}$$

y sustituyendo

$$\begin{aligned}\Delta v &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta u) - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta u) \\ &= x_i \frac{\partial}{\partial x_j} (f(u)) - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} (f(u)) = x_i f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} - x_j f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(u)v,\end{aligned}$$

mostramos que  $v$  resuelve la ecuación linealizada

$$\begin{cases} -\Delta v = f'(u)v & \text{en } \mathcal{B} \\ v = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}, \end{cases} \quad (3.11)$$

donde la condición de contorno se sigue de los hechos de que  $u$  es constante en  $\partial\mathcal{B}$  y que  $v$  es una derivada tangencial. Multiplicando (3.11) por  $v$  e integrando por partes obtenemos

$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathcal{B}} f'(u)v dx = 0.$$

Como  $u$  es estable

$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla w|^2 dx - \int_{\mathcal{B}} f'(u) w dx = 0 \text{ para todo } w \in C_c^1(\Omega),$$

y si  $v \not\equiv 0$ , considerando  $v$  como función test

$$\int_{\mathcal{B}} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathcal{B}} f'(u) v dx = 0,$$

por lo que acabamos de ver. Luego, el operador linearizado  $-\Delta - f'(u)$  tiene un valor propio principal  $\lambda_1 = 0$  y  $v$  es su función propia asociada, por lo que debe ser siempre positiva o siempre negativa, contradiciendo (3.10). Así pues,  $v \equiv 0$  y  $u$  es radial.

Ahora, vamos a comprobar que  $u(r)$  es constante o monótona. Si  $u$  no es constante,  $v = \frac{du}{dr}$  es no trivial. Supongamos por contradicción que  $v(r_0) = 0$  para algún  $r_0 \in (0, 1]$ . Por la Observación 38,  $u$  es estable en  $\mathcal{B}_{r_0}$  y podemos usar  $v$  como función test en (3.4), obteniendo

$$\int_{\mathcal{B}_{r_0}} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathcal{B}_{r_0}} f'(u) v dx \geq 0. \quad (3.12)$$

Además, estudiemos la ecuación que satisface  $v$ .

Para ello definimos  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$g(r) = g(\|x\|) = u(x),$$

donde  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$  y  $v = \frac{\partial u}{\partial r} = g'(r)$ . Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_k} &= g''(r) \frac{x_k}{r}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} &= g'''(r) \frac{x_k^2}{r^2} + g''(r) \frac{r - x_k \frac{x_k}{r}}{r^2} = g'''(r) \frac{x_k^2}{r^2} + g''(r) \frac{r^2 - x_k^2}{r^3}, \end{aligned}$$

y su laplaciano

$$-\Delta v = -g'''(r) - g''(r) \frac{Nr^2 - r^2}{r^3} = -g'''(r) - g''(r) \frac{N-1}{r}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_k} &= g'(r) \frac{x_k}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= g''(r) \frac{x_k^2}{r^2} + g'(r) \frac{r^2 - x_k^2}{r^3} - \Delta u = -g''(r) - g'(r) \frac{N-1}{r} = f(u).\end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $r$

$$-g'''(r) - g''(r) \frac{N-1}{r} + g'(r) \frac{N-1}{r^2} = f'(g(r))g'(r),$$

con lo que

$$-g'''(r) - g''(r) \frac{N-1}{r} = f'(g(r))g'(r) - g'(r) \frac{N-1}{r^2},$$

y escribiéndolo en función de  $u$  y  $v$ ,

$$\begin{cases} -\Delta v + \frac{N-1}{r^2}v = f'(u)v & \text{en } \mathcal{B}_{r_0} \\ v = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_{r_0}. \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $v$  e integrando por partes,

$$\int_{\mathcal{B}_{r_0}} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathcal{B}_{r_0}} f'(u)v dx = - \int_{\mathcal{B}_{r_0}} \frac{N-1}{r^2} v^2 dx < 0,$$

que contradice (3.12). □

# Capítulo 4

## El problema de Gelfand

Este capítulo está dedicado al problema de Gelfand:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{en } \mathcal{B} \\ u = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}. \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro y  $\mathcal{B}$  es la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Como hemos comentado anteriormente, trabajaremos este problema en la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$  debido a que recoge todos los resultados conocidos a pesar de ser un espacio más simple (por las peculiaridades que presenta).

Pretendemos hacer un análisis del comportamiento global de las soluciones del problema. Comenzaremos motivando su estudio a través de su interés físico y expondremos los dos resultados importantes del capítulo. El primero hace referencia a la multiplicidad de las soluciones, que variará según el valor de  $\lambda$  y de la dimensión  $N$ . El otro describe si tiene soluciones estables o no.

Después nos centraremos en desarrollar sus demostraciones. Sobre la estabilidad adelantamos que si el problema tiene solución entonces tiene una solución estable. La prueba es la misma para todo  $N$ . Por el contrario, para estudiar la multiplicidad de sus soluciones tendremos que diferenciar casos dependiendo del valor de  $N$ . Comprobaremos que en la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$  las soluciones del problema (4.1) son positivas, radiales y radialmente decrecientes.

## 4.1 Motivación y resultado principal

En dimensión  $N = 1, 2, 3$ , la ecuación (4.1) se puede derivar del modelo térmico de autoignición. El modelo completo describe el proceso de reacción en un material combustible durante lo que se denomina el periodo de ignición. Una solución  $u$  de (4.1) representa una temperatura adimensional dentro de un recipiente cilíndrico (en el cual las paredes son conductores ideales), cuando el sistema ha alcanzado un estado estacionario. La variable de espacio subyacente  $x \in \mathcal{B}$  debe ser entendida como adimensional, es decir, el tamaño del recipiente ha sido normalizado.

Ahora, echemos un segundo vistazo a la ecuación (4.1). En el lado izquierdo, hay un operador de difusión,  $-\Delta$ , que explica la difusión de calor desde los reactivos en caliente hacia la frontera fría. En el lado derecho, tenemos un término de reacción,  $e^u$ . La no linealidad exponencial tiene que ver con la llamada ley de Arrhenius. Concretamente, es una aproximación del término no lineal dado en esta ley (empírica) que toma verdaderamente la forma  $f(u) = e^{\frac{u}{1+\epsilon u}}$ . Este término modela la producción de calor inducida por la reacción química. El operador de difusión y la no linealidad de la reacción se oponen/compiten.

En un tipo de reacción, la transferencia del calor producido no es lo suficientemente rápida como para llegar a atravesar las paredes del recipiente: el combustible se agota y la reacción muere, o hay tanto combustible que se produce una explosión térmica. De cualquier manera, no hay estado estacionario, es decir, no se debe esperar una solución de (4.1). En otro tipo de reacción, por el contrario, el equilibrio entre el calor producido y el calor difundido se produce de forma rápida, por lo que (4.1) tiene soluciones.

El equilibrio entre difusión y reacción se cuantifica mediante el parámetro  $\lambda > 0$ . A veces nos referimos a este parámetro como la constante de Frank-Kamenetskii. De acuerdo con nuestra discusión anterior, no debemos esperar ninguna solución de (4.1) si  $\lambda$  es grande, mientras que si  $\lambda$  es pequeño deben existir soluciones.

En realidad, el resultado principal que desarrollaremos en las secciones posteriores se resume en:

**Proposición 50.** *Sea  $N \geq 1$ . Cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) es radial. Además, existe  $\lambda^* = \lambda^*(N) > 0$  tal que*

- *Para  $0 < \lambda < \lambda^*$ , existe una solución estable  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*

- Para  $\lambda > \lambda^*$ , no existe solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).

En cuanto a la estabilidad se puede deducir para cualquier dimensión  $N$  el siguiente teorema:

**Teorema 51.** *Si el problema (4.1) tiene una solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  entonces tiene una solución estable.*

*Demostración.* Sean  $\lambda_0 < \lambda^*$ ,  $\tilde{\lambda}_0$  con  $\lambda_0 < \tilde{\lambda}_0 < \lambda^*$  y  $w_{\tilde{\lambda}_0}$  solución del problema para  $\tilde{\lambda}_0$ .

Por un lado,  $\bar{u} = w_{\tilde{\lambda}_0}$  es supersolución de (4.1) para  $\lambda_0$ :

$$-\Delta \bar{u} = -\Delta w_{\tilde{\lambda}_0} = \tilde{\lambda}_0 e^{w_{\tilde{\lambda}_0}} \geq \lambda_0 e^{w_{\tilde{\lambda}_0}} = \lambda_0 e^{\bar{u}},$$

y  $\underline{u} = 0$  es una subsolución de (4.1) para  $\lambda_0$ :

$$-\Delta \underline{u} = 0 \geq \lambda_0 e^0 = \lambda_0 e^{\underline{u}}.$$

Además, como las soluciones son positivas  $\underline{u} \leq \bar{u}$ . El Lema 41 implica que existe una solución  $u$  de (4.1) para  $\lambda_0$  con  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ , que es minimal, entonces  $u$  es estable. Podemos caracterizar la solución viéndola como el límite de la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 = \underline{u} \\ u_1 \text{ solución de } &\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_0 e^{u_0} & \text{en } \mathcal{B} \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B} \end{cases} \\ u_2 \text{ solución de } &\begin{cases} -\Delta u_2 = \lambda_0 e^{u_1} & \text{en } \mathcal{B} \\ u_2 = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B} \end{cases} \\ &\vdots \\ u_{n+1} \text{ solución de } &\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = \lambda_0 e^{u_n} & \text{en } \mathcal{B} \\ u_{n+1} = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto verifica, por el principio del máximo, que

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq \bar{u}.$$

Al ser una sucesión creciente en un acotado tiene límite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u.$$

Pasando al límite tenemos que  $u$  es solución de (4.1) para  $\lambda_0$  y es minimal. En efecto, sea  $w \geq 0$  cualquier otra solución, tomando  $\bar{u} = w$ , por lo visto anteriormente,  $u \leq w$ .  $\square$

Se puede observar que puesto que hay unicidad de solución estable cualquier otra solución del problema tiene que ser inestable.

En las siguientes secciones desarrollaremos la prueba de la Proposición 50. En concreto, la Proposición 52 se dedica al caso  $N = 1$ , la Proposición 56 al  $N = 2$ , la Proposición 63 al  $3 \leq N \leq 9$  y la Proposición 64 al  $N \geq 10$ .

## 4.2 Dimensión $N = 1$

En dimensión  $N = 1$ , el problema de Gelfand sería:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda e^u & \text{en } [-1, 1] \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Las soluciones quedan completamente caracterizadas en la siguiente proposición.

