Las matemáticas en el sudoku

Trabajo Fin de Grado

Autor:
Javier Suárez Quero

Tutor:
José Antonio Rodríguez Lallena

Grado en Matemáticas

Septiembre, 2017
Universidad de Almería

Índice general

Abstract in English

In recent years, Sudoku has become more and more famous all over the world and it has not been unspotted by mathematicians. Its structure has raised very different questions, but the most heard ones have been the number of different Sudoku squares and the minimum number of clues needed for a Sudoku puzzle to have only one solution.

In order to answer these two questions, similar problems are solved with smaller boards. Then it is explained how other authors solved them with computer help: the work of Felgenhauer and Jarvis [2] counting Sudoku squares, and the work of McGuire, Tugemann and Civario [4] finding the minimum number of clues required.

A previous chapter introduces some counting techniques while latin squares are studied. The final chapter presents an easy game related to the Sudoku, Duidoku, and proves a winning strategy as an easy aproach to Game Theory.

Resumen en español

El sudoku se ha convertido en los últimos tiempos en uno de los pasatiempos más conocidos en todo el mundo y no ha pasado desapercibido a ojos de los matemáticos. Su estructura ha suscitado preguntas de lo más variadas, pero las que más repercusión han causado son el número total de cuadrados de sudoku existentes y el número mínimo de pistas que puede tener un puzle de sudoku con solución única.

En este trabajo se presentan de forma resumida las soluciones de estas dos preguntas, partiendo de problemas más sencillos con cuadrículas más pequeñas, hasta el proceso por el que otros autores han encontrado la respuesta con ayuda del ordenador: el trabajo de Felgenhauer y Jarvis [2] respondiendo al número de cuadrados distintos y el trabajo de McGuire, Tugemann y Civario [4] respecto al número de pistas.

Un capítulo previo introduce algunas técnicas de conteo mientras se estudian los cuadrados latinos, precursores del sudoku. Otro capítulo al final presenta un juego simple relacionado con el sudoku, el duidoku, y con una breve aproximación a la teoría de juegos se le demuestra una estrategia ganadora.

1 Introducción

Supongamos que tenemos dos cuerdas de grosor irregular –no tienen por qué ser iguales– de las cuales solo se sabe que prendiéndolas por un extremo tardarán exactamente una hora en consumirse por completo. Utilizando únicamente estas cuerdas (y algo para quemarlas), ¿cómo se podrían medir 45 minutos?

La mayoría de las personas ajenas a las matemáticas creen que estas solo consisten en hacer cuentas, cada vez más complicadas, sin ninguna utilidad aparte de complicarle la vida a los estudiantes. Todos hemos escuchado alguna vez un *¿Y esto para qué me sirve?*

Si bien es cierto que, generalmente, las herramientas utilizadas suelen ser complicadas de entender, por culpa de la gran rigurosidad autoimpuesta, el verdadero propósito de un matemático es mucho más infantil e inocente. Las matemáticas consisten en plantearse preguntas, independientemente de su dificultad (e incluso de su utilidad[1]), y jugar con la información disponible hasta encontrar una respuesta. Una vez encontrada, solo cabe hacerse otra pregunta para seguir jugando. Vistas así, seguro que hay mucha más gente a la que le gustan las matemáticas (o al menos parte de ellas) y no lo sabe.

Un ejemplo son las miles de personas que, religiosamente, gastan unos minutos al día resolviendo los pasatiempos que vienen en el periódico. Estos, junto con acertijos como el que he presentado al principio, son formas de hacer matemáticas que pasan desapercibidas por no involucrar cuentas aritméticas. En cambio, solo requieren un poco de ingenio, paciencia y, en ocasiones, algo de imaginación.

Uno de los pasatiempos más relacionados con esta cara menos conocida de las matemáticas es el sudoku, que no solo ha conseguido conquistar a millones de fans en todo el mundo sino que además ha despertado la curiosidad de muchos matemáticos, que lo han estudiado para intentar descubrir sus secretos. Desde técnicas y algoritmos de resolución, o condiciones sobre la posible unicidad de un puzle de sudoku dado, hasta preguntas sobre el número de cuadrados de sudoku que podrían existir o sobre el número de pistas que debe incluir cada puzle. Cuestiones como estas serán las que trataremos de responder en este trabajo, concretamente a lo largo del tercer capítulo. Antes vamos a introducir al precursor de dicho puzle: el cuadrado latino, a lo que dedicaremos el próximo capítulo. Un libro muy interesante en relación a estos dos capítulos mencionados es el escrito por Jason Rosenhouse y Laura Taalman [5], *Taking sudoku seriously*.

Por último, en el cuarto capítulo nos acercaremos a la *Teoría de juegos* mediante un juego para dos personas relacionado con el sudoku –el duidoku– y una estrategia ganadora para el mismo.

[1] Aunque no sea útil en el momento, puede que en el futuro se le encuentre alguna aplicación. Además, el mero hecho de ejercitar la mente ya es utilidad suficiente.

2 Cuadrados latinos

Para la definición de los cuadrados latinos partimos de una colección de n símbolos distintos. Lo más común, y lo que usaremos en este trabajo, es utilizar los n primeros números naturales.

Definición 2.1. *Un* cuadrado latino *de orden n es una matriz $n \times n$ en la que cada fila y cada columna contienen a cada uno de los símbolos exactamente una vez.*

Las matrices de los cuadrados latinos se representan en forma de cuadrado, como se muestra en la figura 2.1.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

1	4	2	5	3
5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4

Cuadro 2.1: Cuadrados latinos de orden 3, 4 y 5

2.1 Existencia de cuadrados latinos

Es fácil ver con ejemplos que existen los cuadrados latinos de ordenes pequeños, pero se puede demostrar que esta definición es consistente para cualquier orden [5].

Teorema 2.1. *Existen cuadrados latinos de cualquier orden natural.*

Demostración:

Sea n un natural cualquiera. Vamos a construir un cuadrado latino de dicho orden con los elementos de $\mathbb{Z}_n$ como símbolos. El valor de cada casilla a_{ij} será la suma de su fila y columna menos uno ($a_{ij} = i + j - 1$) en módulo n [1].

Con esta construcción (véase cuadro 2.2) es fácil ver que para una fila cualquiera (fijando i), tenemos a n números consecutivos, que en módulo n terminan siendo los n símbolos diferentes que estamos usando. Análogamente, fijando j, vemos que en cada columna también aparecen una única vez todos los números de $\mathbb{Z}_n$.

Por último, para finalizar la construcción del cuadrado latino podemos sustituir los ceros de $\mathbb{Z}_n$ por el valor de n para tener como símbolos los primeros naturales.

■

[1] El hecho de restar 1 es meramente estético para que la casilla superior izquierda tenga un 1. Igual que sustituir el valor de 0 por n.

1	2	3	$\cdots$	n
2	3	$\cdots$	n	1
3	$\cdots$	n	1	2
$\vdots$	$\iddots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

Cuadro 2.2: Construcción de un cuadrado latino de orden n

Esta construcción nos da un cuadrado latino para cualquier orden, pero no es la única forma de obtenerlos. Solo con los ejemplos del cuadro 2.1 ya podemos ver que el cuadrado de orden 4 no es de este estilo. Además, es fácil de ver que a partir de un cuadrado latino se pueden obtener otros distintos sin más que permutando un par de columnas o filas, como se muestra en el cuadro 2.3.

1	4	5	2	3
5	3	4	1	2
4	2	3	5	1
3	1	2	4	5
2	5	1	3	4

1	4	2	5	3
5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4

Cuadro 2.3: Cuadrados latinos distintos permutando una columna

A raíz de esto surge la pregunta de cuál es el número de cuadrados latinos distintos que pueden existir, que vamos a tratar de contestar.

2.2 Contando cuadrados latinos

Esta pregunta se puede abordar desde varios puntos de vista, que mencionaremos más adelante, pero en este caso vamos a contar el número de cuadrados latinos distintos de un orden n dado, con los primeros números naturales como símbolos $(1, 2, \ldots, n)$. Así, consideraremos en principio que los cuadrados latinos del cuadro 2.4 son diferentes.

2	1		1	2
1	2		2	1

Cuadro 2.4: Cuadrados latinos de orden 2.

Como ya hemos visto, a partir de un cuadrado latino podemos obtener otros diferentes permutando filas y columnas. Más concretamente, a partir de un cuadrado latino de orden n, podemos obtener $n! \cdot (n-1)!$ diferentes.

Esto sigue del hecho de que tenemos $n!$ formas de ordenar las columnas y $(n-1)!$ opciones para las filas. A la hora de ordenar las filas no tenemos en cuenta la primera de ellas, ya que a la hora de ordenar las columnas ya estamos decidiendo un orden para la primera fila. Permutar esa fila sería cambiar los elementos de la primera fila, pero tendríamos el mismo cuadrado que eligiendo ese orden directamente con las columnas, por lo que estaríamos contando algunos dos veces.

Definición 2.2. *Se dice que dos cuadrados latinos son equivalentes si podemos pasar de uno a otro permutando filas y columnas.*

Es una relación de equivalencia [1].

Con esto hemos definido una relación de equivalencia entre cuadrados latinos de forma que todas las clases de equivalencia tienen el mismo número de elementos, es decir, para contar el número total de cuadrados latinos, basta contar las distintas clases de equivalencia y multiplicar por $n! \cdot (n-1)!$. Para no equivocarnos con esta cuenta y, por error, contar dos cuadrados latinos equivalentes, vamos a acordar un representante de clase:

Definición 2.3. *Un cuadrado latino reducido es aquel que tiene la primera fila y la primera columna en el orden natural.*

En el cuadro 2.4, el cuadrado de la izquierda no es reducido, mientras que el de la derecha sí lo es, igual que el cuadrado latino genérico del cuadro 2.2.

Ya solo queda contar los distintos cuadrados latinos reducidos de cada orden y habremos resuelto la pregunta.

Número de cuadrados latinos: casos elementales

El caso más elemental de todos es el cuadrado latino de orden 1, una única casilla con un 1, en el que no es necesario pararse pero es el primer elemento de la lista.

