UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO,
FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Beatriz Navarro Vicente

ESPECIALIDAD: **Matemáticas**

TUTORA TFM: **Isabel María Ortiz Rodríguez**

CONVOCATORIA: **Junio 2015**

ÍNDICE

«Si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia.»

Jules Henri Poincaré

1. INTRODUCCIÓN

Con este *Trabajo Fin de Máster* del *Máster en Profesorado de la Universidad de Almería en la especialidad de Matemáticas*, se pretende presentar la historia de las matemáticas como recurso didáctico, mediante el cual se pueda acercar la materia al alumnado de una forma más atractiva y motivadora.

Como motivación personal para tratar este tema en el presente TFM puedo decir que es de gusto personal debido a mi formación matemática. Durante los años en los que fui estudiante de secundaria y bachillerato siempre me apasionaron las matemáticas, aunque los conceptos que aprendía no se me presentaban con una practicidad inmediata más allá de la resolución de algunos problemas cotidianos y sencillos, y nunca se me habló ni mencionó la evolución que sufrieron todos esos conceptos que, para mí, aparecían de la nada de forma dogmática e invariable. Más tarde, en mis años como estudiante de la licenciatura de matemáticas vi que hay dogmas, pero que éstos tienen un origen y una fundamentación, que estos axiomas matemáticos han evolucionado con los años, los siglos, incluso los milenios, está claro que la matemática es una ciencia antigua, a mi parecer y de acuerdo con el grandísimo matemático Johann Karl Friedrich Gauss, la matemática es la «*reina de las ciencias*», pero esta ciencia está en continua evolución y ha sufrido y sufrirá todos los contratiempos que se pueden esperar de una ciencia que se va descubriendo o construyendo, según a quien se le pregunte, a través de, al fin y al cabo, personas, humanos que se equivocan y que aciertan.

Con todo esto quiero decir que, conocer el origen y la evolución de la matemática, sin duda, puede ayudar a su comprensión y puede servir de motivación a la hora de aprender esos nuevos conceptos tan abstractos. Saber que esos conceptos resultaron difíciles y complicados a sus propios «creadores» y que son el resultado del trabajo de años y años, puede servir para ver que las matemáticas no son un invento a la mano de sólo unos pocos y que sólo otros pocos «privilegiados» pueden entenderlas de forma casi divina.

Con lo cual, en este trabajo se presentará una justificación para la introducción de la historia de las matemáticas como recurso didáctico en el aula a través de distintos autores, los cuales proponen dicho recurso como actividad motivadora y en diferentes vertientes. Finalmente, se incluirá una propuesta didáctica para algunos temas de la asignatura Matemáticas de 2º ESO, utilizando la historia de las matemáticas para su desarrollo.

2. EL USO DE LA HISTORIA COMO RECURSO DIDÁCTICO

La matemática tiene una gran dimensión cultural, que se puede «descubrir» a través de su historia, de forma que esta enseñanza se enriquezca e integre en el conjunto de los conocimientos científicos, artísticos y humanísticos, los cuales constituyen la Cultura.

Podemos utilizar el dicho popular, *«hay que conocer el pasado para comprender el presente»*, para encontrar una justificación para estudiar y enseñar a nuestro alumnado de secundaria y bachillerato la historia de las matemáticas. Son muchas y distintas las razones que podemos encontrar para dicha justificación, la cual conseguiremos citando y tomando como referencia algunos textos de importantes matemáticos, pedagogos e historiadores.

Gracias a la historia de las matemáticas podemos conocer las cuestiones que dieron lugar a los distintos conceptos, podemos saber cuáles fueron las primeras intuiciones e ideas de donde surgieron. Además, nos permite conocer cómo se originaron los términos, lenguajes y notaciones que ahora nos parecen tan sencillos y que podríamos pensar que siempre fueron así. De esta forma, también descubrimos las dificultades de esos nuevos conceptos, con la terminología en constante cambio y adaptación. Por otro lado, conoceremos cuáles fueron los problemas que se plantearon e hicieron surgir los nuevos conceptos, qué métodos y técnicas empleaban para su resolución y cómo se desarrollaban. Por tanto, conoceremos el origen de muchas definiciones, proposiciones, teoremas, corolarios y demostraciones, que hoy en día nos parecen tan cotidianos, y cómo fue su evolución.

Como señala Nolla en [18], *«Los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la Enseñanza Secundaria, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada. Se olvida que han surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. A lo largo de la Historia, estas ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas, y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporciona los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado.»*

Y como apunta Guzmán en [11], *«Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias»*, es decir, no sólo nos permite comprender cómo se originaron y por qué, sino que, además, nos dará la capacidad de encontrar su aplicación y comprender sus consecuencias, lo cual responde a los reproches continuos del alumnado, no sin razón, de *¿Para qué sirve esto?* o *¿Por qué esto es así?*, los cuáles suelen quedar sin respuesta ni justificación.

Con todo esto, no sólo se transmite un elenco de conocimientos y resultados cerrados, que hacen pensar en la matemática como una ciencia estática y acabada, sino que, además, se despierta en el estudiante unas actitudes y hábitos metodológicos acordes con el método científico, que, realmente, es lo que se debería pretender desde el punto de vista de la eficacia pedagógica.

Como señala Kline en [12] (citando a Klein, 1927), *«Enseñar científicamente sólo quiere decir inducir a pensar científicamente, de ningún modo enfrentar al alumno, desde el principio, con fríos sistemas científicamente pulidos.»*

La historia de las matemáticas, con todas sus particularidades, pone de manifiesto el proceso dinámico de la actividad científica como desarrollo abierto y vivo en proceso permanente de cambio, y cuyo conocimiento puede propiciar en el estudiante el desarrollo de la creatividad mediante la investigación.

Sin embargo, la matemática llega al alumnado como un producto dogmático, cerrado y acabado. Cuando se trata de enseñanzas superiores esto tiene su explicación en la propia naturaleza de las matemáticas que, como argumenta Poincaré en [21], *«mucha investigación consiste a menudo en retomar teorías anteriores y refundirlas en un marco nuevo, bajo un enfoque más potente y general que explica mejor los resultados ya conocidos y que propicia el descubrimiento de otros nuevos»*, es decir, como cita la célebre frase de Grothendieck, *«simplificar generalizando»*, con ésto lo que hacemos es *«ocultar el proceso de construcción original de la Matemática»* (Maza, [13]).

De esta forma, se pierde la perspectiva histórica, la cual permite dar una visión panorámica de los problemas, mediante la cual éstos pueden situarse dentro del contexto general, aportándoles un significado.

Esta exposición, sin origen, puede hacer creer al alumnado que la matemática ha sido creada por grandes genios que, a partir de unos principios y por vía exclusivamente lógica, obtenían los teoremas y su demostración impecable. El estudiante, como es natural, no consigue llegar a dichos resultados, ya que, como se pregunta Poincaré *«¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma?»*, es claro que la respuesta es negativa, los contenidos que sean tratados así no podrán ser comprendidos y, finalmente, la única forma de retenerlos será la de memorizarlos, lo cual, de todas las maneras, no es lo que se debe pretender al enseñar matemáticas.

Con todo esto, he querido, gracias a la bibliografía, dar una serie de razones y argumentaciones de las que se pueda deducir que la historia de las matemáticas puede, quizá incluso debe, utilizarse como un recurso didáctico en el aula, mediante el cual se favorezca el espíritu científico y la motivación del alumnado. Además, cabe mencionar que se trata de un recurso muy flexible, ya que, como mencionaré en próximas secciones, pueden utilizarse diferentes herramientas o apartados de la historia para animar al estudiante, desde utilizar problemas de lo que podría considerarse *Matemática Recreativa*, hasta el uso de ciertos detalles biográficos, intentando en todo momento despertar el interés del estudiante, mostrando el origen de ciertos conceptos a través de los problemas de la época, y llamando la atención del mismo, a través de esas pequeñas anécdotas dentro del origen de cierto concepto o la atribución de otros resultados.

Teniendo todo esto en cuenta se puede concluir, a modo de epílogo, con un *decálogo*, realizado por Meavilla en [15], que legitima el uso de la historia de las matemáticas como herramienta beneficiosa para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

1. La historia de las matemáticas facilita al profesor materiales y recursos didácticos que pueden favorecer el aprendizaje de sus alumnos y alumnas.

2. La historia de las Matemáticas permite descubrir el lado ameno de las Matemáticas y puede influir favorablemente en la motivación de los estudiantes.

3. La historia de las Matemáticas ayuda a inculcar en los alumnos y alumnas valores como el esfuerzo, la constancia, el trabajo, la humildad, la disponibilidad, etc.

4. La historia de las Matemáticas contribuye a valorar la aportación de las mujeres en la construcción y el desarrollo de dicha disciplina.

5. La historia de las Matemáticas permite aprender con la ayuda de unos profesores muy especiales: los grandes sabios de otros tiempos.

6. La historia de las Matemáticas muestra que dicha disciplina es una ciencia viva y que sus conceptos y procedimientos suelen cambiar con el tiempo.

7. La historia de las Matemáticas permite dar una visión más humana de dicha ciencia (la Matemática no es obra de los dioses, es el resultado del trabajo de hombres y mujeres que suelen equivocarse). Este hecho puede contribuir a que el alumno no se sienta frustrado ante sus errores y pueda aprender de ellos.

8. Los profesores (alumnos) pueden aprovecharse especialmente de la perspectiva histórica de las Matemáticas, descubriendo métodos alternativos para la resolución de problemas, distintos de los que generalmente enseñan (aprenden) en clase y que pueden ser beneficiosos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

9. La historia de las Matemáticas puede contribuir a apreciar la utilidad de esta disciplina en la resolución de problemas prácticos.

10. La historia de las Matemáticas permite mostrar a los estudiantes el papel capital de las Matemáticas en la construcción de la cultura humana.

2.1 Relación con los objetivos curriculares

Veremos a continuación la relación de la historia de las matemáticas con los objetivos curriculares que establecen los currículos de Secundaria y Bachillerato.

RELACIÓN CON EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Fijándonos en el *REAL DECRETO 1631/2006*, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, podemos establecer algunas relaciones con la descripción de la materia y los objetivos que han de alcanzarse en ella en el periodo de Educación Secundaria Obligatoria y la consideración de la historia de la matemática como recurso didáctico.