**Proposición 52.** *Existe  $\lambda^* > 0$  tal que:*

- *Para  $0 < \lambda < \lambda^*$  existen exactamente dos soluciones  $u \in C^2([-1, 1])$  del problema (4.2).*
- *Para  $\lambda = \lambda^*$  existe una única solución  $u \in C^2([-1, 1])$  de (4.2).*
- *Para  $\lambda > \lambda^*$  no existe solución  $u \in C^2([-1, 1])$  de (4.2).*

*Las soluciones son positivas, pares, estrictamente decrecientes en  $(0, 1]$  y únicamente determinadas por su valor en  $x = 0$ .*

Representando  $\lambda$  en el eje de la  $x$  y la norma  $\|u\|_\infty = u(0)$  en el eje de la  $y$  para cada solución  $u$ , obtenemos el diagrama de bifurcación que resume la proposición (Figura 4.1)

*Demostración.* Dividiremos la demostración en dos partes.

En la primera comprobaremos que cada solución de (4.2) es positiva, par, estrictamente decreciente en  $(0, 1]$  y está caracterizada por el valor que toma en 0.

Utilizando que está caracterizada por su valor en 0, en la segunda parte, demostraremos que para algún  $\lambda^* > 0$ , existen exactamente dos soluciones del problema para  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , una para  $\lambda = \lambda^*$  y ninguna para  $\lambda > \lambda^*$ .

**Parte 1:** *Cada solución es positiva, par, estrictamente decreciente en  $(0, 1]$  y caracterizada por su valor en 0.*

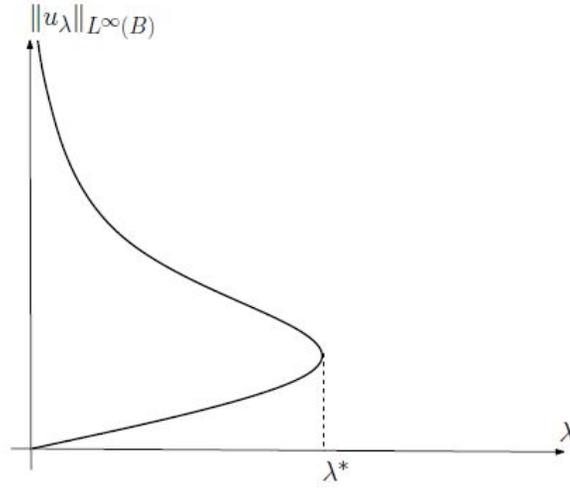


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación en dimensión  $N = 1$ .

Sea  $u$  una solución de (4.2). Como  $-u'' = \lambda e^u > 0$  en  $(-1, 1)$ ,  $u$  no alcanza un mínimo en  $(-1, 1)$  (en ningún punto  $u'' > 0$  y por tanto no puede tener un mínimo). En particular,  $u > 0$  en  $(-1, 1)$  ya que  $u(-1) = u(1) = 0$  y si en algún punto  $u$  fuera negativa tendría un mínimo.

Además,  $u$  es par y  $u'(r) < 0$  para cada  $r \in (0, 1)$ . Para probarlo supongamos por contradicción que  $u$  alcanza un máximo en algún  $x_0 \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Sin pérdida de generalidad  $x_0 \in (0, 1)$ .

Sean  $v(t) = u(x_0 + t)$  y  $\tilde{v}(t) = u(x_0 - t)$ . Podemos ver que  $v$  y  $\tilde{v}$  satisfacen el mismo problema de valor inicial con las condiciones iniciales  $v(0) = \tilde{v}(0) = u(x_0)$  y  $v'(0) = \tilde{v}'(0) = 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -v''(t) = -u''(x_0 + t) = \lambda e^{u(x_0+t)} = \lambda e^{v(t)} \text{ en } [-1, 1] \\ v(0) = u(x_0) \\ v'(0) = u'(x_0) = 0 \text{ (suponemos que } x_0 \text{ es un máximo)}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{v}''(t) = -u''(x_0 - t) = \lambda e^{u(x_0-t)} = \lambda e^{\tilde{v}(t)} \text{ en } [-1, 1] \\ \tilde{v}(0) = u(x_0) \\ \tilde{v}'(0) = u'(x_0) = 0 \text{ (suponemos que } x_0 \text{ es un máximo)}. \end{array} \right.$$

Para estudiar la unicidad de soluciones transformamos el primer problema

en un sistema de primer orden. Tomamos  $v = y_1$ ,  $v' = y_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\lambda e^{y_1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Definimos  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$F(t, y_1(t), y_2(t)) = (y_2(t), -\lambda e^{y_1(t)}).$$

Tenemos que  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  es abierto no acotado y  $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ , ya que está compuesta por funciones  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , con lo que  $F(t, y_1, y_2)$  es localmente Lipschitz respecto a la variable  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , entonces podemos garantizar la existencia y unicidad local de solución y por tanto asegurarnos la existencia de solución no prolongable.

Por la unicidad de soluciones  $v$  y  $\tilde{v}$  deben coincidir, así que

$$v(t) = \tilde{v}(t) = u(x_0 - t) = u(x_0 + (-t)) = v(-t),$$

y  $v$  es par.

En particular, si  $x_0 \in (0, 1)$  entonces  $2x_0 - 1 \in (-1, 1)$  y

$$u(2x_0 - 1) = v(x_0 - 1) = v(-x_0 + 1) = u(x_0 - x_0 + 1) = u(1) = 0,$$

contradiendo que  $u > 0$  en  $(-1, 1)$ .

Por tanto,  $u$  alcanza su único máximo en 0, es decir,  $x_0 = 0$ . Se sigue que  $v(t) = u(t)$  con lo que  $u$  es par y  $u'(r) < 0$  para  $r \in (0, 1)$ .

Veamos que está caracterizada por su valor en 0.

Multiplicamos (4.2) por  $u'$

$$-u''u' = \lambda u' e^u,$$

e integramos entre 0 y  $r \in (0, 1)$

$$\int_0^r -u''u' dx = \int_0^r \lambda u' e^u dx \Leftrightarrow \left[ -\frac{u'^2}{2} \right]_0^r = [\lambda e^u]_0^r \Leftrightarrow -\frac{u'^2}{2} = \lambda(e^u - e^{u_0}),$$

donde  $u_0 = u(0)$ . Despejando  $u'$

$$\begin{aligned} -u'^2 &= 2\lambda(e^u - e^{u_0}) \text{ como } u_0 > u, \\ u'^2 &= 2\lambda(e^{u_0} - e^u), \\ u' &= \pm\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^u)}, \end{aligned}$$

podemos reescribirlo como

$$\frac{-u'}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^u)}} = 1.$$

Integrando entre 0 y 1 y haciendo el cambio de variable  $u' = dt$ , se deduce que toda solución de (4.2) satisface

$$\int_0^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} = 1. \quad (4.3)$$

Por otra parte, cada vez que existe  $u_0 > 0$  que cumpla (4.3), la función par  $u$  definida para  $r \in (0, 1)$  por

$$\int_{u(r)}^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} = r$$

verifica (4.2).

**Parte 2:** Para algún  $\lambda^* > 0$ , existen exactamente dos soluciones si  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , una para  $\lambda = \lambda^*$  y ninguna para  $\lambda > \lambda^*$ .

Por lo que acabamos de ver, existe una solución tal que  $u(0) = u_0 > 0$  si y solo si se verifica

$$\int_0^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{2\lambda(e^{u_0} - e^t)}} = 1.$$

Vamos a trabajar con este resultado para estudiar las posibles soluciones del problema dependiendo de  $\lambda$ .

Para ello, escribimos la integral de otra manera

$$\int_0^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{2\lambda e^{u_0}(1 - e^{t-u_0})}} = 1,$$

$$\int_0^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{(1 - e^{t-u_0})}} = \sqrt{2\lambda e^{u_0}}.$$

Hacemos el cambio  $w = t - u_0$ , con lo que los límites nuevos serían  $w(0) = -u_0$  y  $w(u_0) = 0$

$$\int_{-u_0}^0 \frac{dw}{\sqrt{(1-e^w)}} = \sqrt{2\lambda}e^{u_0}.$$

Nuestro problema tiene una solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  si fijado un  $\lambda$  existe un  $u_0$  que verifique la igualdad anterior. Definimos

$$G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(s) \mapsto \int_{-s}^0 \frac{dw}{\sqrt{1-e^w}} - \sqrt{2\lambda}e^s.$$

Pretendemos estudiar cuando  $G(s) = 0$ , para ello calcularemos los máximos y mínimos de esta función (si tiene) y su curvatura. Hallamos su derivada

$$G'(s) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-s}}} - \frac{\sqrt{2\lambda}}{2}e^{\frac{s}{2}},$$

y obtenemos sus raíces  $G'(s) = 0$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^{-s}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}e^{\frac{s}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-s}} = \frac{2\lambda}{4}e^s \Leftrightarrow 1 = \frac{\lambda}{2}e^s - \frac{\lambda}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^s = \frac{2}{\lambda} + 1 \Leftrightarrow s = \ln\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right).$$

Observamos que la derivada tiene una raíz, por lo que  $G$  tiene como mucho dos. Hay un posible extremo en el punto  $x_* = \ln\left(\frac{2}{\lambda} + 1\right)$ . Para comprobar si  $x_*$  es un extremo calculamos la segunda derivada.

$$G''(s) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}e^{\frac{s}{2}} - \frac{e^{-s}}{2(1-e^{-s})^{\frac{3}{2}}},$$

y evaluamos en  $x_*$

$$\begin{aligned}
G''(x_*) &= -\frac{\sqrt{\lambda} e^{\frac{\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}}{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}}{2\left(1 - e^{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\lambda}+1}}{2\sqrt{2}} - \frac{\frac{\lambda}{2+\lambda}}{2\left(1 - \left(\frac{\lambda}{2+\lambda}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2\sqrt{2}} - \frac{\frac{\lambda}{2+\lambda}}{2\left(\frac{2}{2+\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2\sqrt{2}} - \frac{\lambda\sqrt{2+\lambda}}{2^2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) < 0.
\end{aligned}$$

Como  $G''(\ln(\frac{2}{\lambda}+1)) < 0$  tenemos un máximo en  $x_*$ . Además  $G$  es cóncava ya que  $G''(s) < 0$  en  $s \in (0, +\infty)$  y

$$G(0) = \int_0^0 \frac{dw}{\sqrt{1-e^w} - \sqrt{2\lambda}} = \sqrt{2\lambda} < 0.$$

Resumiendo,  $G(0) < 0$  para cualquier valor de  $\lambda$ ,  $G$  tiene un máximo en  $x_*$  y como mucho dos raíces. Así que, según sea el valor de  $G(x_*)$  (que depende de  $\lambda$ ), la función  $G$  es de alguna de las tres formas que se muestran en la Figura 4.2. Por el dibujo podemos observar que si  $G(x_*) > 0$  existirán dos