Igual de sencillo es el caso de los cuadrados latinos de orden 2. Para buscar los distintos cuadrados reducidos, partimos de una cuadrícula en la que solo rellenamos

[1] **Demostración:**
Reflexiva: Un cuadrado es equivalente a sí mismo sin hacer ningún cambio, o permutando las mismas dos filas dos veces.
Simétrica: Si de un cuadrado A podemos llegar a un cuadrado B, haciendo las mismas permutaciones en orden inverso pasamos de B a A.
Transitiva: Si haciendo permutaciones pasamos de A a B y de B a C, haciendo las mismas permutaciones en ese orden pasamos de A a C.

las primeras fila y columna, y rápidamente vemos que solo hay una opción: Una única clase de equivalencia.

1	2
2	

$\longrightarrow$

1	2
2	1

El número de clases de equivalencia –1– lo multiplicamos por el factor $n! \cdot (n-1)!$ y vemos que solo existen 2 cuadrados latinos de orden 2: los dos del cuadro 2.4, como era evidente.

De forma similar, aunque no tan directo, ocurre cuando evaluamos los de orden 3. Al rellenar las casillas necesarias para buscar un cuadrado reducido, vemos que es necesario que la casilla central la ocupe un 3. Tras esto, los únicos huecos libres en las segundas fila y columna tienen que ser unos, lo que deja una última casilla para el 2 que falta.

1	2	3
2		
3		

$\longrightarrow$

1	2	3
2	3	
3		

$\longrightarrow$

1	2	3
2	3	1
3	1	

$\longrightarrow$

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Una vez visto que solo existe una clase de equivalencia para orden 3, solo falta ver cuantos elementos contiene dicha clase, que sabemos que viene dado por la expresión $n! \cdot (n-1)! = 3! \cdot 2! = 12$. Existen 12 cuadrados latinos distintos de orden 3.

Número de cuadrados latinos: orden 4

El siguiente paso de esta lista no es tan directo como los anteriores, pero sigue siendo asequible y es útil para ver cómo se pueden abordar estos problemas. La idea sigue siendo la misma: contar el número de posibilidades de rellenar un cuadrado latino reducido, así que volvemos a partir de una cuadrícula con los lados superior e izquierdo en orden natural. Sin embargo, en este caso no hay ninguna otra casilla forzada por lo que hay que empezar a distinguir casos.

En primer lugar, vemos que los dos cuatros que faltan en el cuadrado tienen que ocupar dos de las casillas centrales. Esto nos deja dos opciones, ambos en la diagonal principal (verde) o ambos en la antidiagonal (azul).

1	2	3	4
2			
3			
4			

$\longrightarrow$

1	2	3	4
2	4		
3		4	
4			

ó

1	2	3	4
2		4	
3	4		
4			

En el primer caso, siguiendo las reglas obligadas de los cuadrados latinos vemos que solo hay un cuadrado latino reducido con los cuatros en esa posición:

1	2	3	4
2	4		
3		4	
4			

⟶

1	2	3	4
2	4		3
3		4	
4	3		

⟶

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	
4	3		

⟶

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Por contra, la otra distribución no obliga a ninguna otra casilla. Volvemos a distinguir dos casos, esta vez sobre el valor que puede tomar la casilla a_{22}, y, de nuevo, una de las opciones nos obliga a rellenar toda la cuadrícula.

1	2	3	4
2		4	
3	4		
4			

⟶

1	2	3	4
2	3	4	
3	4		
4			

ó

1	2	3	4
2	1	4	
3	4		
4			

1	2	3	4
2	3	4	
3	4		
4			

⟶

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4		
4	1		

⟶

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	
4	1		3

⟶

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

La otra opción, utilizando el 1, fuerza algunas casillas y deja libre un cuadrado de 2×2 en la esquina inferior derecha. En este hueco sabemos que tiene que haber dos unos y dos doses, por lo que las únicas dos opciones para rellenarlo coinciden con los dos posibles cuadrados de orden 2.

1	2	3	4
2	1	4	
3	4		
4			

⟶

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4		
4	3		

⟶

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

ó

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Con este proceso, distinguiendo casos y examinando cada opción, hemos encontrado 4 cuadrados reducidos y sabemos que son los únicos (de haber habido más, habrían aparecido como posibilidades durante el proceso), es decir, hay 4 clases de equivalencia entre los cuadrados latinos de orden 4. Como en cada clase de equivalencia hay $4! \cdot 3! = 144$ elementos distintos, concluimos que existen 576 cuadrados latinos diferentes de orden 4.

Cabe destacar que estas clases de equivalencia no son la única forma de clasificar los cuadrados latinos. Si a las permutaciones de filas y columnas añadimos la permutación de los símbolos, obtenemos una nueva relación de equivalencia a la que denominamos *relación de isotopía*. Esta relación distingue los cuadrados latinos *esencialmente distintos*, ya que como los números son meros símbolos, no importa qué símbolo concreto aparezca en cada casilla, por lo que dos cuadrados que solo difieran en el nombre de los símbolos se pueden considerar el mismo. Sin embargo, estas clases de isotopía no son tan útiles a la hora de contar el total de cuadrados latinos, ya que no todas esas clases tienen el mismo número de elementos. Cada clase de isotopía puede contener una o varias clases de equivalencia. Sin embargo, aunque aquí no nos sea de gran utilidad, la permutación de los símbolos sí la utilizaremos en el estudio de los cuadrados de sudoku.

Se puede comprobar que, como muestra el cuadro 2.5, hay únicamente dos clases de isotopía de orden 4. Permutando los símbolos 2 y 3 (y reordenando filas y columnas) se puede alternar entre los cuadrados segundo y tercero. De igual forma, la permutación de 3 y 4 distingue a los dos últimos y cambiando 2 por 4 alternamos entre segundo y cuarto. Ninguna permutación de los símbolos cambia el primer cuadrado reducido de la figura.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

$\sim$

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

$\sim$

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Cuadro 2.5: Todos los cuadrados latinos reducidos de orden 4 y su relación de isotopía.

Número de cuadrados latinos: ordenes superiores

El número de cuadrados latinos crece muy rápidamente conforme aumenta el orden, por lo que es cada vez más complicado contar los de un grado más. Se sabe (véase el artículo de Alter [1]) que el número de cuadrados latinos L_n verifica la siguiente desigualdad:

$$L_n \geq \prod_{i=1}^{n} i! = n! \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \cdots 2! \cdot 1!$$

En la página web de la *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)* se listan los 11 primeros valores para el número de cuadrados latinos totales, reducidos y de sus clases de isotopía (referencias [6], [7] y [8]). Las dos primeras se pueden resumir en las tablas del cuadro 2.6.

Para calcular los valores más grandes de estas tablas, los autores han empezado por contar rectángulos latinos, que son cuadrículas en las que en todas las filas aparecen todos los símbolos y en las columnas no se repite ninguno. A partir de ahí han contado las posibles formas de completar los distintos rectángulos para obtener el número total de cuadrados latinos.

Orden	Número de cuadrados latinos reducidos
1	1
2	1
3	1
4	4
5	56
6	$9408 \simeq 9{,}4 \cdot 10^{3}$
7	$16942080 \simeq 1{,}7 \cdot 10^{7}$
8	$535281401856 \simeq 5{,}4 \cdot 10^{11}$
9	$377597570964258816 \simeq 3{,}8 \cdot 10^{17}$
10	$7580721483160132811489280 \simeq 7{,}6 \cdot 10^{24}$
11	$5363937773277371298119673540771840 \simeq 5{,}4 \cdot 10^{33}$

Orden	Número total de cuadrados latinos
1	1
2	2
3	12
4	$576 \simeq 5{,}8 \cdot 10^{2}$
5	$161280 \simeq 1{,}6 \cdot 10^{5}$
6	$812851200 \simeq 8{,}1 \cdot 10^{8}$
7	$61479419904000 \simeq 6{,}1 \cdot 10^{13}$
8	$108776032459082956800 \simeq 1{,}1 \cdot 10^{20}$
9	$5524751496156892842531225600 \simeq 5{,}5 \cdot 10^{27}$
10	$9982437658213039871725064756920320000 \simeq 10^{37}$
11	$776966836171770144107444346734230682311065600000 \simeq 7{,}8 \cdot 10^{47}$

Cuadro 2.6: Tabla resumen con el número de cuadrados latinos (reducidos y totales) según el orden.

3

Sudoku

El sudoku es uno de los pasatiempos más utilizado en periódicos y revistas, incluso hay libros que solo incluyen distintos sudokus de distintas dificultades. La gran cantidad ya existente podría dar lugar a pensar si ya se han hecho todos (o si se harán en algún momento no muy lejano) y por esto surge la pregunta de cuántos existen en total.

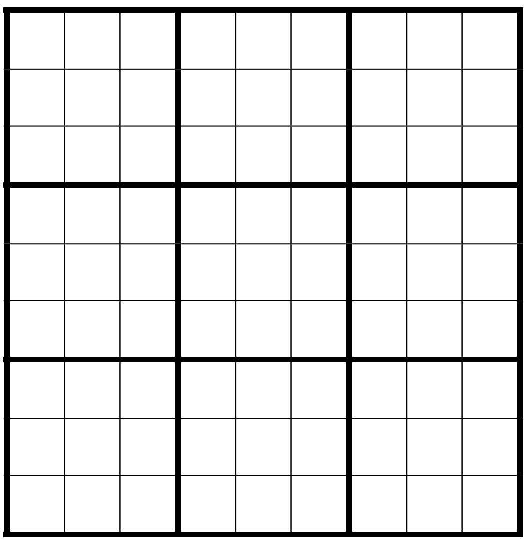
El tema de la dificultad que puede tener un puzle de sudoku se escapa de lo que vamos a estudiar en este trabajo ya que depende de muchos factores, pero cabe mencionar que esta es subjetiva, ya que no a todos los jugadores les parecen difíciles los mismos puzles de sudoku. Uno de los factores más intuitivos es el número de pistas que presente cada puzle: con menos pistas, en general, tiende a haber más dificultad. Por esto surge la pregunta de cuál es número mínimo de pistas que puede tener un sudoku y aún tener solución única. Sin embargo, insisto, la dificultad depende de muchos otros factores por lo que existen puzles muy fáciles con pocas pistas y puzles muy difíciles con muchas pistas.