En el momento de la descripción de la materia para dicho periodo educacional se dice que, *«Los contenidos matemáticos seleccionados para esta etapa obligatoria están orientados a conseguir que todos los alumnos puedan alcanzar los objetivos propuestos y estén preparados para incorporarse a la vida adulta. Por lo cual, se deberán introducir las medidas que en cada caso sean necesarias para atender a la diversidad de actitudes y competencias cognitivas del alumnado de la etapa.»*. Consideramos que puede resultar interesante emplear el recurso didáctico mencionado, ya que, a través de él, el docente obtiene un material adicional que le permitirá favorecer el aprendizaje de sus alumnos y alumnas, además de influir en su motivación.

Por otro lado, como ya hemos mencionado, gracias a la historia de las matemáticas podemos mostrar el importante papel que ha llevado a cabo, a lo largo de la historia, en la construcción de la cultura, lo cual guarda una estrecha relación con lo que se dice que se debe pretender conseguir al estudiar la *Geometría* correspondiente a esta etapa educativa: *«Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.»*

En relación al planteamiento de la matemática como una ciencia en constante evolución, en el currículo versa lo que sigue, *«las matemáticas han de ser presentadas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cercanos a su experiencia, que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, continuarán haciéndolo en el futuro.»*, lo cual, claramente, sólo se consigue estudiando su historia.

Ya tratando los objetivos que se pretenden alcanzar en esta etapa, el noveno y décimo punto especifican:

«9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.»

«10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.»

Pueden verse estrechamente ligados a la capacidad que la historia de las matemáticas aporta a la apreciación de la utilidad de esta materia en la resolución de problemas prácticos y la adquisición de valores deseables en nuestros estudiantes como el esfuerzo, la constancia, etc.

Pudiendo alcanzar el objetivo undécimo, *«11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico* *como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.»* Gracias al estudio de grandes autores, su implicación en ciertos momentos históricos, y dando a conocer la lucha llevada a cabo por las mujeres científicas, en este caso particular, la aportación de las mujeres en el desarrollo de las matemáticas.

RELACIÓN CON EL CURRÍCULO DE BACHILLERATO

En este caso, nos fijamos en el *REAL DECRETO 1467/2007*, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

En este apartado, destacaremos la importancia que se da en el currículo de Bachillerato a la consideración de la matemática como una «ciencia de entrenamiento», versando el currículo que *«Participar en la adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su «forma de hacer». Este «saber hacer matemáticas» es un proceso laborioso que comienza por una intensa actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones previas necesarias para la formalización.»* El alumnado puede apreciar estas intuiciones conociendo la evolución de la ciencia a lo largo de los años.

También, relacionado con esto último que se menciona y con la apreciación que el estudio de la historia de la disciplina ofrece con la relación con otras áreas culturales encontramos el cuarto objetivo de esta etapa, *«4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.»*

Por todo lo mencionado, en este aspecto se puede concluir que, no sólo el estudio y la enseñanza de la historia de la matemática respeta el currículo que se propone, como enseñanza mínima, en Secundaria y Bachillerato, sino que, además, contribuye a su buen desarrollo.

2.2 Flexibilidad del recurso

Después de justificar el uso de ese recurso en el aula podemos concluir que, finalmente, la matemáticas no es la ciencia estática y cerrada que parte del alumnado puede pensar, y esto lo hemos conseguido gracias al estudio de su evolución a lo largo de su historia, pero ahora *¿cómo empleamos y desarrollamos este recurso?* Parece una pregunta obvia y a la que, si no se quiere incurrir en monotonía, puede resultar difícil de responder, así que enumeremos una serie de vertientes del uso de la historia de la matemática en el aula:

- Contextualizar históricamente la introducción de los conceptos y temas.
- Observar la evolución histórica de ciertos conceptos, cuando estos son estudiados en clase, y las interrelaciones entre ellos.
- Recrear problemas matemáticos históricos.
- Utilizar material biográfico sobre los personajes matemáticos, cuyas aportaciones a la ciencia se estén estudiando, incluyendo anécdotas de la época.
- Introducir expresiones literarias históricas, como son versos, citas célebres, etc.
- Proponer la lectura de ciertos libros de divulgación matemática, que versan sobre su historia.
- Utilizar materiales audiovisuales (videos) sobre la historia de la matemática y la vida de sus personajes.
- Usar materiales online (webquest) en el que se describan distintos aspectos de la matemática a través de su historia.

De esta forma, vemos que se trata de un recurso flexible con el que motivar y enseñar al alumnado. Gran parte del material puede encontrarse en web, libros, etc., pudiendo elaborarse materiales diferentes para su uso en el aula.

3. PROPUESTA DIDÁCTICA PARA 2º ESO

A continuación presentamos varios ejemplos de uso del recurso en la asignatura Matemáticas de 2º ESO. También presentamos una actividad para desarrollar en la Semana de la Ciencia.

Introduciendo la historia de las matemáticas en este curso se pretenden conseguir los siguientes objetivos:

- Motivar al alumno, enseñándole de dónde y por qué han surgido los conceptos.

- Enriquecer culturalmente su enseñanza, contextualizándole en el tiempo las enseñanzas y mostrándole la relación con otras áreas.

- Personalizar la ciencia, haciéndole ver que detrás de ella ha habido personas, encargadas de su desarrollo y evolución.

- Desdramatizar los errores, viendo que algunos de ellos han sido errores o dificultades que se han mantenido a lo largo de los años.

- Incentivar el afán lector, proponiendo textos que animen y motiven su afán de saber y su creatividad, mediante los cuáles pueden conocer la cara más amena de la matemática y de los matemáticos.

3.1 Temario de la asignatura Matemáticas de 2º ESO

El temario de la asignatura consta de 14 temas, agrupados en tres bloques, siguiendo el libro de texto *Matemáticas, Pitágoras. 2º ESO. P. Conecta 2.0* de la editorial *sm*, podemos considerar la siguiente organización:

- **BLOQUE I: Números y Proporcionalidad.**
  - Tema 1: **Divisibilidad. Números Enteros.**
  - Tema 2: **Potencias y Raíces Cuadradas.**
  - Tema 3: Fracciones y Decimales.
  - Tema 4: Magnitudes Proporcionales.
- **BLOQUE II: Ecuaciones y Funciones.**
  - Tema 5: Expresiones Algebraicas.
  - Tema 6: **Ecuaciones.**
  - Tema 7: **Sistemas de Ecuaciones con dos ecuaciones.**
  - Tema 8: Funciones. Propiedades Globales.
  - Tema 9: Funciones de Proporcionalidad Directa e Inversa.
- **BLOQUE III: Geometría y Estadística**.
  - Tema 10: **Medidas. Teorema de Pitágoras.**
  - Tema 11: **Semejanza. Teorema de Thales.**
  - Tema 12: Cuerpos Geométricos.
  - Tema 13: Áreas y Volúmenes de Cuerpos Geométricos.
  - Tema 14: Estadística y Probabilidad.

Para este trabajo se han seleccionado los temas que en el esquema anterior aparecen en negrita. Para ellos se elabora un episodio de la historia de las matemáticas. Para su preparación he utilizado [3]-[10], [14], [16], [17], [19], [20], [22] y [23], además de las páginas web que se detallan en la Sección 6.

3.2 Bloque I: Números y Proporcionalidad

Dentro de este bloque presentaré los episodios de la historia de las matemáticas que podemos usar en los temas 1 y 2 (*Divisibilidad. Números Enteros* y *Potencias y Raíces Cuadradas*).

TEMA 1: DIVISIBILIDAD. NÚMEROS ENTEROS

En este caso, vamos a realizar una introducción de los *números enteros*, justificando la «ampliación» de los números naturales, incluyendo el 0 y los números negativos.

¿De dónde sale el número?

Alrededor del 40000 a. C. fue cuando nació la cultura del *número*. Además, apareció la necesidad de expresarlo de algún modo y de mantener los resultados de operaciones sencillas.

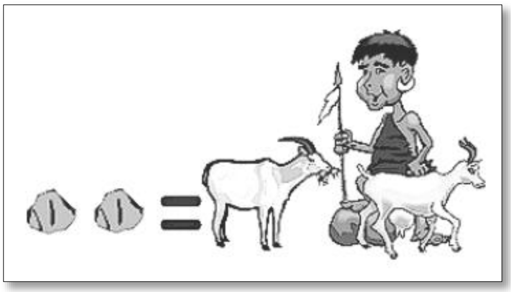
En principio, el hombre utilizó para contar lo que tenía más a mano, nunca mejor dicho. Efectivamente, el hombre comenzó a contar de 5 en 5 o de 10 en 10, y para muchas culturas descalzas, el poder ver sus manos y sus pies a la vez, llevó al veinte (es el caso de los mayas, por ejemplo). De aquí proviene un dicho que define la aritmética como «aquello que permite contar hasta veinte sin quitarse los zapatos».

Cuando los dedos eran insuficientes se recurrían a otros métodos, como era usar montones de piedras, de conchas o de cualquier otro elemento.

¿Para qué servían los números? ¿Cómo «calculaban»?

Vamos a pensar que somos un pastor primitivo y llevamos nuestras cabras a pastar, queremos saber si todas nuestras cabras están bien y se están alimentando, pero… ¿cómo lo podemos saber? Pues, contando y ¿cómo contamos? Lo que tendremos que hacer será comparar, mediante piedrecillas, nuestras cabras con ellas, para saber, por montones, cuántas cabras tenemos. Y este es el sistema que usaron los pastores romanos de los primeros tiempos.

Los romanos hablaban en latín y, en ese idioma, piedra se dice *calculus*, de donde viene la palabra *cálculo*.



De esta forma, «calcular significa contar con piedras».

¿Y qué pasa con el cero?

El cero tardó mucho en aparecer, ya que no era necesario. Si contando no había nada, no existía la necesidad de nombrarlo. Además, como sabemos los número no se escribían como hoy en día lo hacemos, nuestra notación en indio-arábiga, proviene de los hindúes y árabes. Antes de éstas hubo otras muchas notaciones como la de los sumerios, los semitas, los egipcios, los griegos, los romanos, etc.

El cero nace en la India al introducir los hindúes un sistema posicional con nueve dígitos en el que la posición es clave. Cuando 12 indica 1 decena y 2 unidades, entonces es necesario poder contar 10 si hay 1 decena y ninguna unidad. Los hindúes fijan un sistema posicional de base diez y con cero.