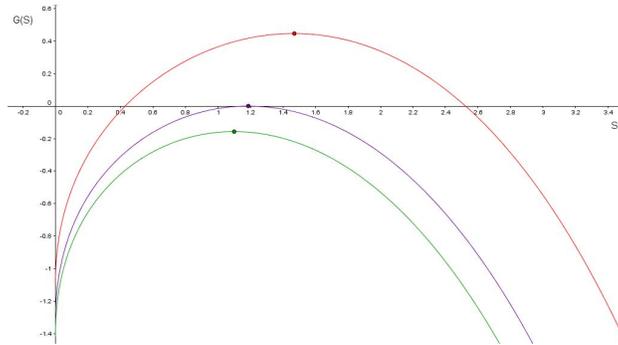


Figura 4.2: Posibles formas de la función  $G$ .

soluciones del problema, si  $G(x_*) = 0$  habrá solo una solución y si  $G(x_*) < 0$  no tendremos ninguna solución. Procedemos a calcular el valor de  $G$  en el punto  $x_*$ .

$$G\left(\ln\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)\right) = \int_{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}^0 \frac{dw}{\sqrt{1-e^w} - \sqrt{2\lambda}} - \sqrt{2\lambda\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)}.$$

Necesitamos resolver la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{dw}{\sqrt{1-e^w}} &= -2 \tanh^{-1}(\sqrt{1-e^w}) + C \\ &= -2 \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-e^w}}{1 - \sqrt{1-e^w}} \right) = -\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-e^w}}{1 - \sqrt{1-e^w}} \right),\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\int_{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}^0 \frac{dw}{\sqrt{1-e^w}} &= \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left( -\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-e^w}}{1 - \sqrt{1-e^w}} \right) \right) - \left( -\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-e^{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}}}{1 - \sqrt{1-e^{-\ln(\frac{2}{\lambda}+1)}}} \right) \right) \\ &= -\ln \lim_{w \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sqrt{1-e^w}}{1 - \sqrt{1-e^w}} \right) + \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - (\frac{2}{\lambda} + 1)^{-1}}}{1 - \sqrt{1 - (\frac{2}{\lambda} + 1)^{-1}}} \right) \\ &= -\ln 1 + \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2+\lambda}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2+\lambda}}} \right) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}} \right).\end{aligned}$$

Así,

$$G \left( \ln \left( \frac{2}{\lambda} + 1 \right) \right) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}} \right) - \sqrt{4 + 2\lambda}.$$

Como hemos comentado, el valor que toma  $G$  en el máximo  $x_*$  depende de  $\lambda$ . Queda comprobar que la función  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$g(\lambda) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{2+\lambda}}} \right) - \sqrt{4 + 2\lambda},$$

tiene una única raíz, que será  $\lambda^*$ .

Calculando su derivada

$$\begin{aligned}
 g'(\lambda) &= \frac{\sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2}}{\sqrt{2+\lambda} + \sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2})^2} \frac{(\sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2} - \sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2})}{2\sqrt{2+\lambda}} \\
 &\quad - \frac{2}{2\sqrt{4+2\lambda}} \\
 &= \frac{1}{2+\lambda-2} \frac{(-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2+\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\lambda}} = -\frac{2+\lambda}{\sqrt{2}\lambda\sqrt{2+\lambda}} = -\frac{\sqrt{2+\lambda}}{\sqrt{2}\lambda} < 0,
 \end{aligned}$$

y observamos que la función  $g$  es estrictamente decreciente para  $\lambda > 0$ . Los valores que toma en los extremos son

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln \left( \frac{\sqrt{2+\lambda} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2}} \right) - \sqrt{4+2\lambda} = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt{2+\lambda} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+\lambda} - \sqrt{2}} \right) - \sqrt{4+2\lambda} = -\infty.$$

Por el teorema de Bolzano existe un único  $\lambda^* \in (0, +\infty)$  tal que  $g(\lambda^*) = 0$ , es decir, para el que  $G(x_*) = 0$  (Figura 4.3).

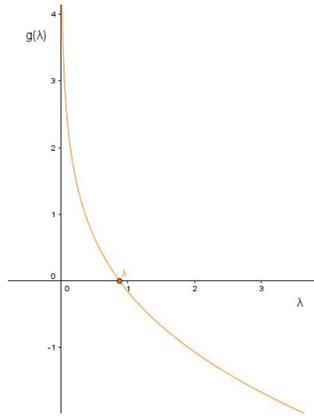


Figura 4.3: Comportamiento de la función  $g$ .

Así pues, las conclusiones obtenidas serían:

Para  $0 < \lambda < \lambda^*$ , tenemos que  $G(x_*) > 0$  y  $G$  tiene dos raíces, es decir, para ese  $\lambda$  hay dos valores  $u_0$  que verifican la condición (4.3), así que (4.2) tiene dos soluciones  $u \in C^2(\bar{B})$ .

Para  $\lambda^*$  tenemos que  $G(x_*) = 0$  y  $G$  tiene una raíz, es decir, hay un único valor  $u_0$  que verifica (4.3), así que (4.2) tiene una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$ .

Para  $\lambda > \lambda^*$  tenemos que  $G(x_*) < 0$  y  $G$  no tiene raíces, es decir, no hay ningún valor  $u_0$  que verifique (4.3), así que (4.2) no tiene ninguna solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$ .

Por último, si resolvemos la ecuación

$$G\left(\ln\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right) = 0,$$

obtenemos que  $\lambda^* \approx 0'878457679781290\dots$  □

### 4.3 Dimensión $N = 2$

Como veremos en esta sección, el comportamiento global del conjunto de soluciones para  $N = 2$  es muy parecido al que tenían las soluciones para  $N = 1$ . Observando el diagrama de bifurcación en dimensión  $N = 2$  (Figura 4.4) podemos interpretar que para  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  existen dos soluciones del problema, para  $\lambda = \lambda^*$  existe una única solución y para  $\lambda > \lambda^*$  no existe solución. Además, en este caso, podremos calcular explícitamente las soluciones del problema de Gelfand.

Antes de enunciar la proposición que recoge los resultados mencionados, especificaremos una serie de lemas técnicos que utilizaremos tanto en esta sección como en secciones posteriores <sup>1</sup>.

En primer lugar mostraremos el lema que hace referencia a que las soluciones del problema de Gelfand son radiales.

**Lema 53.** *Cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1) es positiva, radial y radialmente decreciente.*

*Demostración.* Como  $-\Delta u = \lambda e^u \geq 0$  en  $\mathcal{B}$  y  $u = 0$  en  $\partial\mathcal{B}$ , entonces  $u$  es positiva en  $\mathcal{B}$  por el principio del máximo (Proposición 16). Esto implica, considerando el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, que toda solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1) es radial y radialmente decreciente, es decir,  $u'(r) < 0$  para  $r > 0$ . □

---

<sup>1</sup>Los lemas se verifican para todas las dimensiones, también para  $N = 1$ , pero hemos podido realizar la demostración sin enunciarlos explícitamente.

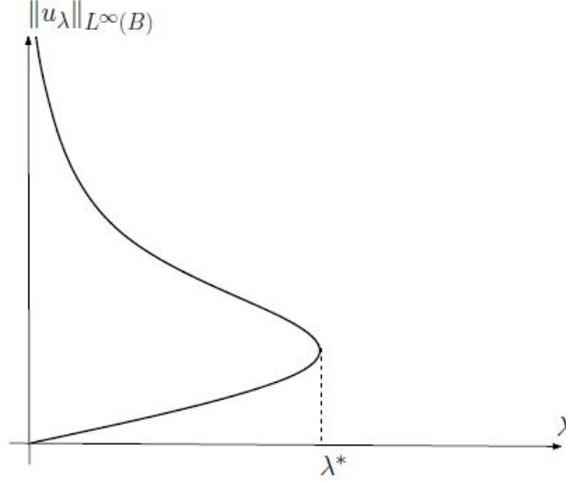


Figura 4.4: Diagrama de bifurcación en dimensión  $N = 2$ .

Por otro lado, calcularemos la expresión que verifican las soluciones radiales del problema (4.1) para cualquier dimensión.

**Lema 54.** *Las soluciones radiales del problema (4.1) verifican la siguiente ecuación*

$$-u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u.$$

*Demostración.* Consideramos

$$u(x) = u(\|x\|) = u(r) \text{ donde } r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2},$$

sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = u'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = u'(r) \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}} = u'(r) \frac{x_i}{r},$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{\sum_{i=1}^N r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \\ &= u''(r) + u'(r) \frac{Nr - r}{r^2} = u''(r) + u'(r) \frac{N-1}{r},\end{aligned}$$

llegando a

$$-u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u,$$

que es la expresión deseada.  $\square$

**Observación 55.** *Los lemas 53 y 54 muestran que las soluciones de (4.1) deben satisfacer el siguiente problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} -u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u \text{ en } [0, 1] \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Ya estamos en el contexto adecuado para enunciar la proposición principal de esta sección en la que estudiaremos y daremos explícitamente las soluciones del problema de Gelfand para  $N = 2$ . Partiendo del hecho de que las soluciones son radiales, confirmaremos primero que las expresiones que se exponen verifican realmente el problema (distinguiendo cuando  $0 < \lambda < \lambda^*$  y  $\lambda^* = 2$ ). Con ayuda de los lemas previos llegaremos a la condición que nos asegura la existencia o no de soluciones y cuántas hay, en función del valor de  $\lambda$ .

**Proposición 56.** *Dados  $N = 2$  y  $\lambda^* = 2$ :*

- *Para  $0 < \lambda < \lambda^*$  existen exactamente dos soluciones  $u_\lambda, U_\lambda \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1). Ambas soluciones son radiales y vienen dadas por*

$$\begin{aligned}u_\lambda(r) &= \ln \frac{8b_-}{(1 + \lambda b_- r^2)^2}, \\ U_\lambda(r) &= \ln \frac{8b_+}{(1 + \lambda b_+ r^2)^2},\end{aligned}\tag{4.4}$$

donde  $b_\pm = \frac{4\lambda \pm \sqrt{16-8\lambda}}{\lambda^2}$ ,  $r \in [0, 1]$ .

- Para  $\lambda = \lambda^*$  existe una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1). La solución es radial y viene dada por

$$u(r) = \ln \frac{4}{(1+r^2)^2} \text{ para } r \in [0, 1]. \quad (4.5)$$

- Para  $\lambda > \lambda^*$  no existe ninguna solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).

*Demostración.* Cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) es positiva y radial por lo visto en el lema 53.

Vamos a constatar que si  $0 < \lambda < \lambda^*$  las soluciones de (4.1) son de la forma (4.4). Sean

$$u(r) = \ln \frac{8b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm} r^2)^2},$$

y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Trabajaremos con ambas soluciones a la vez. Expresamos  $u$  en función de  $(x, y)$ :

$$u(x, y) = \ln \frac{8b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2}.$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{-4\lambda b_{\pm} x}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{-4\lambda b_{\pm} y}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4\lambda^2 b_{\pm}^2 x^2 - 4\lambda^2 b_{\pm}^2 y^2 - 4\lambda b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-4\lambda^2 b_{\pm}^2 x^2 + 4\lambda^2 b_{\pm}^2 y^2 - 4\lambda b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{4\lambda^2 b_{\pm}^2 x^2 - 4\lambda^2 b_{\pm}^2 y^2 - 4\lambda b_{\pm} - 4\lambda^2 b_{\pm}^2 x^2 + 4\lambda^2 b_{\pm}^2 y^2 - 4\lambda b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2} \\ &= \frac{-8\lambda b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\lambda e^u(x, y) = \lambda e^{\ln \frac{8b_{\pm}}{(1+\lambda b_{\pm}(x^2+y^2))^2}} = \frac{8\lambda b_{\pm}}{(1 + \lambda b_{\pm}(x^2 + y^2))^2}.$$

Entonces  $-\Delta u = \lambda e^u$  y  $u(r)$  es solución del problema.