Estas dos preguntas –el número total de cuadrados de sudoku y el mínimo de pistas posible– son las que estudiaremos en este capítulo.

3.1 El mundo del sudoku

Antes de entrar de lleno, es conveniente una sección introductoria que presenta notación útil que usaremos durante todo el trabajo.

Definición 3.1. *Un* cuadrado de sudoku *es un cuadrado latino de orden 9 en el que, además de las condiciones de fila y columna, los 9 símbolos aparecen exactamente una vez en cada una de las submatrices* 3×3 *señaladas en el cuadro 3.1. A estas submatrices se les denomina* bloques.



Cuadro 3.1: Cuadrícula de sudoku vacía.

Definición 3.2. *Una* región *es un subconjunto de la cuadrícula en el que, por norma, tienen que aparecer todos los números una única vez. A saber: fila, columna o bloque.*

Definición 3.3. *Se conoce como* las reglas de sudoku *al hecho de que en cada región tienen que aparecer todos los símbolos exactamente una vez.*

Definición 3.4. *Se denomina como* banda *al conjunto de tres bloques alineados en horizontal. Análogamente pero en vertical hablamos de un* pilar.

Se puede ver un ejemplo de cuadrado de sudoku en el cuadro 3.3, pero el mayor interés de estos cuadrados no es verlos directamente, sino encontrarlos a partir de los puzles.

Definición 3.5. *Un* puzle de sudoku *es una cuadrícula* 9×9 *parcialmente rellena tal que hay una única forma de completarlo a un cuadrado de sudoku. A cada una de las casillas inicialmente rellenas se les llama* pistas.

Puzles muy diferentes pueden dar lugar al mismo cuadrado de sudoku, por lo que el número de puzles es mucho mayor que el de cuadrados. En el cuadro 3.2 se pueden ver dos puzles distintos cuya solución es el cuadrado del cuadro 3.3.

1			3					7
	7			4		8	1	
		8	1			5	6	
		5	2					6
	2						8	
7					8	2		
	5	1			9	7		
	8	6		3			4	
9					4			2

							2	7
	7		9					3
		8	1			5		
	4	5			1			
				5				
			4			2	9	
		1			9	7		
2					7		4	
9	3							

Cuadro 3.2: Dos puzles de sudoku con el mismo cuadrado como solución.

Todas estas definiciones se pueden extender a cuadrados latinos de otros órdenes. Algunos más conocidos, y que utilizaremos en este trabajo, son el shidoku (4×4) y el rokudoku (6×6).

Definición 3.6. *Un* cuadrado de shidoku *es un cuadrado latino de orden 4 en el que también aparecen los cuatro símbolos en cada bloque* 2×2 *como los que se ven en el cuadro 3.3.*

1	6	4	3	8	5	9	2	7
5	7	2	9	4	6	8	1	3
3	9	8	1	7	2	5	6	4
8	4	5	2	9	1	3	7	6
6	2	9	7	5	3	4	8	1
7	1	3	4	6	8	2	9	5
4	5	1	6	2	9	7	3	8
2	8	6	5	3	7	1	4	9
9	3	7	8	1	4	6	5	2

3	2	1	4
4	1	3	2
1	4	2	3
2	3	4	1

Cuadro 3.3: Ejemplos de un cuadrado de sudoku y de shidoku.

3.2 Contando sudokus

Vamos a empezar por ver cuántos cuadrados distintos de sudoku existen. Como es de imaginar –al ver el número de cuadrados latinos de orden 9– esta cantidad será demasiado grande como para poder listarlos, por lo que hace falta otro método para poder contarlos. Para iniciarnos en este método, vamos a empezar por el caso sencillo de contar los cuadrados de shidoku.

Contando shidokus

De forma similar al caso de los cuadrados latinos, vamos a contar aquellos cuadrados de shidoku que sean esencialmente diferentes, acumulando en cada paso todas las opciones representadas.

Empezamos por rellenar el bloque superior izquierdo. Como todavía no tenemos ninguna restricción, cualquier orden para los cuatro números es válido, es decir, hay $4! = 24$ posibilidades de rellenar este bloque. Cada una de estas opciones da lugar al mismo número de cuadrados de shidoku ya que para cualquiera de ellas, bastaría permutar el nombre de los símbolos y tendríamos otro cuadrado distinto con otra configuración inicial. Por esto, basta con elegir un orden –por ejemplo el que se muestra a continuación–, contar los cuadrados que tienen el primer bloque de esta forma y multiplicar por 24 para obtener el número total.

1	2		
3	4		

A continuación rellenamos el resto de la primera fila y la primera columna. Hay únicamente dos opciones para cada una y todas ellas llevan al mismo número de cuadrados completos puesto que bastaría permutar las dos columnas (o filas) implicadas y tendríamos un nuevo cuadrado para cada opción elegida. Una de estas opciones es la del cuadro 3.4.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Cuadro 3.4: Cuadrícula para shidoku ordenado.

Todo shidoku con esta configuración del primer bloque, primera fila y primera columna se dice que es un shidoku *ordenado*.

Con esto tenemos que el número total de cuadrados de shidoku será el número de todos aquellos que podamos obtener a partir de las pistas del cuadro 3.4 por el número de formas distintas de elegir estas pistas, que hemos visto que son $4! \times 2 \times 2 = 96$.

El argumento utilizado para rellenar la primera fila y la primera columna no lo podemos utilizar para completar la segunda fila, ya que no sabemos si ambas opciones llevan al mismo número de compleciones. No es lo mismo que debajo del 3 haya un 1 que un 2, y esto no lo podemos cambiar permutando las columnas.

En lugar de esto, vamos a buscar el resto de opciones jugando con las reglas de shidoku. En primer lugar, como en la configuración del cuadro 3.4 aparece el número 4 tres veces, el cuarto 4 debe ir en la casilla a_{33}. Pero es la única casilla forzada, así que empezamos a distinguir casos completando la segunda fila, que puede hacerse de dos formas:

1	2	3	4
3	4	1	2
2		4	
4			

ó

1	2	3	4
3	4	2	1
2		4	
4			

Siguiendo las normas de shidoku y completando todas las casillas forzadas en ambos casos vemos que la segunda cuadrícula era un puzle, es decir, solo hay una forma de completarlo. El primer caso, por el contrario, deja libres 4 casillas enfrentadas dos a dos, que rápidamente vemos que dan lugar a dos soluciones distintas. Es decir, a partir del cuadro 3.4 podemos obtener tres soluciones distintas, que se recogen en el cuadro 3.5.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Cuadro 3.5: Cuadros de shidoku ordenados diferentes.

Por último, como hemos visto que hay tres opciones para completar esa cuadrícula inicial, utilizando el argumento anterior vemos que existen $96 \times 3 = 288$ cuadrados de shidoku distintos.

Un paso más

Los cuadrados de shidoku han sido sencillos de contar porque al elegir una cuadrícula semirrellena que representa a todos los cuadrados –la del cuadro 3.4– ya estaba casi todo el trabajo hecho. El problema con el sudoku es doble:

1. No es tan fácil encontrar el representante de cada clase de equivalencia.
2. Ese representante no es tan completo.

Para ilustrar este problema vamos a examinar un caso intermedio buscando cuadrados latinos de orden 6 en los que las regiones que se muestran en el cuadro 3.6 también contengan los números del 1 al 6. Estos cuadrados se denominan rokudoku.

Cuadro 3.6: Cuadrícula de rokudoku vacía.

Para contar el número de cuadrados de rokudoku posibles, empezamos igual que con el shidoku, eligiendo una distribución inicial para el bloque superior izquierdo entre las $6! = 720$ posibles que hay. El modo de completar el cuadrado a partir de cada una de ellas será esencialmente el mismo.

Además, al igual que con el shidoku, podemos completar la primera fila ordenada, ya que permutando estas columnas obtendríamos cuadrados equivalentes. Añadimos así un factor que multiplica de $3! = 6$. Por tanto, el problema se reduce a contar los modos de completar el siguiente cuadro y multiplicar por $6! \cdot 3!$.

1	2	3	4	5	6
4	5	6			

A la hora de completar la primera columna es cuando surge la primera complicación respecto al shidoku: no se puede completar ordenada porque no se pueden permutar las cuatro filas restantes de cualquier manera: cambiando dos filas que estén en bandas distintas, es posible que ya no tengamos un cuadrado válido, pero habrá cuadrados válidos que queremos contar con cualquier orden inicial de la primera columna. Por esto, hay que empezar a distinguir casos.

Sin embargo, aún hay algo que podemos hacer para simplificar el problema un poco más. Sí es válido permutar las dos bandas, así como las filas dentro de una misma banda. Así podemos contar solo aquellos que tengan el 2 en el primer hueco libre de la columna.

1	2	3	4	5	6
4	5	6			
2					

También podemos exigir que los últimos dos números de la columna estén ordenados, solo permutando las últimas dos filas.

Así, con estos dos últimos arreglos, añadimos un factor de $2 \times 2 \times 2 = 8$, dos posibilidades de ordenar las bandas, dos opciones para las filas dentro de la primera banda y otros dos órdenes posibles para las filas de la última banda. En total nos quedan tres posibles cuadrados iniciales, que se muestran en el cuadro 3.7. El número de posibles cuadros de estas tres formas habrá que multiplicarlo por un factor de $6! \times 3! \times 2^3 = 34\,560$ para obtener el total de cuadros rokudoku.

1	2	3	4	5	6
4	5	6			
2					
3					
5					
6					

1	2	3	4	5	6
4	5	6			
2					
5					
3					
6					

1	2	3	4	5	6
4	5	6			
2					
6					
3					
5					

Cuadro 3.7: Cuadros iniciales para contar los rokudokus.

El siguiente paso es hacer un registro minucioso de todos los cuadrados que se pueden obtener a partir de estas tres cuadrículas. Para esto habrá que empezar distinguiendo casos hasta que las reglas del rokudoku permitan rellenar casillas forzadas. En caso de que esto no lleve directamente a una compleción –o varias, pero sabiendo exactamente cuántas–, habría que volver a distinguir casos y seguir jugando con las reglas del rokudoku. Tomamos el segundo cuadrado del cuadro 3.7 como ejemplo para ver este proceso.