¿Y por qué aparecen los negativos?

Los números negativos, antiguamente conocidos como «números deudos» o «números absurdos», datan del siglo V, época donde el interés central era la de convivir con los problemas cotidianos de la naturaleza. Estas primeras manifestaciones provienen de Oriente (China) y no llegan a Occidente hasta el siglo XVI.

Cuando se comienzan a manipular los números negativos y positivos, en Oriente, se hace a través de los ábacos, usando tablillas o bolas de diferentes colores.

Aun así, en dicha época, los chinos no aceptan la idea de que un número negativo pueda ser solución de una ecuación, son los indios los que hacen la diferenciación entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos. Recordemos que es también esta cultura, hacia el año 650 d. C., a la que se le atribuye la «invención» del cero.

La notación para los números positivos (+) y negativos (-) fue gracias a Stifel en el siglo XV. Antes de ello se utilizaba la abreviatura de *p* para los positivos (plus) y *m* para los negativos (minus). Hay leyendas medievales que dicen que esto puede deberse a la escritura rápida de la *m* y que el símbolo actual para la adición provenga de la negación de la resta.

Igual que nos puede pasar a nosotros al principio, los números negativos no fueron aceptados, no universalmente. Incluso el gran matemático del siglo XVI Cardano, de quien hablaremos más adelante, los llamaba *«números falsos»*.

Y son los números negativos lo que complementan el conjunto de los números naturales, generado por un defecto de los números naturales y es que si realizamos, por ejemplo, la operación $5 - 9$ resulta -4, que no es natural.

El hombre, viendo la imposibilidad de realizar la operación de resta, crea otro conjunto de números, el conjunto de los números negativos. Y son los números naturales junto con los negativos y con el cero los que formarán el conjunto de los números enteros.

TEMA 2: POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS

Aquí veremos de dónde proceden las raíces cuadradas y cómo se ha ido adquiriendo la simbología actual para referirnos a ellas, también veremos de dónde proviene el método que se usa para calcularlas a mano. Además, se mostrará una anécdota referente a las raíces cuadradas, aunque cuya importancia no radica en su solución, sino, precisamente, en la imposibilidad de solucionarla.

¿Por qué aparecen las raíces cuadradas?

Existen documentos muy antiguos que nos vienen a demostrar cómo nuestros antepasados hacían uso de las raíces cuadradas. Los egipcios recurrían a ellas y ésto puede comprobarse en el conocido *Papiro de Ahmes*, datado en el año 1650 a.C. y que fue realizado durante el reinado de Apofis I. Una copia de este documento fue encontrada en el siglo XIX por el anticuario Henry Rhind por lo que también es conocido como *Papiro de Rhind*, éste está formado por una serie de problemas de tipo matemático donde además de las citadas raíces hay cálculos de fracciones, reglas de tres, ecuaciones de tipo lineal, etc.

Aunque es en la época de Pitágoras y los pitagóricos, de quienes hablaremos más adelante, donde se analiza la existencia de las raíces cuadradas en profundidad, debido a la no resolución de la raíz cuadrada de dos.

¿Morir por una raíz cuadrada?

Éste fue el caso de Hippasus de Metapontum, griego de la escuela pitagórica, que tuvo la mala suerte de invertir su talento matemático en descubrir que la diagonal de un cuadrado y el lado de éste no podrían ser medidos a la vez por números enteros. Por tanto, mientras Pitágoras creía inocentemente que con números enteros y fracciones de enteros se podía describir el universo, su seguidor Hippasus puso en evidencia que ésto no era así viendo que la raíz cuadrada de dos ($\sqrt{2}$) no podía ser una fracción, es decir, tener decimales finitos o periódicos. Pero lo que realmente condenó a Hippasus no fue el descubrimiento, sino que su hallazgo trascendiera al exterior del grupo pitagórico.

La sacudida que produjo la aparición de este nuevo concepto en la matemática griega puede calibrarse por la leyenda que relata una nota, atribuida a Proclo, al Libro X de los *Elementos* de Euclides:

«Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales, perecerá en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas.»

A partir de esto, existen abundantes leyendas que describen la muerte del pobre Hippasus, siendo su ahogamiento en el mar la versión menos cruel.

¿De dónde sale el símbolo $\sqrt{\ }$?

En el siglo XVI el símbolo para la raíz era la *R* mayúscula y, junto a ella, se escribía la primera letra de las palabras latinas *quedratus*, la *q*, o la primera de *cubus*, la *c*, señalando con ello que la raíz era cuadrada o cúbica. Se usaba la R por ser la primera letra de la palabra latina *radix* que significa raíz.

Por tanto, para escribir $\sqrt{4}$ ellos escribían $R.q.4$.

En este mismo siglo, XVI, Rudolff usa la letra r con una extensión de su trazo para estilizarla, de ahí el símbolo actual de las raíces.

¿Y el método para resolverlas?

El origen de este método es chino. La Cultura China es tan antigua como la Egipcia y Mesopotámica. Los primeros signos matemáticos de dicha cultura se atribuyen al documento *Zhou Bi Suan Jing* o *Chou Pei Suan Ching* escrito, probablemente, en el 1200 a. C., aunque hay quienes lo datan del 300 a. C. Es el *Jiuzhang Suanshu* o *Chui-chang Suan-shu* (*Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*), un tratado de nueve capítulos, la obra que ejerció una mayor influencia entre todos los libros chinos, incluyendo en total 246 problemas, siendo, por tanto, considerado el equivalente, en cierta medida, a los *Elementos* de Euclides.

Es en uno de los capítulos del *Jiuzhang Suanshu* donde aparece con todo detalle la manera de actuar para realizar el cálculo de la raíz cuadrada de un número.

3.3 Bloque II: Ecuaciones y Funciones

En este bloque, se propondrá el uso del recurso en los temas 6 y 7 (*Ecuaciones* y *Sistemas de Ecuaciones con dos ecuaciones*).

TEMA 6: ECUACIONES

En esta ocasión nos estamos refiriendo a las ecuaciones de primer y segundo grado. De esta forma, justificaremos la aparición de las ecuaciones y cómo se eligió el símbolo «=» y la «x» como «incógnita universal». Podremos tratar y ver cómo se desarrollaron los problemas que originaron las ecuaciones. Además, sabremos de dónde viene y quién fue el autor de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Como comentario mencionaremos las ecuaciones de tercer y cuarto grado y sus polémicas y complicadas fórmulas de resolución.

¿De dónde salen las ecuaciones?

Los egipcios nos dejaron en sus papiros, sobre todo en el de Rhind, del que ya se ha hablado antes, y el de Moscú del 1.850 a. C., multitud de problemas matemáticos, donde la mayoría de ellos eran de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida cotidiana.

En éstos obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$

$$x + ax + bx = c$$

donde a y b eran números conocidos y x la incógnita a la que ellos denominaban *aha* o *montón*.

En el *Papiro de Rhind* encontramos muchos de los cálculos de «aha». Dicho papiro contenía 87 problemas resueltos, los cuales eran ejercicios para que los jóvenes estudiantes practicasen. Los procesos seguidos en la resolución eran puramente aritméticos.

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería

Una ecuación lineal que aparece en el *Papiro de Rhind* responde al problema siguiente:

«Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24.»

En notación moderna, la ecuación sería: $x + 1 / 7\,x = 24$.

La solución era obtenida por un método que hoy conocemos como «método de la falsa posición» o «regula falsi». Dicho método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos se obtendría la solución exacta. Se trata de un procedimiento aritmético que permite resolver ecuaciones lineales, donde a partir de falsas posiciones se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad.

Supongamos que fuera 7 la solución, al sustituir en la x nos daría: $7 + 1/7 \cdot 7 = 8$, y como nuestra solución es 24, es decir, $8 \cdot 3$, la solución es $21 = 3 \cdot 7$, ya que $3 \cdot (7 + 1/7 - 7) = 24$.

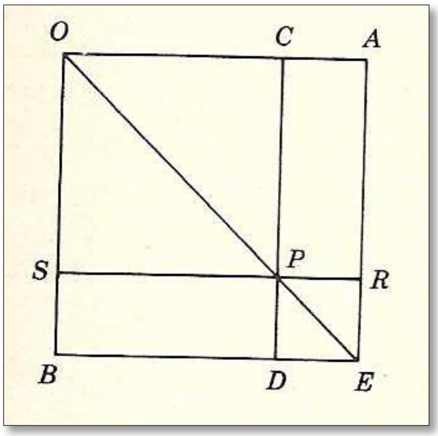
Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias cuyo uso dominaban los egipcios.

También aparecen en Mesopotamia, entre el 600 a. C. y el 300 d. C., documentos que hacen referencia a las ecuaciones lineales, aunque no son muchos, ya que se dedicaron más a los sistemas de ecuaciones y a las ecuaciones de segundo grado.

Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. No utilizaban letras para representar las incógnitas. A menudo aparecen las palabras *us* (longitud), *sag* (anchura) y *asˆa* (área) las cuales eran utilizadas para representar las incógnitas, no era porque dichas incógnitas representaran esas cantidades, sino porque muchos problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. De hecho, los babilónicos no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

También podemos ver estas ecuaciones en Grecia, donde encontramos un álgebra desarrollada en el 300 a. C., llamada *álgebra geométrica*, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas. De esta forma, la ecuación lineal $ax = bc$, se consideraba como la expresión de la igualdad de áreas ax y bc.

Con lo cual, lo que se hacía era construir un rectángulo de lados $OB = b$ y $OC = c$, llevaban sobre OC un segmento $OA = a$. Completando el rectángulo $AOEB$ y trazando la diagonal OE que corta a CD en P, se ve que CP es el segmento x buscado, puesto que el rectángulo $OARS$ tiene igual área al rectángulo $OCDB$.



Después de una época de decadencia de la matemática griega aparece en el año 250 d. C. Diofanto de Alejandría, el más importante de los algebristas griegos, aunque prestó escasa atención a las ecuaciones de primer grado podemos encontrar epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega:

«Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.»

Y de estos versos podemos deducir su edad, mediante una ecuación. Siendo x la edad a la que murió.

Sabemos que x será:

- Una sexta parte de su vida, en la que fue muchacho, $x/6$.
- Una doceava de ella, pobló de vello sus mejillas, $x/12$.
- Después de una séptima parte, se casó, $x/7$.
- Y 5 años después fue padre, 5.
- Cuando estaba en la mitad de su vida, su hijo murió, $x/2$.
- Y durante 4 años más, vivió, 4.