En el caso  $\lambda^* = 2$  la solución de (4.1) es de la forma (4.5). Sean

$$u(r) = \ln \frac{4}{(1 + r^2)^2},$$

y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Expresamos  $u$  en función de  $(x, y)$

$$u(x, y) = \ln \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{-4x}{1 + x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{-4y}{1 + x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4(x^2 - y^2 - 1)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4(-x^2 + y^2 - 1)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Así,

$$\Delta u(x, y) = -\frac{8}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por otro lado,

$$2e^u(x, y) = 2e^{\ln 4(1+x^2+y^2)} = \frac{8}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Entonces  $-\Delta u = \lambda e^u$  y  $u(r)$  es solución del problema.

Por el lema 54 cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) verifica

$$-u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u,$$

y puesto que hay como mucho una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} -u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u \text{ en } \mathcal{B} \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0, \end{cases}$$

cada solución debe ser de la forma (4.4) para algún  $b \in \mathbb{R}$ . Ya que las soluciones también deben satisfacer la condición de contorno  $u(1) = 0$  entonces

$$u(1) = \ln \frac{8b}{(1 + \lambda b)^2} = 0,$$

y despejando llegamos a la condición que buscábamos (que depende de  $\lambda$ )  $8b = (1 + \lambda b)^2$ .

El número de soluciones que tiene la ecuación de segundo grado que resulta al desarrollar la condición,  $\lambda^2 b^2 + (2\lambda - 8)b + 1 = 0$ , nos dará el número de soluciones que tiene el problema. Resolviendo

$$b = \frac{4 - \lambda \pm \sqrt{16 - 8\lambda}}{\lambda^2}.$$

Como  $b \in \mathbb{R}$  el signo del discriminante nos aporta la información necesaria. Si  $16 - 8\lambda > 0$  la ecuación tiene dos soluciones  $b_{\pm}$  que verifican la condición de contorno, con lo que habrá dos soluciones del problema. Si  $16 - 8\lambda = 0$  la ecuación tiene una única solución que verifique la condición de contorno, con lo que el problema tendrá una única solución. Si  $16 - 8\lambda < 0$  la ecuación no tiene ninguna solución real, con lo que no existe ningún  $b$  que verifique la condición de contorno y el problema no tendrá solución.

Esto es:

- Si  $\lambda < 2$ , la ecuación tiene dos soluciones, por tanto existen dos soluciones  $u_{\lambda}, U_{\lambda} \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1).
- Si  $\lambda = 2$ , la ecuación tiene una solución, por tanto existe una única solución  $u_{\lambda} \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  del problema (4.1).
- Si  $\lambda > 2$ , la ecuación no tiene solución, por tanto no existe ninguna solución del problema (4.1).

□

**Observación 57.** *Como comentamos al inicio, los diagramas de bifurcación para  $N = 1$  y  $N = 2$  son muy similares, pero podemos señalar una diferencia importante. Para  $N = 1$ , cuando  $\lambda \rightarrow 0$  la solución inestable  $U_{\lambda}$  diverge en todos los puntos  $x \in (-1, 1)$ . En  $N = 2$ ,  $U_{\lambda}$  diverge solo en el origen. En efecto,*

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda(r) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln \frac{8 \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda^2}}{\left(1 + \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda} r^2\right)^2} = \ln 8 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda^2}}{\left(\frac{\lambda+(4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda})r^2}{\lambda}\right)^2} \\
&= \ln 8 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda}}{\lambda + (4-\lambda+\sqrt{16-8\lambda})r^2} = \ln 8 \frac{4+4}{16r^4} = \ln \frac{1}{r^4} = 4 \ln \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

para  $r \in (0, 1)$ .

#### 4.4 Dimensión $N \geq 3$

El comportamiento global del conjunto de soluciones del problema de Gelfand para dimensiones mayores que 3 presenta algunas variaciones de lo visto hasta ahora. Incluso encontraremos si  $3 \leq N \leq 9$  o si  $N \geq 10$ , que se verán reflejadas en los diagramas de bifurcación correspondientes (Figura 4.5 y Figura 4.6, respectivamente).

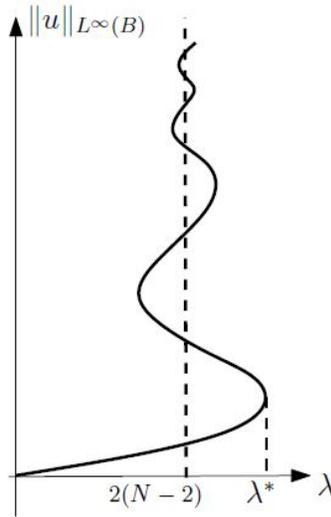


Figura 4.5: Diagrama de bifurcación en dimensión  $3 \leq N \leq 9$ .

Observamos que si  $3 \leq N \leq 9$  para  $0 < \lambda < \lambda^*$  con  $\lambda \neq 2(N-2)$  existen un número finito de soluciones del problema de manera que si  $\lambda$  se

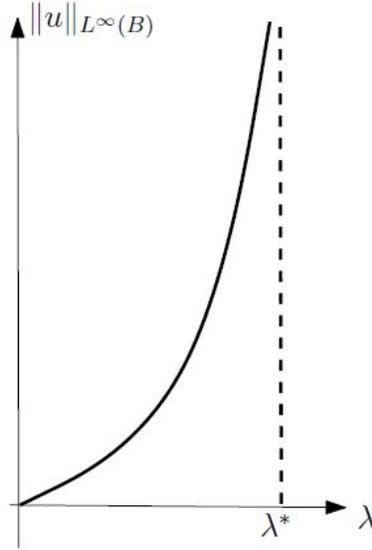


Figura 4.6: Diagrama de bifurcación en dimensión  $N \geq 10$ .

acerca a  $2(N - 2)$  (tanto por la derecha como por la izquierda) existen tantas soluciones como queramos, para  $\lambda = 2(N - 2)$  existen infinitas soluciones, para  $\lambda = \lambda^*$  existe una única solución y para  $\lambda > \lambda^*$  no existe solución. Por otro lado, si  $N \geq 10$  para  $0 < \lambda < \lambda^*$  existe una única solución del problema y para  $\lambda > \lambda^*$  no existe solución.

Comenzaremos con una serie de lemas previos donde haremos sucesivas reducciones del problema para facilitar la formalización de estos resultados. También recurriremos a los Lemas 53 y 54. Aunque estos lemas aparecen en el caso  $N = 2$  si observamos la prueba veremos que son perfectamente válidos en cualquier dimensión.

El siguiente resultado nos muestra la equivalencia de dos problemas de valores iniciales.

**Lema 58.** *El problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} -u'' - \frac{N-1}{r}u' = \lambda e^u \text{ en } [0, 1] \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

para algún  $a > 0$ , es equivalente a

$$\begin{cases} r^{-(N-1)} (r^{N-1}u')' + \lambda e^u = 0 \text{ en } [0, 1] \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

*Demostración.* Reescribiendo la ecuación

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + \lambda e^u = 0 &\Leftrightarrow r^{-(N-1)} (r^{N-1}u'' + (N-1)r^{N-2}u') + \lambda e^u = 0 \\ r^{-(N-1)} (r^{N-1}u')' + \lambda e^u &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos lo esperado.  $\square$

**Observación 59.** En concreto, el Lema 54 indica que toda solución radial de (4.1) satisface el problema de valores iniciales (4.6). Por otro lado, el Lema 58 muestra la equivalencia de (4.6) con (4.7). Por tanto, toda solución radial de (4.1) satisface el problema de valores iniciales (4.7).

Lo siguiente que haremos es demostrar que el problema de valores iniciales anterior tiene una única solución no prolongable definida para  $r \geq 0$ .

**Lema 60.** El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} r^{-(N-1)} (r^{N-1}u')' + \lambda e^u = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

para algún  $a > 0$ , tiene una única solución no prolongable definida para  $r \geq 0$ .

*Demostración.* Esta demostración la dividiremos en dos partes. En la primera parte comprobaremos que tiene una única solución no prolongable aplicando el teorema de Picard-Lindelöf a una ecuación equivalente. En la segunda, utilizando el teorema de Wintner, afirmaremos que la solución no prolongable está definida para  $r \geq 0$ .

Consideramos la ecuación

$$u(r) = a - \lambda \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} e^{u(t)} dt ds.$$

Veamos que es equivalente a (4.8).

$$u'(r) = -\lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} e^{u(t)} dt,$$

$$r^{N-1}u'(r) = -\lambda \int_0^r t^{N-1} e^{u(t)} dt,$$

$$(r^{N-1}u'(r))' = -\lambda r^{N-1} e^{u(r)},$$

y

$$r^{-(N-1)} (r^{N-1}u')' + \lambda e^u = 0.$$

Las condiciones iniciales también se verifican  $u(0) = a$  y  $u'(0) = 0$ .

Por tanto, tenemos el problema de valores iniciales equivalente

$$\begin{cases} u'(r) = -\lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} e^{u(t)} dt \\ u(0) = a. \end{cases}$$

Como  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(r, u(r)) = -\lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} e^{u(t)} dt,$$

es continua y verifica la condición de Lipschitz,

$$\begin{aligned} \|F(r, u_1(r)) - F(r, u_2(r))\| &\leq \left| -\lambda \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} (e^{u_1(t)} - e^{u_2(t)}) dt \right| \\ &\leq \mathbf{C}(\lambda, \|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty) \|u_1 - u_2\|_\infty, \end{aligned}$$

existe una solución no prolongable (maximal) del problema.

En segundo lugar, podemos afirmar que la solución no prolongable está definida para  $r \geq 0$ . Volvemos a (4.8) y expresamos el problema como un sistema

$$Y(r) = \begin{pmatrix} u(r) \\ u'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} Y'(r) = \begin{pmatrix} u'(r) \\ -\frac{N-1}{r}u'(r) - \lambda e^{u(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(r) \\ -\frac{N-1}{r}y_2(r) - \lambda e^{y_1(r)} \end{pmatrix} \\ Y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Sea  $I = ]0, \beta[$  el intervalo abierto más grande de  $]0, +\infty[$  en el que (4.9) tiene solución. Vamos a probar que  $\beta = +\infty$ .