Empezamos por ver de cuántas formas podemos completar el bloque central izquierdo. Por las reglas del sudoku se puede ver que 3 y 6 tienen que ir en la columna central del bloque, así como 1 y 4 en los dos casillas restantes. Esto implica 4 casos distintos. Además, sin interferir con estas cuatro casillas, existen 6 posibilidades (3!) de completar la segunda fila de la cuadrícula con los números 1, 2 y 3 en cualquier orden. Estas dos elecciones nos dejan un total de 24 casos que estudiar individualmente.

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	1			
5	6	4			
3					
6					

Cuadro 3.8: Una de las 24 formas de rellenar las casillas coloreadas.

Sirva de ejemplo el cuadrado en el que todas estas elecciones las tomamos de forma que los números estén ordenados (cuadro 3.8).

Ahora distinguimos de cuantas formas se puede completar el bloque central derecho. En su primera fila hay que utilizar 4, 5 y 6, pero cuidando que no coincidan con los del bloque superior vemos que solo quedan dos formas de colocarlos: 5-6-4 y 6-4-5. Con el mismo argumento vemos las dos opciones para la fila inferior, 2-3-1 y 3-1-2.

En general, puede comprobarse que en cada una de los 24 casos el bloque central derecho puede completarse de $2^2 = 4$ formas.

Colocando estas cuatro opciones en cuadrículas distintas y rellenando todas las casillas a las que nos obligan las reglas de rokudoku, tenemos:

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	1	5	6	4
5	6	4	2	3	1
3			6		
6			3		

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	1	5	6	4
5	6	4	3	1	2
3	1	2	6	4	5
6	4	5	2	3	1

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	1	6	4	5
5	6	4	2	3	1
3	1	2	5	6	4
6	4	5	3	1	2

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	1	6	4	5
5	6	4	3	1	2
3				6	
6				3	

Se puede ver que dos de estas opciones nos han llevado a un único cuadrado válido, pero las otras dos siguen teniendo casillas vacías. En estas dos, hay dos formas de rellenar las casillas amarillas (utilizando 1 y 4) y otras dos formas de completar las rojas (con el 2 y el 5). Ambas elecciones son independientes por lo que hay cuatro maneras posibles de rellenar cualquiera de las cuadrículas. En total, tenemos que para la elección hecha en el cuadro 3.8 hay 10 posibles cuadrados de sudoku válidos. Lo dicho en este párrafo no puede generalizarse a los otros 23 casos, cada uno dará lugar a un número de compleciones situado entre 5 y 10, como puede comprobarse pacientemente.

Repitiendo este proceso para las otras 23 cuadrículas se cuentan un total de 168 cuadrados diferentes (estos diez incluidos). Con el mismo proceso pero aplicándolo a las otras dos cuadrículas del cuadro 3.7 surgen en total 816 cuadrados distintos. Multiplicando por el factor que hemos calculado al principio de la sección tenemos un total de $34\,560 \cdot 816 = 28\,200\,960$ cuadrados de rokudoku.

Los problemas del sudoku

Contar el número de cuadrados de shidoku ha sido rápido y sencillo, hemos podido llegar a la solución final sin dificultad. Para contar los cuadrados de rokudoku hemos tenido más dificultades, teniendo que distinguir casos, pero con algo de tiempo es un problema que se puede resolver a mano.

Sin embargo, al dar un paso más e intentar contar los cuadrados de sudoku se vuelve un problema inabarcable para resolver a mano. La estrategia inicial sigue siendo la misma, reducir al máximo el número de cuadrados que tenemos que contar, pero aún así sería demasiado complicado continuar a mano.

Al igual que al intentar completar la primera columna del rokudoku, la primera fila de un cuadrado de sudoku tiene muchas opciones y no todas son equivalentes permutando columnas, por lo que habría que estudiarlas por separado. Con el rokudoku pudimos forzar la posición del 2 en la casilla a_{31} dejando tres casillas libres para los números 3, 5 y 6. Para la primera fila del sudoku podemos forzar a que la casilla a_{14} sea un 4, pero aún así quedan cinco casillas por rellenar con los números del 5 al 9 y no todas son equivalentes.

No es el único problema que cambia de escala ya que de las 36 casillas del rokudoku pasamos a tener que rellenar 81, por lo que harán falta muchas más casillas rellenas (que se traducen en distinciones de casos) antes de poder completar el cuadrado *jugando*.

Para salvar este problema, B. Felgenhauer y F. Jarvis [2] se sirvieron de la ayuda de un ordenador para el trabajo más pesado. Aún así hizo falta un gran esfuerzo previo para hacerlo posible. Su idea fue contar todas las posibles compleciones de la primera banda (los tres bloques superiores), distinguir aquellas que fuesen equivalentes (en el sentido de que diesen lugar al mismo número de cuadrados de sudoku completos) y contar, con la ayuda del ordenador, de cuántas formas se puede completar el cuadrado a partir de una banda de cada clase de equivalencia.

Vamos a empezar por ver de cuántas formas distintas se puede completar la primera banda.

Contando bandas

La primera parte, igual que como hemos hecho hasta ahora, es completar el primer bloque en orden. Ya sabemos que cualquier banda, cambiando el nombre de los símbolos, la podemos expresar con el primer bloque ordenado. Como tenemos 9 símbolos, el número de bandas que obtengamos con esta condición lo multiplicaremos por 9! para obtener el número total de bandas ($9! = 362\,880$).

Para los siguientes pasos utilizaremos {A,B,C} para denotar que los tres números pueden ir en cualquier orden en las casillas especificadas.

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

Vamos a distinguir tres casos entre las formas de rellenar la primera fila según los tres huecos superiores del bloque central:

a) Los tres números en esos huecos son 4, 5 y 6 en algún orden.

b) Los tres números son 7, 8 y 9 en algún orden.

c) Los tres números son una mezcla entre ambos conjuntos.

Es claro que las dos primeras opciones son equivalentes: sin más que permutar los pilares central y derecho obtendríamos una opción a partir de la otra, por lo que solo contaremos los de una opción y añadimos un factor multiplicativo 2. Vamos a evaluar el caso a).

Una vez completadas estas tres casillas ya sabemos qué números ocupan el resto de la primera fila, por lo que tenemos la siguiente estructura:

1	2	3	$\{4, 5, 6\}$			$\{7, 8, 9\}$		
4	5	6						
7	8	9						

En este caso sencillo, solo por las reglas de sudoku, ya sabemos qué números irán en cada grupo de tres casillas. Para tener todas las posibles compleciones de este caso, solo falta elegir un orden dentro de cada grupo de tres casillas.

1	2	3	$\{4, 5, 6\}$	$\{7, 8, 9\}$
4	5	6	$\{7, 8, 9\}$	$\{1, 2, 3\}$
7	8	9	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$

Cada grupo de casillas tiene 3! formas de ordenarse, y cada grupo es independiente de los demás, por lo que hay $(3!)^6$ formas de ordenar toda la cuadrícula para este caso. Como hemos visto que los casos a) y b) son equivalentes, para estos tenemos un total de $2 \cdot (3!)^6 = 93\,312$ posibles compleciones de la banda.

Ahora veamos un ejemplo enmarcado dentro del caso c), supongamos que esos tres primeros números son $\{4, 5, 7\}$. Claramente, el resto de la fila será $\{6, 8, 9\}$, pero no es lo único a lo que obligan las reglas de sudoku. El 6 del bloque central tendrá que ir en

1	2	3	{ 4, 5, 7 }	{ 6, 8, 9 }
4	5	6	{ 8, 9, ¿ }	{ 7, ?, ? }
7	8	9	{ 6, ?, ? }	{ 4, 5, ¿ }

la fila inferior y 8 y 9 en la fila central. Análogamente también tenemos información sobre el bloque derecho.

Los huecos restantes, marcados con signos de interrogación, tendrán que rellenarlos los números 1, 2 y 3 con la condición de que debe coincidir el mismo número en la fila central del bloque del centro y en la fila inferior del bloque derecho (marcados con la interrogación diferente).

Esto nos deja tres opciones para elegir qué número ocupa el lugar de la interrogación diferente, así como 3! posibles ordenes para cada grupo, por lo que hay $3 \cdot (3!)^6 = 139\,968$ posibilidades de rellenar la banda con este ejemplo de configuración.

El resto de las opciones siguen el mismo patrón: dos números de uno de los grupos ({4,5,6} o {7,8,9}) y un número del otro grupo para la primera fila, por lo que habrá que elegir uno de los pequeños ({1,2,3}) para que acompañe a la pareja que se ha quedado del mismo grupo. ¿De cuántas se puede hacer esto? Si se eligen tres números distintos entre los números 4 a 9 sin que importe el orden, tenemos $\mathcal{C}_6^3 = \binom{6}{3} = 20$. De estos 20, dos son los casos {4,5,6} y {7,8,9} antes estudiados, por lo que quedan 18 dentro del caso c).

Por tanto, el número de bandas que tienen el primer bloque ordenado es

$$2 \cdot (3!)^6 + 18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 56 \cdot (3!)^6 = 2\,612\,736$$

Por último, multiplicando por el número de formas de rellenar el primer bloque, tenemos que el número total de bandas posibles es de casi un billón:

$$9! \cdot 2\,612\,736 = 948\,109\,639\,680 \simeq 9{,}5 \cdot 10^{11} \tag{3.1}$$

Una (buena) aproximación

En el apartado anterior hemos visto de cuántas formas posibles se pueden rellenar las 3 primeras filas de forma que verifiquen las condiciones de fila y de bloque. Si no atendiéramos a la condición de las columnas, solo tendríamos que repetir el proceso tres veces, una por cada banda, para completar el cuadrado. Es decir, hay $(948\,109\,639\,680)^3$ formas de rellenar una cuadrícula de sudoku de forma que cumpla las condiciones de fila y bloque a la vez.

Por otro lado, si solo quisiéramos que verificase la condición de los bloques, basta con que aparezcan todos los números en cada bloque, y sabemos que hay 9! formas de que eso ocurra para cada bloque, por lo que hay en total $(9!)^9$ formas de rellenar una cuadrícula que verifique la condición de los bloques.