Con lo cual, la ecuación sería: $x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x$. Luego, resolviendo la ecuación, Diofanto murió con 84 años de edad.

La gran innovación de Diofanto está en que sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el «álgebra sincopada». Un número desconocido o incógnita se representa por un símbolo que se parece a la letra griega *s*. Aunque aún en esta época, faltan los símbolos especiales para las operaciones y relaciones.

Diofanto sólo aceptaba las soluciones positivas, ya que lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones.

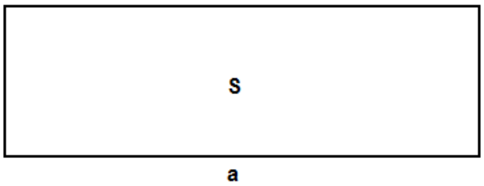
También encontraremos las ecuaciones en China, en el libro de los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, del que ya hemos hablado con anterioridad, se pueden ver problemas de ecuaciones, los cuales son resueltos mediante un método muy parecido al método de «falta posición», aunque éste parece haber sido independiente de la influencia occidental.

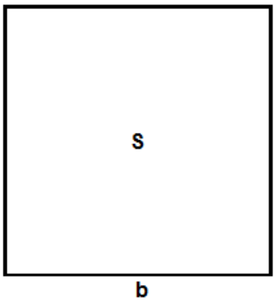
Por otro lado, en la India también encontramos problemas sobre ecuaciones en los *Sulvasütras*, los primeros documentos matemáticos que existen en los cuales se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos del siglo II d. C. Uno de ellos, es el siguiente:

«Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado.»

Es decir:

Resolver $a\,x = S$.





También utilizaban el método de «falsa posición».

Por último, destacaremos la aparición y resolución de estas ecuaciones en la cultura arábiga, aunque es claro que aparecen y evolucionan también en la Europa Medieval y el Renacimiento.

Aunque la obra de Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi es posterior a la Diofanto, la de al-Khowarizmi data del 830 d. C., es de un nivel mucho más elemental, pues al-Khowarizmi quería que su libro fuera práctico y que ayudara a la gente a hacer cálculos relacionados con el dinero, las herencias, los pleitos, el comercio, etc. A la obra que nos referimos es a su libro de álgebra *Kitab al-mukhtasar fi al-jarb wa' l-muqabala*, traducido al castellano *Compendio sobre el cálculo por medio de transposición y reducción*.

Es, por tanto, al-Khowarizmi, a través de esta obra, el que introduce el método, en dos partes «*al-jarb*» y «*al-muqabala*», mediante el cual, hoy en día resolvemos las ecuaciones, sumando cantidades a ambos miembros de las mismas para eliminar dichas cantidades y agrupándolas. Además de introducir el método de «doble falsa posición», más tarde conocido también como el método de «las escalas».

También en esta obra, al-Khowarizmi introduce una fórmula muy parecida a la actual para resolver las ecuaciones de segundo grado. Sin embargo, la solución no apareció en Europa hasta el siglo XII, en el *Tratado de Medidas y Cálculos*, del matemático judeo-español Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, siendo el autor el matemático hindú Bhaskara, y apareciendo esta, por primera vez, en su libro *Siddhanta Siroman* en el año 1150 d. C.

Sobre las ecuaciones de segundo grado y los métodos que el matemático árabe al-Khowarizmi introduce para resolverlas, podemos consultar el *ANEXO I*, donde se puede ver un método geométrico para su resolución.

¿Qué había antes de la x? ¿Y antes del $=$?

Igual que hemos visto anteriormente que los egipcios llamaban a la incógnita «aha» o «montón», los árabes también tenían su palabra «shei», que significa *cosa*. Los escritores griegos que traducían textos matemáticos árabes, por una cuestión de simplicidad, la tradujeron como *xei* y, con el tiempo, se fue acortando hasta convertirse en x.

El popular símbolo para designar igualdades matemáticas aparece por primera vez en el libro *The Whetstone of Witte*, traducido al castellano como *El afilador del ingenio*, del galés Robert Recorde publicado en 1557. Recorde no eligió esta denominación por razones comerciales sino que llegó a él tras una curiosa deducción lingüística.

Como ya hemos visto, era tradicional en álgebra denominar a cualquier incógnita mediante la palabra latina «cosa» lo que dio pie a que los algebristas fueran los «cósicos» y el álgebra «la ciencia cósica». Pero «cosa» era la traducción al latín de *whestone*, una popular piedra donde afilar cuchillos, navajas, etc.

Antes de esta obra de Recorde el símbolo matemático para igualdades fue, mayoritariamente, la abreviatura «aeq» de la denominación latina *aequalis* (igual). Recorde introduce el símbolo «=» con los segmentos paralelos horizontales e idénticos, mucho más largos que los actuales, y se justifica diciendo que la elección se debe a la creencia de que ningún otro par de cosas pueden ser más iguales que el par de segmentos iguales y paralelos.

¿Y la palabra álgebra, de dónde viene?

Sabemos que el álgebra es una rama de las matemáticas que extiende a la simple aritmética, pero ¿de dónde viene su nombre? Pues esto se lo tenemos que agradecer al ya mencionado Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi y a los «malos traductores». Al-Khowarizmi, en su famosa obra *Compendio sobre el cálculo por medio de transposición y reducción*, introduce, como ya hemos dicho, el método *«al-jarb»* que significa *insertar* o *restaurar*, pero al traducir al latín, se tradujo por álgebra.

De esta forma se denominó álgebra a esta rama de las matemáticas y algebristas a todos aquellos que la practicaban. Pero no todos los algebristas eran matemáticos y es que en el siglo XVI, los barberos, aparte de afeitar y cortar cabellos, empezaron a incorporar especialidades médicas como sacar muelas, sangrar, etc., incluso el álgebra, o sea restaurar-recomponer huesos rotos. Por esta especialidad ósea se denominaron *algebristas*. Incluso en el Quijote se mencionan los algebristas, ya que el padre de Cervantes era, ni más ni menos, que un algebrista de la época.

Por último, ¿qué pasó con las ecuaciones de grado tres y cuatro?

Hace quinientos años, en Italia, nació el furor por las competiciones matemáticas, incluyendo tentadoras apuestas por resolver problemas de álgebra. La exclusiva por tener una fórmula para resolver la ecuación de tercer grado fue, en el siglo XVI, un tema apasionante y lleno de intrigas. Los titulares de este lío pueden resumirse así: Scipione del Ferro obtuvo las soluciones de $x^3 + bx = c$ las cuales confió antes de morir a Antonio María Fiore y Annibale della Nave. Fiore quiso sacar ventaja de la confidencia y retó a otro interesado en el tema: Niccolo Fontana, alias el tartamudo, más comúnmente conocido como Niccolo Tartaglia. El reto en aquella época era plantear problemas y depositarlos ante notario para que ganara el primero en hallar soluciones. Como Fiore sólo sabía resolver las ecuaciones de del Ferro pero Tartaglia halló la solución general de cualquier ecuación de tercer grado, ganó Tartaglia. Corrió por tanto la voz de esta solución algebraica.

En aquel momento el profesor Gerolamo Cardano, ayudado por Ludovico Ferrari, estaba escribiendo un libro de álgebra y contactó con Tartaglia, convenciendo a éste de que le contara la solución general de la ecuación de tercer grado con promesa explícita de que jamás publicaría ésto antes de que el propio Tartaglia lo hiciera.

En 1542 Annibale della Nave, el otro que había asistido con Fiore a la última confesión de del Ferro sobre ecuaciones, explicó a Cardano lo escuchado. A partir de ahí Cardano publica en su *Ars Magn*a todo lo que sabe: lo de del Ferro, lo de Tartaglia, lo suyo e incluso la resolución de la ecuación de cuarto grado de su discípulo Ferrari. La polémica historia estaba servida: cruce de cartas Tartaglia-Cardano-Ferrari, actos públicos de debate, nuevos problemas desafiantes, insultos como nunca antes se habían dado..., y la guerra duró varios años.

Cabe destacar que Cardano era, cuanto menos, un hombre muy peculiar y lo fue hasta su muerte, ya que para que se cumpliese la predicción que él mismo había hecho del día de su muerte, éste se suicidó en 1576.

TEMA 7: SISTEMAS DE ECUACIONES CON DOS ECUACIONES

Contaremos dónde surgieron dichos sistemas y veremos uno de los problemas históricos que pueden encontrarse en los escritos antiguos.

¿Cuándo y dónde aparecen?

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilónicos.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$1/4\, anchura + longitud = 7\, manos$$

$$longitud + anchura = 10\, manos$$

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: $anchura = 20$, $longitud = 30$. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$y + 4x = 28$$

$$y + x = 10$$

restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería

Por otro lado, los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas del 400 a. C., había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Diofanto también resuelve problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

En el libro *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*, el cual ya hemos mencionado en varias ocasiones, contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales, método que se estudiará en cursos superiores.

También en el *Papiro de Rhind* podemos encontrar problemas de sistemas de ecuaciones con su resolución.

3.4 Bloque III: Geometría y Estadística

En este bloque hemos elegido los temas 10 y 11 (*Medidas. Teorema de Pitágoras* y *Semejanza. Teorema de Thales*).

TEMA 10: MEDIDAS. TEOREMA DE PITÁGORAS

En este caso, utilizaremos un vídeo para introducir a Pitágoras, a su comunidad pitagórica y, como no, el famoso Teorema de Pitágoras.

El vídeo que se propondrá para que, en el aula, el alumnado conozca la historia de Pitágoras es el de *«Pitágoras, mucho más que un teorema»* de la serie documental que recorre la historia de las matemáticas *Universo Matemático*, serie realizada en el año 2000 por el programa *La aventura del saber* de La 2 de Televisión Española.

La duración del vídeo es de unos 25 minutos, con lo que su visionado ocuparía la mitad de una lección de matemáticas.

A continuación, mostraré una breve secuenciación de lo que se cuenta en el citado vídeo:

- En primer lugar, se hace una introducción de las matemáticas, desmitificándola de ser esa ciencia arcaica y estancada que muchos puedan pensar.

- Se comienza hablando de los cráteres de la Luna, los cuales llevan nombres de importantes matemáticos.

- Se va realizando una entrevista por la calle en la que, al preguntar a la gente por un matemático famoso, la gran mayoría responden nombrando a Pitágoras y a su teorema.