Sea  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  dicha solución no prolongable. Por el lema de Wintner se tiene que verificar que el conjunto

$$\{(t, Y(t)) : t \in [\epsilon, \beta]\} = \{(t, y_1(t), y_2(t)) : t \in [\epsilon, \beta]\},$$

satisface al menos una de estas dos opciones:

- a) es no acotado,
- b) interseca a la frontera del dominio de la función  $G : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$G(r, y_1(r), y_2(r)) = \left( y_2(r), -\frac{N-1}{r}y_2(r) - \lambda e^{y_1(r)} \right).$$

Como  $D = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2$ ,  $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}^2$  y no interseca a la frontera del dominio de  $G$ . Necesariamente se tiene que cumplir a).

Vemos que  $y_1'(t) = y_2(t) < 0$  ya que  $u'(r) < 0$  para  $r > 0$ , así que  $0 \leq y_1(t) \leq y_1(0) = u(0) = a > 0$ , con lo que  $y_1(t)$  está acotado.

Si  $\beta < +\infty$ , entonces

$\{(t, y_1(t), y_2(t)) : t \in [\epsilon, \beta]\}$  es acotado si, y solo si,  $\{y_2(t) : t \in [\epsilon, \beta]\}$  es acotado <sup>2</sup>.

Operando sobre esta ecuación

$$y_2'(t) = -\frac{N-1}{t}y_2(t) - \lambda e^{y_1(t)},$$

teniendo en cuenta que  $0 \leq y_1(t) \leq a$

$$\begin{aligned} -\frac{N-1}{t}y_2(t) - \lambda e^a &\leq y_2'(t) \leq -\frac{N-1}{t}y_2(t) - \lambda e^0, \\ -\lambda e^a &\leq y_2'(t) + \frac{N-1}{t}y_2(t) \leq -\lambda, \\ -\lambda e^a t^{N-1} &\leq t^{N-1}y_2'(t) + (N-1)t^{N-2}y_2(t) \leq -\lambda t^{N-1}, \\ -\lambda e^a t^{N-1} &\leq (t^{N-1}y_2(t))' \leq -\lambda t^{N-1}, \end{aligned}$$

e integramos cada parte

$$\int_{\epsilon}^{\beta} -\lambda e^a t^{N-1} dt = -\lambda e^a \left[ \frac{t^N}{N} \right]_{\epsilon}^{\beta} = \frac{-\lambda e^a}{N} (\beta^N - \epsilon^N),$$

---

<sup>2</sup>Debido a que  $t \in [0, \beta]$  e  $y_1(t) \in [0, a]$ .

$$\int_{\epsilon}^{\beta} -\lambda t^{N-1} dt = -\lambda \left[ \frac{t^N}{N} \right]_{\epsilon}^{\beta} = -\frac{\lambda}{N}(\beta^N - \epsilon^N),$$

$$\int_{\epsilon}^{\beta} (t^{N-1} y_2(t))' dt = [t^{N-1} y_2(t)]_{\epsilon}^{\beta} = \beta^{N-1} y_2(\beta) - \epsilon^{N-1} y_2(\epsilon),$$

llegamos a

$$\frac{-\lambda e^a}{N}(\beta^N - \epsilon^N) + \epsilon^{N-1} y_2(\epsilon) \leq \beta^{N-1} y_2(\beta) \leq -\frac{\lambda}{N}(\beta^N - \epsilon^N) + \epsilon^{N-1} y_2(\epsilon),$$

y  $\beta^{N-1} y_2(\beta)$  es acotado. Esto entra en contradicción con a), luego  $\beta = +\infty$ .

Por tanto hemos probado que el problema (4.8) tiene una única solución para  $r \geq 0$ .  $\square$

El proximo resultado va a ser clave. Aplicaremos al problema de valores iniciales con el que estamos trabajando una transformación que nos facilitará nuestro propósito.

**Lema 61.** *Aplicando la siguiente transformación, llamada transformación de Emden,*

$$u(r) = w(t) - 2t + a \text{ con } r = \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^t,$$

tenemos que (4.8) es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria autónoma

$$\begin{cases} w'' + (N-2)w' + 2(N-2)(e^w - 1) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) - 2t = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t}(w'(t) - 2) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

*Demostración.* En primer lugar, despejamos la variable  $t$

$$t = \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} r \right).$$

Así, la variable  $u$  se expresaría aplicando el cambio como

$$u(r) = w \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} r \right) \right) - 2 \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} r \right) + a. \quad (4.11)$$

Calculamos sus derivadas

$$u'(r) = \frac{1}{r}w' \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right) - \frac{2}{r},$$

$$u''(r) = -\frac{1}{r^2}w' \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right) + \frac{1}{r^2}w'' \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right) + \frac{2}{r^2}.$$

Como hemos ya hemos realizado las derivadas, para poder operar de forma más cómoda consideraremos

$$w = w \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right),$$

$$w' = w' \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right),$$

$$w'' = w'' \left( \ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right) \right).$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} (r^{N-1}u'(r))' &= (N-1)r^{N-2}u'(r) + r^{N-1}u''(r) \\ &= r^{N-3}w'' + (N-2)r^{N-3}w' - 2(N-2)r^{N-3}, \end{aligned}$$

y

$$e^{-2t} = e^{\ln \left( \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}}r \right)^{-2}} = \frac{2(N-2)}{\lambda e^a} r^{-2}.$$

Si sustituímos en (4.8)

$$\begin{aligned} r^{-(N-1)} (r^{N-1}u'(r))' + \lambda e^{u(r)} &= \\ &= r^{-2}w'' + (N-2)r^{-2}w' - 2(N-2)r^{-2} + \lambda e^w \frac{2(N-2)}{\lambda e^a} r^{-2} e^a \\ &= r^{-2}w'' + (N-2)r^{-2}w' + 2(N-2)r^{-2} (e^w - 1) = 0 \end{aligned}$$

comprobamos que obtenemos (4.10)

$$w'' + (N-2)w' + 2(N-2)(e^w - 1) = 0.$$

Queda probada una implicación.

Recíprocamente, despejamos  $w$  de la transformación

$$w(t) = u(r) + 2t - a = u\left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) + 2t - a.$$

Calculamos las derivadas

$$w'(t) = \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t u' \left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) + 2 = ru'(r) + 2,$$

$$\begin{aligned} w''(t) &= \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} \left( e^t u' \left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) \right. \\ &\quad \left. + e^{2t} \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} u'' \left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) \right) \\ &= \frac{2(N-2)}{\lambda e^a} e^{2t} u'' \left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) + \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^t u' \left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) \\ &= r^2 u''(r) + ru'(r). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.10)

$$r^2 u''(r) + ru'(r) + (N-2)ru'(r) + 2(N-2) + 2(N-2)e^{u(r)}e^{2t}e^{-a} - 2(N-2) = 0,$$

$$r^2 u''(r) + (N-1)ru'(r) + \frac{2(N-2)}{e^a} e^{2t} e^{u(r)} = 0,$$

$$r^2 u''(r) + (N-1)ru'(r) + \lambda r^2 e^{u(r)} = 0,$$

$$u''(r) + \frac{(N-1)}{r} u'(r) + \lambda e^{u(r)} = 0,$$

$$r^{-(N-1)} \left( r^{N-1} u''(r) + (N-1)r^{N-2} u'(r) \right) + \lambda e^{u(r)} = 0,$$

$$r^{-(N-1)} \left( r^{N-1} u'(r) \right)' + \lambda e^{u(r)} = 0.$$

Obtenemos la ecuación (4.8).

Estudiamos si los límites coinciden

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) - 2t = \lim_{t \rightarrow -\infty} u\left(\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}}e^t\right) - a = u(0) - a = 0 \Leftrightarrow u(0) = a,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t}(w'(t) - 2) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} \left( \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^t u' \left( \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^t \right) \right) \\
&= \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} \lim_{t \rightarrow -\infty} u' \left( \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^t \right) = \sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} u'(0) = 0 \\
&\Leftrightarrow u'(0) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, vía la transformación utilizada, ambos problemas son equivalentes.  $\square$

A continuación, tratamos de enunciar los resultados que analizan los comportamientos de las soluciones de (4.1) para  $3 \leq N \leq 9$  y  $N \geq 10$ .

La idea general de ambas demostraciones es que, partiendo de todos los lemas técnicos trabajados con anterioridad, se puede reescribir el problema de valores iniciales resultante al aplicar la transformación de Emden como un sistema autónomo para calcular y estudiar la naturaleza de sus puntos estacionarios, que como veremos solo es el  $(0, 0)$ . La naturaleza de  $(0, 0)$  cambia en cada demostración. Después nos centraremos en la órbita del problema y en su comportamiento. La forma de la órbita y la condición de contorno que no hemos considerado nos proporcionarán una expresión (que depende de  $\lambda$ ) que nos permitirá a diferenciar los distintos tipos de soluciones.

Para dicho fin veamos un último lema que se centra en estudiar los puntos estacionarios de (4.10).

Reescribiendo (4.10) como un sistema autónomo obtenemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w' \\ -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

**Lema 62.** *El único punto estacionario del sistema autónomo (4.12) es  $(0, 0)$ . Además si  $3 \leq N \leq 9$ ,  $(0, 0)$  es un atractor espiral. En cambio, si  $N \geq 10$ ,  $(0, 0)$  es un atractor propio.*

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $(0, 0)$  es el único punto estacionario del sistema autónomo (4.12):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} w' = 0 \\ -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) = 0, \end{cases} \\
-(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) = 0 &\Leftrightarrow e^w - 1 = 0 \Leftrightarrow e^w = 1 \Leftrightarrow w = 0.
\end{aligned}$$

Para estudiar la naturaleza del punto estacionario linearizamos el sistema en  $(0, 0)$ . Para este proceso, sean

$$f(w) = e^w - 1 \text{ y } f'(w) = e^w.$$

Así, en  $(0, 0)$

$$f(w) \approx f(0) + f'(0)(w - 0) = w.$$

Resultando

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2(N-2) & -(N-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz asociada al sistema

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2(N-2) & -(N-2) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (N-2)\lambda + 2(N-2) = 0.$$

Resolviendo la ecuación,

$$\lambda = \frac{-(N-2) \pm \sqrt{(N-2)^2 - 8(N-2)}}{2} = \frac{-(N-2) \pm \sqrt{(N-2)(N-10)}}{2}.$$

Ahora es el momento de diferenciar entre  $3 \leq N \leq 9$  y  $N \geq 10$  ya que cambian las conclusiones. En el caso  $3 \leq N \leq 9$ ,

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left( N - 2 \pm i\sqrt{(N-2)(10-N)} \right),$$

obtenemos dos valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_- &= -\frac{1}{2} \left( N - 2 - i\sqrt{(N-2)(10-N)} \right), \\ \lambda_+ &= -\frac{1}{2} \left( N - 2 + i\sqrt{(N-2)(10-N)} \right). \end{aligned}$$

Observamos que la parte real de estos valores es negativa ya que

$$-\frac{1}{2}(N-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}N - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}N < -1 \Leftrightarrow N > 2.$$

Como los valores propios son complejos conjugados con parte real no nula y negativa tenemos que  $(0, 0)$  es un atractor espiral.