Uniendo estas dos ideas, tenemos que la probabilidad de que un cuadrado que cumple la condición de los bloques además verifique la condición de las filas es el cociente entre ambos números. Le llamamos k.

$$k = \frac{(948\,109\,639\,680)^3}{(9!)^9}$$

Sin más que girar nuestra cuadrícula 90°, es evidente que es también la probabilidad de que verificando la condición de los bloques, cumpla también la de las columnas.

Supongamos ahora que, para un cuadrado que cumple la propiedad de los bloques, el hecho de que verifique las condiciones de las filas y de las columnas son sucesos independientes. En ese caso, la probabilidad de que verifique ambas a la vez sería de k^2 y, por tanto, sin más que multiplicarlo por el número de cuadrados con la propiedad de los bloques ($(9!)^9$), tendríamos el número total de cuadrados de sudoku válidos:

$$(9!)^9 \cdot k^2 = (9!)^9 \cdot \left(\frac{(948\,109\,639\,680)^3}{(9!)^9} \right)^2 = \frac{(948\,109\,639\,680)^6}{(9!)^9} \simeq 6,6571 \cdot 10^{21}$$

Como veremos más adelante, este número se aproxima mucho al número real de cuadrados de sudoku, pero no podía ser la solución exacta por el simple hecho de que este número no es un entero. De camino hemos demostrado que las condiciones de filas y columnas, condicionado a que se cumple la condición de los bloques, no son independientes.

El camino al número exacto

Como es de imaginar, con una estimación de más de seis mil trillones de cuadrados posibles, es impensable contarlos a mano. Incluso sería demasiado costoso hacer que los contara un ordenador sin ninguna información adicional: tardaría años. Por esto es necesaria una mezcla entre ambos enfoques. Hay que utilizar el ingenio y reducir el problema tanto como sea necesario para que sea un problema asequible para un ordenador.

Una forma de hacer esto es reducir a mano el número de bandas equivalentes y utilizar el ordenador para contar el número de compleciones posibles de cada banda.

Esta idea fue de Bertram Felgenhauer y Frazer Jarvis [2], y consiguieron reducir el número de bandas no equivalentes a solo 44.

La primera reducción que tuvieron en cuenta es el cambio de nombre de los símbolos para tener el primer bloque ordenado. Retrocediendo un poco en esta sección, en la ecuación (3.1) vemos que esto nos deja aún 2 612 736 opciones.

La siguiente técnica, que también la hemos usado en apartados anteriores, consiste en reordenar las columnas de forma que la primera fila quede en orden lexicográfico, así como permutar los bloques central y derecho para que el primer elemento del bloque del centro sea más pequeño que su homólogo en el derecho. Esto reduce el número de bandas según un factor de $3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$, dejando todavía 36 288 bandas que explorar.

Sin embargo, estas dos técnicas no están del todo explotadas todavía ya que no hemos permutado ninguna fila ni columna que involucre al primer bloque, y siguen siendo modificaciones que no varían el número de compleciones que tendrá la banda. Eso sí, después de aplicar estos cambios habrá que volver a renombrar los símbolos y reordenar las columnas para tener una banda cuyo primer bloque aparezca en el orden establecido de nuevo.

Veamos un ejemplo para entender el procedimiento. Partimos de una banda cualquiera en las condiciones establecidas (una de las 36 288), que será como la de la siguiente figura.

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

En esta banda aplicamos algún cambio al primer bloque, que puede ser una reordenación de sus columnas, el cambio entre filas, una permutación con otro bloque o cualquier combinación de varias de estas opciones. Por ejemplo, vamos a permutar las dos primeras columnas, obteniendo la siguiente cuadrícula.

2	1	3	4	5	8	6	7	9
5	4	6	1	7	9	2	3	8
8	7	9	2	3	6	1	4	5

Evidentemente, el primer bloque de esta banda ya no está en forma estándar, por lo que renombramos los símbolos para tener el bloque ordenado.

1	2	3	5	4	7	6	8	9
4	5	6	2	8	9	1	3	7
7	8	9	1	3	6	2	5	4

Por último, reordenamos las columnas para tener la primera fila también ordenada.

1	2	3	4	5	7	6	8	9
4	5	6	8	2	9	1	3	7
7	8	9	3	1	6	2	5	4

Así, hemos visto que dos bandas diferentes son equivalentes, y que por tanto basta con estudiar una de ellas para conocer el número de compleciones de ambas. Con estas reducciones Felgenhauer y Jarvis llegaron, con ayuda de software informático –lo que es largo de contar aquí–, a que solo habría que estudiar 416 bandas distintas.

Por último, es fácil ver que esta última banda es equivalente a otra banda en la que permutásemos la posición de los números 7 y 9 de las columnas 6 y 9 –como se puede ver en la siguiente figura con las casillas coloreadas–, ya que cualquier cuadrado válido con la primera banda, también será válido cambiando de posición estos símbolos.

Para este tipo de reducciones, basta con encontrar un subrectángulo 2×2 con las mismas entradas en las filas inferior y superior. De hecho, cualquier rectágulo $2 \times k$

1	2	3	4	5	9	6	8	7
4	5	6	8	2	7	1	3	9
7	8	9	3	1	6	2	5	4

con las mismas entradas en ambas filas es válido (así como un rectángulo 3×2 con las mismas entradas en ambas columnas)[1]. Estos son algunos ejemplos sencillos:

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	2	3	8
7	8	9	2	3	6	1	4	5

1	2	3	4	5	8	6	7	9
4	5	6	1	7	9	3	2	8
7	8	9	3	2	6	1	5	4

Esta equivalencia se puede generalizar un poco más, ya que no hace falta que estas columnas estén organizadas como un rectángulo, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

1	2	3	4	6	7	5	8	9
4	5	6	8	1	9	3	2	7
7	8	9	2	5	3	1	4	6

Permutando las casillas sombreadas dentro de cada columna se obtiene una nueva banda equivalente (que habría que volver a transformar a forma estándar).

Con todas estas equivalencias, se pueden reducir las más de dos millones de configuraciones de bandas (con el primer bloque en forma estándar) a tan solo 44 bien escogidas.

Durante todo el proceso Felgenhauer y Jarvis llevaron un registro exhaustivo de forma que al terminar sabían exactamente a cuantas configuraciones era equivalente cada una de esas 44 bandas.

[1] Después de cada transformación, si fuera necesario, habría que volver a renombrar y reordenar para tener otra banda ordenada equivalente a la primera.

Una vez terminado este proceso, solo falta ver de cuántas formas se puede extender cada una de estas 44 bandas para obtener cuadrados de sudoku completos. Con la reducción de casos hecha hasta ahora, ya es un problema asequible para un ordenador, pero aún se puede simplificar sustancialmente de forma sencilla. Para buscar el número de compleciones de cada banda, se buscaron solo aquellas que tenían la primera columna ordenada (igual que la fila), como se hizo con el rokudoku, de forma que el resultado hay que multiplicarlo por el conocido factor de 72.

Mediante un *algoritmo de vuelta atrás*[2], el ordenador resuelve que hay aproximadamente tres billones y medio (3 546 146 300 288) de cuadrados de sudoku ordenados, que hay que multiplicar por los factores que tenemos reservados: 72^2, uno por la fila y otro por la columna, y el 9! que corresponde al orden del primer bloque. Con todo esto, el número total de cuadrados de sudoku válidos es de:

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \simeq 6{,}6709 \times 10^{21},$$

bastante similar a la aproximación que obtuvimos en la sección anterior suponiendo la independencia de dos sucesos.

3.3 El mínimo de pistas

Uno de los problemas relacionados con el sudoku que más ha interesado a los matemáticos, por haber estado mucho tiempo sin respuesta, es el del número mínimo de pistas que puede tener un sudoku y tener solución única, es decir, ser un puzle de sudoku.

Gracias a la experimentación se han conseguido encontrar multitud de puzles de 17 pistas con solución única (como el del cuadro 3.9) pero ninguno con solo 16, por lo que se conjeturaba que este sería el límite. Por otro lado, demostraciones teóricas han conseguido acotar por debajo este resultado aunque sin acercarse tanto como para cerrar el problema. Por ejemplo, es evidente que para tener solución única un puzle debe tener al menos 8 pistas, ya que con solo 7 habría dos símbolos sin representación y en cualquier solución se podrían permutar las nueve posiciones de estos símbolos obteniendo una nueva solución a dicho puzle.

Una complicación añadida a este problema es que, a pesar de conocer puzles con 17 pistas, no todos los cuadrados de sudoku admiten el mismo mínimo. Existen cuadrados válidos de sudoku en los que ningún subconjunto de 17 casillas constituye un puzle con solución única. Si todos los cuadrados pudieran tener puzles asociados con el mismo número de pistas, habría bastado con explorar un cuadrado minuciosamente para llegar a la conclusión de que no existe ningún puzle de 16 pistas, pero esto no es cierto y lo ilustraremos con un ejemplo más adelante. Antes es necesario introducir un nuevo concepto muy recurrente cuando se habla de las pistas de un sudoku.

[2]Este algoritmo de *vuelta atrás* rellena la primera casilla vacía con un número y comprueba si este viola alguna de las reglas del sudoku. Si es válido, pasa a la casilla siguiente y repite el proceso; si no lo es, prueba con otro número. Cuando en una casilla comprueba que ninguno de los nueve números es válido, *vuelve* a la casilla anterior y prueba con el siguiente número que no ha probado de esa casilla.

Cuando el algoritmo completa un cuadrado válido, lo apunta y *vuelve atrás* para seguir buscando otros cuadrados completos. El algoritmo finaliza cuando ha barrido todas las posibilidades.

			8		1			
							4	3
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

Cuadro 3.9: Ejemplo de puzle de sudoku con 17 pistas.

Para esto veamos otro extremo completamente opuesto al que estamos estudiando: *¿Cuál es el número máximo de pistas que puede haber en una cuadrícula y aún no tener solución única?*

7	3	5	6	1	2			4
6	4	9	3	8	5	1	2	7
1	2	8	4	7	9	3	5	6
2	5	1	9	6	3	7	4	8
4	9	6	8	2	7	5	3	1
8	7	3	1	5	4	2	6	9
9	8	4	2	3	1	6	7	5
5	1	2	7	4	6			3
3	6	7	5	9	8	4	1	2

Cuadro 3.10: Pseudo-puzle de sudoku con 77 pistas y sin solución única.