- En este punto, se introduce el citado teorema, hablando de su origen y la posibilidad de que, realmente, Pitágoras ni lo descubriera ni lo demostrara.

- A continuación, se cita la demostración china del teorema, descubierta en el año 1000 a. C. Incluso se realiza la demostración china del teorema, la cual es muy sencilla y se realiza de una forma muy visual.

- Se habla, después de ésto, de la utilización de los egipcios y babilonios del teorema de Pitágoras.

- En este punto, se habla de la figura de Pitágoras, dónde nace y cuáles son los posibles viajes que realizó, por recomendación, posiblemente, del mismísimo Thales.

- Se cuenta también cuál era el método que los egipcios usaban para medir las inundaciones del Nilo y en las construcciones de las pirámides y templos, todo ésto a través de triángulos rectángulos.

- También se habla de los babilonios y de la tablilla, escrita en el 1800 a. C., *«Plimpton 322»*, donde aparecen ternas pitagóricas, es decir, tres números que verifican el teorema de Pitágoras y un método para hallar dichas ternas. Con lo cual, 1000 años antes de que Pitágoras naciera, los babilonios ya conocían el teorema.

- En este punto, vuelve a hablarse de la figura de Pitágoras y, en este caso, se habla también de la comunidad que él fundó, los pitagóricos, en Crotona, al sur de Italia.

- Se cuenta la influencia de la comunidad pitagórica y qué nos ha llegado de ellos. Cuál fue su concepto de número, como «principio y explicación del Universo».

- Además, se habla de la relación que Pitágoras realizó o encontró entre las matemáticas y la música, al igual que se habla, más adelante, del número 10, sagrado para ellos, de los números perfectos y Euclides, del número de oro, presente en el símbolo de los pitagóricos, el *pentagrama místico*, etc. Por supuesto, se habla y se realiza la demostración que se muestra en los *Elementos* de Euclides, la cual se piensa que no debe de ser muy distinta de la que Pitágoras y los pitagóricos realizaran.

- Se mencionan y explican otros datos curiosos, como la aparición de los horóscopos, la división en 360º del círculo, siendo la división del grado en 60 minutos y la del minuto en 60 segundos, al igual que la manera en la que contamos el tiempo.

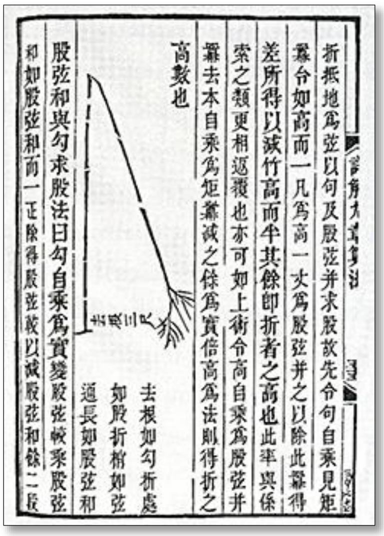
El vídeo se puede encontrar en la siguiente página:

http://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematico-pitagoras-mucho-mas/884344/

Además del visionado del vídeo, se puede hablar, ya que se menciona la demostración china del teorema, del famoso problema del *bambú roto*, el cual podemos encontrar en el *Chui-chang Suan-shu*:

«Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura»

La solución se obtiene resolviendo la ecuación: $x^2 + 3 = (10 - x)^2$.


詳解九章算法

折抵地為弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡為高一丈為股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘為股弦并
冪去本自乘為矩冪減之餘為實倍高為法則得折之
高數也

股弦和與勾求股法曰勾自乘為實變股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二長

(La imagen es de un texto de Yang-Hui de 1261.)

TEMA 11: SEMEJANZA. TEOREMA DE THALES

Sobre el Teorema de Thales, hablaremos de su origen y autor, usando en esta ocasión la siguiente Webquest (WQ): *Webquest: Midiendo con Thales*:

http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/thales/index.html

Esta Webquest está enmarcada dentro del *«Plan Ceibal»*, a partir del cual surge, en 2010, el *Centro Ceibal para el Apoyo a la Educación de la Niñez y la Adolescencia* de la República Oriental del Uruguay.

Dicha WQ tiene la estructura natural del recurso:

- **Introducción de la WQ:** se plantean una serie de preguntas, las cuales se pueden responder mediante el Teorema de Thales, como la medición de la altura de la pirámide Keops, problema histórico de la época de Thales de Mileto. Además, se describe la *Tarea* que se realizará mediante la WQ, en este caso, lo que se hará será un recorrido por la vida y obra del citado Thales, debiendo entregar los grupos de alumnos todas las actividades, las cuales se detallan más adelante.

- **Descripción del Proceso:** se describe la metodología que se empleará y las distintas actividades propuestas. Los alumnos trabajaran en grupos de 5 miembros y podrán utilizar todos los recursos que se presentan para la resolución de las actividades. Se plantean 5 actividades más una actividad final:

    - ***Actividad 1*: Biografía de Thales de Mileto.** En esta actividad deberán informarse y elaborar un texto contando los datos más significativos de su vida y su obra.

    - ***Actividad 2: Observación y comprobación de la validez del teorema de Thales.*** Esta actividad consiste en la observación de la validez del teorema, mediante unas páginas web, en las cuales podemos encontrar la historia de la pirámide, explicada de una forma muy visual, y la explicación de los conceptos relacionados con el citado teorema. Además, se plantean unos ejercicios mediante el programa *Dr. Geo*, los cuáles sirven para comprobar el teorema, estos pueden ser sustituidos por problemas equivalentes en el software *GeoGebra*, siendo los alumnos los encargados de su elaboración.

    - ***Actividad 3: Resolución de 3 ejercicios sobre el teorema de Thales.***

- ***Actividad 4: Observación de problemas resueltos en la vida cotidiana.*** Invención de un problema similar. Una de las aplicaciones del teorema de Thales a la vida cotidiana es la proporcionalidad de segmentos. En esta actividad se profundiza en este tema. Observando el planteamiento y la resolución de una serie de problemas.

- ***Actividad 5: Lectura de la canción «Teorema de Thales» de Les Luthiers.*** Se trata de una canción que enuncia el Teorema de Thales, tal canción es compuesta por un alumno del segundo curso de química, el cual no conseguía aprenderse dicho enunciado.

- ***Actividad Final: Caso práctico.*** Aplicando los conocimientos que se han adquirido sobre el teorema de Thales, los alumnos deberán realizar el cálculo de la altura de un edificio del barrio de la escuela. Esta actividad deberá ser expuesta a toda la clase.

- **Recursos necesarios para el desarrollo correcto de la WQ:** en este punto encontramos enlaces clasificados por actividades, aunque la mayoría de ellos también pueden encontrarse en el apartado de Proceso cuando se describen las actividades.

- **Evaluación:** se utilizará una rúbrica que evalúa independientemente cada actividad y la presentación de los resultados en el aula.

- **Conclusión final de la WQ:** se resume la esencia de la misma, presuponiendo que en este punto el alumnado habrá adquirido correctamente todos los nuevos conocimientos y que será capaz de ver la utilidad de los mismos en problemas de la vida cotidiana.

En esta WQ, la historia de la matemática está presente en la introducción del teorema, a través del personaje y la resolución del problema de la pirámide egipcia.

Además del uso de esta WQ para explicar, a través de su historia el desarrollo y las aplicaciones del teorema, también se podrá enseñar otro problema típico de la época mediante un cómic, el cual puede encontrarse en el *ANEXO II*.

3.5 Semana de la Ciencia: Mujeres Matemáticas

Es cada vez más habitual que los centros realicen una *Semana de la Ciencia*, en la cual los propios alumnos muestran al resto de sus compañeros datos o hechos curiosos de la ciencia, tanto de la física, la química, la matemática, la biología, como de cualquier otra ciencia que estén estudiando en el aula o, por propio interés, de manera extraescolar.

Normalmente, en esta semana el alumnado muestra y encuentra aquello que, por ser «extracurricular», no ven en las aulas, aunque pueden ser temas de gran interés y es importante que sean tratados en mayor o menor medida, pues estos, por regla general, suelen ser unos agentes motivadores para los estudiantes.

A colación con la temática de este *Trabajo Fin de Máster* se puede hacer una propuesta para la citada *Semana de la Ciencia*, tratando la historia de la matemática y sabiendo que es un tema que está fuera del currículo (aunque quizá pudiera dedicársele un hueco, de forma concienciadora), se propone como temática para la misma: *Mujeres Matemáticas*.

En este caso los alumnos pueden investigar sobre las mujeres matemáticas, quiénes fueron las pioneras, qué tuvieron que sortear en el camino para poder continuar en el estudio de la matemática, etc.

Para poder completar esta parte y motivar al alumnado el interés por el tema, se puede visionar en el aula el vídeo titulado *Mujeres Matemáticas* de la serie documental, ya mencionada con anterioridad, *Universo Matemático*. El cual se puede encontrar en la siguiente página:

http://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematico-20-09-10/882229/

El video tiene una duración de unos 22 minutos y en él se hace un recorrido por la historia de las mujeres matemáticas, contando las historias de las más famosas y controvertidas de cada época.

Con este vídeo se puede motivar al alumno a que estudie y se interese por la vida de las mujeres matemáticas de la historia, para ello también se le puede proponer la lectura de algunos libros como *Mujeres, manzanas y matemáticas. Entretejidas* o *Sofía. La lucha por saber de una mujer rusa* de Xaro Nomdedeu Moreno y pertenecientes a la colección *La matemática en sus personajes* de la editorial Nivola. En esta misma colección podemos encontrar otros libros cuyos protagonistas son mujeres que han destacado y, por desgracia, sufrido en la matemática.

De esta forma, los alumnos pueden preparar tarjetas o murales cuyo tema principal sea una mujer de la historia de la matemática, donde explicarán cómo empezaron a estudiar matemáticas, quiénes las apoyaron y quiénes no, etc. Esto lo podrán presentar al resto de sus compañeros.

4 CONCLUSIONES

En este *Trabajo Fin de Máster* se ha realizado una justificación, mediante diversos autores, del uso de la historia de las matemáticas como recurso didáctico, presentando una serie de razones y motivaciones que hacen pensar que su uso puede ser beneficioso para el proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado. Las asignaturas de Matemáticas no solo tratan de la adquisición de conocimientos puramente matemáticos, sino también de la adquisición de una cultura universal y unos valores morales añadidos, los cuales tendrán su origen en un estudio contextualizado de una ciencia que ha desarrollado «el hombre para el hombre» con todas sus dificultades intelectuales y sociales.