Por otro lado, si  $N \geq 10$ , obtenemos dos valores propios

$$\lambda_- = \frac{-(N-2) - \sqrt{(N-2)(N-10)}}{2} < 0,$$

$$\lambda_+ = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)(N-10)}}{2} < 0,$$

debido a que  $(N-2)(N-10) < (N-2)^2 \Leftrightarrow (N-10) < (N-2)$ . Los valores propios son reales negativos, por tanto  $(0, 0)$  es un atractor propio.  $\square$

Ahora ya estamos en posición de enunciar las proposiciones que muestran el comportamiento de las soluciones del problema.

**Proposición 63.** *Sea  $3 \leq N \leq 9$ . Existe  $\lambda^* > 2(N-2)$  tal que*

- *Para  $0 < \lambda < \lambda^*$  con  $\lambda \neq 2(N-2)$ , existe un número finito de soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*
- *Dado cualquier  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $|\lambda - 2(N-2)| < \epsilon$ , existen por lo menos  $k$  soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*
- *Para  $\lambda = 2(N-2)$ , existen infinitas soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*
- *Para  $\lambda = \lambda^*$ , existe una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*
- *Para  $\lambda > \lambda^*$ , no existe ninguna solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*

Recordemos que el diagrama de bifurcación de la Figura 4.5 resume la proposición.

*Demostración.* Cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) es positiva, radial y radialmente decreciente por el Lema 53. Por tanto, cada solución debe satisfacer el problema de valores iniciales (4.8) (Lemas 54 y 58). Como comprobamos en el Lema 60 el problema de valores iniciales (4.8) tiene una única solución no prolongable definida para  $r \geq 0$ . Aplicando al problema la transformación de Emden (Lema 61), obtenemos que es equivalente a (4.10). Además, por el Lema 62, el sistema autónomo (4.12) tiene como único punto estacionario  $(0, 0)$  y es un atractor espiral.

Ahora, denotamos  $w$  a la solución de (4.10). Por definición, la órbita del sistema (4.12) dada por

$$O = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \in \mathbb{R}\},$$

es asintótica a la recta  $w' = 2$  cuando  $t = -\infty$  en el diagrama de fases  $(w, w')$ . Esto se debe a que la condición inicial  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t}(w'(t) - 2) = 0$  implica que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} w'(t) = 2$ .

La órbita  $O$  no es periódica debido al comportamiento de la solución en  $-\infty$ .

Consideremos las siguientes cuatro regiones del plano (ver Figura 4.7):

$$\Omega_1 = \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\},$$

$$\Omega_2 = \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\},$$

$$\Omega_3 = \{w' < 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\},$$

$$\Omega_4 = \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}.$$

A continuación comprobaremos que la órbita  $O$  está contenida en el semi-

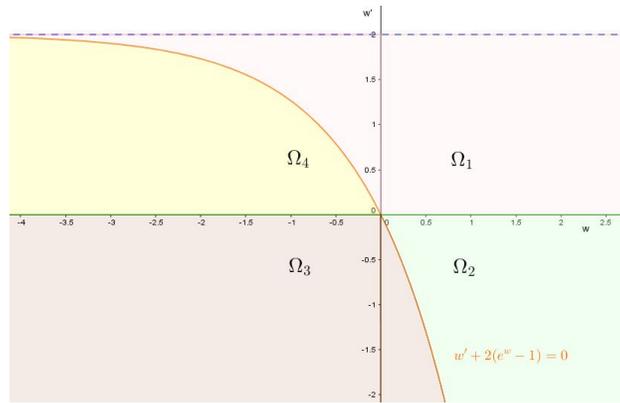


Figura 4.7: Regiones del plano.

plano  $\{(w, w') : w' < 2\}$  y que, comenzando en  $\Omega_1$ ,  $O$  interseca sucesivamente en  $\Omega_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , de forma espiral hacia el único punto estacionario  $(0, 0)$ .

Como  $u$  es radialmente decreciente entonces  $u'(r) < 0$  para  $r > 0$ , así  $0 > ru'(r) = w'(t) - 2$ , por lo que  $O$  se encuentra en  $\{(w, w') : w' < 2\}$ .

Notaremos por  $O_{t_0} = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \leq t_0\}$ . Comenzaremos comprobando que existe  $t_0$  de manera que  $O_{t_0} \subset \Omega_1$ . Diremos que  $O$  empieza

en  $\Omega_1$ . Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow -\infty} r^{-2}(w'(t) + 2(e^{w(t)} - 1)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} r^{-2} (ru'(r) + 2 + 2e^{u(r)+2t-a} - 2) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u'(r)}{r} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\lambda}{2(N-2)} e^{2t} e^{-a} e^a e^{-2t} e^{u(r)} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} u''(r) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda e^{u(r)}}{N-2} = u''(0) + \frac{\lambda e^a}{N-2} \\
&= -\frac{\lambda e^a}{N} + \frac{\lambda e^a}{N-2} = \lambda e^a \left( -\frac{1}{N} + \frac{1}{N-2} \right) = \lambda e^a \frac{2}{N(N-2)} > 0,
\end{aligned}$$

ya que  $(N-1)\frac{u'(r)}{r} + u''(r) = -\lambda e^{u(r)}$ , aplicando L'Hôpital cuando  $r \rightarrow 0$  tenemos que  $(N-1)u''(0) + u''(0) = Nu''(0) = -\lambda e^a$  y así  $u''(0) = -\frac{\lambda e^a}{N}$ . Por esto, existe  $t_0$  tal que  $O_{t_0} \subset \Omega_1$  y  $O$  empieza en  $\Omega_1$ .

Analizamos las posibles situaciones que podrían ocurrir con  $O$ .

Partimos de que  $O$  empieza en  $\Omega_1$ . Si  $O \subset \Omega_1$  observemos que en esta región del plano tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= w' > 0, \text{ luego } w \text{ es estrictamente creciente,} \\
\frac{dw'}{dt} &= -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) < 0, \text{ luego } w' \text{ es estrictamente decreciente.}
\end{aligned}$$

Observemos que puesto que dos órbitas de un sistema autónomo son siempre disjuntas no existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(w(t_0), w'(t_0)) = (0, 0)$ . Más aún, si  $O \subset \Omega_1$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (w(t), w'(t)) = (0, 0)$  llegaríamos a una contradicción con que  $(0, 0)$  sea un atractor espiral.

Por otra parte, afirmamos que  $O$  no puede estar contenida en  $\Omega_1$  siendo  $O - O_\epsilon$  no acotado. En otro caso, para todo  $M > 0$ , existe  $t_M > 0$  tal que

$$(w(t_M), w'(t_M)) \in \Omega_1 \text{ y } w(t_M) > M.$$

Como  $w$  es estrictamente creciente  $w(t) > w(t_M) > M$  para todo  $t > t_M$ . Además, si  $w \geq w(t_M)$ ,

$$\frac{dw'}{dw} = -(N-2) - 2(N-2)\frac{e^w - 1}{w'} \leq -(N-2).$$

Integrando entre  $w(t_M)$  y  $w$

$$\int_{w(t_M)}^w \frac{dw'}{dw} = w'(w) - w'(w(t_M)) \leq -(N-2)(w - w(t_M)),$$

y

$$w'(w) = \overbrace{w'(w(t_M))}^{\text{número}} - (N - 2)(w - \overbrace{w(t_M)}^{\text{número}}).$$

Supongamos que

$$O_1 \equiv \{w : \text{existe } w' \text{ con } (w, w') \in O\}$$

es no acotado, es decir,  $[M, +\infty[ \subset O_1$ . Por lo que acabamos de ver  $w'$  no estaría acotada inferiormente y esto es una contradicción porque  $0 < w'$ . Así que  $O_1$  es acotado superiormente. Resumiendo, tendríamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = \alpha < +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} w'(t) = \beta \in [0, 2],$$

$(w(t), w'(t)) \rightarrow (\alpha, \beta)$  con lo que  $(\alpha, \beta)$  tendría que ser un punto crítico, en concreto,  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  (es el único punto crítico del sistema), pero esto contradice que  $(0, 0)$  sea espiral.

Por tanto  $O \not\subset \Omega_1$ . Además, tampoco se queda contenido en  $\overline{\Omega}_1$ . En efecto, para ello tendría que intersectar infinitas veces a la frontera de  $\Omega_1$  que tiene dos partes:  $\partial\Omega_1 = (\partial\Omega_1 \cap \Omega_4) \cup (\partial\Omega_1 \cap \Omega_2)$ . Se deduce que  $\partial\Omega_1 \cap \Omega_2$  no se puede cortar por el crecimiento de  $w$  y  $w'$  y si corta infinitas veces a  $\partial\Omega_1 \cap \Omega_4$  se tiene que acumular en un punto. Necesariamente ese punto tiene que ser  $(0, 0)$  y se obtendría una contradicción con ser un punto espiral.

Este argumento (que se repite en varias ocasiones) se debe a que  $\omega(O)$  puede contener puntos críticos o bien no contenerlos. Si los contiene, hemos comprobado que el único que hay es el  $(0, 0)$ . Si no los contiene, según el teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 32) son órbitas periódicas. Ya que trabajamos con un semiplano, el interior de toda órbita periódica está contenido en él y por el Corolario 33 aseguramos que hay un punto crítico. El único punto crítico que hay es el  $(0, 0)$ . Por tanto  $\omega(O)$  se tiene que acumular en un punto, que tiene que ser el  $(0, 0)$ .

Así,  $O$  pasa a  $\Omega_4$  o a  $\Omega_2$ .

Para que  $O$  pase de  $\Omega_1$  a  $\Omega_4$  tiene que existir  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(w(t_0), w'(t_0))$  corta a la curva que separa las regiones, es decir, verifica

$$w'(t_0) + 2(e^{w(t_0)} - 1) = 0 \quad \text{y} \quad w(t_0) < 0.$$

Supongamos que existe  $t_1 > t_0$  (lo suficientemente cerca de  $t_0$ ) con

$$(w(t_1), w'(t_1)) \in \Omega_4.$$

En esta región

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= w' > 0, \text{ luego } w \text{ es estrictamente creciente,} \\ \frac{dw'}{dt} &= -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) > 0, \text{ luego } w' \text{ es estrictamente creciente.} \end{aligned}$$

Entonces

- $w(t_1 + \epsilon) > w(t_1)$ ,
- $w'(t_1 + \epsilon) > w'(t_1)$ .

Por tanto, para  $t > t_1$  puede ocurrir:

1. Que  $O - O_{t_1}$  se quede contenido en

$$\overline{\Omega}_4 \cap \{(w, w') : w > w(t_1), w' > w'(t_1)\},$$

que es un conjunto acotado, luego se acumula en un punto crítico. Esto no es posible, puesto que el único punto crítico es el  $(0,0)$ .