En esta cuadrícula solo faltan dos 8 y dos 9, pero hay dos formas distintas de colocarlos sin romper las restricciones del sudoku por lo que no es un puzle.

Dentro de un cuadrado de sudoku, a los conjuntos de celdas como este se les denomina *conjuntos inevitables*.

Definición 3.7. *Un* conjunto inevitable *de un cuadrado de sudoku es un subconjunto de celdas en el que, para cualquier puzle asociado a ese cuadrado, es necesario que haya una o varias pistas. Al número de pistas necesario le denominaremos* orden *del conjunto inevitable.*

Ahora, sirviéndonos de este concepto, vamos a ver un cuadrado de sudoku en el que no puede existir un puzle de 17 pistas.

Dentro cada banda del cuadro 3.11 se pueden ver tres conjuntos inevitables en distinto color. Para poder completar cada uno de ellos son necesarias al menos dos pistas, esto es, son de orden 2. Por esto son necesarias, al menos, seis pistas en cada banda, así que no puede existir ningún puzle de 17 pistas con este cuadrado como solución.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Cuadro 3.11: Cuadro de sudoku con 9 conjuntos inevitables de orden 2.

Sirva de ejemplo el conjunto azul de la primera banda. Supongamos que a partir de un puzle hemos conseguido completar toda la cuadrícula salvo estas nueve casillas.

Teniendo como pista únicamente el primer 2 sería inútil, no serviría para poder completar el cuadrado. Pero es más, conocer la posición de los tres 2 tampoco sirve, a pesar de ser tres pistas. De la misma manera, conocer el valor de todas las casillas de la primera fila (o bloque) tampoco es suficiente.

1	2	3	4		6	7		9
4		6	7		9	1	2	3
7		9	1	2	3	4		6

Como podemos ver, son necesarias dos pistas, pero no dos cualesquiera sino que tienen que estar bien elegidas. Con el siguiente cuadro sí se puede terminar de completar la banda.

1	2	3	4		6	7		9
4		6	7	8	9	1		3
7		9	1		3	4		6

Este ejemplo ratifica lo que ya habíamos comentado, no todos los cuadrados de sudoku admiten puzles con el mismo número de pistas, lo que complica aún más la tarea de encontrar el número mínimo de pistas con las que un sudoku puede tener solución única.

Sin embargo, en el año 2014 Gary McGuire, Bastian Tugemann y Guilles Civario publicaron un artículo [4] habiendo demostrado que 17 es el número mínimo de pistas posible. Dicha demostración se hizo, con ayuda de un ordenador, evaluando "todos"[3] los cuadrados de sudoku en busca de algún puzle de 16 pistas. Como la búsqueda evalúa todas las posibilidades y no se encuentra ningún puzle, concluyeron que no existen y por tanto el mínimo es 17. Es una auténtica demostración de "fuerza bruta".

En esta sección vamos a ver cómo se puede demostrar de forma teórica el número mínimo de pistas que necesita un shidoku; veremos, ya para el sudoku, un argumento que hacía presagiar que 17 era el número que buscábamos y, por último, veremos cómo lo demostraron estos autores, en dos partes: cómo redujeron el problema y cómo funcionaba el programa que hizo el trabajo más pesado.

Las pistas de un shidoku

Para encontrar el número mínimo de pistas que necesita un sudoku vamos a estudiar únicamente los tres cuadrados ordenados que representan a todos los demás, es decir, los del cuadro 3.5.

Las transformaciones necesarias para "ordenar" un puzle[4] conservan la unicidad (o no) de la solución de un puzle. Es decir, dado un puzle cualquiera, al aplicarle estas transformaciones, el nuevo puzle tendrá el mismo número de soluciones que el puzle original. En particular, al transformar un puzle con solución única, seguirá teniendo solución única.

Si esto no fuese cierto y al solucionar un puzle transformado tuviera dos soluciones, habría dos cuadrados diferentes con las pistas en la misma posición. Al hacer las transformaciones inversas para colocar las pistas en su posición original, tendríamos dos cuadrados diferentes con las pistas en la misma posición original, pero esto no es posible ya que el puzle original tenía solución única.

Por esto, al encontrar el número mínimo de pistas que necesitan los tres cuadrados de shidoku ordenados, habremos encontrado el mínimo de pistas de cualquier puzle de shidoku para que tenga solución única. Para encontrar este mínimo, empezamos por buscar una cota inferior utilizando los conjuntos inevitables.

En el cuadro 3.12 podemos ver que en cada uno de los cuadrados hay 4 conjuntos inevitables (de orden 1) independientes, por lo que harán falta al menos 4 pistas en

[3] Todos salvo equivalencias.

[4] A saber: la permutación de bandas (o pilares), la reordenación de filas dentro de una banda (o columnas en un pilar) y el cambio de nombre de los símbolos.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Cuadro 3.12: Cuadros de shidoku ordenados diferentes con conjuntos inevitables.

cualquier puzle de shidoku. Pero este número ya es la solución, ya que existen puzles de 4 pistas como los que se ven en el cuadro 3.13 (uno por tipo). Hemos demostrado que no pueden existir puzles de 3 pistas y encontrado con 4, por lo que este es el número mínimo de pistas que necesita un shidoku para tener solución única.

1			
			2
	3	4	

1			
			2
		4	
	3		

			4
			1
2			
4			

Cuadro 3.13: Puzles de shidoku de cuatro pistas.

Para los rokudoku, con cuadrículas 6×6, que también hemos tratado en este trabajo, el número mínimo de pistas necesario para que un puzle tenga solución única es de 8, como se menciona en [4].

Para los puzles de sudoku clásicos (9×9) aún no se ha encontrado una demostración teórica como esta y aunque gracias al ordenador ya se conoce este número mínimo, todavía es deseable tal demostración (ya no de fuerza bruta).

Un argumento heurístico

Antes de que los tres autores mencionados consiguieran probar que no existen puzles de sudoku de 16 pistas, ya había fuertes indicios de que esto era así. Durante años, Gordon Royle, profesor de la Universidad de Western Australia, ha recopilado multitud de puzles de sudoku con 17 pistas [10]. Actualmente tiene cerca de 50 000 en su lista, catalogados y ordenados, gracias a software propio y aportaciones de terceros, y se cree que su lista es casi completa. Entre muchos otros puzles ha encontrado 29 que tienen el mismo cuadrado como solución, el cual es conocido como el cuadrado *extrañamente familiar* (cuadro 3.14), ya que muchos otros lo han estudiado en busca de un puzle de 16 pistas sin éxito. Se conocen otros cuatro cuadrados con 20, 14, 12 y 11 puzles de 17 pistas cada uno, mientras que en todos los demás no se llega a 10 puzles de 17 pistas.

6	3	9	2	4	1	7	8	5
2	8	4	7	6	5	1	9	3
5	1	7	9	8	3	6	2	4
1	2	3	8	5	7	9	4	6
7	9	6	4	3	2	8	5	1
4	5	8	6	1	9	2	3	7
3	4	2	1	7	8	5	6	9
8	6	1	5	9	4	3	7	2
9	7	5	3	2	6	4	1	8

Cuadro 3.14: Cuadro *extrañamente familiar*.

Ahora supongamos que existiera un puzle con solo 16 pistas. De ser así, rellenando cualquier otra casilla tendríamos un nuevo puzle de 17 pistas con el mismo cuadrado como solución. Esto se podría hacer de 65 formas diferentes, una por cada casilla vacía de la cuadrícula, y por tanto existirían 65 puzles de 17 pistas con el mismo cuadrado como solución.

Debido a la gran diferencia entre los 29 del cuadrado *extrañamente familiar* y los 65 teóricos y al hecho de que la lista de Royle se cree casi completa, era casi evidente que no existirían los puzles de 16 pistas.

Solo faltaba una demostración que confirmara las sospechas para poder asegurar que el mínimo de pistas para que un sudoku tenga solución única es 17.

El camino para la demostración

Con el objetivo de demostrarlo de forma rigurosa, McGuire, Tugemann y Civario decidieron estudiar todos los cuadrados de sudoku y buscar de forma exhaustiva un puzle de 16 pistas. Evidentemente, estudiar todos los cuadrados no es factible, pero estudiado uno, el resultado es el mismo en todos aquellos que sean equivalentes. Así solo es necesario estudiar uno de cada clase de equivalencia, pero primero hay que conseguir un listado con todos estos.

Para facilitar la búsqueda de dicha lista (y para saber cuando la lista está completa), el primer paso es calcular cuantas clases de equivalencia existen y para esto hay que estudiar bien las transformaciones de equivalencia de los cuadrados de sudoku. Algunas de estas transformaciones ya las hemos utilizado en este trabajo, y otras transformaciones se pueden obtener a partir de estas. Las transformaciones tenidas en cuenta son:

- Renombrar los símbolos.
- Permutar columnas (filas).
    - Permutar los pilares (bandas) entre sí.
    - Permutar columnas (filas) dentro de un pilar (banda).
- Transponer el cuadrado.

Con respecto a esta última, es fácil de ver que los siguientes cuadrados de shidoku son equivalentes sin más que sustituir las filas por las columnas.

1	3	2	4
2	4	1	3
3	2	4	1
4	1	3	2

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Cuadro 3.15: Cuadros de shidoku equivalentes por transposición.

Además, girar 90° un cuadrado de sudoku, que también lleva a un cuadrado equivalente, se puede conseguir combinando las operaciones de transposición y permutación de filas o columnas, por lo que no hace falta considerar la operación giro.

El conjunto de todas estas transformaciones tiene estructura de grupo con la conjugación (realizar dos o más transformaciones de forma consecutiva) como operación y se le conoce como el *grupo del sudoku*. Cada elemento de este grupo es una transformación genérica, aplicable a cualquier cuadrado (por ejemplo, permutar las filas 4 y 5, cambiar el nombre de los símbolos 2 y 9 o girar el cuadrado 180° son tres elementos del grupo). Conjugar dos transformaciones produce una nueva transformación, consistente en realizar las dos transformaciones anteriores de forma consecutiva.

Así, se puede considerar la acción de este grupo sobre el conjunto de todos los cuadrados de sudoku (las transformaciones de las que se compone el grupo actúan de forma natural sobre los cuadrados), de forma que las clases de equivalencia se pueden ver como las órbitas de la acción.