Además, se ha querido relacionar con los objetivos que el Real Decreto de enseñanzas mínimas, tanto de la enseñanza secundaria como de bachillerato, incluye en sí mismo. Viendo que el uso de la historia en el aula fomenta y favorece el logro de parte de sus objetivos, incluso, puede pensarse que sin ella algunos de ellos no podrían alcanzarse.

Con lo ejemplos planteados hemos evidenciado que la historia puede introducirse en el aula respetando el currículo. Además, puede favorecer el uso de las nuevas tecnologías, al existir una gran variedad de recursos en la web, como son vídeos, webquest, etc. Por otro lado, se puede fomentar la lectura en el alumnado, la cual, a través de la historia, puede verse favorecida, al poder proponer trabajos sobre ciertos personajes, existiendo grandes colecciones literarias que nos muestran sus luces y sombras.

Como conclusión final, puedo decir que, sin lugar a dudas, la historia favorece la enseñanza, enriqueciéndola en gran medida, y el aprendizaje, proporcionando buenas herramientas motivadoras. De esta forma, podemos lograr llamar la atención del alumnado y procurar que esté más interesado en la materia, ya que se le proporcionan diferentes vías de estudio.

Además, quiero destacar la, ya nombrada, flexibilidad de este recurso, puesto que éste puede emplearse de diferentes formas, adaptándose a las necesidades del alumnado y a las capacidades de los centros.

5 BIBLIOGRÁFICA

[1] Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5 de enero de 2007, núm. 5, pp. 677-773.

[2] Real decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial del Estado*, 6 de noviembre de 2007, núm. 266, pp. 45381-45477.

[3] ALSINA, C. (2008) *El club de la hipotenusa*, Ariel, Barcelona.

[4] ÁLVAREZ, F., MARTÍN, O. y PAREJA, C. (2015) *La lengua de las matemáticas y otros relatos exactos*, Los libros de la catarata, Madrid.

[5] BAYER-ISANT, P. (2004) «Mujeres y Matemáticas». *La gaceta de la RSME*, núm. 7.1, pp. 55-71.

[6] BOYER, C. B. (1986) *Historia de la matemática*. Alianza Universidad, Madrid.

[7] GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (2001) *Pitágoras. El filósofo del número*. Colección La matemática y sus personajes, Nivola, Madrid.

[8] GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (2004) «La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza». *Suma*, núm. 45, pp. 17-28.

[9] GONZÁLEZ-URBANEJA, P. M. (2004) « La Història de la Matemàtica com a recurs didàctic i instrument d'integració cultural de la Matemàtica». Trabajo Fin de Estudios, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

[10] GUEDJ, D. (2011) *El imperio de los números*, Blume, Madrid.

[11] GUZMÁN, M. (1992) «Tendències innovadores en educació matemática». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm 7, pp. 7–33.

[12] KLINE, M. (1976) *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI, Madrid, , p. 49.

[13] MAZA, C. (1994) «Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis». *Suma*, núm. 17, pp. 17-26.

[14] MEAVILLA-SEGUÍ, V. (2005) *La historia de las matemáticas como recurso didáctico*, Servicio de Publicaciones FESPM, Badajoz.

[15] MEAVILLA-SEGUÍ, V. (2008) «Algunas razones para introducir la historia de las matemáticas en las aulas de secundaria». *Sigma*, núm. 32, pp. 221-237.

[16] MEAVILLA-SEGUÍ, V. y OLLER-MARCÉN, A. M. (2013) «Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos ». *Números*, núm. 82, pp. 89-100.

[17] MONTESINOS-SIRERA, J. L. (2000) *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*, Síntesis, Madrid.

[18] NOLLA, R. (2001) «Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica. Per a una aproximació genètica al tractament de les idees matemàtiques». Trabajo Fin de Estudios, Cataluña, p. 1.

[19] ORTEGA-TORRES, A. M. (2012) «Unidad didáctica: Ecuaciones de primer grado». Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada.

[20] PICKOVER C. A. (2010) *El libro de las matemáticas,* Librero, Kerkdriel.

[21] POINCARE, J. H. (1963) *Ciencia y método*. Espasa Calpe, Madrid.

[22] SIERRA-VÁZQUEZ, M. (2000) «El papel de la historia de la matemática en la enseñanza». *Números*, núm. 43-44, pp. 93-96.

[23] Libro de texto *Matemáticas, Pitágoras. 2º ESO. P. Conecta 2.0*, sm.

WEBGRAFÍA

A continuación se enumeran algunas páginas de Internet que han sido consultadas para la elaboración de los recursos presentados en cada tema:

LOS NÚMEROS ENTEROS

- http://matemathicfun.blogspot.com.es/2010/08/origen-de-los-numeros-enteros.html Accedido en Mayo de 2015.
- http://casanchi.com/mat/enteros01.pdf Accedido en Mayo de 2015.
- http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf Accedido en Mayo de 2015.
- http://www.redalyc.org/pdf/335/33529137015.pdf Accedido en Mayo de 2015.

LAS RAÍCES CUADRADAS

- http://revistasuma.es/IMG/pdf/8/081-083.pdf Accedido en Mayo de 2015.
- http://definicion.de/raiz-cuadrada/ Accedido en Mayo de 2015.
- http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Raiz_nombre.html Accedido en Mayo de 2015.

LAS ECUACIONES

- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html Accedido en Junio de 2015.
- http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2014/05/22/138152 Accedido en Junio de 2015.
- http://cipri.info/resources/HIT-La_ecuacion_de_segundo_grado.pdf Accedido en Junio de 2015.

LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES

- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html Accedido en Junio de 2015.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

- http://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematicopitagoras-mucho-mas/884344/ Accedido en Mayo de 2015.

EL TEOREMA DE THALES

- http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/thales/index.html Accedido en Junio de 2015.
- http://www.ceibal.edu.uy/art%C3%ADculo/noticias/institucionales/Centro-Ceibal-para-el-Apoyo-a-la-Educacion-de-la-Ninez-y-la-Adolescencia Accedido en Junio de 2015.

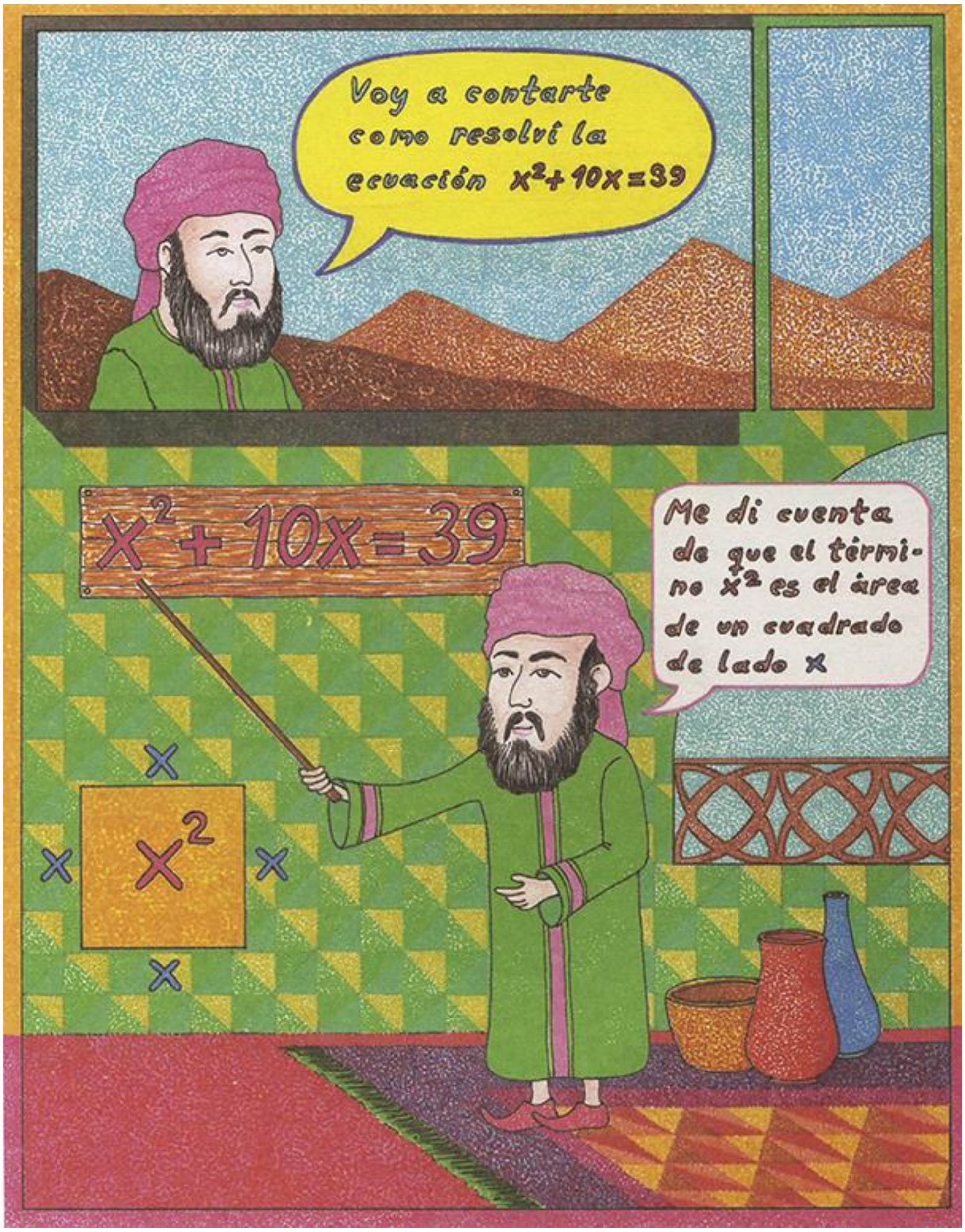
MUJERES MATEMÁTICAS

- http://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematico-20-09-10/882229/ Accedido en Junio de 2015.