2. Que  $O - O_{t_1}$  interseque a  $\Omega_1$ . En este caso reiteramos el proceso y siempre llegaríamos a una contradicción.

En este momento,  $O$  no pasa a  $\Omega_4$ .

La otra posibilidad, la única factible, es que  $O \cap \Omega_2$  no sea vacío. Por lo visto, existe  $t_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $(w(t_2), w'(t_2)) \in \Omega_2$ . Entonces

$$O - O_{t_2} \subset \{(a, b) : 0 < a < w(t_2), -2(e^{w(t_2)} - 1) < b < 0\},$$

que es acotado, por lo que para  $t \rightarrow +\infty$ ,  $(w(t), w'(t))$  se acumula en un punto, que necesariamente es punto crítico. Pero el único punto crítico es  $(0,0)$ , que no está en el conjunto, con lo que  $O - O_{t_2} \not\subset \Omega_2$  y necesariamente  $O$  pasa a  $\Omega_3$ .

Para llegar a nuestro objetivo, toca comprobar que  $O$  pasa de  $\Omega_3$  a  $\Omega_4$ . Si no fuera así tenemos que cuando  $t \rightarrow +\infty$ , entonces  $w \rightarrow -\infty$  y

$$\frac{dw'}{dt} \rightarrow 2(N-2) - (N-2)w' > a > 0,$$

ya que en esta parte del plano

$$\frac{dw}{dt} = w' < 0, \text{ luego } w \text{ es estrictamente decreciente,}$$

$$\frac{dw'}{dt} = -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) > 0, \text{ luego } w' \text{ es estrictamente creciente.}$$

Si integramos entre  $t_0$  y  $t > t_0$

$$w'(t) - w'(t_0) > a(t - t_0),$$

y  $w'(t) \rightarrow +\infty$  (cuando  $t \rightarrow +\infty$ ), pero llegamos a una contradicción ya que hemos probado anteriormente que  $w'$  está acotado ( $w'(t_0) < w'(t) < 2$ ).

Por último,  $O$  regresa a  $\Omega_1$  ya que en si  $(w(t), w'(t))$  se quedara en  $\Omega_4$  estaría contenido en

$$\Omega_4 \cap \{(w, w') : w > w(t_1), w' > w'(t_1)\},$$

que es un conjunto acotado, luego se acumularía en un punto crítico. Esto no es posible puesto que el único punto crítico es  $(0,0)$  y si estuviéramos en un conjunto acotado que lo contiene entonces obtendríamos una contradicción con que  $(0,0)$  es espiral.

Acabamos de probar que  $O$  interseca sucesivamente a  $\Omega_i$  y permanece en una región acotada del plano de fase. En particular,  $O$  converge al único punto estacionario  $(0,0)$ . Los resultados quedan resumidos en la Figura 4.8. Volviendo a (4.1), la condición de contorno  $u(1) = 0$  se traduce como

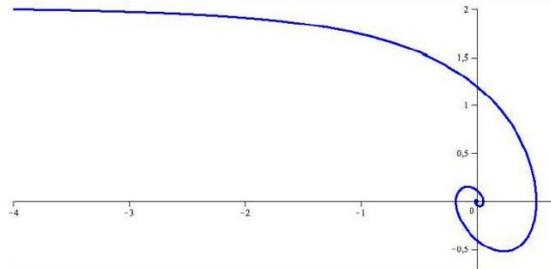


Figura 4.8: Esbozo de  $O$  en el plano  $(w, w')$ .

$w(\tau) - 2\tau + a = 0$  donde  $\tau$  satisface

$$\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^\tau = 1.$$

Operando

$$e^\tau = \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} = \left(\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tau = \ln \left(\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}\right) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\lambda}{2(N-2)} + a\right),$$

y es equivalente a pedir

$$w(\tau) = 2\tau - a = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\lambda}{2(N-2)} + a\right) - a = \ln \frac{\lambda}{2(N-2)}.$$

Tenemos infinitos valores de  $\tau$  para  $\lambda = 2(N-2)$  ( $w(\tau) = 0$ ), finitos para  $\lambda$  en un intervalo punteado acotado  $(0, \lambda^*) \setminus \{2(N-2)\}$ , más de  $k$  para  $\lambda$  lo suficientemente cerca de  $2(N-2)$ , uno para  $\lambda = \lambda^*$ , y ninguno para  $\lambda > \lambda^*$ .

Esto significa que tenemos una solución de (4.1) para cada  $\tau$  que verifique lo anterior, es decir

- Para  $0 < \lambda < \lambda^*$  con  $\lambda \neq 2(N-2)$ , existe un número finito de soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).
- Dado cualquier  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $|\lambda - 2(N-2)| < \epsilon$ , existen por lo menos  $k$  soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).
- Para  $\lambda = 2(N-2)$ , existen infinitas soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).
- Para  $\lambda = \lambda^*$ , existe una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).
- Para  $\lambda > \lambda^*$ , no existen soluciones  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).

□

Con un procedimiento similiar, consideramos ahora  $N \geq 10$ .

**Proposición 64.** *Sea  $N \geq 10$ . Existe  $\lambda^* = 2(N-2)$  tal que*

- *Para  $0 < \lambda < \lambda^*$ , existe una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*
- *Para  $\lambda > \lambda^*$ , (4.1) no existe solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1).*

*Además,  $u_\lambda$  converge puntualmente a  $\ln \frac{1}{|x|^2}$  cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ .*

Recordemos que el diagrama de bifurcación de la Figura 4.6 resume la proposición.

*Demostración.* Cada solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) es positiva, radial y radialmente decreciente por el Lema 53. Por tanto, cada solución debe satisfacer el problema de valores iniciales (4.8) (Lemas 54 y 58). Como comprobamos en el Lema 60 el problema de valores iniciales (4.8) tiene una única solución no prolongable definida para  $r \geq 0$ . Aplicando al problema la transformación de Emden (Lema 61), obtenemos que es equivalente a (4.10). Además, por el Lema 62, el sistema autónomo (4.12) tiene como único punto estacionario  $(0, 0)$  y es un atractor.

Ahora, denotamos  $w$  a la solución de (4.10). Por definición, la órbita del sistema (4.12) dada por

$$O = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

es asintótica a la recta  $w' = 2$  cuando  $t = -\infty$  en el diagrama de fases  $(w, w')$ . Esto se debe a que la condición inicial  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t}(w'(t) - 2) = 0$  implica que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w'(t) = 2.$$

La órbita  $O$  no es periódica debido al comportamiento de la solución en  $-\infty$ .

Consideremos las siguientes regiones del plano

$$\Omega_1 = \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) > 0\},$$

$$\Omega_4 = \{w' > 0, w' + 2(e^w - 1) < 0\}.$$

Comprobaremos a continuación que la órbita  $O$  está contenida en el semiplano  $\{(w, w') : w' < 2\}$  y que si  $N \geq 10$  es posible elegir una pendiente  $m < -2$  de manera que  $O$  esté contenida en

$$T = \{(w, w') : w' + 2(e^w - 1) \leq w' < mw\}.$$

Como  $u$  es radialmente decreciente entonces  $u'(r) < 0$  para  $r > 0$ , así  $0 > ru'(r) = w'(t) - 2$ , por lo que  $O$  se encuentra en  $\{(w, w') : w' < 2\}$ .

Analicemos la primera desigualdad de  $T$ .

Notaremos por  $O_{t_0} = \{(w, w') = (w(t), w'(t)) : t \leq t_0\}$ . Comenzaremos comprobando que existe  $t_0$  de manera que  $O_{t_0} \subset \Omega_1$ . Diremos que  $O$  empieza

en  $\Omega_1$ . Para ello, calculamos

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow -\infty} r^{-2}(w'(t) + 2(e^{w(t)} - 1)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} r^{-2} (ru'(r) + 2 + 2e^{u(r)+2t-a} - 2) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u'(r)}{r} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\lambda}{2(N-2)} e^{2t} e^{-a} e^a e^{-2t} e^{u(r)} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} u''(r) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda e^{u(r)}}{N-2} = u''(0) + \frac{\lambda e^a}{N-2} \\
&= -\frac{\lambda e^a}{N} + \frac{\lambda e^a}{N-2} = \lambda e^a \left( -\frac{1}{N} + \frac{1}{N-2} \right) = \lambda e^a \frac{2}{N(N-2)} > 0,
\end{aligned}$$

ya que  $(N-1)\frac{u'(r)}{r} + u''(r) = -\lambda e^{u(r)}$ , aplicando L'Hôpital cuando  $r \rightarrow 0$  tenemos que  $(N-1)u''(0) + u''(0) = Nu''(0) = -\lambda e^a$  y así  $u''(0) = -\frac{\lambda e^a}{N}$ .

Por esto, existe  $t_0$  tal que  $O_{t_0} \subset \Omega_1$  y  $O$  empieza en  $\Omega_1$ .

Además, que la órbita esté contenida en  $T$  implica que  $O$  no puede intersecar a  $\Omega_4$  en ningún tiempo.

Si suponemos que que  $O$  pasa de  $\Omega_1$  a  $\Omega_4$  tendría que existir  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $(w(t_0), w'(t_0))$  corta a la curva que separa las regiones, es decir, verifica

$$w'(t_0) + 2(e^{w(t_0)} - 1) = 0 \quad \text{y} \quad w(t_0) < 0.$$

Supongamos que existe  $t_1 > t_0$  (lo suficientemente cerca de  $t_0$ ) con

$$(w(t_1), w'(t_1)) \in \Omega_4.$$

En esta región

$$\begin{aligned}
& \frac{dw}{dt} = w' > 0, \text{ luego } w \text{ es estrictamente creciente,} \\
& \frac{dw'}{dt} = -(N-2)(w' + 2(e^w - 1)) > 0, \text{ luego } w' \text{ es estrictamente creciente.}
\end{aligned}$$

Entonces

- $w(t_1 + \epsilon) > w(t_1)$ ,
- $w'(t_1 + \epsilon) > w'(t_1)$ .

Por tanto, para  $t > t_1$  puede ocurrir:

1. Que  $O - O_{t_1}$  se quede contenido en

$$\bar{\Omega}_4 \cap \{(w, w') : w > w(t_1), w' > w'(t_1)\},$$

que es un conjunto acotado, luego se acumula en un punto crítico. Esto no es posible, puesto que el único punto crítico es el  $(0,0)$ .

2. Que  $O - O_{t_1}$  interseque a  $\Omega_1$ . En este caso reiteramos el proceso y siempre llegaríamos a una contradicción.

Con lo que,  $O$  no pasa a  $\Omega_4$  y se cumple la primera desigualdad de  $T$ .

La segunda desigualdad de  $T$  la probaremos razonando por contradicción suponiendo que existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $w'(t_0) = mw(t_0)$ .