Desde este punto de vista se puede calcular el número de órbitas gracias al **Lema de Burnside**, que lo calcula como la media del número de cuadrados que fija cada transformación. Esto lo calcularon Ed Russell y Frazer Jarvis con ayuda de un ordenador en 2007 [3] y concluyeron que existen $5\,472\,730\,538 \simeq 5,5 \times 10^9$ clases de equivalencia de cuadrados de sudoku.

Una vez conocida la cantidad es necesario un listado de todos estos representantes. Para esto utilizaron un programa diseñado por Glenn Fowler que, entre otras cosas, es capaz de enumerar todos los cuadrados de sudoku no equivalentes en su forma *minlex*.

Definición 3.8. *La forma* minlex *de un cuadrado de sudoku es el miembro de su clase de equivalencia más pequeño cuando se utiliza el orden lexicográfico.*

El listado proporcionado por el programa de Fowler fue revisado de la siguiente forma:

1. Con una pequeña herramienta informática calcularon la forma minlex de cada elemento del listado para comprobar que todos estaban en dicha forma.

2. Revisaron que todo el listado estaba ordenado lexicográficamente.

3. Comprobaron que no había repeticiones.

De esta forma se aseguraron de que no había dos cuadrados en todo el listado que pertenecieran a la misma clase de equivalencia y como el número de elementos de la lista coincidía con el calculado anteriormente, concluyeron que la lista era completa. Dicha lista ocupa, sin comprimir, 418 GB de memoria.

El cálculo computacional

Una vez contrastada una lista con todos los representantes necesarios solo falta comprobar cuadrado por cuadrado si existe algún puzle de 16 pistas con únicamente esa solución. Como en apartados anteriores, esto sería inabarcable a mano por lo que vuelve a ser necesaria la ayuda de un ordenador para el cálculo más pesado.

En este caso la idea principal es evaluar todos los posibles conjuntos de 16 casillas de cada cuadrado y comprobar si alguno de ellos constituye algún puzle por sí solo. Sin embargo esto es demasiado costoso para la potencia computacional existente hoy en día. Habría que comprobar $\binom{81}{16} \simeq 3,36 \times 10^{16}$ puzles para cada cuadrado.

Para salvar este problema, McGuire, Tugemann y Civario diseñaron un algoritmo que busca los posibles puzles de una forma mucho más rápida e igualmente fiable. La idea de este algoritmo se basa en los conjuntos inevitables: solo hay que buscar subconjuntos de 16 casillas que intersequen a todos los conjuntos inevitables del cuadrado. Si dejase alguno sin representación entre las 16 pistas, no tendría solución única.

Hay que aclarar que no es necesario encontrar todos los conjuntos inevitables de un cuadrado. Basta con decidir una familia de dichos conjuntos y buscar pistas que intersequen a todos ellos (a los conjuntos inevitables de orden 2 y superior habría que cortarlos tantas veces como indique su orden). Aunque dejásemos conjuntos inevitables sin añadir a nuestra colección, y por tanto sin representación en los posibles puzles, al evaluar estos se les encontrarían varias soluciones y se descartarían. El objetivo de utilizar los conjuntos inevitables es reducir el número de posibles puzles que hay que evaluar, pero encontrar todos los conjuntos inevitables conllevaría demasiado trabajo y también sería contraproducente. Los autores de esta demostración decidieron utilizar todos los conjuntos inevitables que involucraran 12 casillas o menos y buscar entre ellos los posibles puzles.

A la hora de buscar todos estos conjuntos inevitables, el programa tiene implementado un algoritmo de reconocimiento de patrones y una relación de máscaras con los distintos conjuntos inevitables que debe buscar. Estas máscaras son las formas genéricas con las que se pueden presentar los distintos conjuntos inevitables. El cuadro

3.16 presenta algunos ejemplos de máscaras para conjuntos inevitables de distintos tamaños.[5]

1		2	3	4				
4		3	1	5				
		5		2				

1		2				3	4	
4		3	1	2				
			3	4		2	1	

1			2					
2			1					

		2		1		3		
		1		3		2		
		3		2		1		

Cuadro 3.16: Algunas máscaras de conjuntos inevitables de tamaño 10, 12, 4 y 9.

Un cuadrado medio puede tener alrededor de 360 conjuntos inevitables de tamaño 12 o menor pero hay bastante variedad, algunos tienen hasta 500 mientras que otros no llegan a 200. El programa original tardaba alrededor de 30 segundos en encontrarlos todos para un cuadrado dado, pero en las últimas versiones del programa se consiguió reducir hasta una vigésima parte de un segundo.

Una vez que el programa ha encontrado y listado todos los conjuntos inevitables de un cuadrado, pasa a buscar todos los subconjuntos de 16 casillas que intersecan a todos los conjuntos inevitables encontrados, reduciendo mucho el número de posibles puzles con respecto a la idea original. Aún así, este el paso que más recursos consume del programa, utilizando un 95 % del tiempo total de ejecución.

Cuando todos los posibles puzles de un cuadrado están archivados, se utiliza un algoritmo solucionador de sudoku en cada uno de ellos para ver si tiene solución única o no.

A pesar de todos los trucos utilizados para reducir el problema lo máximo posible, computar este proceso para los 5 500 millones de cuadrados de sudoku diferentes, los

[5] El programa también busca conjuntos inevitables con máscaras equivalentes a las implementadas, con las mismas relaciones de equivalencia vistas anteriormente.

representantes, fue un proceso muy largo (más de 7 millones de horas de computación) durante el cual se actualizó el programa varias veces para mejorar su velocidad. Con la última versión del programa (con fecha de finales de 2011), cada cuadrado tardó en computarse, de media, $3,6$ segundos. Se utilizó el superordenador *Stokes* del ICHEC[6], equivalente a 320 ordenadores de seis núcleos cada uno.

Se estuvo buscando de forma exhaustiva un puzle de 16 pistas durante todo el año 2011 para poder demostrar que no existe. Por tanto, el número mínimo de pistas necesarias para que un puzle tenga solución única es 17.

[6]Irish Centre for High-End Computing.

4

Duidoku

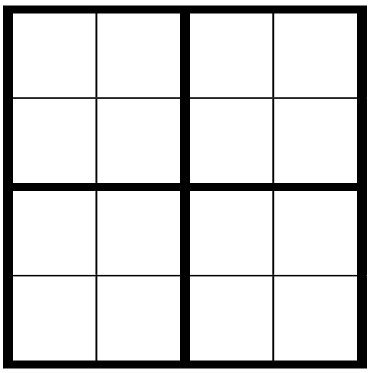
La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada que estudia el comportamiento humano en la toma de decisiones dentro de un contexto estratégico. Tiene muchas aplicaciones, desde la estrategia militar o política hasta el estudio evolutivo en biología, pero es especialmente conocida por su relación con la economía[1].

Multitud de escenarios económicos se pueden representar como *juegos*, en los que las distintas empresas, países o inversores son los *jugadores*, que tienen que tomar decisiones basándose en cómo creen que se comportarán los demás. La teoría de juegos no solo estudia cómo se comportarán los jugadores, sino cómo deberían comportarse para un beneficio máximo, que no siempre coinciden.

En un primer acercamiento a esta teoría se estudian juegos sencillos, de dos jugadores, en los que uno gana y otro pierde. En particular tienen interés los conocidos como *juegos resueltos*, que son aquellos para los que se conoce una *estrategia* con la que alguno de los jugadores podría ganar todas las partidas que jugasen. En este capítulo presentamos un juego sencillo, relacionado con los sudokus, y lo resolvemos encontrando una estrategia.

El duidoku

El duidoku es un juego para dos personas basado en las reglas del shidoku. El juego parte de una cuadrícula vacía, como la del cuadro 4.1, que los jugadores deben ir rellenando respetando las restricciones de un shidoku.



Cuadro 4.1: Inicio de una partida de duidoku.

En cada turno, el jugador deberá colocar un número del 1 al 4 en cualquiera de las casillas que queden vacías, siempre y cuando ese número no esté ya en la misma fila, columna o bloque que la casilla que pretende ocupar. Gana el último jugador en hacer un movimiento válido. Se puede practicar contra un ordenador en la web `http://duidoku.com/#` [9], y se le puede ganar (el ordenador juega en segundo lugar pero no utiliza ninguna estrategia ganadora).

Cabe aclarar que aunque es un juego basado en las reglas del shidoku, no todas las partidas acaban con un cuadrado de shidoku válido, ya que a veces quedarán casillas

[1] El pilar fundamental sobre el que gira esta teoría, el *Equilibrio de Nash*, le valió a John Nash para conseguir el Nobel de Economía en 1994.

vacías. Por ejemplo, supongamos que la cuadrícula del cuadro 4.2 es una partida de duidoku a medias. El jugador que tenga el turno podría colocar un 3 en la casilla marcada con una A ya que no hay ningún otro 3 en la fila, columna o bloque. Esto implicaría que la casilla restante de ese bloque no se podrá utilizar en toda la partida (está en la misma fila que un 2 y en el mismo bloque que los restantes números, por lo que no existe ningún movimiento válido que involucre esta casilla).

2			4
		1	A
	3		

Cuadro 4.2: Partida de duidoku en curso.

Otra variante del juego considera que la partida ha acabado en empate cuando se rellenan todas las casillas, resultando un cuadrado de shidoku válido.

Estrategia

En este juego hay ventaja para el jugador que no empieza la partida, es decir, sabiendo jugar, el segundo jugador ganará siempre. En el caso de la segunda variante del juego, sabiendo jugar, se garantiza al menos un empate para el segundo jugador.

Para llevar a cabo la estrategia, el segundo jugador tiene que establecer dos parejas entre los cuatro números (por ejemplo, 1-2 y 3-4) y decidir un eje de simetría (vertical u horizontal). Una vez decidido, todo lo que tiene que hacer para ganar es ocupar la casilla simétrica a la que haya ocupado el primer jugador en su turno con el número asociado al que haya utilizado.