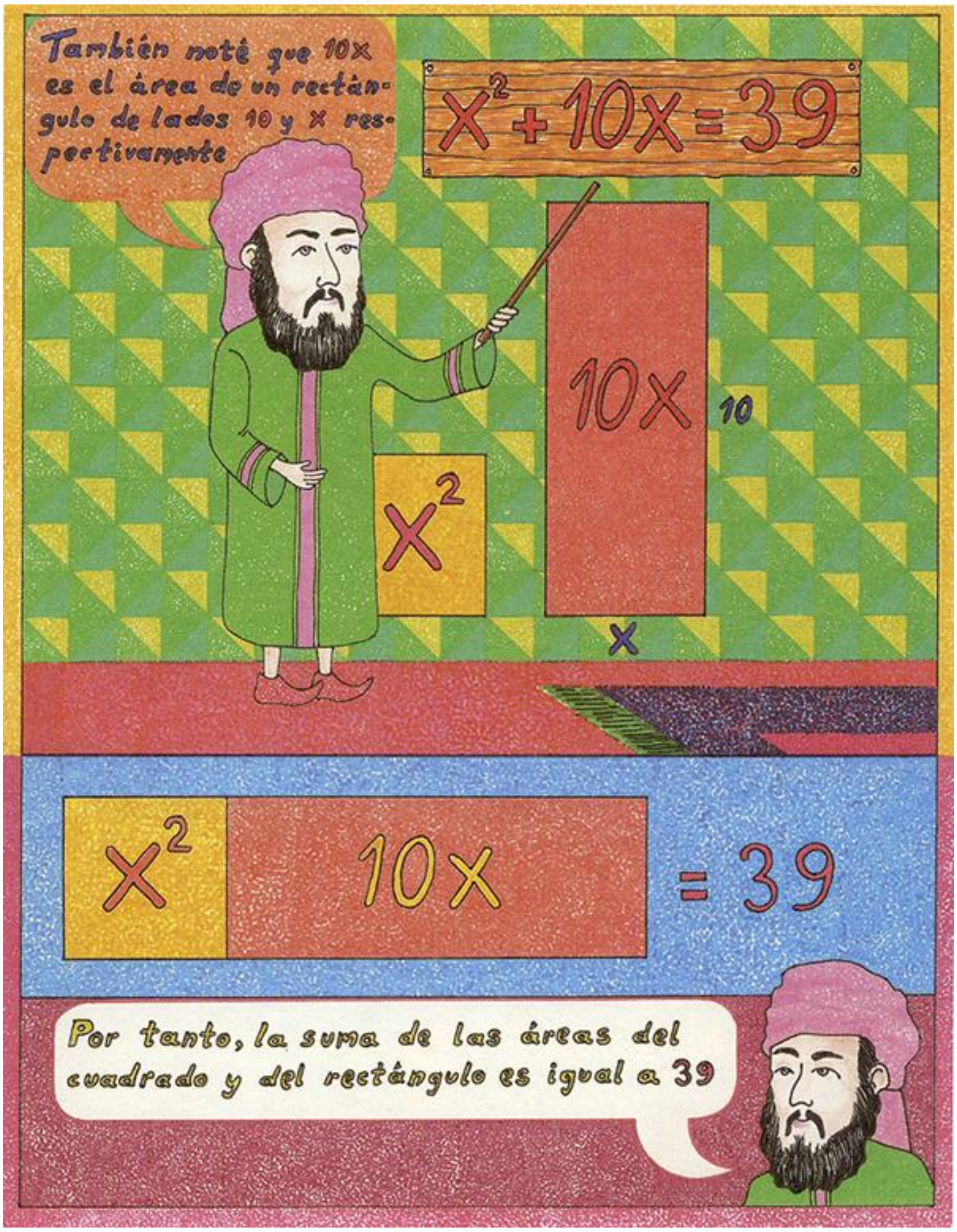
6 ANEXOS

a. ANEXO I: CÓMIC SOBRE ECUACIONES DE 2º GRADO

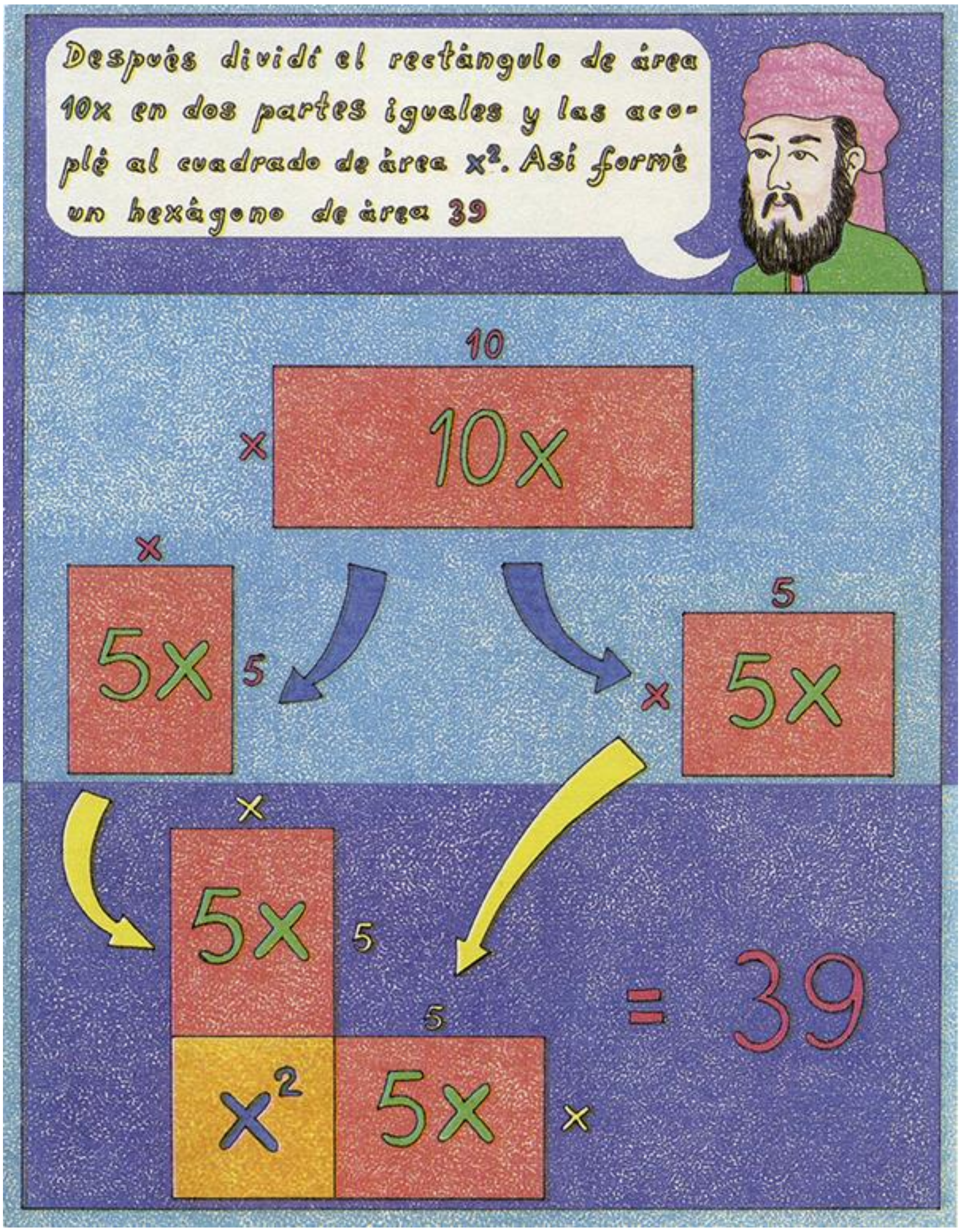
Se presenta un cómic elaborado por Meavilla en [13], en el cual, al-Khowarizmi resuelve geométricamente la ecuación de segundo grado $x^2 + 10\,x = 39$.



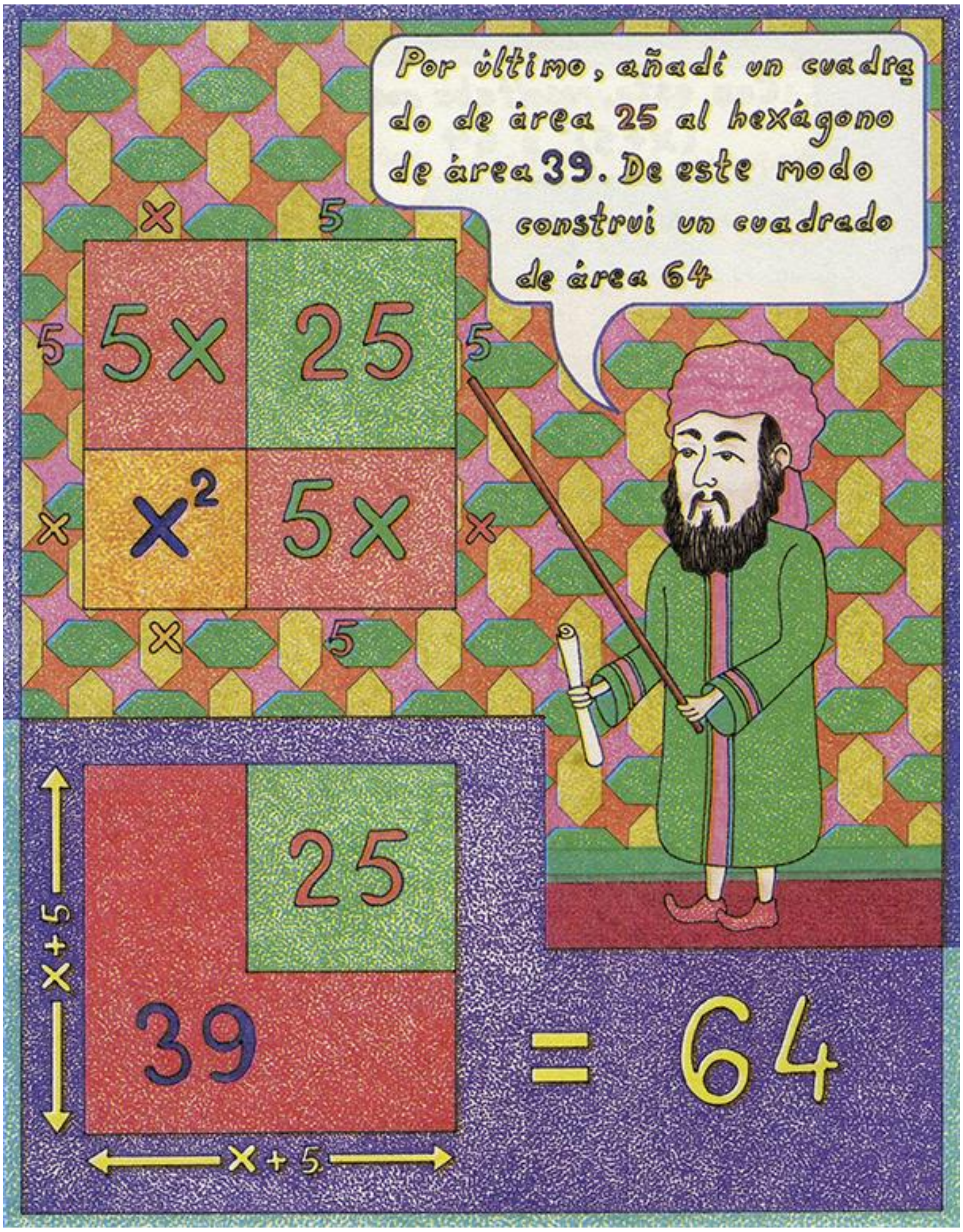
Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería



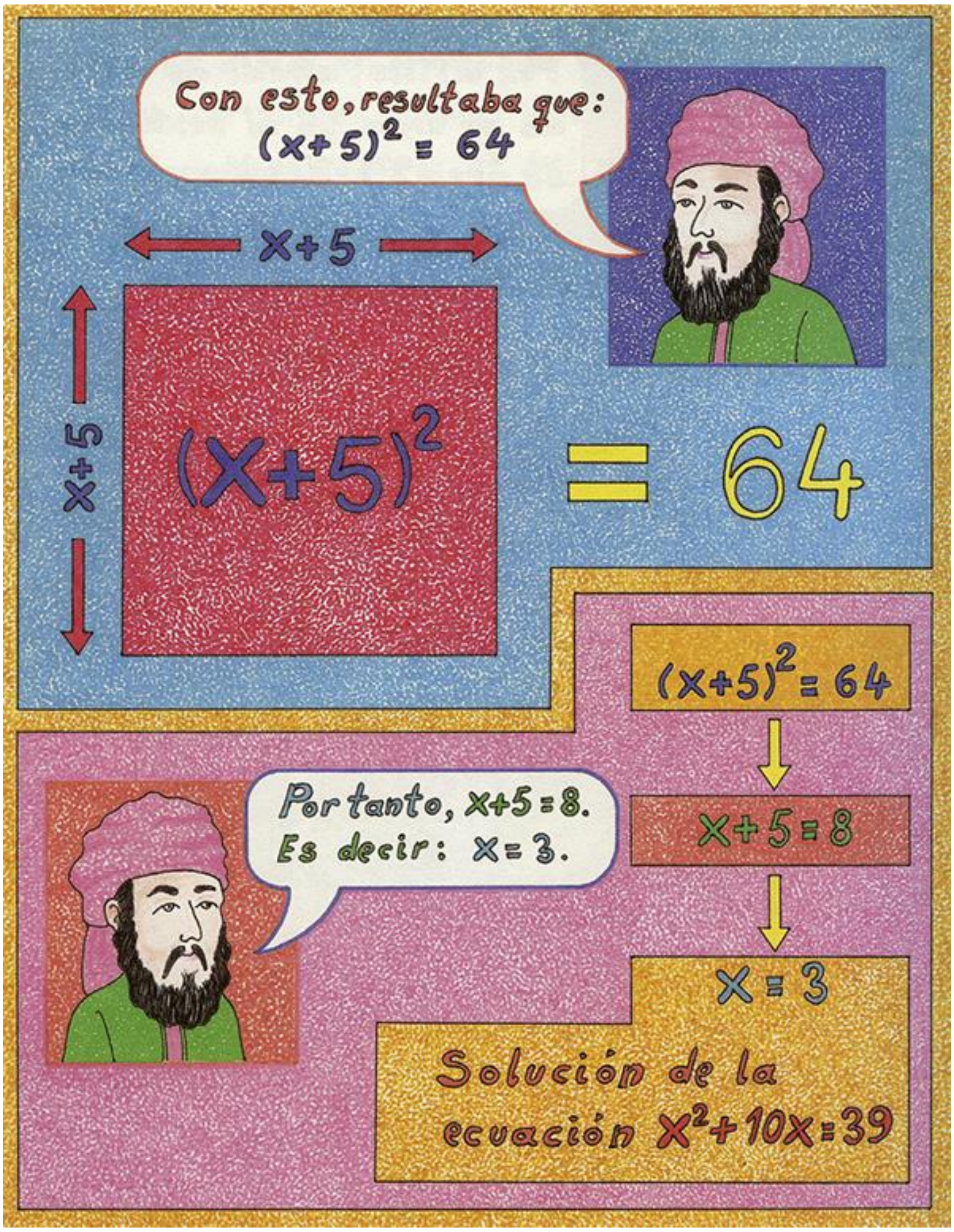
Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería



Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería



Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería



Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería

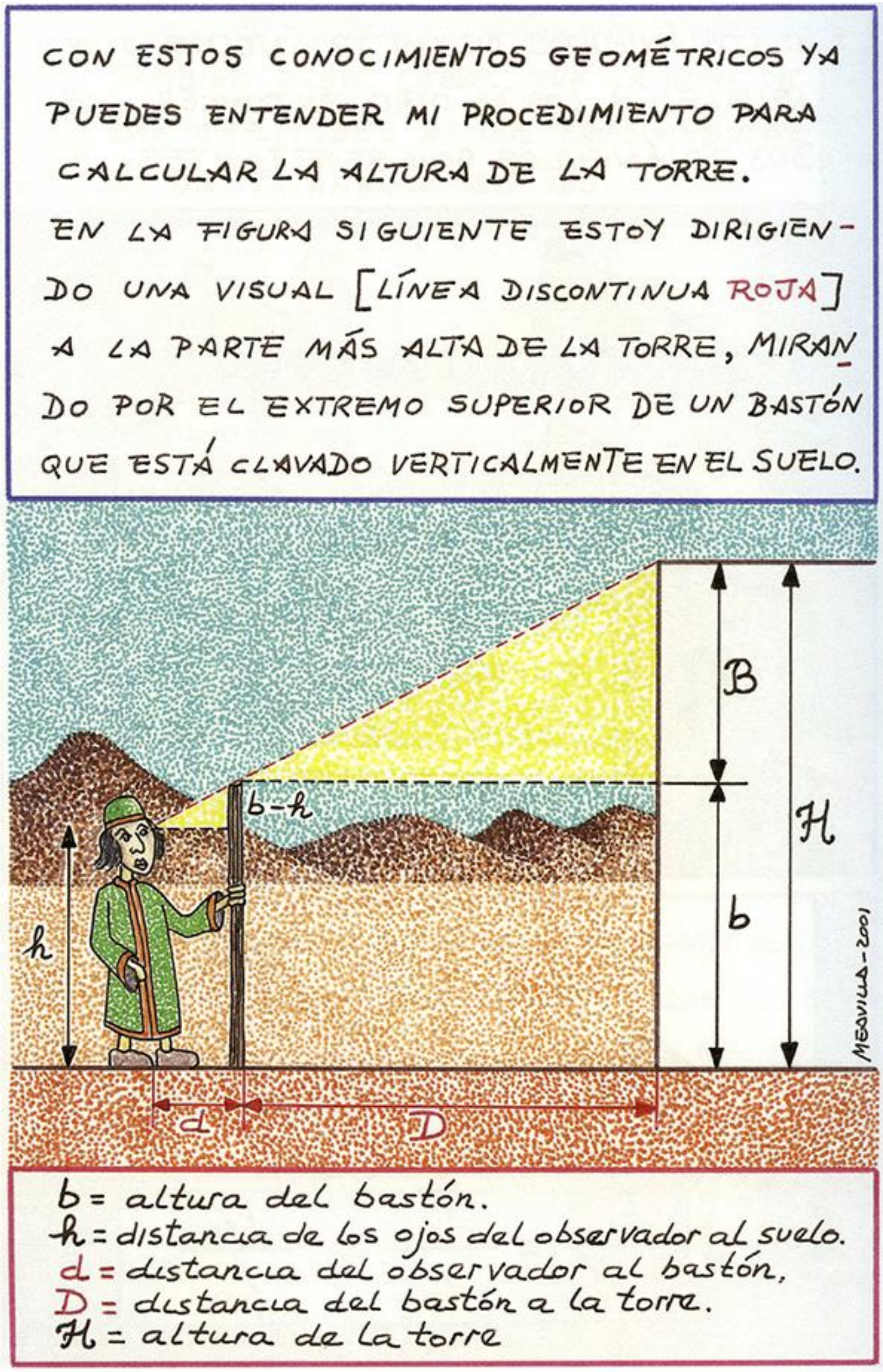
b. ANEXO II: CÓMIC SOBRE SEMEJANZA

Se presenta otro cómic elaborado por Meavilla en [13], en el que se utiliza un método de medición a través de triángulos semejantes, el cual se encuentra en la mayoría de tratados de Geometría Práctica medievales:

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería


SI LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO SON IGUALES A LOS DE OTRO, ENTONCES LOS DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES.
SI DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES, ENTONCES LAS LONGITUDES DE LOS LADOS OPUESTOS A LOS MISMOS ÁNGULOS SON PROPORCIONALES.
l_1 l_2 l_3
L_1 L_2 L_3
$\frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2} = \frac{l_3}{L_3}$
MEAVILLA - 2001


CON ESTOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS YA PUEDES ENTENDER MI PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA ALTURA DE LA TORRE.
EN LA FIGURA SIGUIENTE ESTOY DIRIGIENDO UNA VISUAL [LÍNEA DISCONTINUA ROJA] A LA PARTE MÁS ALTA DE LA TORRE, MIRANDO POR EL EXTREMO SUPERIOR DE UN BASTÓN QUE ESTÁ CLAVADO VERTICALMENTE EN EL SUELO.
B
b-h
H
b
h
d
D
MESVILLA-2001
b = altura del bastón.
h = distancia de los ojos del observador al suelo.
d = distancia del observador al bastón.
D = distancia del bastón a la torre.
H = altura de la torre

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería

Beatriz Navarro Vicente
Máster en Profesorado, Esp. Matemáticas
Universidad de Almería