Trabajando con la pendiente de la órbita probaremos que  $\frac{dw'}{dw} < m$  y esto es una contradicción ya que si intersecamos la curva  $O$  con la recta  $w' = mw$  desde abajo, la pendiente debe ser necesariamente mayor o igual que  $m$ .

En  $t_0$ , la pendiente de  $O$  es

$$\left(\frac{dw'}{dw}\right)(t_0) = -(N-2) \left(1 + \frac{2(e^{w(t_0)} - 1)}{mw(t_0)}\right).$$

Definimos  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$h(s) = -(N-2) \left(1 + \frac{2(e^s - 1)}{ms}\right).$$

Para llegar a probar el objetivo, estudiamos la monotonía de la función en  $s \in \left(\frac{2}{m}, 0\right)$ . Nos interesa este intervalo porque  $0 > w(t_0) = \frac{w'(t_0)}{m} \geq \frac{2}{m}$ . Calculamos la derivada

$$h'(s) = -(N-2) \frac{2e^s(s-1) + 1}{s^2},$$

para poder saber si es positiva o negativa. Por un lado  $-(N-2)\frac{2}{m} \geq 0$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$g(s) = \frac{e^s(s-1) + 1}{s^2},$$

es mayor estricto que 0 en  $\left(\frac{2}{m}, 0\right)$  ya que

$$g'(s) = e^s(s-1) + e^s < 0 \text{ si } s \in \left(\frac{2}{m}, 0\right),$$

es decir,  $g$  es una función decreciente en  $(\frac{2}{m}, 0)$  con  $g(0) = 0$ . Luego es positiva en  $(\frac{2}{m}, 0)$ . Así,  $h'(s) > 0$  en  $(\frac{2}{m}, 0)$  y  $h$  es estrictamente creciente en dicho intervalo. Como  $0 > w(t_0) = \frac{w'(t_0)}{m} \geq \frac{2}{m}$  entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw'}{dw}\right)(t_0) &= h(w(t_0)) < \lim_{s \rightarrow 0} h(s) = -(N-2) \left(1 + \frac{2}{m} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s}\right) \\ &= -(N-2) \left(1 + \frac{2}{m} \lim_{s \rightarrow 0} e^s\right) = -(N-2) \left(1 + \frac{2}{m}\right). \end{aligned}$$

Encontraremos la contradicción comentada si, para algún  $m < -2$ , probamos que

$$-(N-2) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \leq m.$$

Esto es equivalente a probar que existe un  $m < -2$  que verifique

$$m^2 + (N-2)m + 2(N-2) \leq 0.$$

Es posible si  $m^2 + (N-2)m + 2(N-2) = 0$  tiene soluciones reales

$$m = \frac{-(N-2) \pm \sqrt{(N-2)^2 - 8(N-2)}}{2} = \frac{-(N-2) \pm \sqrt{(N-2)(N-10)}}{2},$$

es decir, si  $(N-2)(N-10) \geq 0$ , que es cierto ya que estamos considerando  $N \geq 10$ . Además, al menos una de las soluciones tiene que ser menor que  $-2$

$$\begin{aligned} \frac{-(N-2) - \sqrt{(N-2)(N-10)}}{2} &< -2, \\ -(N-2) \pm \sqrt{(N-2)(N-10)} &< -4, \\ -\sqrt{(N-2)(N-10)} &< N-6 \end{aligned}$$

que se cumple, con lo que existe  $m < -2$ . Por tanto,

$$O \subset \{(w, w') : w' + 2(e^w - 1) < w' < mw\}.$$

Al ser  $(0, 0)$  un atractor, la órbita converge a  $(0, 0)$  dentro de ese conjunto. Los resultados quedan resumidos en la Figura 4.9.

Volviendo a (4.1), la condición de contorno  $u(1) = 0$  se traduce como  $w(\tau) - 2\tau + a = 0$  donde  $\tau$  satisface

$$\sqrt{\frac{2(N-2)}{\lambda e^a}} e^\tau = 1.$$

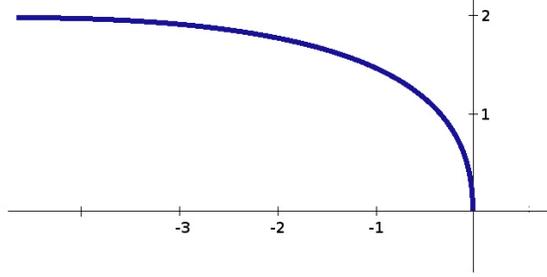


Figura 4.9: Esbozo de  $O$  en el plano  $(w, w')$ .

Operando

$$e^\tau = \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} = \left( \frac{\lambda e^a}{2(N-2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tau = \ln \left( \frac{\lambda e^a}{2(N-2)} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\lambda e^a}{2(N-2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\lambda}{2(N-2)} + a \right),$$

y es equivalente a pedir

$$w(\tau) = 2\tau - a = 2 \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\lambda}{2(N-2)} + a \right) - a = \ln \frac{\lambda}{2(N-2)}.$$

Si  $\lambda^* = 2(N-2)$  entonces  $w(\tau) = 0$ , por lo que para  $0 < \lambda < \lambda^*$  tenemos un único valor de  $\tau$  que lo verifique y para  $\lambda > \lambda^*$  ninguno. Por lo tanto para  $0 < \lambda < \lambda^*$  existe una única solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$  de (4.1) y para  $\lambda > \lambda^*$ , (4.1) ninguna solución  $u \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$ .

Por último falta comprobar que  $u_\lambda$  converge puntualmente a  $\ln \frac{1}{|x|^2}$  cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ . Para ello pasaremos al límite cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  la expresión (4.11).

Antes de pasar al límite y teniendo en cuenta lo visto anteriormente,

$$\tau = \ln \sqrt{\frac{\lambda e^a}{2(N-2)}} \quad \text{y} \quad w(\tau) = 2\tau - a,$$

podemos transcribir (4.11) para cada  $r$  fijo como

$$u_\lambda(\tau) = w(\tau_\lambda + \ln r) - 2\tau_\lambda - 2 \ln r + a_\lambda = w(\tau_\lambda + \ln r) - w(\tau_\lambda) - 2 \ln r,$$

notando  $a_\lambda$  y  $\tau_\lambda$  a los correspondientes  $a$  y  $\tau$  para dicho  $\lambda$ .

Cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  observamos que  $\tau_\lambda \rightarrow +\infty$  con lo que

$$w(\tau_\lambda) = w(+\infty) = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} u_\lambda(r) = -2 \ln r = \ln \frac{1}{r^2} = \ln \frac{1}{|x|^2},$$

que es lo que pretendíamos probar. □

# Capítulo 5

## Conclusiones

Acabo la memoria haciendo una pequeña reflexión sobre el cumplimiento de los objetivos propuestos y el aprendizaje obtenido después de su realización.

El trabajo me ha permitido familiarizarme con lecturas de contenido más denso y notación más pragmática que la utilizada en la docencia. A pesar del rigor del contenido, las demostraciones se esbozan dando solo las ideas novedosas y omitiendo algunos desarrollos. Esto se debe a que el público a quien va dirigido tiene gran dominio del tema.

Para cumplimentar el primer objetivo he estudiado cómo se extiende el concepto de estabilidad a problemas de contorno elíptico de segundo orden del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo  $\Omega$  un abierto acotado con frontera suave de  $\mathbb{R}^N$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1(\mathbb{R})$ .

A pesar de que el ejemplo que he utilizado para introducir la estabilidad puede parecer sencillo, he podido concienciarme de que la estabilidad es un problema real y actual. Si pensamos en los drones, hay un problema que no está totalmente resuelto: cómo mantener un drone estable sin que pequeñas variaciones en las condiciones (como tropezarse con una mosca) hagan que se pierda el control por completo.

Partiendo del concepto intuitivo que tenía de estabilidad he trabajado cómo esta idea se puede extender a un espacio funcional adecuado. Para ello he comprobado que las soluciones de este problema se corresponden con los

puntos críticos del funcional de energía, definido en  $X = C_0^2(\Omega)$

$$\mathcal{E}_\Omega(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u) dx,$$

donde  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2(\mathbb{R})$  primitiva de  $f$ .

La condición de estabilidad relaciona las soluciones estables del problema con los puntos de mínimo del funcional.

Para interiorizar un poco más el concepto de estabilidad he estudiado que se puede caracterizar a partir del valor propio de un problema lineal asociado y he tratado ejemplos de soluciones estables. Después he visto que imponiéndole condiciones a  $f$  o a  $\Omega$  se pueden obtener propiedades. En concreto, si el término no lineal es convexo entonces podremos hablar de unicidad de solución estable. Sin embargo, la suposición de convexidad no podría descartarse ya que he podido ver un contraejemplo. Si la condición que le imponemos a  $\Omega$  es que sea la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$ , entonces si tenemos una solución estable de nuestro problema será radialmente simétrica.

Para el segundo objetivo he realizado un análisis del comportamiento global de las soluciones del problema de Gelfand en la bola unidad de  $\mathbb{R}^N$ . He podido comprobar que a pesar de ser un espacio de apariencia simple recoge toda la gama de resultados conocidos para este problema.

Aplicando los resultados aprendidos de estabilidad he probado que si el problema tiene solución entonces tiene una solución estable. Puesto que hay unicidad de solución estable, si el problema tiene más de una solución el resto serán soluciones inestables. Además, por el principio del máximo y el resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, las soluciones del problema de Gelfand son positivas y radiales. Esto me ha permitido conocer distintas versiones del principio del máximo y habituarme a trabajar con soluciones radiales.

Con respecto a la multiplicidad de soluciones he desarrollado con detalle la demostración de los teoremas que recogen esta información. La dificultad que me he encontrado en esta parte es que he aplicado recursos que al principio me resultaban poco intuitivos. Por ejemplo analizar el número de soluciones del problema de Gelfand estudiando la forma de la órbita de un sistema autónomo (equivalente a nuestro problema) al que hemos llegado mediante transformaciones.

El desarrollo de estos contenidos me ha permitido recordar algunas de las propiedades principales de los espacios  $L^p(\Omega)$  y los espacios de Sobolev. También volver a trabajar con resultados importantes de existencia, unicity

dad y prolongabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y de teoría cualitativa de sistemas autónomos vistos en el Grado en Matemáticas.

Las demostraciones realizadas han requerido preparación ya que no estaban detalladas y afirmaban resultados que para mi no eran tan evidentes. En este trabajo he sido capaz de desarrollarlos añadiendo algunas explicaciones y cálculos necesarios para que puedan ser comprendidos por alguien que está comenzando su camino en la investigación.

# Bibliografía

- [1] H. Brézis, *Análisis funcional*, Madrid 1984, Alianza Editorial.
- [2] L. Dupaigne, *Stable solutions of elliptic partial differential equations*, 2011 Taylor-Francis.
- [3] B. Gidas, W. Ni y L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209–243.
- [4] V. Jiménez, *Ecuaciones Diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*. Universidad de Murcia 2000.