Habiendo elegido las parejas 1-2 y 3-4 y el eje vertical, si el primer jugador comienza ocupando la primera casilla con un 1, el segundo deberá ocupar la casilla de la primera fila, cuarta columna con un 2. Si después pone un 3 en la intersección entre la tercera fila y la tercera columna, el segundo jugador deberá colocar un 4 en esa misma fila, pero en la segunda columna.

Teorema 4.1. *La estrategia que se acaba de describir garantiza que el segundo jugador siempre hará el último movimiento válido, lo que significa que ganará la partida o, al menos, empatará (solo con la segunda variante del juego).*

Demostración:

Buscamos demostrar que dado cualquier movimiento válido del primer jugador, la estrategia nos proporciona otro movimiento igual de válido para el segundo. Para demostrar que un movimiento es válido hay que probar varias cosas:

1. La casilla que se pretende ocupar está libre.

1			2
	4	3	

Cuadro 4.3: Ejemplo de uso de la estrategia.

2. El número que hay que utilizar no viola las normas de shidoku:
   - No está ya en la fila.
   - No está ya en la columna.
   - No está ya en el bloque.

En una primera ronda, independientemente del movimiento que haga el primer jugador, la casilla simétrica estará vacía ya que ninguna casilla es su propia simétrica y no habrá restricciones para el número que hay que utilizar, ya que el único número en el tablero es la pareja (y por tanto distinto).

A partir de ahí, si se sigue utilizando esta mecánica, siempre que sea el turno del primer jugador tendremos un tablero con un dibujo simétrico con las parejas enfrentadas. Esto implica que si una fila, columna o bloque tiene a un número, el simétrico con respecto al eje establecido tiene a la pareja de este número. De esta forma, cuando en una casilla solo hay una opción válida, en la casilla opuesta solo será válida la pareja.

Así, en cualquier momento de la partida, si el primer jugador no tiene ningún movimiento válido posible, la partida ha terminado y el segundo jugador ha realizado el último movimiento válido. Si por el contrario encuentra un movimiento válido, tenemos:

1. Como la casilla utilizada por el primer jugador estaba libre y el tablero tenía un diseño simétrico, también está libre la casilla al otro lado del eje de simetría.

2. Como el movimiento ha sido válido, significa que el número que ha puesto no estaba ya colocado en la misma fila. Por la simetría del tablero esto implica que la pareja no está colocada en la fila simétrica y por tanto la restricción de fila no impide que pueda colocar la pareja en la casilla a utilizar.
   Un argumento análogo demuestra que tampoco se violan las restricciones de columna o bloque y por tanto el movimiento es válido.

Vuelve a ser el turno del primer jugador y repetimos el proceso.

Como el número de casillas es finito, en algún momento se acabarán los movimientos válidos y hemos visto que en este caso, será el primer jugador quien no pueda jugar.

■

Duidoku 9×9

Una extensión natural de este juego nos llevaría a jugar en un tablero de sudoku con la misma mecánica. Dos jugadores que se turnan en rellenar una casilla cada vez, respetando que no se repitan números ni en las filas ni en las columnas ni en los bloques, pero con los números del 1 al 9.

Incluso podríamos pensar que la misma estrategia también serviría para que el segundo jugador gane siempre, aunque rápidamente veríamos que esto no es posible ya que no existe un eje de simetría en el que apoyarse. El eje de simetría teórico sería la columna (o fila) central, pero si el jugador contrario juega en dicha columna no hay una casilla libre simétrica que rellenar, sería su propia simétrica.

Sin embargo, a pesar de que la misma estrategia no sirve, existe otra estrategia basada en la idea de la simetría, pero esta vez tendrá ventaja el jugador que empiece la partida.

Al igual que con una cuadrícula 4×4, para llevar a cabo esta estrategia hay que decidir unas parejas entre los números del 1 al 9, pero al haber un número impar de símbolos, habrá uno que quede desparejado (Por ejemplo: 1-9, 2-8, 3-7, 4-6 y 5). En este caso no hay que decidir un eje de simetría, ya que hay que utilizar la simetría central.

En un primer turno, el primer jugador tendrá que colocar el número desparejado en la casilla central del tablero. A partir de ahí, para cada movimiento del jugador contrario, le responderá utilizando la casilla simétrica (respecto del centro) con la pareja del número que haya utilizado. Si utiliza el número desparejado, el primer jugador deberá usar el mismo número. En el siguiente cuadro vemos un ejemplo en el que el primer jugador utiliza el color rojo. Es el turno del segundo jugador.

1			2					
	5							
							6	
		3						
				5				
						7		
	4							
							5	
					8			9

Cuadro 4.4: Ejemplo de uso de la estrategia.

Teorema 4.2. *Para todo movimiento válido del segundo jugador, esta estrategia proporciona otro movimiento válido al primer jugador.*

Demostración:

Al igual que con el caso anterior, utilizar esta estrategia desde el principio implica que cada vez que sea el turno del segundo jugador, el tablero tendrá un dibujo simétrico respecto de la casilla central, con las parejas enfrentadas (y el número desparejado enfrentado consigo mismo).

Un movimiento válido del segundo jugador implica que había una casilla libre y que no violaba ninguna norma de sudoku. Por tanto:

1. Como la casilla utilizada estaba libre, la casilla simétrica también lo está. La única casilla que es su propia simétrica es la casilla central, que está ocupada desde el primer turno de la partida.

2. Para ver que no se viola ninguna regla de sudoku, distinguimos dos casos según si la casilla utilizada está en la misma región que su simétrica o no.

   a) **No coincide:** Si el segundo jugador ha utilizado alguno de los números con pareja, es porque ese número no está en ninguna de las regiones que afectan a esa casilla, y por el diseño simétrico, la pareja tampoco estará en ninguna de las regiones simétricas. Si ha utilizado el número desparejado, hay que añadir que ambas casillas no están en la misma región, por lo que haber utilizado esa casilla no impide colocar el mismo número en la casilla simétrica.

   b) **Sí coincide:** Si la casilla utilizada está en la misma región que su simétrica es porque está en la columna, fila o bloque central, lo que significa que no ha podido utilizar el número desparejado, ya que este está en la casilla central, que está en todas estas regiones. En estas regiones están todos los números con su pareja, por lo que si ha podido utilizar uno de ellos, su pareja tampoco está presente en la región, por lo que se puede utilizar.

■

Como el número de casillas es finito, en algún momento se acabarán los movimientos válidos; y hemos visto que en este caso será el segundo jugador quien no pueda jugar. Así, salvo un posible empate, siempre ganará el primer jugador.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado algunas cuestiones relacionadas con el famoso pasatiempo del sudoku. En un principio hemos visto algunas técnicas de conteo, para ver el número de cuadrados latinos que existen para cada orden. Los resultados, tomados de [6], se pueden ver en la tabla 2.6. En particular hemos visto que existen algo más de $5{,}5 \cdot 10^{27}$ cuadrados latinos de orden 9.

Después pasamos a contar los cuadrados de sudoku. A mano se puede calcular (contar) que existen 288 cuadrados de shidoku (4×4) y 28 200 960 rokudoku (6×6). Para el número total de cuadrados de sudoku (9×9) hemos visto un argumento heurístico bastante preciso (menos de un 1 % de error) y hemos seguido el trabajo de Felgenhauer y Jarvis [2] para, con ayuda de un ordenador, ver que existen $6{,}67 \cdot 10^{21}$ cuadrados de sudoku diferentes (uno por cada millón de cuadrados latinos del mismo tamaño).

La siguiente cuestión que hemos estudiado ha sido la del número mínimo de pistas necesario. Un argumento sencillo nos demuestra que ese número es de 4 para los cuadrados de shidoku (4×4) y, siguiendo el trabajo de McGuire, Tugemann y Civario [4], hemos visto cómo un ordenador comprobó que el número mínimo para un sudoku es de 17.

Sin embargo, a pesar de tener una solución, estos problemas no están ni mucho menos cerrados, sino que dan lugar a más preguntas. En el caso de los cuadrados latinos, ¿Cuántos pueden existir de orden 12 o 13? Más aún, ¿existe alguna fórmula con la que no sea necesario contar explícitamente para cada orden? Ídem para el número de sudokus generalizados de 12×12, 16×16, etc.

Además, para cualquiera de los resultados estudiados sería deseable encontrar argumentos con los que no sea necesaria la intervención de un ordenador que barra todos los casos posibles. La máquina *verifica*, pero no *clarifica*. El objetivo de una demostración no computacional no es únicamente conocer la respuesta sino que ayuda a entender el por qué del resultado e incluso puede arrojar luz a otros problemas similares.

Por último, se ha hecho una breve aproximación a la teoría de juegos con un pequeño juego para dos personas relacionado con el sudoku, el duidoku, y su estrategia ganadora. Se podría estudiar si existen otros juegos para los que existan estrategias similares a la presentada o incluso si los propios puzles de sudoku pueden tener su aplicación dentro de la teoría de juegos. ¡O al revés! Quizás esta rama de las matemáticas sea la que encuentre las demostraciones no computacionales que faltan. Por lo pronto, los sudokus sí que se están empleando en criptografía, aunque esto supera el ámbito de este trabajo.

Bibliografía

[1] R. Alter, *Research Problems: How Many Latin Squares are There?*, American Mathematical Monthly, **82** (1975), no. 6, 632–634.

[2] B. Felgenhauer, F. Jarvis, *Mathematics of Sudoku, I*, Mathematical Spectrum, **39** (2007), no. 1, 15–22

[3] F. Jarvis, E. Russel, *Mathematics of Sudoku II*, Mathematical Spectrum, **39** (2007), no. 2, 54–58

[4] G. McGuire, B. Tugemann, G. Civario, *There Is No 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem via Hitting Set Enumeration*, Experimental Mathematics, **23** (2014), no. 2, 190–217.

[5] J. Rosenhouse, L. Taalman, *Taking Sudoku Seriously*, Oxford University Press, 2012.

[6] Número de cuadrados latinos: https://oeis.org/A002860.

[7] Número de cuadrados latinos reducidos: https://oeis.org/A000315.

[8] Número de clases de isotopía de cuadrados latinos: https://oeis.org/A040082.

[9] Duidoku 4×4 on-line contra la máquina: http://duidoku.com/#

[10] Recopilación de puzles de Sudoku de 17 pistas de Gordon Royle: http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/sudokumin.php